

**Universidad del Bío-Bío
Facultad de Ingeniería Industrial
Departamento de Ingeniería Industrial**

**Profesor Guía:
Dr. Carlos Obreque Niñez**

**“Un Modelo de Programación Lineal Entera para Resolver
el Problema de Recolección de Residuos Domiciliarios”**

**“Tesis de Grado presentado en conformidad a los requisitos para obtener el
Grado de Magíster en Ingeniería Industrial”**

Autor: Mauricio Alberto Mohr Lagos

Concepción, Abril de 2013

DEDICATORIA

Esta tesis está dirigida principalmente a mi madre, Marcia Lagos C., quien me dio la vida y todo de sí para lograr sacarnos adelante a mí y a mis hermanos ante la adversidad. También está dedicada a mi abuela, Eliana Cifuentes S. (Q.E.P.D), quien fue una de las personas más importantes en mi vida y una de las responsables que siga, hoy en día, una vía profesional. A ellas dos les debo todo lo que soy, y todo lo que espero ser y conseguir. Gracias.

AGRADECIMIENTOS

Quiero darle las gracias principalmente a Dios, quien me ha guiado y protegido desde el momento que nací, en todos los aconteceres de mi vida. También a mis padres, Marcia y Jaime; y a mis hermanos, Rodrigo y Francisco, quienes con su amor y apoyo incondicional en todo momento, han permitido que llegue al final de este largo camino. Ellos han sido pilares fundamentales para sostenerme en los momentos más difíciles, de guiarme por el buen camino y los responsables directos de que haya logrado sobreponerme satisfactoriamente ante todo.

A mi profesor guía, don Carlos Obreque N., quien me brindó su apoyo, su confianza y su paciencia desde el primer momento, orientándome y enseñándome de la mejor manera en cada una de sus palabras. También por enseñarme todo lo necesario para llevar a cabo esta Tesis y, además, por los conocimientos y sabios concejos que me brindó, tanto en lo académico como en lo personal.

También deseo darle las gracias a mis amigos de toda la vida y a mis amigos de la universidad, los cuales me aconsejaron, ayudaron y tendieron una mano en aquellos momentos que más lo necesité, siendo sin duda, parte fundamental para alcanzar mis objetivos en esta etapa.

A todos ellos, muchas gracias.

RESUMEN

En esta tesis se resuelve el Problema de la Localización de Contenedores y Ruteo de Vehículos (PLCRV) para la Recolección de Residuos Domiciliarios. Se considera la siguiente modalidad para la recolección de la basura: cada usuario debe dirigirse a su contenedor asignado y depositar su basura en él. Luego, camiones especializados recorren y recogen la basura de cada uno de estos contenedores para así transportarla al sitio de disposición final. Se considera que los contenedores y los camiones recolectores tienen una capacidad predeterminada de basura que pueden almacenar y transportar, respectivamente.

El PLCRV consiste en determinar la localización de los contenedores, la asignación de los usuarios a los contenedores y la ruta que los vehículos deben seguir para recoger la basura de cada uno de estos contenedores. Minimizando tanto el costo total de transporte, como la distancia total recorrida por los usuarios a sus contenedores asignados.

Para resolver el PLCRV, con dos objetivos contrapuestos, se propone un modelo de programación lineal entera para determinar soluciones no inferiores en forma óptima que describen la frontera eficiente. Se consideran restricciones de capacidad tanto para los contenedores, como para los camiones.

Para su resolución, se utiliza un procedimiento basado en planos cortantes para obtener una buena cota inferior y luego se aplica el algoritmo Branch and Bound para obtener la solución óptima.

ABSTRACT

This thesis addresses the Container Location and Vehicle Routing Problem (PLCRV from the spanish "Problema de la Localización de Contenedores y Ruteo de Vehículos") for the urban waste collection. We consider the following system for waste collection: each user should go to their assigned container and place their trash in it. Afterward, specialized trucks roam and collect the waste from each of these containers and transport the garbage to the final disposal site. It is considered that the containers and collection trucks have a default capacity for garbage and transport storage respectively.

PLCRV involves the determination of containers location, the assignment of users to containers and the route that the vehicles must keep to collect the waste from each one of these containers. Minimizing both the total cost of transport, as the total distance traveled by users to their assigned containers.

To solve the PLCRV is proposed a programming integer linear model to determine the optimal not inferior solution. Capacity constraints are considered both for containers, as for trucks. For its resolution, we use a procedure based on cutting planes to obtain a good lower bound and then the Branch and Bound algorithm is applied to obtain the optimal solution

ÍNDICE

Índice de contenidos

Capítulo 1: INTRODUCCION	1
Capítulo 2: EL PROBLEMA DE LA RECOLECCIÓN DE BASURA	3
2.1 La Basura	3
2.1.1 Tipos de Basura	4
2.1.2 Las estaciones de transferencia	7
2.2 Su recolección	8
2.2.1: Tipos de generación, almacenamiento y recolección de residuos	9
2.2.2: Métodos de Recolección de Basura Residencial	10
2.2.3 Sistema de contenedores	12
2.3 Los vertederos como método de evacuación de residuos sólidos.....	15
Capítulo 3: ESTADO DEL ARTE	17
Capítulo 4: Modelo de Programación Lineal Entera para el PLCRV	24
4.1 Introducción.....	25
4.2 Descripción del Problema	25
4.3 Formulación del Modelo Matemático	26
4.3.1 Parámetros.....	27
4.3.2 Variables de decisión	28
4.3.3 El Modelo Matemático.....	28
4.4 Desigualdades válidas.....	30
Capítulo 5: Resolución del PLCRV para la recolección de residuos domiciliarios..	34
5.1 Ejemplo de aplicación del modelo para resolver el PLCRV	34
5.1.1 Datos del modelo	34
5.2 Algoritmo de Planos Cortantes para el PLCRV	37
5.3 Aparición y eliminación de subtours.....	39
5.4 Búsqueda de las soluciones no inferiores (SNI)	42
5.4.1 Obtención de la solución no inferior extrema N ^o 1	42
5.4.2 Obtención de la solución no inferior extrema N ^o 2	44
5.4.3 Método alternativo para la obtención de SNI extremas.....	46

5.4.4 Aplicación del método NISE para la obtención de las soluciones no inferiores y la Curva de <i>Trade-Off</i>	48
5.5 Soluciones no inferiores para la red de 50 nodos	52
5.5.1 Solución no inferior N°3	53
5.5.2 Solución no inferior N°6	54
5.5.3 Selección de soluciones no inferiores	55
5.6 Procedimiento propuesto para resolver el PLCRV para la recolección de residuos domiciliarios	58
Capítulo 6: RESULTADOS COMPUTACIONALES PARA INSTANCIAS TEST	62
6.1 Análisis de resultados.....	65
Capítulo 7: COMENTARIOS Y CONCLUSIONES	67
Bibliografía	70

Índice de figuras

Figura 2.1: Estación de transferencia de carga directa de baja capacidad equipada con compactadora estacionaria.....	8
Figura 2.2: Esquema de secuencia operacional para sistema de contenedor grande. (a) forma convencional y (b) forma de intercambio de contenedor.	13
Figura 2. 4: Vertedero sanitario controlado del pasado	15
Figura 2.5: Ejemplos de vertederos sanitarios controlados en la actualidad.	16
Figura 4.1: Una solución típica al problema con un sólo camión (sin capacidad). .	27
Figura 5.1: Red de 50 nodos y 86 arcos.	36
Figura 5.2: Formación de subtours en la obtención de una Solución No Inferior. ..	40
Figura 5.3: Efecto de la aplicación del método de los planos cortantes.	41
Figura 5.4: Solución no inferior extrema N°1.	43
Figura 5.5: Solución no inferior extrema N°2	45
Figura 5.6: Gráfico de las soluciones no inferiores extremas.	48
Figura 5.7: Pendiente de la recta obtenida con la solución de la SNIE1 y SNIE2. .	49
.....	¡Error! Marcador no definido.

Figura 5.8: Obtención de una solución no inferior a partir de la SNIE1 y la SNIE2.	50
Figura 5.9: Obtención de nuevas soluciones no inferiores.	51
Figura 5.10: Conjunto de soluciones no inferiores.	52
Figura 5.11: Solución no inferior N°3 para la red de 50 nodos.	53
Figura 5.12: Solución no inferior N°6 para la red de 50 nodos.	54
Figura 5.13: Búsqueda de SNI en un intervalo, mediante el método de las restricciones.	57
Figura 5.14: Conjunto de SNI obtenidas usando el método NISE y el método de las restricciones.	58

Índice de tablas

Tabla 2.1: Fuente de generación y tipos de residuos sólidos urbanos.	6
Tabla 2.2: Datos representativos sobre las capacidades de los contenedores disponibles para ser usados con diversos sistemas de recolección	14
Tabla 5.2: Comparación entre SNIE versus SNIES	47
Tabla 5.3: Soluciones no inferiores para la red de 50 nodos	52
Tabla 5.4: Búsqueda de SNI en un intervalo, mediante el método de las restricciones.	56
Tabla 6.1: Resultados Conjunto de SNI, Red 50 nodos.	63
Tabla 6.2: Resultados Conjunto de SNI, Red 81 nodos.	63
Tabla 6.3: Resultados Conjunto de SNI, Red 100 nodos pmed01, Beasley.	64
Tabla 6.4: Resultados Conjunto de SNI, Red 100 nodos pmed05, Beasley (2013).	64
Tabla 6.5: Resultados Conjunto de SNI, Red 200 nodos pmed07, Beasley.	65
Tabla 5.1: Arcos y costos dij de la red de 50 nodos.	35

Índice de Anexos

Anexo. Resultados computacionales del PLCRV para diferentes instancias.	78
--	----

Capítulo 1: INTRODUCCION

Hoy en día, la mayoría de las empresas de servicios que se dedican a la recolección de residuos domiciliarios tienen un sistema de rutas que se lleva a cabo en forma “natural” y basada exclusivamente en la experiencia de los conductores. Es decir, no cuentan con un estudio técnico, cuyos resultados permitan planificar las rutas que los camiones deben seguir, de ahí que los tiempos y los gastos en combustible se vean incrementados. Además, las personas también contribuyen con este problema, al depositar en cualquier lugar sus residuos complicando los procesos de recolección y obligando a los camiones a detenerse por más tiempo en un lugar o recorrer distancias más extensas, fuera de las programadas en la ruta original de recolección, Racero & Pérez (2006).

Teniendo en cuenta que los costos incurridos en la gestión de basura constituyen un 75-80% del presupuesto total de una ciudad, es necesario contar con un sistema apropiado que permita hacer frente a esta problemática y así maximizar el uso de los recursos, Bhat (1996).

En la actualidad, hallar solución a los altos costos de transporte, son uno de los problemas más frecuente dentro de las organizaciones. Según Tchobanoglous desde un 30 hasta un 70 por ciento del costo logístico total corresponde a los costos de transporte, Tchobanoglous (1993). Junto a los altos precios de los combustibles y los diversos costos de peajes, se le suman a éstos los problemas asociados a: tipo de ruta; topología del terreno; condiciones de circulación y las múltiples dificultades de acceso a los diferentes lugares que deben sortear los conductores. Estos problemas hacen que los costos se eleven considerablemente, lo cual provoca un impacto negativo importante en las utilidades de cada empresa, pérdidas y hasta quiebras.

Este problema ha sido objeto de estudio en innumerables ocasiones a través del tiempo, ya sea por investigadores académicos, municipios o del sector privado.

Tales estudios han tratado de encontrar alguna solución que satisfaga las necesidades económicas, de tiempo o de otra índole, que aquejan a cada institución por sí misma. En Cordeau et al. (2007) y en Ayala & Gonzales (2001) se pueden observar ejemplos claro de estos estudios.

En este estudio se considera un sistema de recolección de basura que consiste en localizar basureros, denominados contenedores, en diferentes lugares estratégicos de la ciudad. Luego, los vecinos deben acercarse a ellos para depositar sus desechos y, finalmente, mediante camiones especializados, trasladar dichos desechos a un vertedero o un relleno sanitario.

El objetivo de esta tesis es proponer y formular un Modelo de Programación Lineal Entera para resolver el problema de recolección de residuos a través de contenedores. En tal caso, es necesario localizar éstos eficientemente y determinar las rutas que los vehículos deben seguir para recoger la basura desde estos contenedores, en lugar de recogerla directamente desde la puerta de los hogares, como se hace tradicionalmente.

El PLCRV es un problema bi-objetivo, por un lado se quiere minimizar el costo total de transporte de los camiones recolectores y por otro lado se desea minimizar la distancia total que caminan los usuarios al contenedor asignado. Si el costo de transporte es menor significa que las rutas pasan por pocos contenedores y los usuarios deben caminar distancias más grandes. En otro caso, si la distancia que recorren los usuarios es pequeña entonces más contenedores deben ser localizados y por tanto mayor es el costo de transporte. Se utiliza el método NISE para determinar soluciones no inferiores en forma óptima que describen la frontera eficiente. Para obtener cada solución no inferior se usa un procedimiento basado en planos cortantes para obtener una buena cota inferior y luego se aplica branch and bound para obtener la solución óptima.

Capítulo 2: EL PROBLEMA DE LA RECOLECCIÓN DE BASURA

En este capítulo se busca introducir al lector en el área de la gestión de residuos, para ello se utilizan algunos extractos del libro “Integrated Solid Waste Management” del autor Geroge Tschobanoglous (1993), entre otros.

2.1 La Basura

La basura, proviene del latín, *versūra*, derivado de *verrere*, que significa "barrer". Existen variadas formas de definir este concepto:

La Organización de Cooperación y Desarrollos Económico (OCDE), la define como aquellas materias generadas en las actividades de producción y consumo que no han alcanzado un valor económico en el contexto que han sido producidos, Racero & Pérez (2006).

La Ley General de Equilibrio Ecológico y Protección al Ambiente (1993), lo hace como, cualquier material generado en los procesos de extracción, beneficio, transformación, producción, consumo, utilización, control o tratamiento, cuya calidad no permita usarlo nuevamente en el proceso que lo generó, Racero & Pérez (2006).

En Tchobanoglous (1993), por su parte, el autor se refiere a ella como todos aquellos materiales sólidos o semisólidos que el poseedor ya no considera de suficiente valor como para ser retenidos.

Para evitar problemas sanitarios o ambientales, la basura se deposita normalmente en lugares previstos para su almacenamiento y luego es recolectada y transportada a algún sitio de disposición final pertinente, vale decir, tiraderos,

vertederos, rellenos sanitarios, incineradores, plantas de reciclajes u otro lugar. La gestión de estos materiales residuales es una preocupación fundamental de todas las actividades englobadas en la gestión de residuos sólidos, bien sea a nivel de planificación local, regional o subregional, o estatal y federal.

Según el Sistema de Información Ambiental (SINIA), en el año 2004 cada chileno y chilena producía 1000 gramos de basura promedio al día, lo que significa la generación de 16 mil toneladas aproximadas de basura diaria en todo el país. En contraste al año 1976 donde la producción de basura promedio por persona era de 700 gramos. Estos datos son enfocados a los habitantes de zonas urbanas, puesto que en zonas rurales la producción varía entre 300 y 600 gramos por persona al día, debido a las diferencias de consumo, así como de la reutilización y reciclaje de residuos orgánicos, como alimentos para animales o la producción de composta (SINIA, 2011).

2.1.1 Tipos de Basura

En general, debido a su composición, la basura se puede dividir en tres grandes grupos, Manjarrez (2011):

Basura orgánica: Es todo desecho de origen biológico, alguna vez estuvo vivo o fue parte de un ser vivo, por ejemplo: hojas, ramas, cáscaras y semillas de frutas, huesos y sobras de animales, etc.

Basura inorgánica: Es todo desecho de origen no biológico, es decir, de origen industrial o algún otro proceso no natural, por ejemplo: plástico, telas sintéticas, etc.

Desechos peligrosos: Es todo desecho, ya sea de origen biológico o no, que constituye un peligro potencial y por lo cual debe ser tratado como tal, por ejemplo:

material médico infeccioso, material radiactivo, ácidos y sustancias químicas corrosivas, etc.

Por otro lado, en Tchobanoglous (1993), la clasifican también según su fuente generadora en:

Residuos Sólidos Urbanos: Estos tipos de residuos se dividen, a su vez, en 6 subgrupos, también según su origen. La tabla 2.1 detalla en resumen la fuente, donde se generan y los tipos de residuos.

Residuos Industriales: Son aquellos residuos cuya fuente de generación proviene de construcciones, fabricación ligera y pesada, refinerías, plantas químicas, centrales térmicas, demolición, etc.

Residuos Agrícolas: Son aquellos que provienen directamente de las diversas tareas relacionadas con la actividad agricultura, tales como: cosechas de campo, árboles frutales, viñedos, ganadería intensiva, granjas, etc.

Tabla 2.1: Fuente de generación y tipos de residuos sólidos urbanos.

Fuente	Instalaciones, actividades o localizaciones donde se generan	Tipos de residuos sólidos
Doméstica	Viviendas aisladas y edificios de baja, mediana y elevada altura, unifamiliares y multifamiliares	Residuos de comida, papel, cartón, plásticos, textiles, cuero, residuos de jardín, madera, vidrio, latas de hojalata, aluminio, otros metales, cenizas, hojas de la calle, residuos especiales (artículos voluminosos, electrodomésticos, bienes de línea blanca, baterías, pilas, aceite, neumáticos), residuos domésticos peligrosos.
Comercial	Tiendas, restaurantes, mercados, edificios de oficinas, hoteles, moteles, imprentas, gasolineras, talleres mecánicos, etc.	Papel, cartón, plásticos, madera, residuos de comida, vidrio, metales, residuos especiales (ver párrafo superior), residuos peligrosos, etc.
Institucional	Escuelas, hospitales, cárceles, centros gubernamentales.	(Como en comercial)
Construcción y demolición	Lugares nuevos de construcción, lugares de reparación/renovación de carreteras, derribos de edificios, pavimentos rotos.	Madera, acero, hormigón, suciedad, etc.
Servicios municipales (excluyendo plantas de tratamiento)	Limpieza de calles, paisajismo, limpieza de cuencas, parques y playas, otras zonas de recreo.	Residuos especiales, barredura de calles, recortes de árboles y plantas, residuos de cuencas, residuos generales de parques, playas y zonas de recreo.
Plantas de tratamiento; incineradoras municipales	Agua, aguas residuales y procesos de tratamiento industrial, etc.	Residuos de plantas de tratamiento, compuestos principales de fangos.

2.1.2 Las estaciones de transferencia

En años recientes las regulaciones medioambientales, la falta de espacio en las ciudades y la oposición pública han crecido fuertemente, forzando que la localización de los sitios de disposición final (rellenos sanitarios, plantas de reciclaje, incineradores) sean ubicados cada vez más lejos de las áreas urbanas. La distancia extra que deben recorrer los camiones recolectores ha desencadenado en altos costos de transporte. Para hacer frente a esto, se han desarrollado e instalado las denominadas Estaciones de Transferencia de Residuos Sólidos (ETRS). Así, la basura es llevada desde la ciudad a los ETRS a través de vehículos especializados y luego es transportada a los sitios de disposición final por grandes camiones, trenes o barcazas. Rahman & Kuby (1995).

De este modo, el uso de los recursos usados en la recolección y transporte de basura como camiones y mano de obra, pueden ser utilizados más eficientemente si la basura es transportada al sitio de disposición final vía estaciones de transferencia. Kirca & Erkip (1988).

Según el método utilizado para cargar los vehículos de transporte, se pueden clasificar las ETRS en tres tipos generales: 1) carga directa, 2) almacenamiento y carga, 3) combinadas carga directa y descarga-carga. También pueden clasificarse según su capacidad de rendimiento (cantidad de material que se puede transferir y transportar) de la forma siguiente: bajo, menos de 100t/d; medio, entre 100 y 500 t/d, y alto, más de 500t/d. La figura 2.1 muestra un ejemplo de estación de transferencia de carga directa y de baja capacidad de rendimiento.

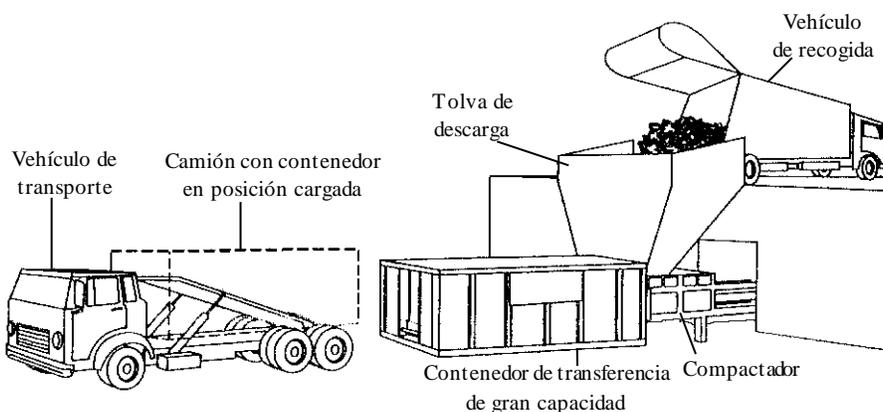


Figura 2.1: Estación de transferencia de carga directa de baja capacidad equipada con compactadora estacionaria.

Una revisión en detalle, acerca de las ETRS, se puede encontrar en Tschobanoglous (1993).

2.2 Su recolección

En términos generales, la recolección consiste en transportar los residuos sólidos desde su almacenamiento, en la fuente generadora, hasta el vehículo recolector y luego trasladarlos hasta el sitio de disposición final o la estación de transferencia Racero y Perez (2006).

Según el Ministerio de planificación y cooperación (1999), actualmente en Chile, cada municipio debe manejar el tema de Residuos Sólidos Domiciliarios (RSD) en forma “privativa” de acuerdo a la ley Orgánica de municipalidades. Es decir, el sistema de recolección-transporte-disposición de RSD opera a través de municipios, los que, en su uso de facultades privativas sobre la materia, pueden optar por mantener un servicio propio o entregarlo, parcial o integralmente, en “concesión” a empresas privadas mediante un proceso de licitación. Debido a factores tanto ambientales como de higiene, es importante llevar a cabo este proceso periódicamente. Ministerio de planificación y cooperación (1999)

Sin embargo, el término *recolección* incluye no solamente la recolección o toma de los residuos sólidos de diversos orígenes, sino también el transporte de estos residuos hasta el lugar donde los vehículos de recolección se vacían. Además, la descarga del vehículo de recolección también se considera como parte de la operación de recolección. Mientras las actividades asociadas al transporte y la descarga son similares para la mayoría de los sistemas de recolección, la recolección o toma de residuos sólidos variará según las características de las instalaciones, actividades o localizaciones donde se generan los residuos, y los métodos utilizados para el almacenamiento *in situ* de los residuos acumulados entre recolecciones.

En la literatura se pueden encontrar numerosos estudios con respecto a la recolección de basura. Como es el caso de Tchobanoglous (1993) y Golden et al. (2002), excelentes libros que estudian a fondo tanto la basura, como su recolección.

A continuación, se presentan algunos de los principales tipos de servicios de recolección utilizados actualmente.

2.2.1: Tipos de generación, almacenamiento y recolección de residuos

Hoy en día el problema de la recolección de basura puede ser dividido en tres grandes grupos, Industrial, Comercial y Residencial, Wy et al. (2010):

En la recolección de basura Industrial se tienen clientes que requieren grandes contenedores para la eliminación de sus residuos, tales como: construcciones, industrias, grandes malls o centros de grandes ciudades, quienes producen enormes cantidades de basura. Estos contenedores son de gran tamaño, por lo que para llevar a cabo su recolección se utilizan tractores que transportan un

contenedor a la vez. Para más detalles de los distintos métodos para llevar a cabo este tipo de recolección ver Baldacci, Bodin & Mingozi (2006).

En la recolección de basura Comercial, los vehículos recorren diferentes sitios comerciales tales como: restaurantes, pequeños centros comerciales y ciertas áreas comerciales. Los vehículos recolectan, en general, contenedores llenos y transportan la basura a los lugares correspondientes de eliminación.

La recolección de basura Residencial consiste en que los camiones recorren las calles de las ciudades para recoger y eliminar la basura desde la acera. En este caso, son los propietarios de las casas los responsables de sacar periódicamente sus desperdicios, ya sea en bolsas o basurero, y depositarlos en la puerta de la casa e en los lugares predestinados, según el método de recolección vigente en su sector.

2.2.2: Métodos de Recolección de Basura Residencial

Si bien es cierto los métodos de recolección se pueden clasificar según diversos criterios, tales como: su origen generador (casa, edificios, industrias, etc), el vehículo o método de transporte (barcazas, camiones, trenes, vehículos satélites, etc), el tipo de almacenamiento (bolsa, contenedores, basureros, patios, etc), la forma de sacar la basura (por los clientes o por los operarios), o simplemente por la forma de levantar o verter la basura dentro del vehículo recolector (manualmente, automáticamente o semiautomáticamente). En Angelelli & Speranza (2002) se detallan tres sistemas para la recolección de basura residencial, los cuales incluyen en general, a la mayoría de los métodos de recolección existentes.

El primero de ellos, conocido como el **sistema tradicional o puerta a puerta**, consiste en que un camión dotado de un equipo de aproximadamente 3 hombres recorren las calles de los hogares, recogiendo casa a casa la basura que la

población deja en bolsas para luego depositarlas en el camión. La desventaja de este método es que las personas se ven obligadas a sacar la basura sólo en días y horas determinadas, este proceso de recolección es lento y se requiere de una gran cantidad de mano de obra.

El segundo sistema, conocido como **sistema de carga lateral**, las personas deben depositar su basura en contenedores (denominados “estándar”) localizados en la cercanía de su hogar, para que luego grandes camiones se detengan a un costado de éstos y a través de un sistema semiautomático, operado por el conductor desde la cabina, levante estos contenedores y vierta su contenido dentro del camión. Posteriormente, en algunos casos, pasa otro camión que de un modo similar, limpia y desinfecta estos contenedores. En contraste con el sistema anterior, aquí se reduce el tamaño de la mano de obra y los ciudadanos son libres de deshacerse de su basura cuando estimen conveniente.

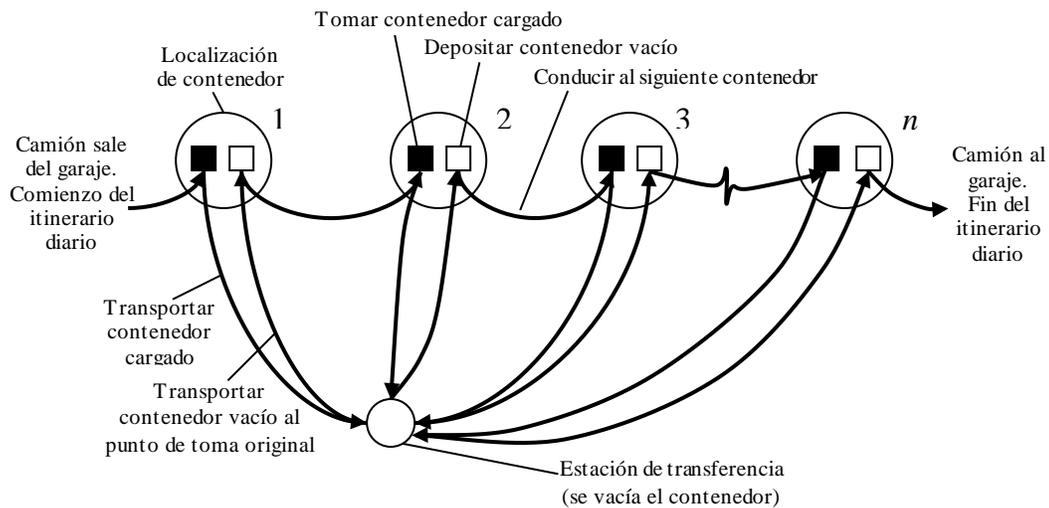
El tercer sistema de recolección, que en Angelelli & Speranza (2002) llaman **sistema de carga lateral y carrocería desmontable**, consiste en un método similar al anterior, con la diferencia que los camiones llegan con contenedores muy grandes vacíos y se llevan los llenos. La ventaja es que la fase de recolección se puede separar de la de transporte, ya que especializados (y costosos) camiones se dedican sólo a la recolección de basura, mientras que camiones comunes se dedican al transporte de la basura.

En Racero & Pérez (2006) se incluye otro método, aunque menos convencional, denominado el **método de esquina o de parada fija**. El cual consiste en trasladar el vehículo recolector a ciertos puntos predeterminados y esperar que los usuarios lleven sus residuos en los horarios convenidos, de modo tal, que son los mismos usuarios quienes llenan el vehículo recolector.

En Teerioja (2012) se puede encontrar al detalle las ventajas y desventajas entre el sistema de recolección puerta a puerta, versus la recolección neumática (contenedores).

2.2.3 Sistema de contenedores

El sistema de recolección vía contenedor depende directamente del tipo de contenedor, de su capacidad y de la capacidad del camión recolector. En las figuras 2.2 y 2.3, se muestran de una forma esquemática las tareas operacionales de los sistemas con contenedor grande y estándar (o de caja fija) respectivamente.



(a)

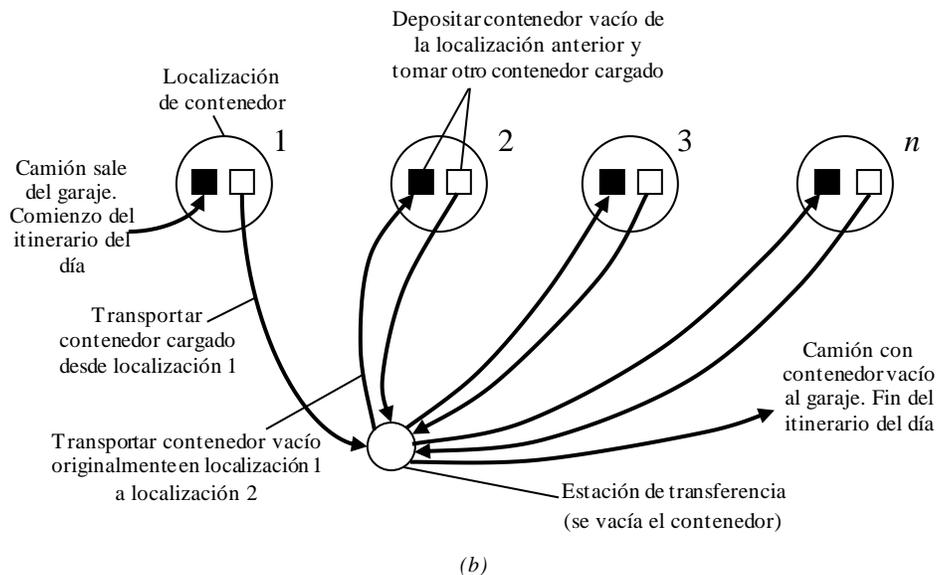


Figura 2.2: Esquema de secuencia operacional para sistema de contenedor grande. (a) forma convencional y (b) forma de intercambio de contenedor.

En esta tesis se aborda el problema de la recolección de residuos domiciliarios bajo la perspectiva del uso de contenedores estándar (figura 2.3).

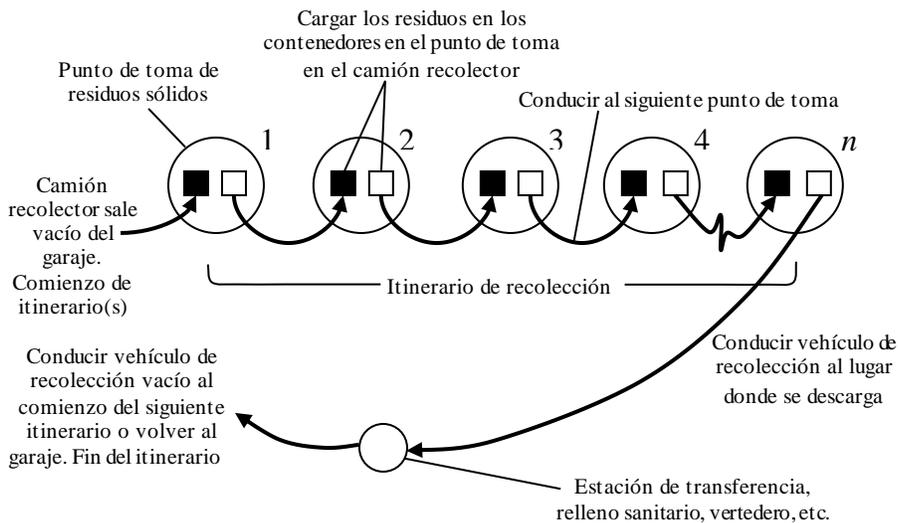


Figura 2.3: Esquema de la secuencia operacional para un sistema de contenedor estándar

Los sistemas de contenedores son idóneos para la recolección de residuos procedentes de centros con una alta generación, porque se utilizan contenedores relativamente grandes (ver tabla 2.2). El uso de contenedores reduce el tiempo de manipulación, así como las desagradables acumulaciones u condiciones poco sanitarias asociadas al no uso de ellos. Otra ventaja de los sistemas de contenedores es su flexibilidad: hay contenedores disponibles en muchos tamaños y formas diferentes para la recolección de todo tipo de residuos.

Tabla 2.2: Datos representativos sobre las capacidades de los contenedores disponibles para ser usados con diversos sistemas de recolección

Vehículo	Tipo de contenedor	Capacidades de contenedores, m ³
Sistema de contenedor grande (i) Camión montacargas. (ii) Camión basculante. (iii) Camión tractor remolque.	(i) Utilizado con compactador estacionario. (ii) De caja abierta. Utilizado con compactador estacionario. Equipado con mecanismo de compactación propio. (iii) Remolque de basuras abierto. Contenedores cerrados montados sobre remolques equipados con mecanismos de compactación propios.	(i) 4,5-9 (ii) 9-38 11-30 15-30 (iii) 11-30 15-30
Sistema de caja fija o estándar (i) Compactador mecánicamente cargado. (ii) Compactador mecánicamente cargado. (iii) Compactador manualmente cargado.	(i) Cerrado y de carga lateral. (ii) Contenedores especiales utilizados para la recolección de residuos domésticos de viviendas individuales. (iii) Contenedores pequeños de plástico o metal galvanizado, bolsas desechables de papel y plástico.	(i) 1-6 (ii) 0,17-0,34 (iii) 0,06-0,16

Mientras los sistemas de contenedor tienen la ventaja de necesitar menos mano de obra para cumplir con el ciclo de recolección, en general solamente un conductor. Para el caso de contenedores muy grandes (*sistema de carga lateral y carrocería desmontable*) se tiene que cada contenedor tomado requiere un viaje

de ida y vuelta al lugar de evacuación (u otro punto de transferencia). Por lo tanto, el tamaño y la utilización del contenedor son de gran importancia económica.

2.3 Los vertederos como método de evacuación de residuos sólidos

Históricamente, los vertederos han sido el método más económico y ambientalmente más aceptable para la evacuación de residuos sólidos en la mayoría de las ciudades del mundo. Incluso con la implantación de la reducción de residuos, del reciclaje y de las tecnologías de transformación, la evacuación en vertederos de los rechazos procedentes de los residuos sólidos sigue siendo un componente importante dentro de una estrategia para la gestión integral de residuos sólidos.

El termino *vertedero* se utiliza para todas aquellas instalaciones físicas utilizadas para la evacuación, en los suelos de la superficie de la tierra, de los rechazos procedentes de los residuos sólidos. En el pasado, el término “vertedero sanitario controlado” se utilizaba para denominar un vertedero en el que se cubrían los residuos puestos en el vertedero al finalizar cada día operacional, la figura 2.4 señala un vertedero de este tipo.



Figura 2. 4: Vertedero sanitario controlado del pasado

Actualmente, *vertedero sanitario controlado* se refiere a una instalación ingenieril para la evacuación de residuos sólidos urbanos, diseñada y explotada para minimizar los impactos ambientales y sobre la salud pública (ver figura 2.5).



Figura 2.5: Ejemplos de vertederos sanitarios controlados en la actualidad.

El estudio de los vertederos, en general, es mucho más amplio de lo que se ha abordado hasta el momento. Implica situaciones tales como planificación, diseño, explotación, clausura y control post clausura. Además, el uso de vertederos conlleva problemas difíciles de abordar, los cuales deben ser estudiados y tratados minuciosamente. Dentro de esos problemas se tienen: 1) el escape incontrolado de los gases del vertedero, que pueden migrar fuera del lugar y causar olores y otras condiciones potencialmente peligrosas; 2) el impacto de la descarga de los gases del vertedero sobre el efecto invernadero en la atmósfera; 3) la salida incontrolada del lixiviado (el líquido que se acumula en el fondo de un vertedero), que puede migrar hacia aguas subterráneas o superficiales; 4) la reproducción de vectores sanitarios en vertederos incorrectamente gestionados, y 5) los impactos sobre la salud y el ambiente relacionados con el escape de gases en cantidades traza¹ que surgen a partir de materiales peligrosos, que fueron colocados en el pasado dentro del vertedero.

¹ Técnica de análisis para determinar la cantidad porcentual (inferior al 0,01 % en peso) de un componente o sustancia de un elemento en una muestra.

En esta tesis, no se profundizará en estos problemas, sin embargo, para un estudio acabado, se puede estudiar el trabajo de Tchobanoglous (1993), quien aborda detalladamente este tema.

Capítulo 3: ESTADO DEL ARTE

Hay muchos enfoques en cuanto a la forma de abordar los problemas asociados a la gestión de residuos domiciliarios, y diferentes autores han estudiado este problema desde variados puntos de vista. Una revisión reciente de los modelos de gestión de residuos se puede encontrar en Morrissey y Browne (2004). Sin embargo, la localización de los contenedores y el ruteo de los vehículos, abordados desde una perspectiva conjunta, ha recibido muy poca atención.

En cuanto a la recolección vía contenedor, se tiene el caso estudiado en De Meulemeester et al. (1997). En este artículo, además de mencionar el trabajo desarrollado en Cristallo (1994), como el primero en estudiar este tipo de problemas, se resuelve el problema mediante dos heurísticas simples y, además, de un algoritmo enumerativo exacto.

En Wy et al. (2010), por su parte, se aborda el problema como una variante del problema de ruteo de vehículos VRP, donde contenedores grandes son ubicados en lugares predeterminados con alta generación de basura, tales como construcciones, mercados, mall, etc. y son transportados, uno a la vez, por tractores a los puntos de eliminación de basura o a los lugares de almacenamiento de contenedores (sistema rollon-rolloff). Proponen un enfoque heurístico que consiste en varios algoritmos. Su particularidad es que incluye restricciones de ventanas de tiempo, tamaño y tipo de contenedor, tiempo para almorzar de los conductores y múltiples lugares de eliminación y de almacenamiento de contenedores.

En Angelelli y Speranza (2002) también se aplica el VRP a la recolección de residuos. Sin embargo, sugieren un modelo de PLEM único para estimar los costos operacionales de cada uno de los tres distintos métodos de recolección citados en 2.2.2. Además, presentan la aplicación de dos casos reales, que fueron resueltos con el algoritmo *Tabu Search*.

Luego, los autores en Kim et al. (2006) son los primeros en introducir el VRP con ventanas de tiempo (VRPTW) a la gestión de residuos, aplicado al sistema de recolección comercial. Se da una solución aproximada al problema utilizando el algoritmo de inserción, Solomon. Consideran además, múltiples depósitos de descarga y tiempos de descanso de los conductores para almorzar. Cabe mencionar que los algoritmos propuestos en su trabajo, han sido aplicados y desplegados con éxito, para los problemas de la vida real, en cuanto a la recolección de residuos domiciliarios.

En Buhrkal et al. (2012), al igual que el trabajo anterior, los autores buscan encontrar rutas óptimas para los camiones recolectores, de tal manera que los contenedores queden vacíos y la basura pueda ser llevada a los sitios de disposición final. Para ello, deben respetarse las ventanas de tiempo de los clientes y garantizar que los conductores tengan los descansos que la ley requiere. El problema es resuelto mediante heurística.

En Wy et al. (2012), se vuelve a estudiar el VRPTW, pero esta vez aplicado al sistema de recolección de contenedores grandes (rollon-rolloff). Además de las restricciones de ventanas de tiempo para la demanda de los clientes y el tiempo para almorzar de los conductores, se agregan restricciones que incluyen el tipo y el tamaño de los contenedores. Se propone un enfoque heurístico iterativo basado en "búsqueda de barrio grande" (large neighborhood search). Finalmente, se utilizan experimentos computacionales para demostrar la efectividad de los métodos propuestos. Algunas instancias son obtenidas de problemas de la vida real.

En Hwang (2002), una publicación interesante a considerar, se desarrolla un modelo de algoritmo genético para el VRP con ventanas de tiempo. Donde se demuestra que el método propuesto es muy efectivo para un conjunto estándar de problemas test.

Por otro lado, Tung & Pinnoi (2000), Sculli, Mok y Cheung (1987), Nuortio et al. (2006) y también Li, Borenstein & Mirchandani (2008) tratan el problema como un problema de programación de rutas de recolección (scheduling), presentando en todos los casos una solución a dicho problema mediante diferentes procedimientos heurísticos. Los autores demostraron, a través de los resultados experimentales, que se pueden obtener ahorros significativos, usando los métodos heurísticos propuestos. En Nuortio et al. (2006) se concluye que la cantidad de residuos sólidos municipales es muy variable y la acumulación de éstos en los contenedores depende de varios factores, tales como, el número de habitantes, estilo de vida, época del año, etc. Como consecuencia, en su estudio, la tasa promedio de acumulación de residuos, en cada tipo de contenedor, se estima por separado, utilizando el peso histórico.

En Bhat (1996) se diseñó un modelo de simulación-optimización de asignación de camiones a los sitios de disposición final con tal de disminuir costos de viaje y tiempos de espera.

En Eisenstein & Iyer (1997) se estudia la recolección de basura en la ciudad de Chicago. Se utiliza una estructura urbana en “bloque” que simplifica el enrutamiento del problema y se propone un modelo de programación dinámica, basado en el proceso de decisión de Markov, para programar las visitas de los camiones al vertedero, de tal manera que la capacidad de los camiones se vea incrementada.

En Antunes (1999) se desarrolla un modelo de optimización entera mixta, combinando elementos del modelo p-median y del modelo de localización de instalaciones con capacidad. El problema se resuelve mediante un procedimiento heurístico. Además, se incluyen restricciones de capacidad tanto en los rellenos sanitarios, como en las estaciones de transferencia, junto con la distancia máxima que pueden recorrer los camiones de transferencia o los camiones recolectores.

En Erkut et al. (2008), Adamides et al. (2009) y más recientemente en Galante et al. (2010), se aborda la situación como un problema multiobjetivo para la localización de sitios de eliminación (rellenos sanitarios, estaciones de transferencia, etc). En el primer paper se presenta un primer intento por aplicar el concepto de equidad para la optimización de multiobjetivos en la recolección de residuos domésticos; en el segundo, por su parte, abordan las dificultades de determinar la localización de las instalaciones de tratamiento y estaciones de transferencia. Para su solución, proponen un modelo Bi-objetivo que busca dar solución al problema de gestión de residuos domiciliarios de manera integral. Finalmente, en el tercer paper, el aspecto novedoso es la propuesta de un sistema de apoyo de decisiones efectiva para la gestión de residuos operacionales, en lugar de una nueva contribución al problema de transporte.

En Rahman & Kuby (1995), se establece que ellos fueron los primeros en abordar el tema anteriormente descrito en la recolección de basura urbana, pero utilizando el método de los pesos (weighting method) para resolver el problema multiobjetivo.

En Faccio et al. (2011), también se presenta un modelo multiobjetivo de ruteo para la recolección de residuos domiciliarios. El modelo se resuelve en forma heurística y minimiza la distancia recorrida y el número de camiones necesarios, lo que permite reducir al mínimo los tiempos de viaje, la cantidad de paradas para la carga-descarga de basura, las emisiones de escape, el ruido y la congestión del tráfico. Se destaca el tema de la tecnología disponible para introducir el modelo,

con datos de trazabilidad en tiempo real. El cual es probado y validado usando simulación. También se detalla un estudio de factibilidad económica.

Para problemas de ruteo de vehículos en la recolección de residuos domiciliarios, se destaca el artículo Benjamin & Beasley (2010). Los autores enfrentan el problema desde la perspectiva del uso de contenedores de grandes dimensiones, los cuales deben ser transportados uno a la vez a los sitios de eliminación de basura. Resuelven el problema heurísticamente y presentan dos metaheurísticas. También se destaca el trabajo Salah (2006). En este artículo se propone un modelo que minimiza la distancia total recorrida por los vehículos recolectores, demostrando que la aplicación del modelo mejora el sistema de recolección reduciendo en un 23,47% la distancia total, lo que conlleva un ahorro alrededor de US\$ 1140 por mes.

En Baldacci et al. (2006) se aborda el problema de formar rutas entre los múltiples depósitos (donde guardan los vehículos recolectores), los clientes y los lugares de eliminación de basura (M-RRVRP). Para ello, modelan el M-RRVRP como un problema de ruteo de vehículos con restricciones de tiempo sobre un multigrafo TVRP-MG, le agregan una restricción adicional que limita el número de camiones y lo resuelven con un método exacto.

En Panditt and Muralidharan (1995) se aborda el problema de ruteo de vehículos con capacidad sobre una red mixta, incluyendo restricciones de trabajo-horas. El problema se resuelve heurísticamente para instancias de gran tamaño.

Ahora, para vehículos con capacidad, además de considerar una demanda estocástica y ventanas de tiempo, se encuentra el trabajo de Lei et al.(2011). En este paper se propone una heurística adaptativa de búsqueda local grande para su solución, demostrando claramente la superioridad de la heurística propuesta sobre un enfoque de solución alternativo.

En Salazar & Ruiz (2009) se aborda la recolección de basura desde una perspectiva del ruteo de vehículos, usando un algoritmo inspirado en el comportamiento de las colonias de hormigas (ACO, del inglés Ant Colony Optimization). La capacidad del vehículo la descartan asumiendo que la capacidad de éste debe alcanzar para la recolección de la zona.

Por otro lado, en Bautista & Pereira (2003) se aborda el problema de localización de áreas de aportación de residuos urbanos, áreas a las que los usuarios deberán ir a depositar los residuos en contenedores para las diferentes cantidades de residuos. Se presentan dos metaheurísticas y un procedimiento exacto para resolver el problema.

En cuanto a la localización de estaciones de transferencia se puede apreciar el trabajo Kirca & Erkip (1988). Aquí, los autores desarrollan un modelo de programación matemática para determinar la ubicación y el número de estaciones de transferencia.

En Kulcar (1996) se desarrolla un modelo de optimización de dos fases para minimizar el número de depósitos y terminales así como los costos de transporte asociados a la recolección de basura.

En Mitropoulos et al. (2009) se propone un conjunto de desigualdades válidas y una heurística para resolver el problema de localización de vertederos, sujeto a restricciones de capacidad (mínimas y máximas). Presentan resultados de datos reales aplicados en Grecia.

En la literatura se pueden encontrar distintos trabajos sobre la recolección de residuos domiciliarios en la acera. El caso de vehículos con capacidad limitada y restricciones de tiempo ha sido estudiado en Ayala & González (2001), que propone una formulación flexible que trabaja con redes de transporte y recogida selectiva de los residuos.

En cuanto a los problemas de localización-rutas por arcos, un ejemplo interesante es Ghiani et al. (2001). Posteriormente, en Ghiani et al. (2005), se extendió al problema de la recolección de basura, el cual se resolvió por método heurístico, basada en el *cluster-first route-second approach*.

Más adelante en el tiempo, para resolver el problema de recolección de residuos domiciliarios, Bautista, Fernández y Pereira también presentan un modelo basado en un problema de ruteo por arco con capacidad (capacidad en los camiones) y utilizan colonia de hormigas para encontrar solución, Bautista et al. (2008).

En Chile se pueden encontrar diversos trabajos interesantes, como es el caso de Díaz (1993), en el cual se establecen diferentes rutas para la recolección en la acera en el Gran Concepción. En su resolución usa heurísticas como el algoritmo de camino mínimo de Floyd, y de Ford-Fulkerson para resolver un problema de transporte.

Luengo (1992), establece rutas de recolección para un sistema de recolección “puerta a puerta”, buscando minimizar la distancia total recorrida por los camiones al recorrer todas las calles (arcos) del sector Lonco. En su propuesta se encuentra una metodología para resolver el problema basado en el Problema del Cartero Chino y el Circuito Euler. Los resultados disminuyen un 4,7% la distancia total recorrida por los camiones para el sector en estudio.

Más adelante, en Garrido y Leiva (2008), se resuelve el mismo problema, pero aplicado a la comuna de Tomé. Se utiliza un modelo heurístico, donde sus resultados demuestran un ahorro sobre los CL\$10.000.000 por año.

También se tienen los casos de Colpo (2002) y Flores (2009), que, apoyados por un Sistema de Información Geográfica (SIG), estudian los posibles lugares para localizar rellenos sanitarios en la comuna de Coronel y en el Área Metropolitana de

Concepción, respectivamente, utilizando criterios económicos, sociales y ambientales.

Para la recolección de residuos domiciliarios vía contenedor, Ruiz (2007) presenta un modelo ACO para resolver el problema de qué rutas deben seguir los camiones para recolectar todos los contenedores en un determinado lugar.

Finalmente, en Cerda (2005), se aborda el problema de localización de estaciones de transferencias para la comuna de Chiguayante. En la propuesta se realiza un estudio de factibilidad económica y técnica, apoyados con estudios de aerofotometría.

Una diferencia importante entre los trabajos que se encuentran en la literatura revisada con el trabajo de esta investigación, es que aquí se aborda el problema de la localización de los contenedores y el ruteo de vehículos con restricciones de capacidad, tanto en los contenedores como en los camiones, en forma conjunta. Mientras que la mayoría de los trabajos que tratan este problema consideran en forma separada la capacidad en los camiones y la capacidad en los contenedores o bien consideran sólo una de estas restricciones.

Capítulo 4: Modelo de Programación Lineal Entera para el PLCRV

En esta tesis se estudia la recolección de basura doméstica, según el método de los contenedores estándar (figura 2.3). En el presente capítulo se presenta el modelo de programación lineal entera que da origen al conjunto de soluciones para el problema en cuestión

4.1 Introducción

En todos los casos presentados en la sección 2.2.2, el problema de decisión consiste en diseñar las rutas que deben seguir los camiones para recoger la basura y trasladarla al relleno sanitario, vertedero o planta de tratamiento, con el menor costo o tiempo de transporte posible. En el segundo y tercer método es necesario, además, decidir la localización más eficiente de los contenedores, considerando la capacidad de almacenamiento de cada uno de ellos. Y en el tercer caso, hay que decidir dónde localizar cada punto en el que se instalará el camión para esperar a los clientes.

Desde un punto de vista de la optimización, el problema de la localización de contenedores, asignación de los clientes a un contenedor y el ruteo de los vehículos son un conjunto de problemas que muchas veces se tienden a estudiar por separado. Sin embargo, por la complejidad e importancia inherente a cada problema por sí solo, es aconsejable estudiarlos desde una perspectiva conjunta, teniendo en cuenta tanto aspectos de formulación como de técnicas de resolución para cada caso, Fernández et al. (2003).

Por lo tanto, en las secciones que siguen se presenta un modelo de programación lineal entera que aborda estos problemas en forma conjunta.

4.2 Descripción del Problema

Se considera una representación de la ciudad, donde se pretende llevar a cabo la aplicación, mediante un grafo $G=(V,A)$, donde V es el conjunto de nodos o vértices y A es el conjunto de arcos. En este grafo, los nodos representan a los clientes y a los puntos candidatos a localizar un contenedor. Los puntos candidatos a localizar o instalar un contenedor se seleccionan de acuerdo a criterios dados por la

normativa municipal o por otra causa que impida la factibilidad de instalar un contenedor en él.

Como se ha descrito anteriormente, el problema que se estudia en esta tesis consiste en localizar una cantidad de contenedores sobre un conjunto de nodos candidatos, que sean capaces de cubrir la demanda total de basura generada por los clientes; asignar los clientes a los contenedores, de tal manera que cada cliente sea asignado a uno y sólo un contenedor y determinar las rutas óptimas que deben realizar los camiones para recolectar la basura de cada uno de los contenedores y transportarla a los vertederos correspondientes.

La característica particular que posee este problema es que es necesario considerar restricciones de capacidad tanto en los contenedores como en los camiones (paths). Y bajo el supuesto de homogeneidad en la capacidad de ambos, se permite limitar la capacidad del camión, en forma unitaria, según la cantidad máxima de contenedores llenos que un camión pueda soportar.

En definitiva, el modelo propuesto permite minimizar los costos totales del sistema de recolección de residuos domiciliarios y además, proporciona información acerca de la cantidad de contenedores a instalar y la cantidad de camiones necesarios para la recolección de todos ellos, junto con la ruta asociada que deben realizar para llevar a cabo su objetivo.

4.3 Formulación del Modelo Matemático

En esta sección se presenta un modelo de programación lineal entera para encontrar la solución óptima al problema de la recolección de residuos domiciliarios. El modelo utiliza variables de flujo, de localización y de asignación y atiende a problemas en los que la demanda se sitúa de forma puntual y, por lo tanto, las rutas de los vehículos son por nodos.

4.3.1 Parámetros

N : Conjunto de nodos de la red.

J : Conjunto de nodos candidatos para localizar un contenedor, $J \subseteq N$

A : Conjunto de arcos de la red.

d_{ij} : Distancia comprendida entre el nodo i y el nodo j .

h_i : Demanda asociada al cliente ubicado en el nodo i .

p : Capacidad de los contenedores.

q : Capacidad del camión (cantidad máxima de contenedores a recolectar).

s : Nodo origen

t : Nodo destino

Se asume que todos los contenedores tienen la misma capacidad. De igual modo, se supone que los vehículos son homogéneos y también tienen la misma capacidad. La capacidad del camión está expresada como la cantidad máxima de contenedores que puede recolectar.

La representación gráfica de una solución del problema con un solo vehículo se presenta en la figura 4.1.

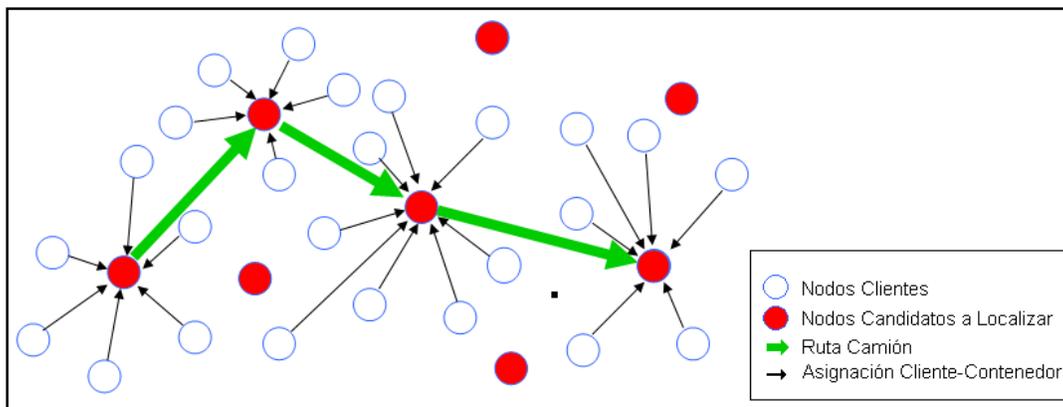


Figura 4.1: Una solución típica al problema con un sólo camión (sin capacidad).

4.3.2 Variables de decisión

$$w_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{Si el cliente } i \text{ es asignado al contenedor } j \\ 0 & \text{Si no} \end{cases}$$

$$y_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{Si se localiza un contenedor en } j \text{ y es recolectado por el camión } k \\ 0 & \text{Si no} \end{cases}$$

$$x_{ij}^k = \begin{cases} 1 & \text{Si el arco } (i, j) \text{ se encuentra en la ruta del camión } k \\ 0 & \text{Si no} \end{cases}$$

z = Número de camiones a utilizar

4.3.3 El Modelo Matemático

$$\text{Minimizar } (Z_1, Z_2) \tag{4.1}$$

$$Z_1 = \sum_{k \in J} \sum_{i \in J} \sum_{j \in J} d_{ij} x_{ij}^k \tag{4.2}$$

$$Z_2 = \sum_{i \in N \setminus J} \sum_{j \in J} d_{ij} w_{ij} \tag{4.3}$$

Sujeto a:

$$\sum_{j \in J: j \neq s, t} w_{ij} = 1, \forall i \in N \setminus J \tag{4.4}$$

$$\sum_{k \in J: k \neq s, t} y_j^k \leq 1, \forall j \in J: j \neq s, t \tag{4.5}$$

$$\sum_{i \in N \setminus J} h_i w_{ij} \leq p \sum_{k \in J: k \neq s, t} y_j^k, \forall j \in J: j \neq s, t \tag{4.6}$$

$$\sum_{k \in J: k \neq s, t} x_{sk}^k = z \tag{4.7}$$

$$\sum_{\substack{k \in J: j \in J: \\ k \neq s, t, j \neq s}} x_{jt}^k = z \tag{4.8}$$

$$\sum_{\substack{i \in J: \\ i \neq t}} x_{ij}^k = \sum_{\substack{f \in J: \\ f \neq s}} x_{if}^k, \forall k \in J, j \in J: j, k \neq s, t \tag{4.9}$$

$$\sum_{i \in J: i \neq t} x_{ij}^k \leq y_j^k, \forall k \in J, j \in J: j, k \neq s, t \tag{4.10}$$

$$\sum_{\substack{i \in J: \\ i \neq s, t}} \sum_{\substack{j \in J: \\ j \neq s, t}} x_{ij}^k \leq q - 1, \forall k \in J : j, k \neq s, t \quad (4.11)$$

$$\sum_{k \in J} \sum_{i \in S} \sum_{j \in S: j \neq i} x_{ij}^k \leq |S| - 1, \forall S \subseteq J, |S| \geq 2 \quad (4.12)$$

$$x_{ij}^k \in \{0, 1\}, y_j^k \in \{0, 1\}, \forall i, j, k \in J \quad (4.13)$$

$$w_{ij} \in \{0, 1\}, \forall i \in N \setminus J, j \in J \quad (4.14)$$

$$z \in Z^+ \quad (4.15)$$

La restricción (4.4) asegura que cada cliente es asignado a un contenedor. La restricción (4.5) establece que un contenedor puede ser visitado por, a lo más, un solo camión. La desigualdad (4.6) impone que la cantidad total de basura acumulada en cada contenedor, no supere la capacidad p de dicho contenedor y que ningún cliente sea asignado a un nodo en el cual no se haya localizado un contenedor. Las restricciones (4.7), (4.8) y las de conservación de flujo (4.9) garantizan que el número de camiones que salen del nodo origen s serán igual a z , los cuales serán los mismos que llegarán al nodo destino t . Por otro lado, la ecuación (4.10) se utiliza para capturar los nodos (o contenedores) que están en la ruta. La restricción de capacidad (4.11) asegura que la cantidad de contenedores que debe recolectar un camión, no sea superior a q . Las restricciones (4.12) se incluyen para eliminar la presencia de subtour. Las restricciones (4.13) y (4.14) establecen que las variables de decisión x_{ij}^k , y_j^k y w_{ij} son binarias, mientras que la (4.15) establece que z pertenece al conjunto de números enteros positivos.

Finalmente, la función objetivo (4.1) representa las funciones involucradas en el problema. En las ecuaciones (4.2) y (4.3) se detallan ambas funciones objetivo. En este caso Z_1 corresponde a la distancia total recorrida por los camiones recolectores, y Z_2 a la distancia total recorrida por los clientes para alcanzar su contenedor asignado.

4.4 Desigualdades válidas

Una desigualdad se dice que es válida para el conjunto de soluciones factibles si es satisfecha por cada punto de este conjunto. Un corte con respecto a una solución que no es entera es una desigualdad válida para el conjunto de soluciones factibles que es violada por la solución.

Una alternativa que existe para resolver problemas de programación lineal entera es la técnica denominada planos de corte. Este método se basa en la incorporación de desigualdades válidas, llamadas también cortes, hasta que se encuentre la solución óptima con valores enteros.

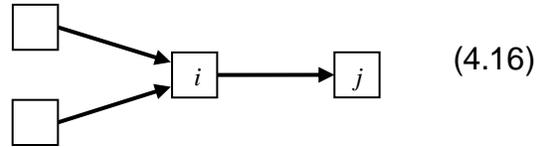
En general, dado el gran número de restricciones que se pueden generar con una familia de desigualdades válidas para el problema, no es posible incorporarlas todas en una relajación del problema lineal. Las restricciones útiles deben ser incorporadas de forma dinámica. Al problema de identificar restricciones violadas por la solución fraccionaria se le conoce como problema de separación

Cómo identificar si ciertas desigualdades son válidas o no, es un problema difícil de resolver. A continuación se describen una serie de familias de desigualdades válidas para el PLCRV.

Estas restricciones o desigualdades surgen al resolver la relajación lineal del PLCRV, ya que una solución que verifique todas las restricciones de la relajación del modelo, es decir, sin las restricciones de integralidad (4.13) – (4.15), su valor objetivo puede estar muy lejos del valor óptimo del PLCRV. Por lo tanto, es muy importante fortalecer el modelo introduciendo desigualdades válidas.

Una primera mejora a la relajación lineal se consigue evitando que un vehículo vuelva a un nodo i , el cual ya había visitado antes.

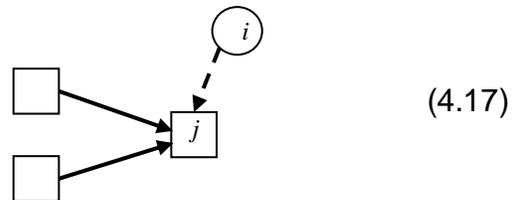
$$x_{ij}^k \leq \sum_{\substack{a \in J: \\ a \neq i}} x_{ai}^k, \forall i, j \in J, i \neq j, k \in J$$



La desigualdad implica que si un vehículo sale del nodo i con dirección al nodo j , a este nodo le debe llegar un vehículo desde cualquier nodo, menos desde el nodo j , es decir el arco (i, j) puede estar en la solución, pero el arco (j, i) no.

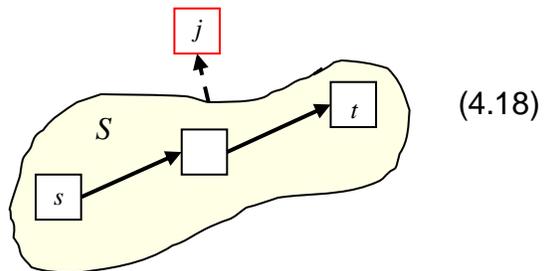
La siguiente mejora se puede hacer estableciendo que, si un cliente i es asignado a un contenedor j , entonces, necesariamente este contenedor debe ser visitado por algún camión:

$$w_{ij} \leq \sum_{k \in J} \sum_{a \in I} x_{aj}^k, \forall i \in N \setminus J, j \in J$$



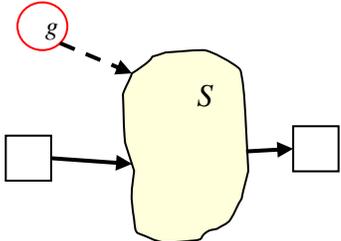
Otra desigualdad válida para el problema relajado, es evitar que exista algún contenedor j fuera de algún path principal. Es decir, cualquier contenedor que se encuentre en la solución, debe ser visitado por algún camión que tenga a los nodos origen y destino en su recorrido.

$$\sum_{i \in S} \sum_{a \in I \setminus S} x_{ia}^k \geq y_j^k, \forall j \in J \setminus S, k \in J, S \subseteq J: \{s, t\} \in S$$



La restricción (4.18) indica que, dado un conjunto S , que contiene al nodo origen s y al nodo destino t , si existe algún contenedor fuera de él o una variable de localización y_j^k con valor distinto de cero, entonces necesariamente debe salir un arco del conjunto S , para el mismo k , con valor mayor o igual al de la variable de localización de dicho contenedor.

El cuarto corte establece que si un cliente g es asignado a un contenedor que se encuentra dentro de un conjunto S , entonces debe existir, al menos, un vehículo que pase por ese conjunto.

$$\sum_{k \in J} \sum_{i \in J \setminus S} \sum_{j \in S} x_{ij}^k \geq \sum_{a \in S} w_{ga}, \quad \forall g \in N \setminus J, S \subseteq J : \{s, t\} \notin S \quad (4.19)$$


La siguiente desigualdad, que es una restricción de capacidad total, establece que los camiones que salen del nodo origen deben tener suficiente capacidad de carga disponible para transportar toda la demanda generada por los clientes.

$$pq \sum_{k \in J : k \neq s, t} x_{sk}^k \geq \sum_{i \in N \setminus J} h_i \quad (4.20)$$

Es decir, la cantidad de camiones (reflejada en la cantidad de arcos) que salen desde el nodo origen s , deben ser tales que, con sus respectivas capacidades, sean capaces de cubrir la demanda de basura total generada por los clientes en la red.

La siguiente restricción, también es una restricción de capacidad, la cual establece que, dado un conjunto S de contenedores que contiene el nodo origen, los

camiones que salgan de dicho conjunto, deben contar con la capacidad suficiente para satisfacer la demanda de basura que queda fuera de S . Así,

$$pq \sum_{\substack{k \in S^c: \\ k \neq t}} x_{sk}^k + p(q-1) \sum_{\substack{k \in S: \\ k \neq s}} \sum_{\substack{i \in S: \\ i \neq s}} \sum_{\substack{j \in S^c: \\ j \neq t}} x_{ij}^k \geq \sum_{i \in N \setminus J} h_i - \sum_{\substack{i \in N \setminus J \\ j \in S: \\ j \neq s}} h_i w_{ij}, \forall S \subseteq J : t \notin S \quad (4.21)$$

El lado izquierdo de la desigualdad determina la capacidad total con la que cuentan los camiones al salir del conjunto S (luego de recolectar la basura que se encuentra dentro de él), mientras que el lado derecho obtiene la diferencia entre la demanda total y la demanda recolectada de los clientes asignados a un contenedor dentro de S . En otras palabras, lo que falta por recolectar.

La siguiente desigualdad establece que si un camión k recorre un arco (i, j) , $x_{ij}^k \neq 0$, entonces necesariamente el mismo camión tiene que salir del nodo origen.

$$\sum_{\substack{i \in J: \\ i \neq s, t}} \sum_{\substack{j \in J: \\ j \neq s, t}} x_{ij}^k \leq M x_{sk}^k, \forall k \in J : k \neq s, t \quad (4.22)$$

Donde M es un número suficientemente grande, por ejemplo, $M = |J|$.

Capítulo 5: Resolución del PLCRV para la recolección de residuos domiciliarios

En este capítulo se resuelve el Problema de Localización de Contenedores y Ruteo de Vehículos para la Recolección de Residuos Domiciliarios mediante el modelo presentado en la sección 4.3. Para su resolución, se resuelve la relajación lineal del problema y se plantea un algoritmo de planos cortantes para la eliminación de subtours. Además, por tratarse de un modelo multiobjetivo, se obtiene un conjunto de soluciones no inferiores, utilizando el método NISE, Coho(1978).

Para explicar el procedimiento que encuentra una solución óptima del PLCRV, la resolución del problema se abordará a través de una instancia de 50 nodos y 86 arcos.

5.1 Ejemplo de aplicación del modelo para resolver el PLCRV

En esta sección se considera, a modo de ejemplo, una red de 50 nodos y 86 arcos, con el fin de mostrar el procedimiento completo para obtener un conjunto de soluciones no inferiores. Se detallan los resultados y datos estadísticos obtenidos al implementar el modelo y sus algoritmos.

5.1.1 Datos del modelo

En la tabla siguiente se muestra el conjunto de arcos (i, j) y los costos (o distancias) d_{ij} asociados a cada uno de ellos. Notar que los costos son simétricos, $d_{ij} = d_{ji}$ para todos los arcos (i, j) .

Tabla 5.1: Arcos y costos d_{ij} de la red de 50 nodos

Arco			d_{ij}	Arco			d_{ij}	Arco			d_{ij}	Arco			d_{ij}
i	j			i	j			i	j			i	j		
1	2		22	13	22	22	26	33	32	36	46	36			
1	3		28	13	23	36	26	34	41	36	47	40			
2	4		22	14	15	22	27	28	22	37	42	22			
2	5		32	14	21	22	27	31	28	37	46	32			
3	4		32	15	16	22	27	31	28	38	39	20			
3	10		32	15	20	28	28	29	22	38	41	32			
4	7		32	16	17	22	28	30	36	38	42	32			
4	8		20	16	20	30	28	31	30	39	40	28			
5	6		28	17	19	30	29	30	32	40	41	32			
5	7		22	18	19	28	30	32	22	40	43	30			
6	17		22	19	20	28	31	32	22	41	44	32			
6	18		32	19	29	32	31	38	32	42	45	30			
7	16		30	20	28	32	32	39	22	43	44	22			
7	17		28	21	23	28	32	40	41	44	45	30			
8	9		22	21	27	36	33	37	32	44	49	22			
8	15		32	22	23	32	33	38	22	45	49	28			
9	10		22	22	24	30	34	35	32	45	50	40			
9	12		36	23	26	28	34	36	28	46	48	22			
9	14		32	24	25	22	34	37	22	47	48	32			
10	11		28	24	35	32	35	36	32	48	50	36			
11	12		22	25	26	32	36	37	30	49	50	28			
12	13		22	26	27	22									

La figura 5.1 muestra gráficamente la red de 50 nodos y sus arcos, junto a sus respectivos costos. Cabe destacar que son arcos dirigidos en ambas direcciones, por lo tanto, no se muestra la dirección de cada arco.

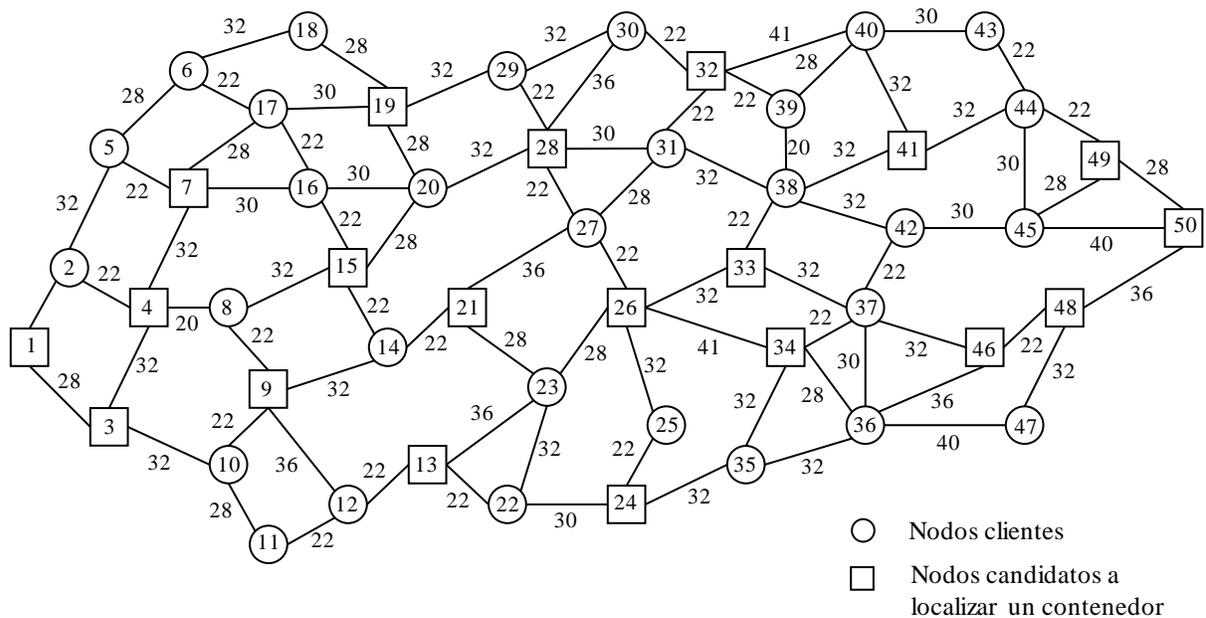


Figura 5.1: Red de 50 nodos y 86 arcos.

Las demanda de los nodos clientes, para este caso, son igual para todos y con valor 2. Por otro lado, la capacidad tanto de los contenedores como de los camiones, son 6 y 7, respectivamente.

La figura 5.1 representa una red original, sin embargo, el problema se resuelve a partir de la red completa (o extendida), es decir, todos los nodos están conectados con todos, a través de la ruta más corta. Para esto se utilizó el software Cplex y un algoritmo de generación de matriz de rutas más cortas (o matriz de costos).

5.2 Algoritmo de Planos Cortantes para el PLCRV

En esta sección se describe un algoritmo para resolver de forma exacta el PLCRV.

En primer lugar, se introduce, en líneas generales, el algoritmo de planos cortantes. Luego, se describe la fase correspondiente al algoritmo de separación de cortes, fase decisiva para obtener buenos resultados.

En términos sencillos, el primer paso es resolver la relajación lineal del problema. Luego, a partir de la solución relajada se introduce un conjunto de restricciones o cortes que son violadas por la solución (restricciones violadas), expuestas en la sección 4.4. Pero dado el gran número de restricciones (4.16) – (4.22) y/o cualquier otra familia de desigualdades válidas para el problema, no es posible incorporarlas todas en una relajación del problema lineal. Las restricciones útiles deben ser incorporadas de forma dinámica. De este modo, para no agrandar tanto el tamaño del problema, se agregan estos cortes a medida que van apareciendo (cuando han sido violadas) en cada iteración del PLCRV.

Identificar desigualdades lineales que sean violadas por la solución fraccionaria del programa lineal y sean válidas para las soluciones enteras se le conoce como el problema de separación.

A continuación se describen los procesos de separación presentes en esta tesis:

- El procedimiento para separar las desigualdades (4.16), comienza buscando un arco (i, j) , tal que $i \in J$ y $j \in J$, para cada camión k , de modo que tanto el arco (i, j) , como (j, i) existan. Luego, si $x_{ij}^k > \sum_{a \in J: a \neq i} x_{ai}^k$, entonces el arco (i, j) hace que la desigualdad (4.16) sea violada por la solución fraccionaria.

- Las desigualdades (4.17) pueden separarse si algún arco (i, j) cumple con la desigualdad $w_{ij} > \sum_{k \in J} \sum_{a \in J} x_{aj}^k$, para todo $i \in N \setminus J$ y para $j \in J$. Si es así, la solución fraccionaria viola la desigualdad (4.17).
- La separación del conjunto de desigualdades (4.18) se basa en un procedimiento que busca conjuntos S que contengan los paths principales de cada camión k , es decir, los paths que contengan los nodos de origen y destino, s y t , respectivamente.

El algoritmo comienza con un conjunto que contiene al nodo origen, $S = \{s\}$. Luego, se le incorporan todos aquellos nodos $i \in J$ que estén conectados a s en la solución fraccionaria, hasta que todas las rutas que salen del origen se conecten con el nodo destino t .

Seguido a esto, el algoritmo busca e identifica algún nodo $j \notin S$, que tenga el mayor valor, $Max\{y_j^k\}$, de modo que se cumpla que $\sum_{i \in S} \sum_{a \in J \setminus S} x_{ia}^k < y_j^k$, que es la condición para que la desigualdad (4.18) sea violada.

- Para separar la desigualdad (4.19), se inicia creando un conjunto $S = \{i\}$, donde $i \in J$ y es distinto a s y t . A continuación, se van incorporando a S , uno a uno, todos los nodos que estén unidos a él mediante un arco o un path. Luego, si se cumple que $\sum_{k \in J} \sum_{i \in J \setminus S} \sum_{j \in S} x_{ij}^k < \sum_{a \in S} w_{ia}$, para cada cliente $l \in N \setminus J$, se tiene que la desigualdad (4.19) ha sido violada por la solución fraccionaria.

- De las desigualdades de capacidad, no es necesario aplicar el procedimiento de separación a (4.20), ya que es sólo una restricción, sin embargo, a (4.21) sí, y para ello se toma un conjunto $S \subseteq J$ que contenga al nodo origen s , pero no al destino t , y si se verifica que,

$$pq \sum_{\substack{k \in S^c: \\ k \neq t}} x_{sk}^k + p(q-1) \sum_{\substack{k \in S: i \in S: j \in S^c: \\ k \neq s \quad i \neq s \quad j \neq t}} x_{ij}^k < \sum_{i \in N \setminus J} h_i - \sum_{\substack{i \in N \setminus J \\ j \in S: \\ j \neq s}} h_i w_{ij}$$

De este modo, la solución fraccionaria ha violado a la restricción (4.21).

- En cuanto a la restricción (4.22), ésta puede ser incorporada en forma dinámica, sin embargo, debido al número elevado de iteraciones que genera en la solución entera, se ha decidido incluirlas todas de una vez y no aplicar el algoritmo de separación para este caso.

5.3 Aparición y eliminación de subtours

La resolución del problema, sin el conjunto de restricciones (4.12), provoca que se formen subtours en la red que derivan en soluciones no factibles. Para ello, en este estudio, también se utiliza el método de los planos cortantes para eliminar dichos subtours y encontrar soluciones no inferiores en forma óptima.

En la figura 5.2 de muestra una solución obtenida en una iteración intermedia en la obtención de una solución no inferior. En esta figura se encuentran detallados claramente los diferentes conjuntos de nodos que forman subtours.

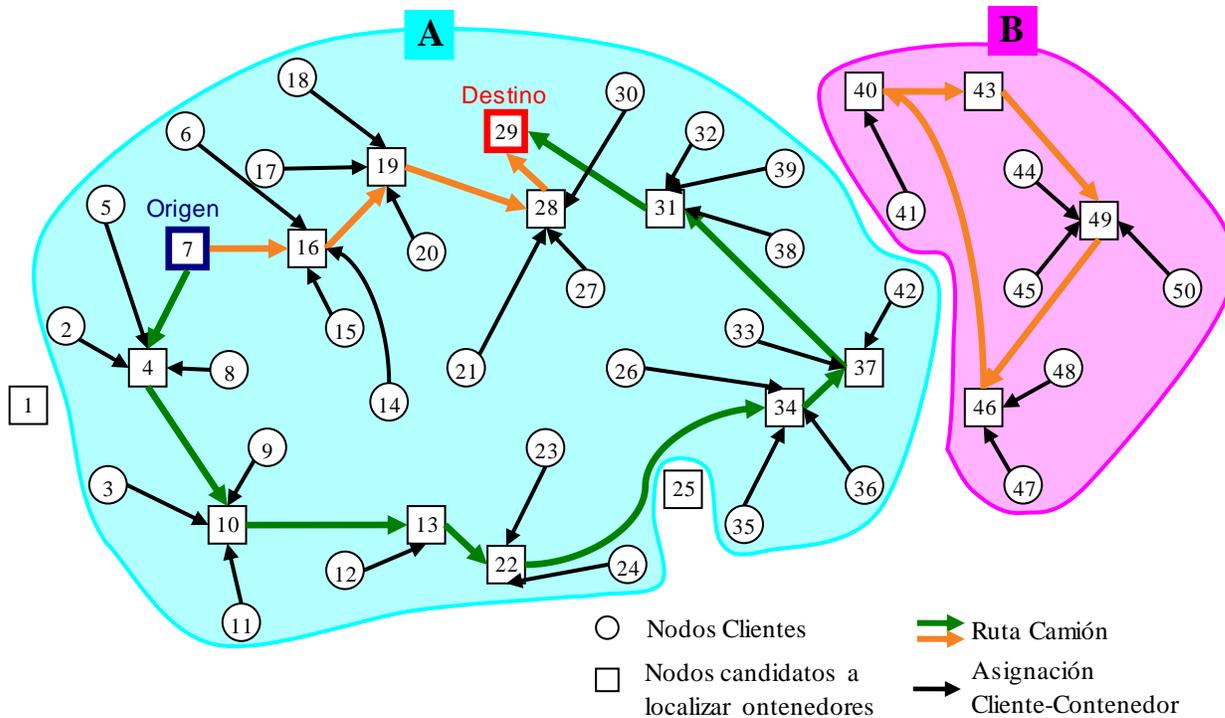


Figura 5.2: Formación de subtours en la obtención de una Solución No Inferior.

Como se puede observar, la figura 5.2 posee 2 grandes conjuntos (A y B), los cuales contienen tanto arcos correspondientes a las rutas de los camiones, como de asignación cliente-contenedor. El conjunto A contiene los nodos que forman los paths que unen al nodo origen con el nodo destino, que a su vez son las rutas que los camiones deben seguir; y a los nodos clientes, que son asignados a los contenedores ubicados en dichos paths. El conjunto B, que llamaremos *Subtours Maximales*, poseen en su interior ciclos formados por el ruteo de los camiones, los cuales se denominarán *Subtours Minimales*. En la figura 5.2 se tienen los subtours minimales formados por los nodos 40, 43, 49 y 46.

Ahora, con la intención de eliminar los subours, es necesario introducir un conjunto de restricciones (4.12) que permitan cortar esta solución y obtener una nueva sin los subtours identificados anteriormente. Este conjunto de restricciones es:

$$\sum_{i \in S, j \in S} x_{ij}^k \leq |S| - 1 \quad \forall S \subseteq J, |S| \geq 2, k \in J \quad (4.12)$$

De este modo, para cada subtour minimal, se genera una restricción que permite romper con los ciclos formados en la iteración de la figura 5.2.

A continuación, la figura 5.3 muestra la iteración siguiente

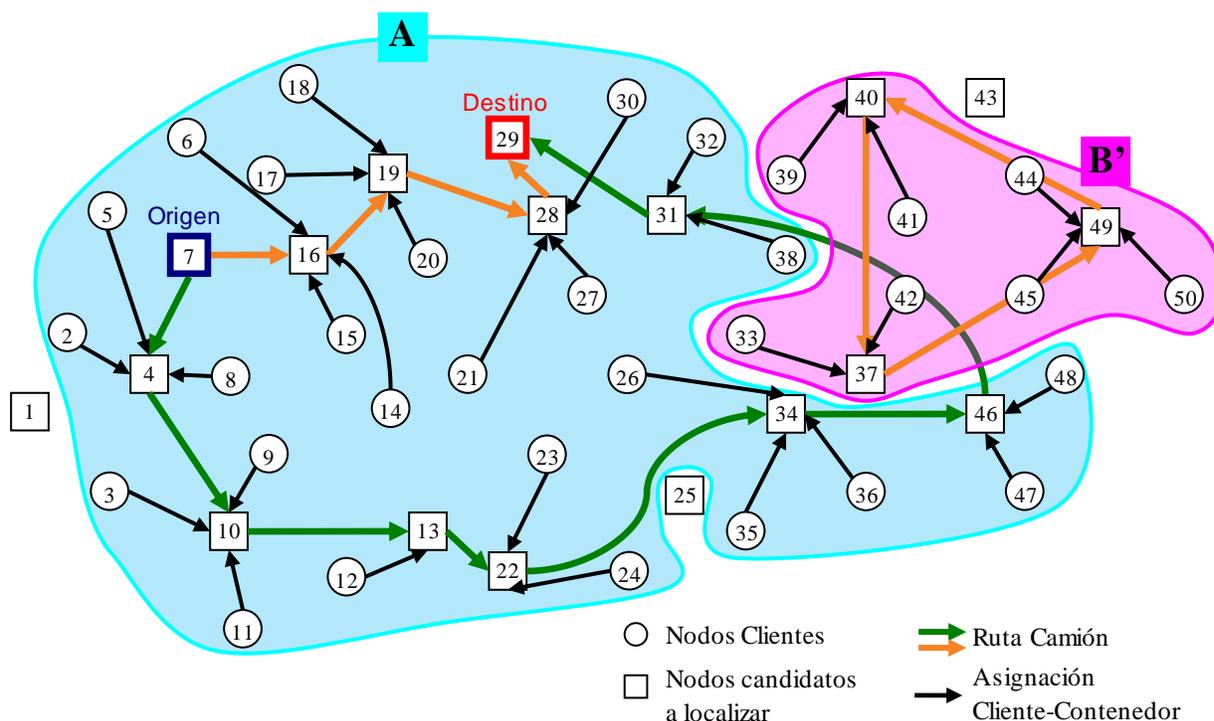


Figura 5.3: Efecto de la aplicación del método de los planos cortantes.

Como se puede observar, el subtour maximal que se formó en la figura 5.2, correspondiente al conjunto B, junto a su respectivo subtour minimal, formado por los nodos 40, 43, 49 que se tenía anteriormente, desaparecieron. Esto es producto de incorporar la restricción (4.12) al modelo.

Sin embargo, también se puede apreciar que apareció un nuevo subtour, que deberá ser eliminado de manera análoga al procedimiento descrito anteriormente, a través de la aplicación de restricciones que elimine los subtours que aparezcan en las diferentes iteraciones. El procedimiento iterativo continuará hasta que se no aparezcan más subtours en la solución y, por lo tanto, se obtenga la solución óptima.

5.4 Búsqueda de las soluciones no inferiores (SNI)

Para encontrar un conjunto aproximado de soluciones no inferiores, a través del método NISE, lo primero es encontrar dos soluciones fundamentales, denominadas soluciones no inferiores extremas. Una de ellas tiene la particularidad de representar la alternativa menos costosa para los camiones, es decir, los costos asociados a la distancia recorrida por los vehículos, mientras que la otra, es la alternativa menos costosa para los clientes; los costos asociados a la distancia total recorrida por los clientes a su contenedor.

A continuación se presenta la metodología utilizada para obtener las soluciones no inferiores extremas, y cómo, a partir de estas dos soluciones no inferiores, se obtienen las otras soluciones no inferiores (a través del método NISE) que van a conformar la curva de trade-off entre la distancia total recorrida por los camiones y la de los clientes.

5.4.1 Obtención de la solución no inferior extrema N°1

La solución no inferior extrema N°1 (SNIE₁) representa la alternativa menos costosa desde el punto de vista de los vehículos recolectores, y es a la vez la alternativa más costosa desde el punto de vista de los clientes, es decir, mientras se privilegian los costos asociados al ruteo de los vehículos (en este caso distancias), se ven perjudicados los costos asociados a la distancia recorrida por los clientes para acceder a su contenedor asignado, ya que la distancia que deberán recorrer será muy grande.

La SNIE₁ es muy similar a la solución obtenida a partir de la ruta más corta, con la salvedad que aquí se deben cumplir las restricciones de capacidad y las demandas, que hacen imposible diseñar las rutas de los camiones a cabalidad, bajo esta perspectiva.

En la figura 5.4 se presenta la SNIE₁ para la red de 50 nodos.

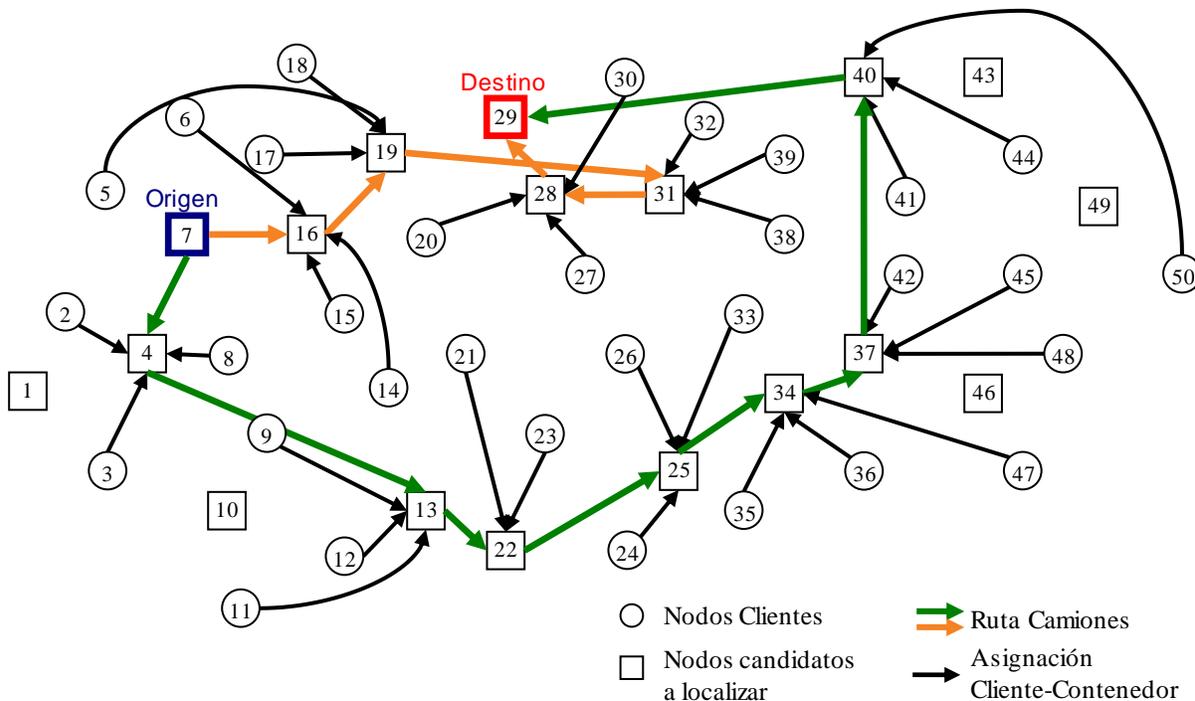


Figura 5.4: Solución no inferior extrema N^o1.

La SNIE₁ fue generada de la siguiente manera:

-
- Primero se resuelve el modelo sólo optimizando el objetivo Z_1 , el cual corresponde a la distancia recorrida por los camiones, de este modo se obtiene el mejor resultado para este objetivo, en perjuicio de la distancia que deban recorrer los clientes para llegar a su contenedor.

$$\text{Minimizar } Z_1 = \sum_{k \in J} \sum_{i \in J} \sum_{j \in J} d_{ij} x_{ij}^k \quad (5.1)$$

Sujeto a:

$$(4.4) - (4.15)$$

- Luego de obtener el resultado (en este caso 666), se utilizó el método de las restricciones (Cohon, 1978), de modo que la distancia recorrida por los camiones fue considerada como una restricción con valor menor o igual a 666.
- Por otra parte, la función objetivo del modelo corresponde a la distancia total recorrida por los clientes, y al ser única, se puede resolver como si fuera un problema de un solo objetivo, mediante el método Simplex. Las expresiones matemáticas utilizadas son las siguientes.

$$\text{Minimizar } Z_2 = \sum_{i \in N \setminus J} \sum_{j \in J} d_{ij} w_{ij} \quad (5.2)$$

Sujeto a:

$$Z_1 = \sum_{k \in J} \sum_{i \in J} \sum_{j \in J} d_{ij} x_{ij}^k \leq 666 \quad (5.3)$$

(4.4) - (4.15)

Al resolver este problema, la distancia recorrida por los camiones es 666 ($Z_1 = 666$), en tanto que la distancia total recorrida por los clientes resulta ser $Z_2 = 1246$. Se puede observar claramente, tanto en los valores, como en la figura 5.4, que en la $SNIE_1$ se ven notoriamente perjudicados los clientes en virtud de favorecer la distancia recorrida por los camiones, teniendo que caminar mucho para alcanzar su contenedor asignado.

5.4.2 Obtención de la solución no inferior extrema N°2

La solución no inferior extrema N°2 ($SNIE_2$) corresponde a la opción menos costosa desde el punto de vista de los clientes, sin embargo, es la alternativa más costosa para los camiones, ya que éstos deberán recorrer mayores distancias a cambio de minimizar las distancias cliente-contenedor. En este caso los camiones tenderán a recorrer prácticamente todos los nodos del subconjunto J , de modo tal,

que la distancia recorrida por cada cliente sea mínima. En la figura 5.5 se presenta la SNIE₂ en la red de 50 nodos.

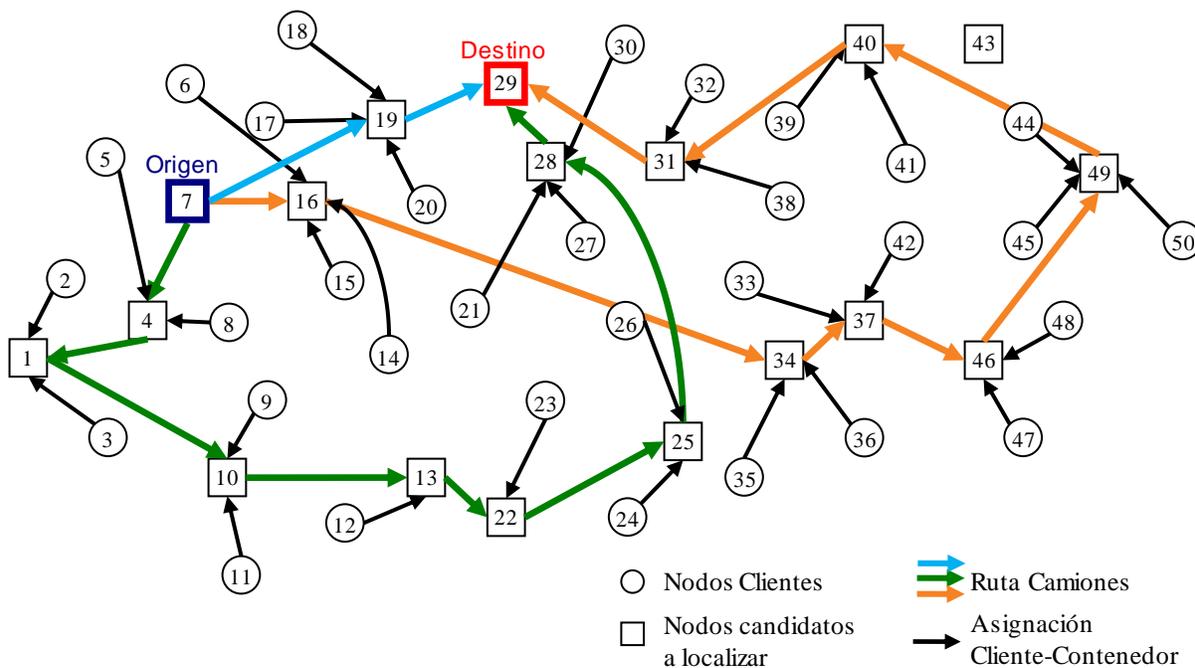


Figura 5.5: Solución no inferior extrema N°2

La SNIE₂ fue obtenida de forma análoga a la SNIE₁, primero se resolvió el modelo minimizando únicamente el objetivo correspondiente a la distancia total recorrida por los clientes, lo que dio valor $Z_2 = 957$.

$$\text{Minimizar } Z_2 = \sum_{i \in N \setminus J} \sum_{j \in J} d_{ij} w_{ij} \tag{5.2}$$

Sujeto a:

$$(4.4) - (4.15)$$

A continuación, con el método de las restricciones (Cohon, 1978), el costo de la distancia total recorrida por los clientes fue considerada como una restricción con valor igual o menor a 957. Por otra parte, la función objetivo del modelo corresponde a la distancia total recorrida por los camiones, y al ser única, se

puede resolver como si fuera un problema de un solo objetivo, mediante el método Simplex. Las expresiones matemáticas utilizadas fueron las siguientes.

$$\text{Minimizar } Z_1 = \sum_{k \in J} \sum_{i \in J} \sum_{j \in J} d_{ij} x_{ij}^k \quad (5.1)$$

Sujeto a:

$$Z_2 = \sum_{i \in N \setminus J} \sum_{j \in J} d_{ij} w_{ij} \leq 957 \quad (5.4)$$

(4.4) - (4.15)

En la generación de la SNIE1 aparecieron subtours, los que fueron eliminados utilizando el método de los planos cortantes, visto en la sección 5.3.

Finalmente, se tiene como resultado que la distancia total recorrida por los clientes es 957, mientras que la distancia total recorrida por los camiones es de 976. Se puede apreciar que, en esta solución, se necesitaron 3 camiones, ya que éstos sólo pueden recoger 7 contenedores cada uno como máximo.

5.4.3 Método alternativo para la obtención de SNI extremas

El método descrito anteriormente involucra una gran cantidad de tiempo para encontrar las SNIE en redes más grandes. Por tal motivo, es necesario implementar algún método más rápido para encontrarlas y que permitan encontrar, además, el resto de las SNI del problema.

Este método se basa en el supuesto de que encontrando cualquier SNI cercana a las SNI extremas, llamémosle SNIE secundarias (SNIES), el resto de los puntos encontrados entre ellas, son las SNI del problema.

Para encontrar estas SNIES se utilizó el método de los pesos, donde se comprobó, para el PLCRV, que al utilizar un valor de alpha grande ($\alpha=0,99$) y luego uno pequeño ($\alpha=0,01$), se obtienen SNI cercanas o iguales a las SNIE. Como se muestra a continuación.

Utilizando,

$$\text{Minimizar } Z = \alpha \sum_{k \in J} \sum_{i \in J} \sum_{j \in J} d_{ij} x_{ij}^k + (1 - \alpha) \sum_{i \in N \setminus J} \sum_{j \in J} d_{ij} w_{ij} \quad (5.5)$$

Sujeto a:

$$(4.4) - (4.15)$$

Se resolvieron varias instancias con distintos pares origen-destino. A continuación se exponen los resultados utilizando la misma red de 50 nodos:

Tabla 5.2: Comparación entre SNIE versus SNIES

Instancia	Método restricciones		Método pesos (alpha)	
	SNIE1	SNIE2	SNIES1	SNIES2
s=21; t=41	598	1006	598	1006
	1928	855	1928	855
s=11; t=40	574	1019	574	1019
	1450	957	1450	957
s=18; t=47	685	1126	685	1126
	1124	865	1124	865
s=7; t=29	666	976	666	976
	1246	957	1246	957

Para los casos expuestos, se observa que las SNIE coinciden con las SNIES en todos los casos. Sin embargo, cabe señalar que se encontraron situaciones en los que no coinciden exactamente, sino que con la SNI más cercana. Este resultado es igualmente válido, ya que sólo se dejaría fuera del conjunto de SNI alguna de las SNIE, que por lo general, al tratarse de soluciones extremas, no son SNI significativas o relevantes para el tomador de decisiones.

Este método, aunque no garantiza encontrar las SNIE del problema, permite encontrar una SNI muy cercana a ella y en un tiempo de resolución considerablemente inferior. De hecho, en el ejemplo mostrado, en la tabla 5.2, cuando el nodo origen es 21 y el nodo destino 41, para encontrar la $SNIE_1$ se necesitaron más de 36 minutos, mientras que para obtener la $SNIES_1$, sólo 17 segundos. Diferencia que va aumentando a medida que aumenta el tamaño de la red.

5.4.4 Aplicación del método NISE para la obtención de las soluciones no inferiores y la Curva de *Trade-Off*

A partir de la obtención de las soluciones no inferiores extremas $SNIE_1$ y $SNIE_2$, encontradas en la sección anterior, se da inicio a la búsqueda de un conjunto aproximado de soluciones no inferiores del problema. En la figura 5.6 se grafican las soluciones no inferiores extremas. La $SNIE_1$ corresponde al punto $(Z_1, Z_2) = (666, 1246)$, mientras que la $SNIE_2$ al $(Z_1, Z_2) = (976, 957)$.

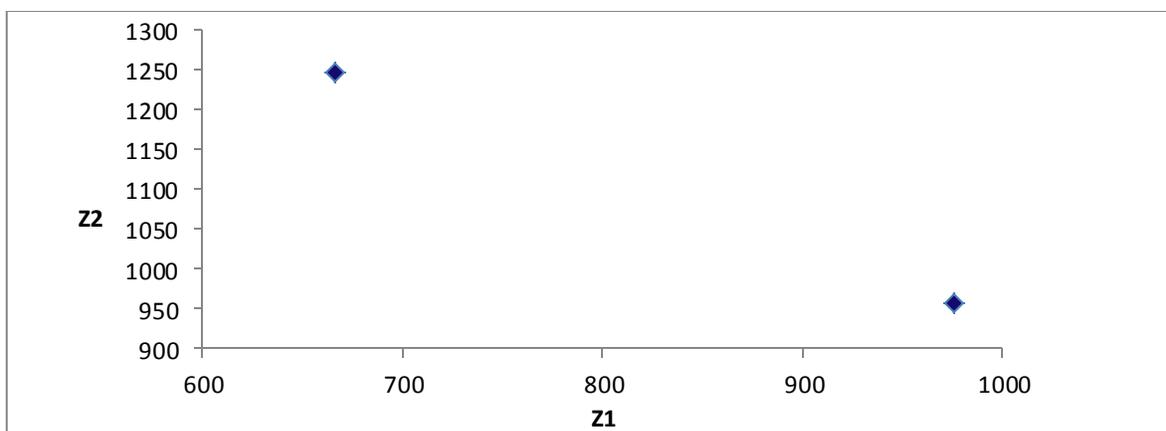


Figura 5.6: Gráfico de las soluciones no inferiores extremas.

Para obtener el conjunto de soluciones no inferiores, se recurrió al método NISE, cuyos fundamentos teóricos se encuentran en Cohon (1978).

En síntesis, el método NISE minimiza una sola función que está formada por una combinación lineal de los dos objetivos. La pendiente que conecta dos puntos se utiliza para obtener los pesos correspondientes.

El proceso del uso de los pesos en el problema ponderado se basa en la pendiente de la línea recta que conecta los dos puntos adyacentes S_i y S_{i+1} en la aproximación actual. La pendiente tiene la siguiente expresión matemática:

$$P = \frac{Z_2(S_i) - Z_2(S_{i+1})}{Z_1(S_{i+1}) - Z_1(S_i)} \quad (5.6)$$

Para el ejemplo demostrativo, se obtiene la pendiente reemplazando los valores obtenidos con la SNIE₁ y la SNIE₂:

$$P = \frac{1246 - 957}{976 - 666} = 0,932225$$

En el gráfico (figura 5.7) la línea segmentada corresponde a la pendiente entre estos dos puntos.

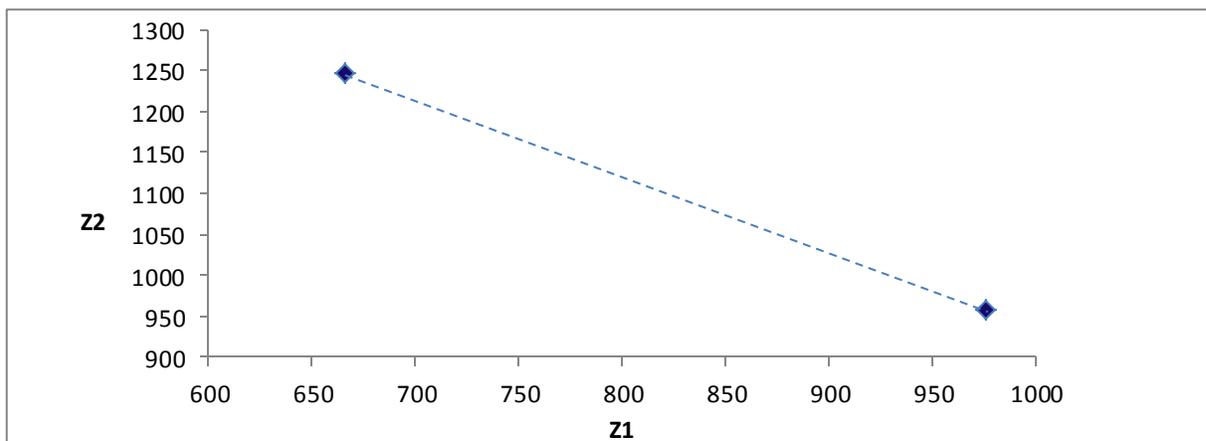


Figura 5.7: Pendiente de la recta obtenida con la solución de la SNIE1 y SNIE2.

Con esta pendiente, se obtiene el valor del peso que será utilizado para la generación de una nueva solución no inferior.

De Cohon (1978) se puede obtener la siguiente expresión matemática que sirve para la obtención de una nueva solución no inferior:

$$\text{Minimizar } Z(x_1, \dots, x_n; i; i+1) = \frac{Z_2(S_i) - Z_2(S_{i+1})}{Z_1(S_{i+1}) - Z_1(S_i)} Z_1(x_1, \dots, x_n) + Z_2(x_1, \dots, x_n) \quad (5.7)$$

Reemplazando la ecuación (5.7) en el modelo (4.1), se obtiene la siguiente expresión matemática:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } Z = P \sum_{\substack{k \in K \\ (i,j) \in A}} d_{ij} x_{ij}^k + \sum_{(i,j) \in A} d_{ij} w_{ij} \\ \text{s.a.} \end{aligned} \quad (5.8)$$

(4.4) – (4.15)

Por lo tanto, con esta nueva función objetivo se puede resolver el modelo como un problema de programación lineal con un sólo objetivo, y por consiguiente, obtener una nueva solución no inferior, la que se ve graficada en la figura 5.8:

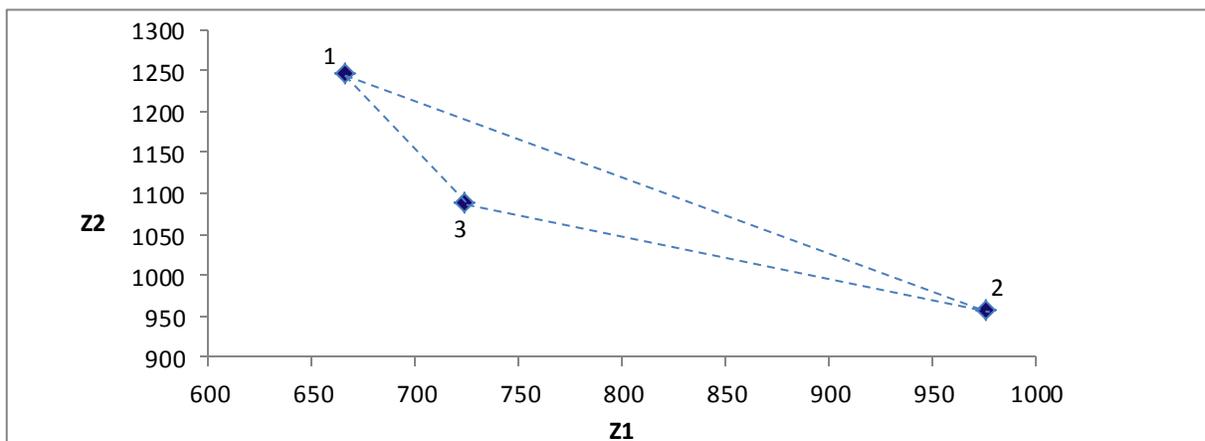


Figura 5.8: Obtención de una solución no inferior a partir de la SNIE1 y la SNIE2.

En la figura 5.8 se observa que el punto $(Z_1, Z_2) = (724, 1087)$ corresponde a la solución no inferior número 3. Idéntico procedimiento se realiza para obtener las siguientes soluciones, en el que se trazan nuevas pendientes para buscar soluciones no inferiores entre los puntos $(666, 1246)$ y $(724, 1087)$, y entre los puntos $(724, 1087)$ y $(976, 957)$.

A continuación (figura 5.9) se muestran las nuevas soluciones no inferiores, obtenidas entre los puntos mencionados anteriormente.

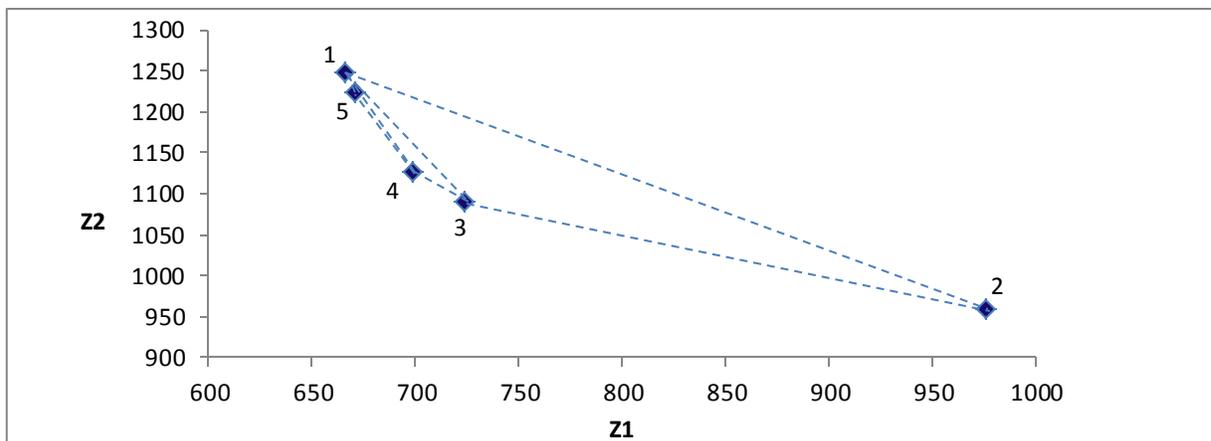


Figura 5.9: Obtención de nuevas soluciones no inferiores.

En la figura 5.9 las nuevas soluciones no inferiores 4 y 5 se encuentran en los puntos $(Z_1, Z_2) = (699, 1125)$ y $(Z_1, Z_2) = (671, 1222)$ respectivamente. De forma análoga se trazan nuevas pendientes entre las nuevas soluciones no inferiores obtenidas y las anteriores. De esta manera se tendrán nuevas soluciones hasta que entre dos puntos no existan más soluciones, y en cuyo caso, el método NISE elegirá uno de los dos puntos como solución no inferior.

5.5 Soluciones no inferiores para la red de 50 nodos

A continuación, en la tabla 5.3, se muestran las 7 soluciones no inferiores obtenidas al utilizar el método NISE.

Tabla 5.3: Soluciones no inferiores para la red de 50 nodos

Solución no inferior	Distancia total recorrida por camiones (Z_1)	Distancia total recorrida por clientes (Z_2)
1	666	1246
2	976	957
3	724	1087
4	699	1125
5	671	1222
6	906	961
7	762	1059

En la figura 5.10, el gráfico muestra la curva de *trade-off* entre la distancia total recorrida por los camiones (Z_1) versus la distancia total recorrida por los clientes a su respectivo contenedor (Z_2) para las 7 soluciones no inferiores de la red de 50 nodos.

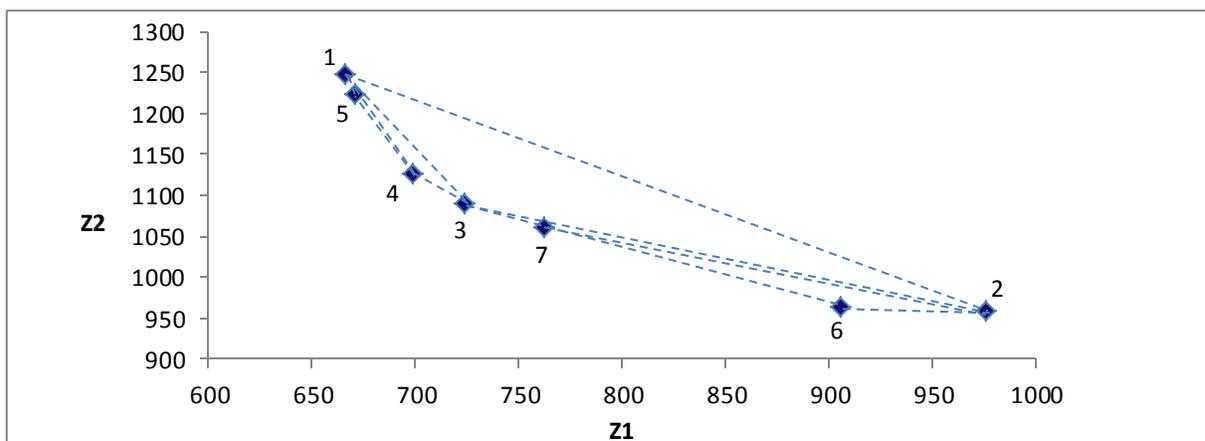


Figura 5.10: Conjunto de soluciones no inferiores.

De esta manera el tomador de decisiones, quien es el que finalmente determina que beneficios se pueden obtener al escoger una alternativa por sobre otra, tiene

un abanico de posibilidades para elegir la mejor alternativa, según su presupuesto y criterio.

A continuación se presenta, a modo de ejemplo, una representación gráfica para dos soluciones no inferiores de la red de 50 nodos.

5.5.1 Solución no inferior N°3

La figura 5.11 muestra la solución no inferior N°3 obtenida con el método NISE, donde la distancia total recorrida por los camiones es $Z_1=724$, mientras que la distancia total recorrida por los clientes es $Z_2=1087$.

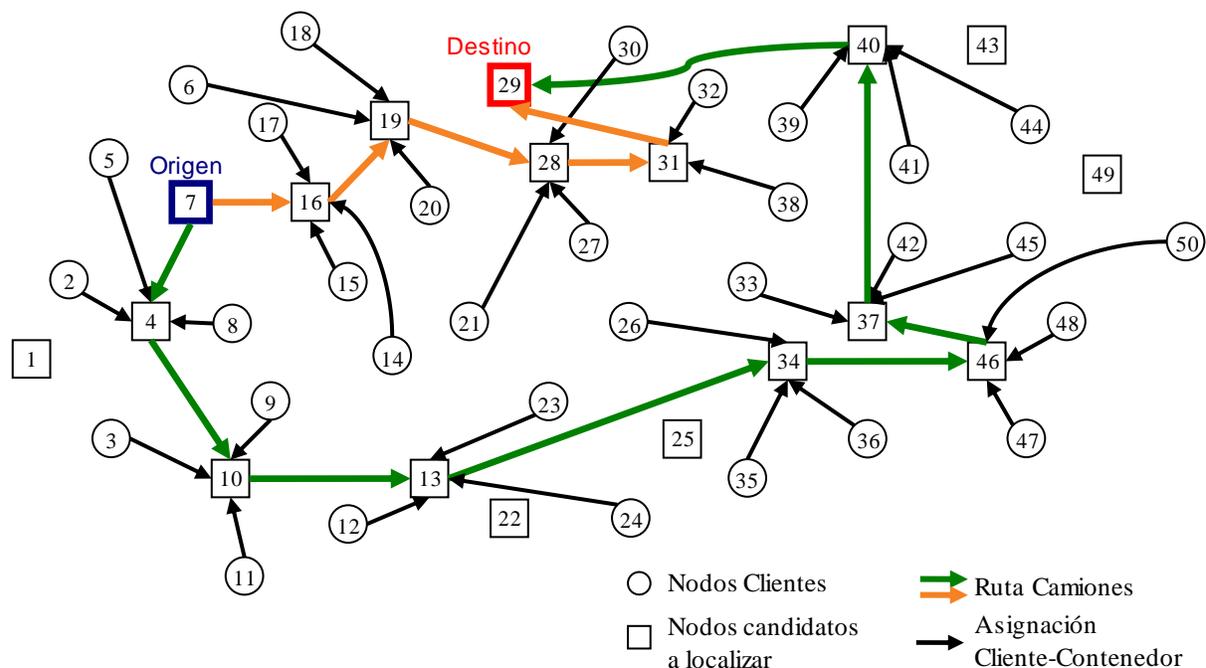


Figura 5.11: Solución no inferior N°3 para la red de 50 nodos.

Se puede observar claramente que se necesitaron 2 camiones para satisfacer la demanda total de basura generada por los clientes y que algunos de estos

clientes, tales como el 44, 45 y 50, deben recorrer distancias relativamente altas, en comparación al resto, en virtud de obtener menores costos para los camiones.

Para encontrar esta solución, se realizaron 7 iteraciones con el problema relajado y 3 enteras, donde el algoritmo de planos cortantes encontró y eliminó 2 subtours (realizó 2 cortes o restricciones) mediante 2 iteraciones. Además, el tiempo total de CPU, de todas las iteraciones del algoritmo, fue de 43,3 segundos.

5.5.2 Solución no inferior N°6

De igual modo que el apartado anterior, en la figura 5.12 se ilustra la solución no inferior N°6 al problema.

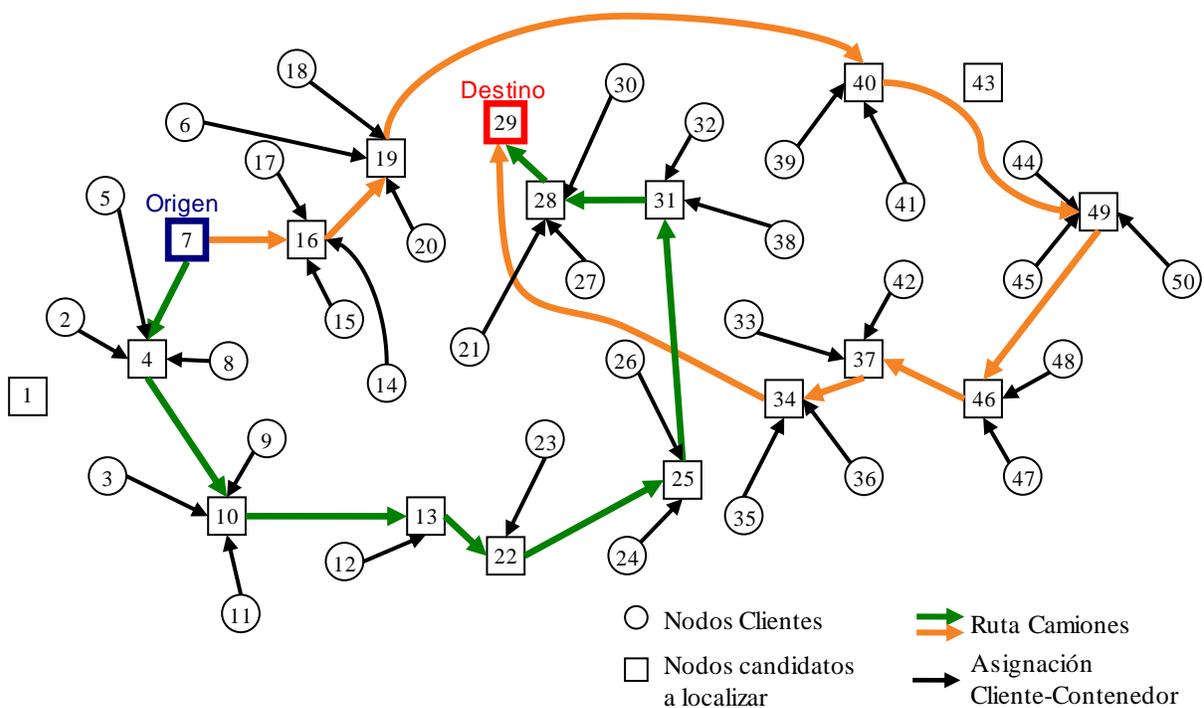


Figura 5.12: Solución no inferior N°6 para la red de 50 nodos.

En este caso se ha sacrificado la distancia recorrida por los camiones (un incremento en los costos) a favor de reducir la distancia que deben recorrer, por ejemplo, los mismos clientes 44, 45 y 50 de la figura 5.11, estando esta vez, notoriamente asignados a un contenedor más cercano que antes.

En otras palabras, la distancia total recorrida por los camiones aumentó a $Z_1=906$, mientras que la distancia total recorrida por los clientes disminuyó a $Z_2=961$.

Se realizó solamente una iteración con el problema relajado, mientras que el algoritmo de planos cortantes realizó 5 cortes (restricciones) para obtener esta solución no inferior libre de subtours. El tiempo de proceso CPU, del total de iteraciones, fue de 80,9 segundos.

Hay que dejar en claro que ambas soluciones no inferiores son óptimas y es el tomador de decisiones quien debe decidir qué solución escoger, es por esta razón que el método NISE le entrega un conjunto de soluciones, bajo diferentes ponderaciones, de tal modo, que pueda tomar una decisión según su criterio, presupuesto y/o necesidades.

5.5.3 Selección de soluciones no inferiores

En muchos casos, el conjunto de soluciones no inferiores, entregado por el método NISE, contiene soluciones que no son muy relevantes, como puede ser el caso de aquellas muy cercanas a las soluciones no inferiores extremas, como es el caso de la SNI N°5 que es prácticamente igual a la SNIE N°1.

Por otra parte, es posible que el método NISE no encuentre todas las SNI. En tal caso se puede aplicar el método de las restricciones para obtener otras SNI que se encuentren dentro del intervalo definido por dos soluciones obtenidas con el método NISE, Cohon (1978). En la figura 5.10 se observa que entre las SNI N°6 y N°7, existe un intervalo en que el método NISE no encontró ninguna otra SNI. Sin

embargo, es posible encontrar otras SNI en dicho intervalo. Por ejemplo, en este rango se puede aplicar una de las siguientes restricciones (en forma independiente):

$$\left. \begin{aligned} Z_1 &= \sum_{k \in J} \sum_{i \in J} \sum_{j \in J} d_{ij} x_{ij}^k \leq 800 \\ Z_1 &= \sum_{k \in J} \sum_{i \in J} \sum_{j \in J} d_{ij} x_{ij}^k \leq 850 \\ Z_1 &= \sum_{k \in J} \sum_{i \in J} \sum_{j \in J} d_{ij} x_{ij}^k \leq 900 \end{aligned} \right\} \quad (5.9)$$

Por su parte, la función objetivo del modelo estaría conformada solamente por los costos (distancias) de los clientes.

$$\text{Minimizar } Z_2 = \sum_{i \in N \setminus J} \sum_{j \in J} d_{ij} w_{ij} \quad (5.2)$$

Sujeto a :

$$(5.9)$$

$$(4.4) - (4.16)$$

Utilizando las restricciones (5.9), cada una por separada, se encontraron 3 nuevas soluciones no inferiores, ubicadas entre las SNI N°6 y N°7. La tabla 5.4 y la figura 5.13 detallan dichas soluciones no inferiores.

Tabla 5.4: Búsqueda de SNI en un intervalo, mediante el método de las restricciones.

Solución no inferior	Distancia total recorrida por camiones (Z_1)	Distancia total recorrida por clientes (Z_2)
6	906	961
7	762	1059
8	800	1042
9	847	1027
10	882	978

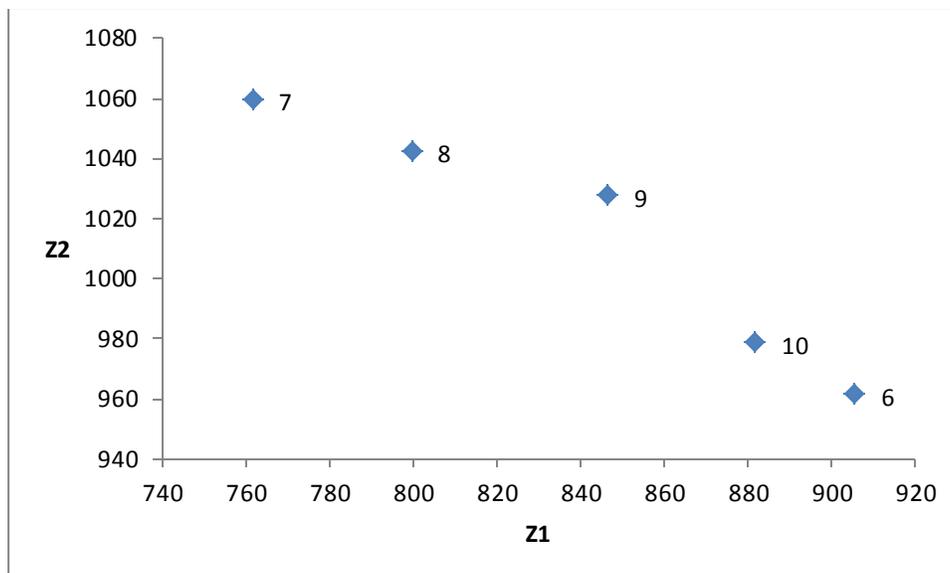


Figura 5.13: Búsqueda de SNI en un intervalo, mediante el método de las restricciones.

De este modo, el número de soluciones no inferiores aumentó de 7 a 10, entregándole al tomador de decisiones un abanico de alternativas más amplio y detallado que le permitirá elegir la alternativa que más le convenga. Este proceso de búsqueda puede continuar si lo requiere. Donde será él quien, finalmente deba decidir cuánto está dispuesto a gastar en diseñar el sistema de rutas y en la asignación de contenedores, según su presupuesto y criterio.

La figura 5.14 muestra el conjunto completo de SNI obtenida con ambos métodos

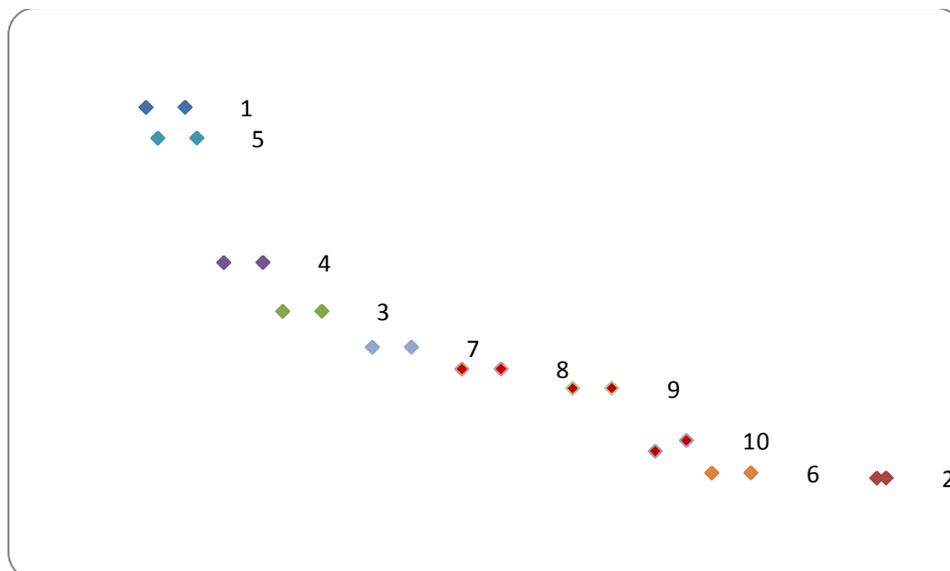


Figura 5.14: Conjunto de SNI obtenidas usando el método NISE y el método de las restricciones.

5.6 Procedimiento propuesto para resolver el PLCRV para la recolección de residuos domiciliarios

En esta sección se resume el procedimiento para resolver el PLCRV para la recolección de residuos domiciliarios, según todo lo detallado anteriormente.

Paso 1 Determinar un nodo origen y un nodo destino para el PLCRV.

Paso 2 Resolver el problema relajado para encontrar las soluciones extremas del conjunto de soluciones no inferiores ($SNIE_1$ y $SNIE_2$) a través del método de las restricciones (ver sección 5.4.1 y 5.4.2, respectivamente).

Paso 2.1 Si la solución encontrada es entera. Determinar si existen subtours en dicha solución.

Paso 2.1.1 Si existen subtours, entonces ejecutar el método de planos cortantes para eliminar

subtours maximales y minimales a través de cortes (restricciones) según vayan apareciendo. Este método realizará iteraciones hasta eliminar todos los subtours.

Paso 2.1.2 Si no existen subtours en una solución, entonces la solución encontrada es óptima y no inferior extrema. Determinar la pendiente entre estas dos soluciones no inferiores extremas. En este caso ir al Paso 3.

Paso 2.2 Si la solución es fraccionaria, se procede a resolver el problema entero, a partir de la solución anterior. Luego, determinar si existen subtours en la nueva solución encontrada.

Paso 2.2.1 Si existen subtours, entonces ejecutar el método de planos cortantes para eliminar subtours maximales y minimales a través de cortes (restricciones) según vayan apareciendo. Este método realizará iteraciones hasta eliminar todos los subtours.

Paso 2.2.2 Si no existen subtours en una solución, entonces la solución encontrada es óptima y no inferior extrema. Determinar la pendiente entre estas dos soluciones no inferiores extremas. En este caso ir al Paso 3.

Paso 3 Resolver el problema relajado. Determinar si existen subtours en la solución encontrada.

Paso 3.1 Si la solución encontrada es entera. Determinar si existen subtours en dicha solución.

Paso 3.1.1 Si existen subtours, entonces ejecutar el método de planos cortantes para eliminar subtours maximales y minimales a través de cortes (restricciones) según vayan apareciendo. Este método realizará iteraciones hasta eliminar todos los subtours.

Paso 3.1.2 Si no existen subtours en una solución, entonces la solución encontrada es óptima y no inferior extrema. Determinar la pendiente entre estas dos soluciones no inferiores extremas. En este caso ir al Paso 4.

Paso 3.2 Si la solución es fraccionaria, se procede a resolver el problema entero, a partir de la solución anterior. Luego, determinar si existen subtours en la nueva solución encontrada.

Paso 3.2.1 Si existen subtours, entonces ejecutar el método de planos cortantes para eliminar subtours maximales y minimales a través de cortes (restricciones) según vayan apareciendo. Este método realizará iteraciones hasta eliminar todos los subtours.

Paso 3.2.2 Si no existen subtours en una solución, entonces la solución encontrada es óptima y no inferior extrema. Determinar la pendiente entre estas dos soluciones no inferiores extremas. En este caso ir al Paso 4.

Paso 4 Calcular nuevos intervalos de búsqueda entre la nueva solución no inferior obtenida y las anteriores. Determinar pendientes y volver al Paso 3.

Paso 5 Finalizar cuando estén analizadas todas las pendientes entre los intervalos de soluciones no inferiores.

Paso 6 Si se desean encontrar más soluciones no inferiores, entonces aplicar el método de las restricciones en un intervalo dado.

El procedimiento propuesto se implementó utilizando el lenguaje AMPL (A MATHEMATICAL PROGRAMMING LANGUAGE), el cual es un programa computacional desarrollado en Bell Labs por R. Fourer, D.M. Gay y B.W. Kernighan en el año 1985. Este software permite que el usuario utilice un lenguaje algebraico para plantear y resolver modelos de optimización, mientras que el computador de manera interna, se comunica con el solver que corresponda.

Este software es una interfaz entre el usuario y el solver, desarrollado para ser utilizada en ambiente Unix, DOS. Además proporciona una interfaz sencilla que permite llevar de manera relativamente directa problemas de programación matemática al computador para resolverlos usando diferentes solvers (CPLEX, MINOS, etc.). Para más información se puede visitar el sitio web del producto en www.ampl.com.

Capítulo 6: RESULTADOS COMPUTACIONALES PARA INSTANCIAS TEST

El modelo propuesto, con su respectivo algoritmo, fue aplicado a 4 diferentes redes (problemas test). Las dos primeras, de 50 y 81 nodos, son de elaboración propia (Mohr, 2011); las otras dos redes, de 100 nodos cada una, fueron extraídas de la biblioteca de Beasley, en internet.

El PLCRV fue resuelto utilizando el optimizador lineal CPLEX Versión 12.2.0.0 en conjunto con AMPL Versión 20021031. Todos los experimentos fueron ejecutados en un computador con procesador Intel Core i3, 3.10GHz (2,00 GB RAM).

En la resolución del PLCRV, se utilizó el algoritmo de planos cortantes para encontrar cotas inferiores más ajustadas y luego se resolvió el modelo entero utilizando Branch and Bound. Para encontrar las soluciones no inferiores, se utilizó el método NISE.

Para cada instancia, se usaron los costos originales de la red, mientras que la demanda de cada cliente, para facilitar los análisis, se consideró igual a 2. Además, el conjunto de nodos candidatos a localizar un contenedor, se generó a partir de un pequeño algoritmo que adiciona nodos al conjunto J de manera relativamente dispersa, con respecto a N , según la cantidad de nodos candidatos que se deseen utilizar.

Para todas las redes se utilizaron 4 pares de nodos de origen y destino elegidos aleatoriamente.

Las tablas resumen (6.1 - 6.5) que se muestran a continuación, detallan los resultados obtenidos con los algoritmos planteados, para cada una de las instancias test que se utilizaron en esta tesis.

Tabla 6.1: Resultados Conjunto de SNI, Red 50 nodos.

ID	Red	Card. J	Origen	Destino	Cap. Conte.	Cap. Cami.	N_SNI	N_ST	T_CPU
1	50	7	18	47	25	3	2	0	0,1
2	50	7	11	40	25	3	3	0	0,3
3	50	7	21	31	25	3	3	0	0,4
4	50	7	7	29	25	3	2	0	0,1
5	50	12	18	47	13	14	6	0	3,7
6	50	12	11	40	13	14	5	0	3
7	50	12	21	31	13	14	4	0	2,3
8	50	12	7	29	10	6	6	1	26,9
9	50	18	18	47	6	7	7	0	30,9
10	50	18	11	40	6	7	7	0	30,6
11	50	19	21	41	6	7	10	0	117,1
12	50	18	7	29	6	7	7	8	341,4

Tabla 6.2: Resultados Conjunto de SNI, Red 81 nodos.

ID	Red	Card. J	Origen	Destino	Cap. Conte.	Cap. Cami.	N_SNI	N_ST	T_CPU (s)
13	81	10	21	80	25	5	5	0	2,2
14	81	10	2	78	25	5	4	0	3,3
15	81	10	55	64	25	5	2	0	1,3
16	81	10	18	34	25	5	3	0	0,4
17	81	18	21	80	14	7	10	0	57,9
18	81	18	2	78	14	7	9	0	103,8
19	81	18	55	64	14	7	11	7	324,7
20	81	18	18	34	14	7	12	0	150,9
21	81	29	21	80	6	7	9	1	791,2
22	81	29	2	78	6	7	12	1	1598,9
23	81	29	55	64	6	7	9	8	3711,1
24	81	29	18	34	6	7	10	3	3786,2

Tabla 6.3: Resultados Conjunto de SNI, Red 100 nodos pmed01, Beasley.

ID	Red	Card. J	Origen	Destino	Cap. Conte.	Cap. Cami.	N_SNI	N_ST	T_CPU (s)
25	100	11	1	91	25	5	3	0	2,5
26	100	12	16	48	25	5	3	0	3
27	100	12	28	77	25	5	3	0	2,8
28	100	12	66	82	25	5	2	0	0,5
29	100	24	1	91	8	7	5	1	106,9
30	100	24	16	48	8	7	7	7	899,4
31	100	24	28	77	8	7	5	4	201,1
32	100	24	66	82	8	7	5	8	621,2
33	100	34	1	91	6	7	8	14	10880,4
34	100	35	16	48	6	7	10	6	13395
35	100	35	28	77	6	7	9	19	10374,2
36	100	35	66	82	6	7	9	5	1567,4

Tabla 6.4: Resultados Conjunto de SNI, Red 100 nodos pmed05, Beasley (2013).

ID	Red	Card. J	Origen	Destino	Cap. Conte.	Cap. Cami.	N_SNI	N_ST	T_CPU (s)
37	100	12	4	85	21	7	3	0	4,3
38	100	12	30	70	21	7	3	0	2,4
39	100	12	70	91	21	7	4	0	3,3
40	100	12	30	85	21	7	4	0	4,3
41	100	24	4	85	8	7	4	0	249,4
42	100	24	30	70	8	7	6	2	2703,3
43	100	24	70	91	8	7	5	1	304,3
44	100	24	30	85	8	7	4	5	278,7
45	100	35	4	85	6	7	9	0	2556,5
46	100	35	30	70	6	7	10	17	14865,3
47	100	34	70	91	6	7	9	0	1040,7
48	100	35	30	85	6	7	10	11	4086,2

Tabla 6.5: Resultados Conjunto de SNI, Red 200 nodos pmed07, Beasley.

ID	Red	Card. J	Origen	Destino	Cap. Conte.	Cap. Cami.	N_SNI	N_ST	T_CPU (s)
49	200	22	2	16	23	7	5	3	3692,8
50	200	22	64	78	23	7	5	0	50,1
51	200	22	16	172	23	7	6	13	545,2
52	200	52	2	16	9	16	3	2	9766,1
53	200	52	64	78	9	16	10	16	46000*
54	200	52	16	172	9	16	15	9	46000*
55	200	68	2	16	7	8	-	-	7576**
56	200	68	64	78	7	8	-	-	6459**
57	200	67	16	172	7	8	-	-	17456**

6.1 Análisis de resultados

De los 57 resultados mostrados en las tablas 6.1 - 6.5, se puede destacar que el algoritmo entrega un conjunto de soluciones no inferiores en un periodo de tiempo bastante aceptable. Se observa en la tabla 6.4 (instancia 46), el mayor tiempo de resolución para encontrar el conjunto de soluciones completo, el cual apenas sobrepasa las 4 horas. Hay que destacar que el algoritmo encuentra 10 soluciones en 4 horas, es decir, a una razón aproximada de 24 minutos por cada solución no inferior.

El tiempo que le sigue es de sólo 3 horas aproximadamente, observadas en las instancias 33 y 35 de la tabla 6.3. Luego, en promedio, las demás soluciones no sobrepasan la hora de tiempo de resolución.

Se observa además, en la tabla 6.5, dos tipos de soluciones diferentes a los conjuntos de soluciones óptimas entregados desde las instancias 49 a la 52. Aquellos tiempos marcados con (*), son las soluciones encontradas dentro del

límite de tiempo establecido a priori (aproximadamente 13 hrs.) para que el Solver obtenga SNI.

Por otro lado, se tienen los tiempos señalados con (**), que son aquellas instancias donde el Computador se quedó fuera de memoria y no se pudo obtener solución alguna.

En general, el algoritmo resuelve el PLCRV en tiempos muy aceptables hasta una red de 100 nodos. Sin embargo, al doblar el tamaño de ésta, para ciertos casos, los tiempos se elevan demasiado o simplemente la capacidad del computador no es suficiente para resolver el problema.

En el Anexo se pueden encontrar los resultados obtenidos para diferentes instancias de las redes estudiadas anteriormente. Este Anexo detalla información para cada SNI, tales como: los tiempos de cada una, los valores de ambos objetivos (Z_1 y Z_2), tanto enteros, como fraccionarios y sus respectivos GAP.

Capítulo 7: COMENTARIOS Y CONCLUSIONES

A continuación se presentan las conclusiones obtenidas a partir del desarrollo del tema:

- A partir del estado del arte se desprende que a diferencia de los trabajos revisados, en esta tesis se aborda el problema de la localización de los contenedores y el ruteo de vehículos con restricciones de capacidad, tanto en los contenedores como en los camiones, en forma conjunta. Mientras que la mayoría de los trabajos que tratan este problema lo hacen de forma separada o bien no las consideran.
- El modelo de programación lineal, para la localización de contenedores y ruteo de vehículos para la recolección de residuos domiciliarios, propuesto en esta tesis, es aplicable en cualquier escenario de recolección de basura que funcione bajo el sistema de contenedores y que posea tanto un punto de partida, como uno de llegada.
- Este modelo permite optimizar el sistema de recolección de basura, entregando como resultado cuántos camiones son necesarios utilizar y qué recorrido deben llevar a cabo. Además, facilita información de la cantidad de contenedores que se necesitan y en qué puntos o sectores deben ser instalados para satisfacer la demanda de generación de basura, de modo que los clientes tengan que caminar lo menos posible.
- El algoritmo de planos cortantes en la resolución del problema relajado, permite eliminar la mayoría de los subtours que se pudieron haber generado resolviendo el problema de forma entera. Esto da paso a una disminución importante en los tiempos CPU, ya que el proceso de

eliminación de subtours, utiliza un porcentaje importante del tiempo total de CPU, ya que debe resolverse bajo el algoritmo branch and bound.

- En cuanto a los resultados obtenidos, el algoritmo de resolución del PLCRV permite resolver el problema en tiempos de CPU bastante bajos y de forma óptima hasta 100 nodos. Sin embargo, para algunas instancias trabajadas en redes de 200 nodos, el computador queda fuera de memoria.
- Debido a que el PLCRV para la recolección de residuos domiciliarios es más bien un problema estratégico, que operacional, no estaría fuera de lugar el obtener tiempos de resolución, para un caso, cercanos a las 4 horas, ya que este tiempo involucra el obtener un conjunto de soluciones y no sólo una, como se podría pensar. Lo que permite inferir que el algoritmo para resolver el PLCRV es un aporte para la comunidad científica.
- La generación del conjunto de soluciones no inferiores es bastante intensa computacionalmente. Sin embargo, a no ser que se utilice el método para encontrar las soluciones no inferiores extremas secundarias, los mayores tiempos de resolución se adjudican a la obtención de las soluciones no inferiores extremas, las cuales se obtienen de forma independiente a las demás SNI.
- Se puede dar el caso que existan intervalos donde el método NISE no encuentre soluciones no inferiores y, sin embargo, es posible que las hayan. En este caso, el tomador de decisiones puede realizar una búsqueda exhaustiva en el intervalo en cuestión y, a través del método de las restricciones pueda encontrar la o las soluciones no inferiores en dicho intervalo según lo requiera.

- Finalmente, la resolución del problema y, junto a éste, los resultados entregados por el algoritmo, le entregará al tomador de decisiones un completo abanico de soluciones que le permitirá tomar la decisión que más le acomode basándose en su presupuesto, su criterio, sus preferencias, etc, en un periodo de tiempo absolutamente razonable.
- Es necesario, para instancias muy grandes, recurrir a procedimientos heurísticos para encontrar buenas soluciones.

Bibliografía

ANGELELLI, E., & SPERANZA, M. G. (2002). The application of a vehicle routing model to a waste-collection problem: two case studies *Journal of the Operational Research Society*, 53, 944-952.

ANTUNES, A. P. (1999). Location analysis helps manage solid waste in portugal. *INTERFACES* 29, 32-43.

ARAMIDES, ED., MITROPOULOS, P., GIANNIKOS, I., & MITROPOULOS I. (2009). A multi - methodological approach to the development of a regional solid waste management system. *Journal of the Operational Research Society*, 60, 758-770.

AYALA, R. A., & GONZÁLES, B. E. (2001). Asignación de rutas de vehículos para un sistema de de residuos sólidos en la acera. *Revista de Ingeniería*, Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia, 13.

BALDACCI, R., BODIN, L., & MINGOZZI, A. (2006). The multiple disposal facilities and multiple inventory locations rollon–rolloff vehicle routing problem. *Computers & Operations Research*, 33, 2667–2702.

BAUTISTA, J., & PEREIRA, J. (2003). Procedimientos para la localización de áreas de aportación de residuos urbanos. 27 Congreso Nacional de Estadística e Investigación Operativa. Lleida, 8–11 de abril de 2003.

BAUTISTA, J., FERNÁNDEZ, E., & PEREIRA, J. (2008). Solving an urban waste collection problem using ants heuristics. *Computers & Operations Research*, 35, 3020 – 3033.

BEASLEY, J.-E. (1990). OR-library: distributing test problems by electronic mail. *Journal of the Operational Research Society*, 41, 1069 – 72. Extraído el 06 de Abril de 2013 desde <http://people.brunel.ac.uk/~mastjib/jeb/orlib/pmediinfo.html>.

BENJAMIN, A. M., & BEASLEY, J. E. (2010). Metaheuristics for the waste collection vehicle routing problem with time windows, driver rest period and multiple disposal facilities. *Computers & Operations Research*, 37, 2270–2280.

BERBEL, J. (1992). Planificación del uso del territorio y programación matemática multicriterio. *Revista de Estudios Agro-Sociales*, 159.

BHAT, V. N. (1996). A model for the optimal allocation of trucks for solid waste management. *Waste Management & Research*, 14, 87–96.

BUHRKAL, K., LARSEN, A., & ROPKE, S. (2012). The waste collection vehicle routing problem with time windows in a city logistics context. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, 39, 241 – 254.

CERDA, FERNANDO. (2005). Localización de una estación de transferencia de residuos sólidos domiciliarios en la comuna de Chiguayante. Memoria de título no publicada. Departamento de Ingeniería Civil, Facultad de Ingeniería, Universidad del Bío-Bío.

COHON, J. 1978. *Multiobjective Programming and Language*. New York. Academic Press Inc, 333p.

COLPO, A. (2002). Definición de áreas óptimas para la localización de rellenos sanitarios: Zona de estudio comuna de Coronel. Tesis de licenciatura en ciencias de la construcción no publicada. Departamento Ciencias de la Construcción. Facultad de Arquitectura, Construcción y Diseño. Universidad del Bío-Bío.

CORDEAU, J., LAPORTE, G., SAVELSBERGH, M., & VIGO, D. (2007). Vehicle routing. En: Barnhart C. & Laporte G. (Eds.), Handbook in OR & MS, Vol. 14. Elsevier B.V, 367-428.

CRISTALLO, G. (1994). Optimisation de tournées de véhicules de transport container. Mémoire de licence en Sciences Economiques et Sociales, Facultés Universitaires Notre-Dame de la Paix, Namur, Belgium.

CURRENT, J., REVELLE, Ch., COHON J. 1987. The Median Shortest Path Problem: A Multiobjective Approach to Analyze Cost vs. Accesibility in the Design of Transportation Networks, Revista Transportation Science, 21, 188-197.

DE MEULEMEESTER, L., LAPORTE, G., LOUVEAUX, F. V., & SEMET, F. (1997). Optimal Sequencing ok Skip Collections and Deliveries. The Journal of the Operational Research Society, 48, 57-64.

DÍAZ C. (1993). Una formulación de redes para el problema de recolección de basura en la ciudad de concepción. Memoria de título no publicada. Departamento de Ingeniería Industrial, Facultad de Ingeniería, Universidad de Concepción. Concepción, Chile.

DURAN, G. (2006). Investigación de Operaciones, Modelos Matemáticos y Optimización. En: SEMINARIO JUNAEB – DII. Enero de 2006. Santiago. Universidad de Chile. Departamento de Ingeniería Industrial. Centro de Gestión de Operaciones. 57p.

EISENSTEIN, D. D., & IYER, A. V. (1997). Garbage collection in Chicago: a dynamic scheduling model. Mngt Sci, 43, 922-933.

ERKUT, E., KARAGIANNIDIS, A., PERKOULIDIS, G., & TJANDRA, S. A. (2008). A multicriteria facility location model for municipal solid waste management in North Greece. *European Journal of Operational Research*, 187, 1402–1421.

ESPINOZA, C. A. (1999). El problema del vendedor viajero y su solución a través de los algoritmos genéticos. Memoria de título no publicada. Facultad de Ingeniería, Universidad de Concepción.

FACCIO, M., PERSONA, A., & ZANIN, G. (2011). Waste collection multi objective model with real time traceability data. *Waste Management*, 31, 2391–240.

FERNÁNDEZ, E., ALBAREDA, M., DÍAZ, A., & MARTINEZ, O. (2003). Problemas combinados de localización y rutas. In: V Seminario Español de Localización. Lorca.

FLORES, V. (2009). Localización de instalaciones no deseables: Aportes desde la geografía a la instalación de rellenos sanitarios en el área metropolitana de Concepción. Memoria de título no publicada. Departamento de Geografía, Facultad de Arquitectura, Urbanismo y Geografía, Universidad de Concepción. Concepción, Chile.

GALANTE, G., AIELLO, G., ENEA, M., & PANASCIA, E. (2010). A multi-objective approach to solid waste Management. *Waste Management*, 30, 1720–1728.

GARRIDO, C., & LEIVA C. (2008). Desarrollo de un procedimiento de ruteo para la recolección de residuos domiciliarios sólidos en la comuna de Tomé. Memoria de Título sin publicar. Departamento de Ingeniería Industrial, Facultad de Ingeniería, Universidad del Bío-Bío.

GHIANI, G., GUERRIERO, F., IMPROTA, G., & MUSMANNO, R. (2005). Waste collection in Southern Italy: solution of a real-life arc routing problem. *Intl. Trans. in Op. Res.* 12, 135–144.

GHIANI, G., IMPROTA, G., & LAPORTE, G. (2001). The capacitated arc routing problem with intermediate facilities. *Networks*, 37, 3, 134–143.

GOLDEN, B.L., ASSAD, A.A., WASIL, E.A. (2002) Routing vehicles in the real world: applications in the solid waste, beverage, food, dairy, and newspaper industries. In: P. Toth, D. Vigo, editors. *The vehicle routing problem*. Philadelphia, PA: SIAM, 245–86.

GRIMALDI, R, P. (1989). *Matemáticas discretas y combinatorias: Introducción y aplicaciones*. Argentina: Addison-Wesley Iberoamericana.

HILLIER F. S., & Lieberman G. J. (2010). *Introducción a la investigación de operaciones*. 9ª ed. México. McGraw-Hill. 978p.

HWANG, H. (2002). An improved model for vehicle routing problem with time constraint based on genetic algorithm. *Computers & Industrial Engineering*, 42, 361–369.

KIM, B., KIM, S., & SAHOO, S. (2006). Waste collection vehicle routing problem with time Windows. *Computers & Operations Research*, 33, 3624–3642.

KIRCA O, ERKIP N. (1988). Selecting transfer station locations for large solid waste systems. *European Journal of Operational Research*, 38, 339–49.

KULCAR T. (1996). Optimizing solid waste management collection in Brussels. *European Journal of Operational Research*, 90, 71–77.

LEI, H., LAPORTE, G., & GUO, B. (2011). The capacitated Vehicle routing problema with stochastic demands and time windows. *Computers & Operations Research*, 38, 1775–1783.

LI, J., BORENSTEIN, D., & MIRCHANDANI, P. (2008). Truck scheduling for solid waste collection in the City of Porto Alegre, Brazil. *Omega*, 36, 1133 – 1149.

LUENGO, G. (1992). El problema de la recolección de basura. Memoria de título no publicada. Departamento de Ingeniería Industrial, Facultad de Ingeniería, Universidad del Bío-Bío.

MANJARREZ, M. (2008) Clasificación de basura. Recuperado el 16 de noviembre de 2011, de <http://basuraorganicaeinorganica.blogspot.com/>.

MITROPOULOS, P., GIANNIKOS, I. & MITROPOULOS I. (2009). Exact and heuristic approaches for the locational planning of an integrated solid waste management system. *Oper Res Int J*, 9, 329–347.

MOHR, M. (2011). Localización de contenedores y ruteo de vehículos para la recolección de residuos domiciliarios. Memoria de título no publicada. Departamento de Ingeniería Industrial, Facultad de Ingeniería, Universidad del Bío-Bío.

MORRISSEY A, BROWNE J. (2004). Waste management models and their application to sustainable waste management. *Waste Management*, 24, 297–308.

NUORTIO T., KYTÖJOKI J., NISKA H. Y BRÄYSY O. (2006). Improved route planning and scheduling of waste collection and transport. *Expert Systems with Applications*, 30, 223–232.

PANDITT R & MURALIDHARAN B. (1995). A capacitated general routing problem on mixed networks. *Computers & Operations Research*, 22, 465-478.

RACERO, J., & PÉREZ, E. (2006). Optimización del sistema de rutas de recolección de residuos sólidos domiciliarios (Ecoeficiencia). X Congreso de Ingeniería de Organización. Valencia.

RAHMAN M. AND KUBY M. (1995). A multiobjective model for locating solid waste transfer facilities using an empirical opposition function. *INFOR*, 33, 34-49.

RUIZ N. (2009). Aplicación de ACO al problema de recolección de residuos sólidos domiciliarios por contenedores. Tesis de Magíster en Ingeniería Industrial no publicada. Departamento de Ingeniería Industrial, Facultad de Ingeniería, Universidad de Concepción. Concepción, Chile.

SALAH, R. (2006). Optimizing routing of municipal waste collection vehicles in Deir El-Balah – Gaza Strip. *The Islamic University Journal (Series of Natural Studies and Engineering)*, 14, No.2, 75-89.

SALAZAR, H. E, & RUIZ, F. N. (2009). Modelo ACO para la recolección de residuos por contenedores ACO model applied to the waste Collection by containers. *Ingeniare. Revista chilena de ingeniería*, 17, N° 2, 236-243.

SCULLI, D., MOK, K.C., & CHEUNG, S.H. (1987). Scheduling Vehicles for Refuse Collection. *Journal of the Operations Research Society*, 38, 233-239.

SINIA. Residuos. Extraído el 16 de noviembre de 2011 desde <http://www.sinia.cl/1292/w3-propertyvalue-15487.html>.

TEERIOJA, N., MOLIIS, K., KUVAJA, E., OLLIKAINEN, M., PUNKKINEN, H., & MERTA E. (2012). Pneumatic vs. door-to-door waste collection systems in

existing urban areas: a comparison of economic performance. *Waste Management*, 32, 1782–1791.

TSCHOBANOGLIOUS, G., THEISEN, H., & VIGEL, S. (1993). *Integrated Solid Waste Management*. Mc Graw-Hill.

TUNG, D. V., & PINNOI, A. (2000). Vehicle routing±scheduling for waste collection in Hanoi. *European Journal of Operational Research*, 125, 449 – 468.

WINKLER, R. (2009). Modelación de la elección de ruta en transporte de carga. Memoria de título no publicada. Departamento de Ingeniería Civil, Facultad de Ingeniería, Universidad de Concepción. 113p.

WINSTON, W. L. (2005). *Investigación de operaciones*. 4ª ed. México. Thomson. 1418p.

WY, J., KIM, B., & KIM, S. (2012). The rollon–rolloff waste collection vehicle routing problem with time windows. *European Journal of Operational Research*, 224, 466–476.

WY, J., KIM, B., KIM, S., & SAHOO, S. (2010). Rollon-Rolloff Vehicle Routing Problem in the Waste Collection Industry. The 11th Asia Pacific Industrial Engineering and Management Systems Conference, The 14th Asia Pacific Regional Meeting of International Foundation for Production Research. Melaka, 7–10.

Anexo. Resultados computacionales del PLCRV para diferentes instancias:

En las tablas que se presentan a continuación, se muestra la información utilizada en diferentes instancias de cada red y los resultados para cada una de ellas.

En cada tabla se utilizó la siguiente notación:

- Origen: Nodo Origen.
- Destino: Nodo Destino.
- Cap. Camión: Capacidad de los camiones.
- Cap. Contenedor: Capacidad de los contenedores.
- Tiempo Total CPU: Denota el tiempo total de CPU (en segundos) utilizado para encontrar el conjunto de SNI mediante el método NISE.
- Total Soluciones No Inferiores: Determina el número total de SNI generadas por el método NISE.
- SNI: Número de la solución no inferior obtenida por el algoritmo.
- Z1: Distancia total recorrida por los camiones.
- Z2: Distancia total recorrida por los clientes.
- $Z1_{RL}$: Distancia total recorrida por los camiones, a partir del problema relajado.

- $Z2_{RL}$: Distancia total recorrida por los clientes, a partir del problema relajado.
- GAP1: GAP para $Z1_{RL}$.
- GAP2: GAP para $Z2_{RL}$.
- TCPU: Tiempos de CPU (en segundos) **acumulado** para obtener cada SNI.²

Cabe señalar que las SNI N°1 (*) y N°2 (*) fueron obtenidas según lo señalado en la sección 5.4.3, las cuales fueron determinadas de forma independiente a las demás SNI.

Red de 50 nodos

A continuación se muestran en detalle los resultados obtenidos para 3 instancias de la red de 50 nodos.

Origen	11
Destino	40
Cap. Contenedor	25
Cap. Camión	3
Tiempo Total CPU (s)	0,3
Total Soluciones No Inferiores	3

Resultados para la red de 50 nodos, Origen: 11 ; Destino: 21; Cap. Cont: 25; Cap.Cam:3

² Se exceptúan las SNIE, ya que estas se obtienen de forma independiente al algoritmo

SNI	Z1	Z2	Z1_{RL}	Z2_{RL}	GAP1	GAP2	TCPU(s)
1(*)	577	3326	340,6	3437,3	69,4	3,2	0,13
2(*)	731	2544	596,5	2538	22,5	0,2	0,09
3	594	2800	362,2	3179,6	63,9	11,9	0,15

Resultados para la red de 50 nodos, Origen: 11 ; Destino: 21; Cap. Cont: 25; Cap.Cam:3

Origen	18
Destino	47
Cap. Contenedor	13
Cap. Camión	14
Tiempo Total CPU (s)	3,7
Total Soluciones No Inferiores	6

Resultados para la red de 50 nodos, Origen: 18 ; Destino: 47; Cap. Cont: 13; Cap.Cam:14

SNI	Z1	Z2	Z1_{RL}	Z2_{RL}	GAP1	GAP2	TCPU(s)
1(*)	555	1762	408,8	1965,9	35,7	10,3	0,53
2(*)	973	1358	710,7	1358	36,9	0	0,4
3	707	1448	665,2	1380	6,2	4,9	0,18
4	593	1616	464,2	1691,5	27,7	4,4	0,49
5	571	1667	431,6	1789,8	32,2	6,8	0,99
6	739	1437	710,7	1358	3,9	5,8	2,62

Resultados para la red de 50 nodos, Origen: 18 ; Destino: 47; Cap. Cont: 13; Cap.Cam:14

Origen	21
Destino	41
Cap. Contenedor	6
Cap. Camión	7
Tiempo Total CPU (s)	117,1
Total Soluciones No Inferiores	10

Resultados para la red de 50 nodos, Origen: 21 ; Destino: 41; Cap. Cont: 6; Cap.Cam:7

SNI	Z1	Z2	Z1_{RL}	Z2_{RL}	GAP1	GAP2	TCPU(s)
1(*)	598	1928	523	2142,1	14,3	9,9	17,8
2(*)	1006	855	864,3	855	16,3	0	8,4
3	633	1055	576,2	1112,1	9,8	5,1	5,1
4	621	1129	573,5	1489,2	8,2	24,1	36,7
5	807	875	746,6	886,1	8	1,2	80,9
6	750	914	692,9	931	8,2	1,8	82,9
7	651	1025	637,7	995,3	2	2,9	84,5
8	706	960	685,5	938,6	2,9	2,2	87,5
9	776	892	736	892	5,4	0	93
10	859	863	815	858,8	5,3	0,4	102,8

Resultados para la red de 50 nodos, Origen: 21 ; Destino: 41; Cap. Cont: 6; Cap.Cam:7

Red de 81 nodos

A continuación se muestran en detalle los resultados obtenidos para 3 instancias de la red de 81 nodos.

Origen	21
Destino	80
Cap. Contenedor	25
Cap. Camión	5
Tiempo Total CPU (s)	2,2
Total Soluciones No Inferiores	5

Resultados para la red de 81 nodos, Origen: 21 ; Destino: 80; Cap. Cont: 25; Cap.Cam:5

SNI	Z1	Z2	Z1 _{RL}	Z2 _{RL}	GAP1	GAP2	TCPU(s)
1(*)	705	4901	527,8	5635,1	33,5	13	0,7
2(*)	960	3822	870,8	3810	10,2	0,3	0,2
3	760	4010	717	4021,6	5,9	0,2	0,3
4	884	3854	870,8	3810	1,5	1,1	1,5
5	784	3962	734,4	3971,4	6,7	0,2	1,6

Resultados para la red de 81 nodos, Origen: 21 ; Destino: 80; Cap. Cont: 25; Cap.Cam:5

Origen	18
Destino	34
Cap. Contenedor	14
Cap. Camión	7
Tiempo Total CPU (s)	150,9
Total Soluciones No Inferiores	12

Resultados para la red de 81 nodos, Origen: 18; Destino: 34; Cap. Cont: 14; Cap.Cam:7

SNI	Z1	Z2	Z1 _{RL}	Z2 _{RL}	GAP1	GAP2	TCPU(s)
1(*)	600	4722	469,5	5677,1	27,7	16,8	26,2
2(*)	1233	2430	917,7	2430	34,3	0	7,4
3	745	2846	719,9	2752,3	3,4	3,4	5,1
4	645	3676	527,1	3844,6	22,3	4,3	27,5
5	669	3390	539,4	3736	24	9,2	55,8
6	656	3542	527,1	3844,6	24,4	7,8	59
7	676	3332	545,6	3688,6	23,9	9,6	67,9
8	849	2524	817,3	2466,3	3,8	2,3	77,4
9	835	2558	789,6	2530,4	5,7	1	80,8
10	958	2458	919,5	2430	4,1	1,1	95,4
11	877	2506	827,5	2459,7	5,9	1,8	99,9
12	1030	2446	919,5	2430	12	0,6	128,8

Resultados para la red de 81 nodos, Origen: 18; Destino: 34; Cap. Cont: 14; Cap.Cam:7

Origen	2
Destino	78
Cap. Contenedor	6
Cap. Camión	7
Tiempo Total CPU (s)	1598,9
Total Soluciones No Inferiores	12

Resultados para la red de 81 nodos, Origen: 2; Destino: 78; Cap. Cont: 6; Cap.Cam:7

SNI	Z1	Z2	Z1 _{RL}	Z2 _{RL}	GAP1	GAP2	TCPUs
1(*)	1107	2502	953,3	2857,4	16,1	12,4	46,4
2(*)	1757	1490	1411,2	1490	24,5	0	104,8
3	1257	1646	1119,1	1686,8	12,3	2,4	23,9
4	1131	2056	1006,6	1984,5	12,3	3,6	60,8
5	1195	1770	1029	1893,7	16,1	6,5	119,9
6	1151	1947	1013,1	1953,2	13,6	0,3	135,2
7	1237	1678	1084,5	1747,8	14	3,9	167,4
8	1233	1686	1080,3	1756,3	14,1	4	178,3
9	1458	1528	1361,4	1498,6	7	1,9	318,6
10	1333	1568	1228,5	1564	8,5	0,2	347
11	1524	1516	1411,7	1490	7,9	1,7	900,1
12	1500	1520	1376,6	1495,3	8,9	1,6	1037,1

Resultados para la red de 81 nodos, Origen: 2; Destino: 78; Cap. Cont: 6; Cap.Cam:7

Red de 100 nodos pmed01 de Beasley

A continuación se muestran en detalle los resultados obtenidos para 3 instancias de la red de 100 nodos “pmed01 de Beasley”.

Origen	1
Destino	91
Cap. Contenedor	25
Cap. Camión	5
Tiempo Total CPU (s)	2,5
Total Soluciones No Inferiores	3

Resultados para la red de 100 nodos, Origen: 1; Destino: 91; Cap. Cont: 25; Cap.Cam:5

SNI	Z1	Z2	Z1_{RL}	Z2_{RL}	GAP1	GAP2	TCPU(s)
1(*)	1039	8082	861,9	8402,2	20,5	3,8	0,8
2(*)	1211	7556	1061,6	7418,7	14	1,8	0,5
3	1067	7589	904,1	7697,2	18	1,4	0,6

Resultados para la red de 100 nodos, Origen: 1; Destino: 91; Cap. Cont: 25; Cap.Cam:5

Origen	28
Destino	77
Cap. Contenedor	8
Cap. Camión	7
Tiempo Total CPU (s)	201,1
Total Soluciones No Inferiores	5

Resultados para la red de 100 nodos, Origen: 28; Destino: 77; Cap. Cont: 8; Cap.Cam:7

SNI	Z1	Z2	Z1_{RL}	Z2_{RL}	GAP1	GAP2	TCPU(s)
1(*)	1659	3969	1559,4	3990	6,3	0,5	56,7
2(*)	2226	3475	1909	3475	16,6	0	45,4
3	1784	3598	1700	3598	4,9	0	13,2
4	1704	3705	1616	3706,5	5,4	0	31,9
5	1950	3493	1880,5	3482	3,6	0,3	137,9

Resultados para la red de 100 nodos, Origen: 28; Destino: 77; Cap. Cont: 8; Cap.Cam:7

Origen	66
Destino	82
Cap. Contenedor	6
Cap. Camión	7
Tiempo Total CPU (s)	1564,7
Total Soluciones No Inferiores	9

Resultados para la red de 100 nodos, Origen: 66; Destino: 82; Cap. Cont: 6; Cap.Cam:7

SNI	Z1	Z2	Z1 _{RL}	Z2 _{RL}	GAP1	GAP2	TCPU(s)
1(*)	1708	3539	1495,4	3710,7	14,2	4,6	93,3
2(*)	2475	2668	2257,9	2668	9,6	0	342,7
3	1992	2915	1794	2893,6	11	0,7	53,1
4	1766	3394	1659,7	3126,4	6,4	8,5	133,2
5	1876	3156	1680,6	3081,7	11,6	2,4	251,7
6	2247	2739	2105,9	2683,8	6,7	2	507,9
7	2138	2803	1878,4	2824,3	13,8	0,7	666,9
8	2405	2669	2115,5	2679	13,6	0,3	875,9
9	2296	2715	2115,5	2679	8,5	1,3	1235

Resultados para la red de 100 nodos, Origen: 66; Destino: 82; Cap. Cont: 6; Cap.Cam:7

Red de 100 nodos pmed05 de Beasley

A continuación se muestran en detalle los resultados obtenidos para 3 instancias de la red de 100 nodos “pmed05 de Beasley”.

Origen	4
Destino	85
Cap. Contenedor	21
Cap. Camión	7
Tiempo Total CPU (s)	4,3
Total Soluciones No Inferiores	3

Resultados para la red de 100 nodos, Origen: 4; Destino: 85; Cap. Cont: 21; Cap.Cam:7

SNI	Z1	Z2	Z1 _{RL}	Z2 _{RL}	GAP1	GAP2	TCPU(s)
1(*)	1016	7011	788	6826,7	28,9	2,6	5,8
2(*)	1143	6326	978,4	6256	16,8	1,1	0,5
3	1078	7436	971,4	7254,7	10,9	2,4	1,3

Resultados para la red de 100 nodos, Origen: 4; Destino: 85; Cap. Cont: 21; Cap.Cam:7

Origen	70
Destino	91
Cap. Contenedor	8
Cap. Camión	7
Tiempo Total CPU (s)	304,3
Total Soluciones No Inferiores	5

Resultados para la red de 100 nodos, Origen: 70; Destino: 91; Cap. Cont: 8; Cap.Cam:7

SNI	Z1	Z2	Z1_{RL}	Z2_{RL}	GAP1	GAP2	TCPU(s)
1(*)	1929	4307	1800,8	4513,5	7,1	4,5	472,6
2(*)	2420	4056	2310,4	4056	4,7	0	1309,9
3	1561	3802	1502,6	3790	3,8	0,3	68,6
4	1683	3750	1627,1	3742,6	3,4	0,1	135,6
5	1429	3892	1356,7	3892	5,3	0	264,7

Resultados para la red de 100 nodos, Origen: 70; Destino: 91; Cap. Cont: 8; Cap.Cam:7

Origen	30
Destino	85
Cap. Contenedor	6
Cap. Camión	7
Tiempo Total CPU (s)	10
Total Soluciones No Inferiores	4086,2

Resultados para la red de 100 nodos, Origen: 30; Destino: 85; Cap. Cont: 6; Cap.Cam:7

SNI	Z1	Z2	Z1 _{RL}	Z2 _{RL}	GAP1	GAP2	TCPU(s)
1(*)	1681	2964	1446,5	3560,1	16,2	16,7	3606,6
2(*)	2455	2456	2403,4	2454	2,1	0	1614
3	1785	2600	1593,1	2577,3	12	0,8	139
4	1739	2667	1499,8	2694,9	15,9	1	297,7
5	1683	2905	1493,9	2720,3	12,6	6,7	414,1
6	2019	2501	1738,4	2509,9	16,1	0,3	1392,9
7	1866	2556	1704,3	2522	9,4	1,3	1852,1
8	1927	2532	1724,7	2513,6	11,7	0,7	2347,5
9	2274	2464	2053,9	2464,1	10,7	0	3332,5
10	2155	2477	1910,4	2481,2	12,8	0,1	3548,2

Resultados para la red de 100 nodos, Origen: 30; Destino: 85; Cap. Cont: 6; Cap.Cam:7

Red de 200 nodos.

A continuación se muestran en detalle los resultados obtenidos para 2 instancias de la red de 200 nodos “pmed07 de Beasley”.

Origen	64
Destino	78
Cap. Contenedor	23
Cap. Camión	7
Tiempo Total CPU (s)	50,1
Total Soluciones No Inferiores	5

Resultados para la red de 200 nodos, Origen: 64; Destino: 78; Cap. Cont: 23; Cap.Cam:7

SNI	Z1	Z2	Z1_{RL}	Z2_{RL}	GAP1	GAP2	TCPU(s)
1(*)	1002	6521	787,3	6633,9	27,2	1,7	41,6
2(*)	1266	6026	1152,5	5972	9,8	0,9	20,1
3	1008	6355	896,7	6279	12,4	1,2	7,4
4	1183	6068	1071,5	6010,5	10,4	0,9	14
5	1108	6179	939,2	6207	17,9	0,4	18,3

Resultados para la red de 200 nodos, Origen: 64; Destino: 78; Cap. Cont: 23; Cap.Cam:7

Origen	16
Destino	172
Cap. Contenedor	9
Cap. Camión	16
Tiempo Total CPU (s)	47600**
Total Soluciones No Inferiores	15

Resultados para la red de 200 nodos, Origen: 16; Destino: 172; Cap. Cont: 9; Cap.Cam:16

SNI	Z1	Z2	Z1_{RL}	Z2_{RL}	GAP1	GAP2	TCPU(s)
1(*)	1335	4563	1041,6	4688,9	28,1	2,6	11422,1
2(*)	1997	3740	1795,5	3629	11,2	3	2254,9
3	1506	3985	1263,8	3936,4	19,1	1,2	4158,5
4	1359	4274	1113,9	4176,8	22	2,3	6300,1
5	1340	4464	1049,6	4508,2	27,6	0,9	10184,3
6	1400	4161	1128,6	4134	24	0,6	15182,4
7	1376	4222	1123,3	4146,3	22,4	1,8	16946,5
8	1460	4053	1148,5	4098	27,1	1	25359,8
9	1743	3807	1594,5	3688,1	9,3	3,2	4183,2
10	1586	3906	1402,1	3804,4	13,1	2,6	34842,7
11	1707	3825	1453,2	3768,9	17,4	1,4	38498,3
12	1688	3837	1445,1	3774,2	16,8	1,6	39659,5
13	1900	3746	1742,7	3633	9	3,1	43716,8
14	1760	3799	1621,4	3676,1	8,5	3,3	44164,7
15	1863	3760	1621,4	3676,1	14,9	2,2	47562,9

Resultados para la red de 200 nodos, Origen: 16; Destino: 172; Cap. Cont: 9; Cap.Cam:16

Para este último caso, el tiempo indicado con ** es porque el algoritmo se ha detenido en 47600 segundos debido a la extensión de éste, siendo la SNI 15 la última en ser encontrada.