UNIVERSIDAD DEL BÍO-BÍO

FACULTAD DE EDUCACIÓN Y HUMANIDADES

ESCUELA DE PEDAGOGÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

TEOREMA DE HAHN-BANACH

AUTOR: Javiera Natalia Martínez Basoalto

PROFESOR GUÍA: Dr. Luis Friz Roa

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE PROFESOR DE EDUCACIÓN MEDIA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

CHILLÁN 2023

Agradecimientos

Agradezco sinceramente al Dr. Luis Friz Roa, mi profesor guía, por su valiosa orientación, dedicación y el tiempo invertido en la supervisión de esta memoria de título. Su experiencia y apoyo resultaron fundamentales para el desarrollo de mi actividad de titulación. De igual manera, extiendo mi gratitud al Dr. Fernando Toledo Montiel, por sus valiosas sugerencias y contribuciones que enriquecieron significativamente el contenido.

Por otro lado, expreso mi profundo agradecimiento a mi familia, especialmente a mi hija Trinidad, quien, con sus 8 años de edad, ha sido una fuente inagotable de inspiración y motivación durante todo este proceso. A mi pareja, le agradezco su comprensión y paciencia, aspectos fundamentales para enfrentar las dificultades propias de aprender algo nuevo. No puedo dejar de agradecer a Dios por brindarme la fortaleza y guía necesarias para superar los desafíos y alcanzar este logro.

Mi reconocimiento especial se dirige a mis colegas del ciclo intermedio del colegio Seminario Padre Alberto Hurtado, así como a mis estudiantes que compartieron este trayecto conmigo. La motivación y el cariño que recibí de todos ustedes fueron un impulso fundamental para llegar al final de mi carrera.

Agradezco también a los profesores motivadores Eligio Colmenares y Edgardo Riquelme, quienes han sido ejemplos a seguir y han dejado una huella inspiradora en mi camino académico. A cada persona que de alguna manera contribuyó en mi formación como profesora, mi más sincero agradecimiento.

Resumen

Este trabajo estudia los fundamentos preliminares que establecen las bases para comprender, tanto la forma de extensión como la perspectiva geométrica, del Teorema de Hahn-Banach. Se centra especialmente en explorar los elementos esenciales del análisis funcional y del álgebra lineal que confieren coherencia y significado al estudio en cuestión.

En resumen, el propósito de este trabajo es proporcionar una visión integral y detallada de los preliminares necesarios para abordar el Teorema de Hahn-Banach y sus subsiguientes demostraciones. Asimismo, busca fomentar una comprensión más profunda y contextualizada de este importante resultado en el análisis funcional mediante el estudio de ejemplos ilustrativos.

Lista de Símbolos

$\in, \notin$	Pertenece a, no pertenece a
$E \subset F$	E es un subconjunto de F
$E \cup F$	Unión de juntos E y F
$E \cap F$	intersección de conjuntos E y F
E^c	complemento de un subconjunto E
$\emptyset$	conjunto vacío
$F : x_1 \longrightarrow x_2$	una función F de x_1 a x_2
$\mathbb{K}$	cuerpo escalar de números reales o números complejos
$\mathbb{R}$	cuerpo de los números reales
$\mathbb{C}$	cuerpo de los números complejos
kE	múltiplo escalar de un subconjunto E en un espacio vectorial
$co(E)$	Envoltura convexa de un subconjunto E de un espacio vectorial
$\sum_{j=1}^{n}$	sumatoria de j=1,...,n
$\mathbb{K}^n$	espacio producto de $\mathbb{K}, \ldots, K(n$ veces)
$N(F)$	núcleo de una transformación lineal F
$d(x, y)$	distancia entre x e y
$d_p(x, y)$	distancia p entre x e y en $\mathbb{K}^n$
$d_\infty(x, y)$	distancia ∞ entre x e y en $\mathbb{K}^n$
θ	cero vector
(x_n)	sucesión (x_n)
$x_n \longrightarrow x$	sucesión (x_n) convergente a x
$\limsup$	límite superior
$\liminf$	límite inferior
Rex, Imx	parte real e imaginaria de una función de valor complejo x
$\|x\|$	norma de un elemento x en un espacio normado
$\|x\|_p$	norma p de x en $\mathbb{K}^n$
$\|x\|_\infty$	norma ∞ de x en $\mathbb{K}^n$

Índice general

CAPÍTULO 1

Introducción

La presente memoria se enmarca en el estudio del Análisis Funcional, en específico, se centra en el estudio del Teorema de Hahn-Banach considerado una de las contribuciones más importantes de este campo de estudio. Según Bombal (2003), este teorema es considerado uno de los tres resultados principales del Análisis Funcional clásico en conjunto con El Principio de Acotación Uniforme y el Teorema de Aplicación Abierta. Formulado por Stefan Banach y Hans Hahn en la primera mitad del siglo XX, determina condiciones que garantizan la existencia de extensiones lineales continuas dentro de espacios vectoriales normados.

El estudio del Teorema de Hahn-Banach es fundamental en diversas áreas de la matemática, como las ecuaciones diferenciales, la optimización convexa, física teórica, economía y otras disciplinas relacionadas.

En esta memoria, se explorarán los fundamentos teóricos necesarios para comprender el Teorema de Hahn- Banach, incluyendo conceptos preliminares como espacios vectoriales, espacios normados, funcionales lineales y convexidad. Además, se utilizarán herramientas analíticas para abordar los conceptos fundamentales, las condiciones necesarias para la aplicación del teorema y demostraciones que lo sustentan.

CAPÍTULO 2

Marco Teórico

Los inicios del análisis funcional se remontan a los trabajos de Volterra en 1887. En el marco de sus estudios relacionados a las ecuaciones integrales, Volterra destaca la importancia de la utilidad del estudio de "funciones que dependen de otras funciones" y la particularidad del caso de "funciones de líneas" las que después se denominan funcionales ("funcional", como sustantivo) gracias a Hadamard, uno de los grandes promotores del desarrollo de la teoría moderna.

Para contextualizar el concepto, Según Bell (1940) el caso más sencillo de funcional se genera mediante una función $x(t)$ definida para todos los valores de t en un intervalo $[a, b]$; se define $F[x(t)]$ como funcional de $x(t)$ cuando su valor depende de todos valores que tome $x(t)$ en $[a, b]$. En otros términos, los funcionales enunciados por Volterra son una generalización muy amplia de las funciones de análisis clásico.

Por su lado, Hadamard interesado en el estudio de los espacios funcionales expuso y resolvió, en parte, el problema del cálculo dual de $C([0, 1])$. En 1912 publico L'enseignement Mathématique, un artículo sobre lo que denominaba "cálculo funcional" basado en el estudio de espacios cuyos elementos eran funciones, sometidas a operaciones "arbitrarias".

La transición de lo finito a lo infinito que describen los trabajos de Volterra, Hadamard y otros matemáticos del principio del siglo XX, toman protagonismo en las investigaciones de Hilbert sobre ecuaciones integrales y la utilización de analogías algebraicas y geométricas de ℓ_2 con el espacio $n-$dimensional.

De manera posterior, el discípulo de Hadamard, Fréchet en su tesis doctoral del año 1906:"... formuló definiciones generalizadas correspondientes más o menos a los conceptos de límite, derivada y continuidad en el cálculo usual, pero aplicables ahora a los espacios de funciones" (Boyer, 1987 , p.761). Dentro de aquel trabajo, dedica buena parte al estudio de espacios funcionales concretos: $C([a,b])$con la norma del supremo. Durante las posteriores décadas, Frechet promovió lo que denominó "Analyse Générale" en una serie de artículos publicados entre 1909 y 1925, en ellos plantea ideas sobre espacios funcionales y nociones topológica relacionadas.

Para Bombal (2003), Frederic Riesz (1880 – 1956) es uno de los mayores responsables del desarrollo del Análisis Funcional. Para sintetizar el vasto aporte del matemático húngaro se puede citar parte de la introducción de Les Systemes d'equations linèaires à une infinité d'inconnues (1913): ".. Nuestro estudio no forma parte, propiamente hablando, de la Teoría de Funciones. Más bien podría considerarse como... un primer estadio de una teoría de funciones de infinitas variables..."

Las contribuciones mencionadas anteriormente, proyectaron el desarrollo de una teoría general relacionada a espacios normados, funcionales y operadores lineales entre ellos. Tan esperado avance surge de la mano de S. Banach, en su tesis publicada en 1921 en Fundamenta Mathematicae, en donde se precisa lo que hoy conocemos como espacio normado completo. En ese mismo año, Helly prueba algunos resultados de extensión para espacios normados de sucesiones.

Durante el año 1927, Hans Hahn retoma el trabajo y las técnicas de Helly (1884-1943) en el contexto de los espacios de Banach generales y publica un artículo en el *Journa für die reine und angewandte Mathematik*. En dicho trabajo, Hahn probó que toda forma lineal continua sobre un subespacio de un espacio de Banach real, se puede extender al total conservando la norma. Dos años más adelante, Banach redescubre el teorema de extensión planteado por Hahn con una demostración análoga. En un artículo similar en la revista Studia, Banach descubre que el argumento puede generalizarse a funcionales mayorados por una seminorma. Además, aplicó estas consecuencias para obtener resultados en el campo de la dualidad.

CAPÍTULO 3

Preliminares

3.1 Relaciones en un conjunto

En la presente sección se recopilan definiciones y resultados que se utilizarán posteriormente. La mayoría de estos son contenidos basados en los cursos de álgebra lineal y análisis real.

Definición 1. *Un conjunto $M \neq \emptyset$ se denomina parcialmente ordenado si existe una relación de orden $(\leq)$ definida sobre un conjunto de $M \times M$, tal que*

- $x \leq x \qquad \forall x \; x \in \; M$ (REFLEXIVIDAD).
- $x \leq y \;\; e \;\; y \leq x \rightarrow \;\; x = y$ (ANTISIMETRÍA).
- $x \leq y \;\; e \;\; y \leq z \rightarrow \;\; x \leq z$ (TRANSITIVIDAD).

El concepto *Parcialmente* implica que M puede contener elementos x e y para los cuales ni $x \leq y$ ni $y \leq x$ ocurren. En dicho caso, x e y se denominan *incomparables.* En caso contrario, asi $x \leq y$ o si $y \leq x$, entonces x e y se dicen *comparables.*

Ejemplo 1. *Dado un conjunto A se considera $\mathcal{P}(A) := \{X : X \subseteq A\}$ y se define la relación de orden $X \leq Y \;\Leftrightarrow\; X \subseteq Y$, con $X, Y \in \mathcal{P}(A)$. En general $\mathcal{P}(A)$ es parcialmente ordenado.*

Definición 2. *Sea* $(M, \leq)$ *un conjunto no vacío, parcialmente ordenado.*

- *Se dice que* M *es una cadena si no posee elementos incomparables.*
- *Supongamos que* M *es una cadena y sea* $S \neq \emptyset$ *un subconjunto de* M*. Se dice que un elemento* $z \in M$ *es una cota superior de* S *si* $x \leq z$ *para todo* $x \in S$*.*
- *Un elemento* $z \in M$ *se dice maximal si cada vez que* $x \in M$ *verifica* $z \leq x$*, entonces necesariamente* $x = z$*.*

Notar que M puede o no tener elementos maximales. Además, un elemento maximal no es necesariamente una cota superior. El recíproco sí es cierto.

Lema 1. *(LEMA DE ZORN / AXIOMA DE ELECCIÓN) Sea* $(M, \leq)$ *un conjunto no vacío, parcialmente ordenado, y suponga que cada cadena de* M *tiene una cota superior. Entonces,* M *tiene al menos un elemento maximal.*

Este elemento maximal puede no ser único y puede que no sea posible construir un elemento maximal. El lema de Zorn es sólo una afirmación existencial. Aunque se le llama "lema", en realidad es un axioma. Por ello, supondremos que es válido.

En el transcurso de esta memoria, este lemma se utilizará principalmente para demostrar la existencia del teorema de Hahn-Banach de extensión.

3.2 Espacios Vectoriales y Transformaciones Lineales

En esta sección se introducirá una estructura algebraica en un conjunto X dado, y estudiaremos funciones en X que se comportan bien con respecto a dicha estructura. A partir de ahora, $\mathbb{K}$ denotará el conjunto $\mathbb{R}$ de todos los números reales o $\mathbb{C}$ el conjunto de todos los números complejos. Además, Rek y Imk denotarán respectivamente la parte real y la parte imaginaria del número complejo K.

Definición 3. *Un Espacio vectorial sobre un cuerpo K es un conjunto X con las funciones*

$$+ \quad : X \times X \longrightarrow X, \quad y \quad \cdot \quad X \times \mathbb{K} \longrightarrow X,$$

LLamadas adición y multiplicación por escalar tal que para

$$x, y, z \in X \quad y \quad k, k' \in \mathbb{K}$$

1. $x + y = y + x$
2. $x + (y + z) = (x + y) + z$
3. $\exists\ 0 \in X$ *tal que* $x + 0 = x$
4. $\exists\ -x \in X$ *tal que* $x + (-x) = 0$
5. $k \cdot (x + y) = k \cdot x + k \cdot y$
6. $(k + k') \cdot x = k \cdot x + k' \cdot x$
7. $(k \cdot k') \cdot x = k \cdot (k' \cdot x)$
8. $1 \cdot x = x$

Continuando, tenemos que para $x \in X, k \in \mathbb{K}$ y $E_1, E_2 \subset X$, se tiene

$$x + E_1 = \{x + y : y \in E_1\}, kE_1 = \{kx : x \in E_1\},$$

$$E_1 + E_2 = \{x + y : x \in E_1, y \in E_2\}.$$

Un subconjunto E de un espacio vectorial X se dice convexo en X si

$$rx + (1 - r)y \in E$$

siempre que $x, y \in E$ y $0 < r < 1$. Esto es denominado **subespacio** de X si $kx + k'y \in E$ para todo $x, y \in E$ y $k, k' \in \mathbf{K}$. Si $E \subset X$, Se puede construir el conjunto convexo más pequeño en X que contenga a E, como sigue

$$\{r_1x_1 + ... + r_nx_n : x_1, ..., x_n \in E, 0 \leq r_j \;\; y \;\; r_1 + ... + r_n = 1\}$$

Este conjunto es llamado **envoltura convexa** de E y lo denotaremos como $co\{E\}$; de la misma manera, el subespacio más pequeño de X que contiene a E, se define como

$$\{k_1x_1 + ... + r_nx_n : x_1, ..., x_n \in E, k_1, ..., k_n \in \mathbb{K}\}$$

El cual denotaremos por $< \{E\} >$. Se dice que E es el espacio generado X si $< \{E\} >= X$.

Definición 4. *Sean X e Y espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$. Una* ***transformación lineal*** *$F : X \longrightarrow Y$ es una función tal que $F(kx + k'x') = kF(x) + k'F(x')$ cuando $x, x' \in X$ y $k, k' \in \mathbb{K}$. Dos subespacios importantes están asociados con una transformación lineal $F : X \longrightarrow Y$; El rango de F, $\{y \in Y : F(x) = y$ para algunos $x \in X\}$, el cual se denota $R(F)$ y núcleo de F, $\{x \in X : F(x) = 0$ denotado por N(f).*

Definición 5. *Sea X un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$.*

1. *Una transformación lineal $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$ es llamado un* ***Funcional Lineal*** *en X.*

2. *Todo subespacio vectorial propio maximal de X se denomina* ***hiperespacio****.*

3.3 Espacios Métricos

En principio se debe introducir la estructura de distancia en un conjunto X y el estudio de las funciones en X que se comportan bien en esa estructura.

Definición 6. *Una métrica en un conjunto X es una función $d : X \times X \to \mathbb{R}$ para todo $x, y, z \in X$ si satisface:*

1. $d(x,y) \geq 0$, *y* $d(x,y) = 0$ *si* $x = y$
2. $d(x,y) = d(y,x)$
3. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

La última condición es conocida como **desigualdad triangular**.

Un **espacio métrico** es un conjunto no vacío X que posee una métrica.

Ejemplo 2.

(a) Si X es cualquier conjunto, con $x, y \in X$

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{si } x = 0 \\ 1, & \text{si } x \neq y \end{cases}$$

(b) Sea $X = \mathbb{K}^n$, con n entero positivo. Para $1 \leq p \leq \infty$, y $x = (x(1), ..., x(n))$ e $(y(1), ...y(n))$ en $\mathbb{K}^n$, se tiene:

$$d_p(x,y) = \begin{cases} \left(\sum_{j=1}^{n} |x(j) - y(j)|^p \right)^{\frac{1}{p}}, & \text{si } 1 \leq p \leq \infty \\ \max\limits_{1 \leq j \leq n} |x(j) - y(j)|, & \text{si } p = \infty \end{cases}$$

Si $p = 1$ o ∞ , se verifica desde $|x(j) - y(j)| \leq |x(j) - z(j)| + |z(j) - y(j)|$ para todo $z(j) \in \mathbb{K}$, d_p es una métrica en $\mathbb{K}^n$. Si $1 < p < \infty$, entonces la desigualdad triniagular para d_p se puede establecer como se muestra a continuación.

En primer lugar, probamos el siguiente resultado auxiliar (**Desigualdad de Young**):

Sea $1 < p < \infty$ y q tal que $(1/p) + (1/q) = 1$. Entonces, para cualquier número real no negativo a y b, se define:

$$ab \leq (a^p/p) + (b^p/q). \tag{3.3.1}$$

Si $b = 0$ basta con reemplazar. Por otro lado, si $b > 0$. Para $t \in \mathbb{R}$, se tiene:

$$x(t) = (1/q) + (1/p)t - t^{1/p}$$

Luego, $x'(t) = (1/p)(1 - t^{-1/p})$. Entonces, para $t < 1, x'(t) < 0$ y para $t > 1$, $x'(t) > 0$.

Por lo tanto, para todo $t \in \mathbb{R}, x(t) > x(1) = 0$; es decir,

$$t^{1/p} \leq (1/q) + (1/p)t.$$

Si $t = a^p/b^q$, se obtiene (3.3.1)

Lema 2. *Sea $a_j, b_j \in \mathbb{K}, j = 1, ..., n$. Para $1 < p < \infty$, sea q que satisfacen* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

(a) **(Desigualdad de Hölder)**Para $1 < p < \infty$, se tiene

$$\sum_{j=1}^{n} a_j b_j \leq \left(\sum_{j=1}^{n} |a_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{j=1}^{n} |b_j|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

Sea $\alpha = \left(\sum_{j=1}^{n} |a_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}$ y $\beta = \left(\sum_{j=1}^{n} |b_j|^q \right)^{\frac{1}{p}}$

Si $\alpha = 0$ o $\beta = 0$, entonces ambos lados de la anterior inecuación son igual a cero.

Luego, si $\alpha \neq 0$ y $\beta \neq 0$. Para $j = 1, ..., n$, reemplazando $a = |a_j|/\alpha$ y $b = |b_j|/\beta$ en (3.3.1), entonces

$$(|a_j|/\alpha)(|b_j|/\beta) \neq (1/p)((|a_j|^p/\alpha^p) + (1/q)((|b_j|^q/\beta^q)$$

Así,

$$\sum_{j=1}^{n} a_j b_j \leq \alpha\beta \left(\frac{1}{p}\frac{1}{\alpha^p}\sum_{j=1}^{n}|a_j|^p + \frac{1}{q}\frac{1}{\beta^q}\sum_{j=1}^{n}|b_j|^q \right)$$
$$= \alpha\beta\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right) = \alpha\beta.$$

Si $p = 2 = q$, entonces la desigualdad de Hölder es también conocida como **desigualdad de Schwarz.**

(b) **(Desigualdad de Minkowski)** Para $1 \leq p < \infty$, se tiene

$$\left(\sum_{j=1}^{n}|a_j+b_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{j=1}^{n}|a_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{j=1}^{n}|b_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}. \qquad (3.3.2)$$

Si $p = 1$, entonces el resultado es $|a_j + b_j| \leq |a_j| + |b_j|$ para $j = 1, ..., n$. Ahora, supongamos que $1 < p < \infty$

$$\sum_{j=1}^{n}(|a_j|+|b_j|)^p = \sum_{j=1}^{n}|a_j|(|a_j|+|b_j|)^{p-1} + \sum_{j=1}^{n}|b_j|(|a_j|+|b_j|)^{p-1}$$

$$\leq \left(\sum_{j=1}^{n}|a_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left[\sum_{j=1}^{n}(|a_j|^p+|b_j|)^{(p-1)q})\right]^{\frac{1}{q}} + \left(\sum_{j=1}^{n}|b_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left[\sum_{j=1}^{n}(|a_j|+|b_j|)^{(p-1)q})\right]^{\frac{1}{q}}$$
$$= \left[\left(\sum_{j=1}^{n}|a_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{j=1}^{n}|b_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right]\left[\sum_{j=1}^{n}(|a_j|+|b_j|)^p)\right]^{\frac{1}{q}}.$$

Desde que p y q son números reales conjugados, tenemos que $(p-1) = q$. De lo anterior, se tiene que $1 - 1/q = 1/p$, así

$$\left[\sum_{j=1}^{n}|a_j+b_j|^p\right]^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{j=1}^{n}|a_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{j=1}^{n}|b_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Como $|a_j+b_j| \leq |a_j|+|b_j|$ para $j = 1, ..., n$ se cumple, queda demostrado lo deseado.

Con respecto a la desigualdad trinagular para d_p con $1 < p < \infty$, dejando $x = (x(1), ..., x(n)), y = (y(1), ..., y(n)), z = (z(1), ..., z(n)) \in \mathbb{K}^n$ y $a_j = x(j) - z(j), b_j = z(j) - y(j)$ para $j = 1, ..., n$. En la desigualdad de Minkowski, se tiene

$$\begin{aligned} d_p(x, y) = \left[\sum_{j=1}^{n} |a_j + b_j|^p\right]^{\frac{1}{p}} &\leq \left(\sum_{j=1}^{n} |a_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{j=1}^{n} |b_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= d_p(x, z) + d_p(z, y). \end{aligned}$$

Si $n = 1$, entonces todas las métricas d_p, $1 \leq p \leq \infty$, se reducen a la métrica usual dada por $d(x, y) = |x - y|$ para $x, y \in \mathbb{K}$.

A continuación, se generalizará el anterior ejemplo a una situación de dimensión infinita.

Para $1 \leq p < \infty$, considerar el siguiente conjunto de sucesiones en $\mathbb{K}$:

$$\ell^p = \left\{(x(1), x(2), ...) : x(j) \in \mathbb{K} \; y \sum_{j=1}^{\infty} |x(j)|^p < \infty\right\}$$

Para $x = (x(1), x(2), ...)$ e $y = (y(1), y(2), ...)$ en ℓ^p, se tiene

$$d_p(x, y) = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x(j) - y(j)|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Dejando $a_j = x(j)$ y $b_j = -y(j)$ para $j = 1, 2, ...$ y $n \to \infty$ en la desigualdad de Minkowski, se tiene que $d_p(x, y) < \infty$ para todo x, y en ℓ^p. Además, si $z = (z(1), z(2), ...) \in \ell^p$ y dejando $a_j = x(j) - z(j)$ y $b_j = z(j) - y(j)$ para $j = 1, 2, ...$ y haciendo $n \to \infty$, en la misma desigualdad, d_p es una métrica con ℓ^p.

Finalmente, considerar el conjunto de todas las sucesiones acotadas en $\mathbb{K}$:

$$\ell^\infty = \left\{(x(1), x(2), ...) : x(j) \in \mathbb{K} \; y \sup_{j:1,2,...} |x(j)| < \infty\right\}$$

Para $x = (x(1), x(2), ...)$ e $y = (y(1), y(2), ...)$ en ℓ^∞, dejando:

$$d_\infty(x, y) = sup_{j:1,2,...}|x(j) - y(j)|.$$

Es inmediato que d_∞ es una métrica en ℓ^∞

El espacio métrico ℓ^∞ es un caso especial del siguiente ejemplo.

Ejemplo 3. *Consideremos un conjunto T y sea $B(T)$ el conjunto de todas las funciones acotadas k-valuadas en T, así se tiene*

$$B(T) = \left\{ x : T \longrightarrow \mathbb{K}, \sup_{t \in T} |x(t)| < \infty \right\}.$$

Para $x, y \in B(T)$,

$$d_\infty = \sup_{t \in T} |x(t) - y(t)|.$$

Entonces d_∞ es una métrica en sobre B(T), conocida como la ***métrica del supremo****.*

Conjuntos Abiertos y Cerrados

Definición 7. *Sea d un espacio métrico. Para $x \in X$ y r es un número real positivo. se tiene*

1. *La **bola abierta** centrada en x, con radio r, es el conjunto*

$$U_d(x,r) = \{y \in X : d(x,y) < r\}.$$

2. *La **bola cerrada** con centro en x, con radio r, es el conjunto*

$$\bar{U_d}(x,r) = \{y \in X : d(x,y) \leq r\}.$$

En cuanto a la **convexidad** se puede ver de la siguiente manera. Sea $y \in X$ y $\|x-y\| = r$, entonces $ty + (1-t)x$ pertenece a $U_d(x,y)$ para todo $t \in (0,1)$ y converge a y cuando $t \to 1$. Ambos son subconjuntos convexos de X.

Un subconjunto E en X se dice que es **acotado** si $E \subset U_d(x,r)$ para algunos $x \in X$ y $r > 0$.

Un subconjunto E de X se dice que es un **abierto** en X si para cada $x \in E$, existe algunos $r > 0$ tal que $U_d(x,r) \subset E$. así, podemos ver que el subconjunto $\emptyset$ y X de X son abiertos en X. Además, cada unión de conjuntos abiertos en X y cada intersección de un número finito de conjuntos abiertos en X son abiertos en X. También, un subconjunto de X es abierto en X si y solo si es una unión de bolas abiertas en X.

Si $X = \mathbb{R}$ y d denota la métrica usual en $\mathbb{R}$, entonces un subconjunto abierto en $\mathbb{R}$ es, en efecto, una unión disjunta de un número contable de intervalos abiertos. Porque si E es un abierto en $\mathbb{R}$, entonces para $x, y \in E$, sea $x \sim y$ siempre que haya un intervalo abierto $(a,b) = \{s \in \mathbb{R} : a < s < b\}$ tal que $\{x,y\} \subset (a,b) \subset E$. Entonces, $\sim$ es una relación de equivalencia en E. Se puede observar que cada clase de equivalencia es un intervalo abierto en $\mathbb{R}$. Ya que cada intervalo no vacío en $\mathbb{R}$ contiene un número racional y que el conjunto de todos los números racionales es contable, resulta que el conjunto de todas las clases de equivalencia es contable y E es una unión disjunta.

Supongamos, que d y d' son dos métricas en X. Entonces se dice que d es más fuerte que d' si para cada $x \in X$ y cada $\epsilon > 0$, existen algunos $\delta > 0$ tal que $U_d(x, \delta) \subset U_{d'}(x, \epsilon)$. Este es el caso si y solo si cada subconjunto abierto de X con respecto a d' también es un abierto con respecto a d. Diremos que dos métricas son **equivalentes** si cada uno es más fuerte que el otro. Este es el caso si y solo si los mismos subconjuntos de X son abiertos con respecto a ambos. Se puede observar que todas las métricas d_p $1 \leq p \leq \infty$, son equivalentes en $\mathbb{K}^n$, y la métrica discreta en $\mathbb{K}^n$ es más fuerte, pero no equivalente a ninguna de ellas.

Sea $E \subset X$. Un elemento x de X es llamado un **punto interior** de E si existe un $r > 0$ tal que $U_d(x, r) \subset E$. El conjunto de todos los puntos interiores de E es llamada el **interior** de E. Se denotará por E^o. Es el subconjunto abierto más grande de E. E es un abiero en X si y solo si $E^o = E$.

Un subconjunto de X se dice **Cerrado** en X si su complemento en X es abierto en X. Por ejemplo, el subconjunto X y $\emptyset$ de X son cerrados en X. Inclusive, toda intersección de conjuntos cerrados en X y toda unión de un número finito de conjuntos cerrados en x son cerrados en X.

Sea $E \subset X$. Un elemento x de X es llamado un **punto de acumulación** de E si por cada $r > 0$, existen y en $U_d(r, x) \cap E$ con $y \neq x$. Un punto de acumulación de E puede o no pertenecer a E. El conjunto de todos los puntos y los puntos de acumulación de E es llamado la **Clausura** de E. Esto se denota como $\bar{E}$. De este modo

$$\bar{E} = \{x \in X : U_d(x, r) \cap E \neq \emptyset \quad para\ \ todo\ \ r > 0\}$$

La clausura de E es el subconjunto cerrado más pequeño de X que contiene E. E es cerrado en X si y solo si $\bar{E} = E$.

Si $Y \subset X$, entonces d induce una métrica en Y de forma natural. Un subgrupo F de Y es abierto en Y si y solo si $F = E \cap Y$ para algunos E abiertos en X.

Un subconjunto E en X se denomina **denso** en X si $\bar{E} = X$. Este es el caso si y solo si $E \cap U_d(x,r) \neq \emptyset$ para cada $x \in X$ y cada $R > 0$. Un espacio métrico X de denomina **separable** si contiene un subconjunto denso contable. Si X un espacio métrico separable y $Y \subset X$, entonces es separable en la métrica inducida. Esto puede evidenciarse la siguiente manera. Sea $E = \{x_1, x_2, ...\}$ un subconjunto denso de X. Si E es contenido en Y, entonces no hay nada que probar. De lo contrario, construimos un subconjunto contable de Y cuyos puntos se encuentran arbitrariamente cerca del conjunto E. Para números enteros n y m, sea $U_{n,m} = U(x_n, 1/m)$ y escogiendo $y_{n,m} \in U_{n,m} \cap Y$ siempre que no esté vacío. Se mostrará que el subconjunto contable $\{y_{n,m}\}$ de Y es denso en Y.

Ejemplo 4. *Sea $y \in Y$ y $r > 0$. Sea m suficientemente grande de modo que $1/m < r/2$, encontrar $x_n \in U_d(y, 1/m)$. tal que $y \in Y \cap U_{n,m}$ y*

$$d(y, y_{n,m}) \leq d(y, x_n) + d(x_n, y_{n,m}) < \frac{1}{m} + \frac{1}{m} \leq \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r.$$

De este modo $y_{n,m} \in U(y,r)$. Dado que $y \in Y$ y $r > 0$ son arbitrarias, se observa que el conjunto $\{y_{n,m}\}$ es denso en Y.

Separabilidad de ℓ^p

Teorema 1. *Para $1 \leq p < \infty$, el espacio métrico ℓ^p es separable, pero ℓ^∞ es no separable.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $1 \leq p < \infty$. Para $j = 1, 2, ...,$ y $e_j = (0, ..., 0, 1, 0, 0, ...)$, Donde 1 ocurre sólo en el j-ésimo lugar y

$$E = \{k_1 e_1 + ... + k_n e_n : n = 1, 2, ..., Re k_j \ \ y \ \ Im\, k_j \ \ racional \ \ para \ \ todo \ \ j\}$$

Puesto que los números racionales son contables, E es un conjunto contable. Ahora, se mostrará que E es denso en ℓ^p. Sea $x \in \ell^p$ y $r > 0$. Como $\sum_{j=1}^{\infty} |x(j)|^p$ es finito, Existen n tal que

$$\sum_{j=n+1}^{\infty} |x(j)|^p < \frac{r^p}{2}.$$

Desde que los números racionales son densos en $\mathbb{R}$, existe $k_1, ..., k_n \in \mathbf{K}$ con Rek_j y $Im\ k_j$ racional y

$$|x(j) - k_j|^p < \frac{r^p}{2n}, \quad j = 1, ..., n.$$

Considerando $y = k_1e_1 + ... + k_ne_n \in E$. Entonces

$$[d(x, y)]^p = \sum_{j=1}^{n} |x(j) - k_j|^p + \sum_{j=n+1}^{\infty} |x(j)|^p < \frac{r^p}{2} + < \frac{r^p}{2} = r^p$$

Por ello $y \in U_d(x, r)$ □

Por otro lado, ℓ^∞ no es separable. sea $S = \{x \in \ell^\infty : x(j) = 0$ o 1 para $j = \{1, 2, ...\}$. Entonces, $d_\infty(x, y) = 1$ para todo $x \neq y$ en S. Sea $\{x_1, x_2, ...\}$ cualquier subconjunto contable de ℓ^∞ y $0 < r \leq 1/2$. Entonces cada $U_d(x_n, r)$ contiene como máximo un elemento de S para $n = 1, 2, ...$ Desde que S es incontable (por ser el conjunto de todas las sucesiones de ceros o unos), existen $x \in S$ tal que $x \notin U_d(x_n, r)$ para todo $n = 1, 2, ...$ En otras palabras, $\{x_1, x_2 ...\} \cap U_d(x, r) = \emptyset$, de modo que el conjunto $\{x_1, x_2, ...\}$ no puede ser denso en ℓ^∞. □

Completitud

Concepto de sucesión

Una **Sucesión** (x_n) en un conjunto X es una función del conjunto $\{1, 2, ...\}$ en X, el valor de la función en n se denota por x_n. Sea d una métrica en X. Una sucesión (x_n) se dice que **converge** en X (con respecto a d), si existe $x \in X$ tal que para cada $\epsilon > 0$ existen n_0 con $d(x_n, x) < \epsilon$ para todo $n \geq n_0$. Se observa que existe como máximo una x y cuando existe, se dice que (x_n) converge a x en X, Se escribe $x_n \longrightarrow x$ en X o $\lim_{n \longrightarrow \infty} x_n = x$ y se denomina a x el **limite** de (x_n).

Si d corresponde a la métrica discreta en X, entonces $x_n \longrightarrow x$ en X si y solo si existe n_0 con $x_n = x_{n_0} \forall n \geq n_0$. Si $x = \mathbb{R}$ y d es la métrica usual, entonces la sucesión (x_n) es convergente en $\mathbb{R}$ si y solo si $\limsup\limits_{n \longrightarrow \infty} x_n = \liminf\limits_{n \longrightarrow \infty} x_n = x \in \mathbb{R}$ y entonces $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} x_n = x$.

Recordar que si $m = 1, 2, ...,$

$$y_m = \sup\{x_m, x_{m+1}, ...\} \quad y \quad z_m = \text{ínf}\{x_m, x_{m+1}, ...\},$$

entonces

$$\text{lím} \sup_{n \longrightarrow \infty} x_n = \text{ínf}\{y_1, y_2, ...\} \quad y \quad \text{lím} \inf_{n \longrightarrow \infty} x_n = \sup\{z_1, z_2, ...\}$$

Si $X = \mathbb{K}^m$ y $d = d_p$, $1 \leq p \leq \infty$, entonces $x_n \longrightarrow x$ en $\mathbb{K}^m$ si y solo si $x_n(j) \longrightarrow x(j)$ en $\mathbb{K}$ para todo $j = 1, ..., m$. Por otro lado, si $X = \ell^p$ y $x_n \longrightarrow x$ en X, entonces $x_n(j) \longrightarrow x(j)$ en $\mathbb{K}$ para todo $j = 1, 2, ...$ Sin embargo, $x_n(j))$ puede converger en $\mathbb{K}$ para todo $j = 1, 2, ...,$ sin que x_n sea convergente en ℓ^p.

Ejemplo 5. *Si $x_n = e_n$, entonces $e_n(j) \longrightarrow 0$ cuando $n \longrightarrow \infty$ para todo $j = 1, 2, ...,$ pero (e_n) no es convergente en ℓ^p ya que si $e_n \longrightarrow x$, entonces $x(j) = 0$ para todo $j = 1, 2, ...,$ de modo que $x = 0$, mientras que $d_p(e_n, 0) = 1$ para todo $n = 1, 2, ...$ Observamos que $x_n \longrightarrow x$ en $B(T)$ si y solo si (x_n) es* ***uniformemente convergente*** *a x en T, es decir, por cada $\epsilon > 0$ existe n_0 tal que $|x_n(t) - x(t)| < \epsilon$ para todo $t \in T$ y $n \geq n_0$.*

Definición 8. *Sea d de una métrica en un conjunto no vacío X. Una sucesión (x_n) en X se dice de Cauchy (con respecto a d) si para cada $\epsilon > 0$, existe un n_0 tal que $d(x_n, x_m) < \epsilon$, para todo $n, m \leq n_0$.*

Un espacio métrico X se dice que es completo si toda sucesión de Cauchy en X converge a X.

Si d es una métrica discreta en X y (x_n) una sucesión de Cauchy en X, entonces existe n_0 tal que $x_n = x_m$ para todo $n > n_0$. Por eso un espacio métrico discreto es completo. También, $\mathbb{R}$ con la métrica usual es completo. Esto se puede ver de la siguiente manera, sea (x_n) una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$. Dado que está acotada, se tiene que $lim\ sup_{n \to \infty} x_n = x \in \mathbb{R}$. Entonces, existe una subsucesión (x_n) de (x_n) que converge a x. Por lo tanto, (x_{n_m}) en sí mismo converge a x.

Si $X = \mathbb{K}^n$ y $d = d_p$, $1 \leq p \leq \infty$, entonces una sucesión (x_n) es de Cauchy en $\mathbb{K}^n$ si y sólo si la sucesión $(x_n(j))$ es de Cauchy en $\mathbb{K}$ para $j = 1, ..., n$. Resulta que $\mathbb{K}^n$ es completo.

Teorema 2. *Para $1 \leq p \leq \infty$, el espacio métrico ℓ^p es completo.*

DEMOSTRACIÓN. Primero, sea $1 \leq p < \infty$ y considerando una sucesión de Cauchy (x_n) en ℓ^p. Si $\epsilon > 0$. Existe n_0 tal que $d_p(x_n, x_m) < \epsilon$ para todo $n, m \geq n_0$. Para $n, m \geq n_0$ y $i = 1, 2, ...,$ se tiene

$$|x_n(i) + x_m(i)| \leq \left(\sum_{j=1}^{i} |x_n(j) - x_m(j)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq d_p(x_n, x_m) < \epsilon.$$

En particular, $x_n(i)$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{K}$ para cada $i = 1, 2, ...$ Dado que $\mathbb{K}$ es completo, sea $x_n(i) \to x(i)$ en $\mathbb{K}$ como $n \to \infty$. Manteniendo $n \geq n_0$ fijo y dejando $m \to \infty$ en la inecuación, se tiene

$$\left(\sum_{j=1}^{i} |x_n(j) - x_m(j)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \epsilon, \qquad i = 1, 2, ...$$

Si $x = (x(1), x(2), ...)$. Considerando $a_j = x(j) - x_{n_0}(j)$ y $b_j = x_{n_0}(j)$ en la desigualdad de Minkowski (3.3.2), se observa que

$$\left(\sum_{j=1}^{i} |x_n(j)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \epsilon + \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_{n_0}(j)|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Para $i = 1, 2, ...$ Por lo tanto, $x \in \ell^p$. Finalmente, dejando $i \to \infty$ en la penúltima inequación, se obtiene

$$d_p(x_n, x) = \left(\sum_{j=1}^{i} |x_n(j) - x_m(j)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \epsilon.$$

Para todo $n \geq n_0$. Por lo tanto $x_n \to x$ pertenece a ℓ^p. Así ℓ^p es completo para $1 \leq p < \infty$.

Continuando, considerar una sucesión de Cauchy (x_n) en ℓ^∞. Sea $\epsilon > 0$. Existen n_0 tal que para todo $n, m \geq n_0$ y $j = 1, 2, ...$, se tiene

$$|x_n(j) + x_m(j)| \leq d_\infty(x_n, x_m) = \sup_{j=1,2,...} |x_n(j) + x_m(j)| < \epsilon$$

En particular, $(x_n(j))$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{K}$ para todo $j = 1, 2, ...$ Sea $x_n(j) \to x(j)$ en $\mathbb{K}$ cuando $n \to \infty$. Conservando $n \geq n_0$ fijo y haciendo $m \to \infty$ en la última inecuación, resulta que $x\ in \ell^\infty$ y

$$d_\infty(x_n, x) = \sup_{j=1,2,...} |x_n(j) + x(j)| \leq \epsilon$$

Para todo $n \geq n_0$. Por lo tanto, $x_n \to x$ pertenece a ℓ^∞. De este modo, ℓ^∞ es completo. $\square$

CAPÍTULO 4

Espacios Normados

Sobre un espacio vectorial se impone una estructura métrica que se comporta bien con respecto a las operaciones adición y multiplicación por escalar.

Sea X un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Una norma en X es una función $\| \ \|$ para X en $\mathbb{R}$, tal que para todo $x, y \in X$ y $k \in \mathbb{K}$, se satisface que

- $\|x\| \geq 0$ para todo $x \in X$.
- $\|x\| \ = 0$ si y sólo si $x = 0$.
- $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ y todo $x \in X$.
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, para todo $x, y \in X$.

Un **Espacio Normado** corresponde a un espacio vectorial con una norma en él.

Ejemplo 6.

Espacios $\mathbb{K}^n$: Para $n = 1$, la función valor absoluto $| \ |$ es una norma en $\mathbb{K}$. Desde que $\|k\| = |k| \|1\|$ para todo $k \in K$, se deduce que cualquier norma en $\mathbb{K}$ es un escalar positivo multiplicado por la función valor absoluto.

Para $n > 1$, existe una variedad de normas en $\mathbb{K}^n$. A continuación se describen algunas de ellas.

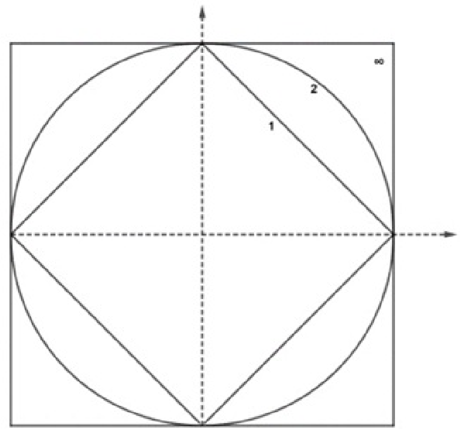

Figura 1

Si $p \leq 1$ es un úmero real. Para $x = (x(1), ..., x(n)) \in \mathbb{K}^n$, se tiene

$$\|x\|_p = (|x(1)|^p + ... + |x(n)|^p)^{1/p}$$

Si $p = 1$, entonces $|\ |_1$ es una norma en $\mathbb{K}^n$. Si $p > 1$, entonces si se deja $a_j = x(j)$ y $bj = y(j)$ en la desigualdad de Minkowski, resulta que $\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$. Por ello, $|\ |_p$ es norma en $\mathbb{K}^n$. La norma $|\ |_2$ es conocida como la norma euclideana. A continuación se puede observar que

$$\|x\|_\infty = max|x(1)| + ... + |x(n)|, \qquad x \in \mathbb{K}^n,$$

también define una norma sobre $\mathbb{K}^n$.

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y $n = 2$, el conjunto $x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_p = 1$ para $p = 1, 2$ y ∞ se muestra en la Figura 1.

Ejemplo 7. ***Espacios de sucesiones****: Para $1 \leq p < \infty$, consideremos el conjunto ℓ^p de sucesiones escalares. Para $x = (x(1), x(2), ...)$en ℓ^p, sea*

$$\|x\|_p = (|x(1)|^p + |x(2)|^p + ...)^{1\backslash p}.$$

Si $p = 1$, entonces ℓ^1 es el espacio vectorial y $\|\ \|_1$ es una norma en el. Si $p > 1$, luego haciendo $n \longleftarrow \infty$ en la desigualdad de Minkowski (3.3.2)*, resulta que $\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$, de modo que ℓ^p es un espacio vectorial y $\|\ \|_p$ es una norma sobre el.*

Sea $1 \leq p < r < \infty$. Consideremos $x \in \ell^p$ con $\|x\|_p \leq 1$. Entonces $|x(j)| \leq 1$, y por lo tanto $|x(j)|^r \leq |x(j)|^p$ para todo $j = 1, 2, ...$ Esto muestra que $\|x\|_r \leq 1$. Ahora, si x es cualquier elemento distinto de cero de ℓ^p, entonces considerando $x \backslash \|x\|_p$, se deduce que

$$\|x\|_r \leq \|x\|_p, \quad si\ 1 \leq p < r < \infty$$

Esto se conoce como la ***desigualdad de Jensen****. Esto implica que $\ell^p \subset \ell^r$ y si $x_n \longrightarrow x$ en ℓ^p, entonces $x_n \longrightarrow x$ en ℓ^r.*

Para continuar, consideremos el espacio vectorial ℓ^∞ y toda sucesión escalar acotada. Puede observarse que

$$\|x\|_\infty = sup\{|x(j)| : j = 1, 2, ...\}$$

Define una norma sobre ℓ^∞. También, si $p \geq 1$ y $x \in \ell^p$, entonces $\|x\|_\infty \leq \|x\|_p$. Por eso $\ell^p \subset \ell^\infty$ y si $x_n \longrightarrow x$ en ℓ^p, entonces $x_n \longrightarrow x$ en ℓ^∞.

Teorema 3. *Sea X un espacio normado.*

(a) Si E_1 es abierto en X y $E_2 \subset X$, entonces $E_1 + E_2$ es abierto en X.

(b) Sea E un subconjunto convexo de X. Entonces el interior E° de E y la clausura $\bar{E}$ de E también son convexos. Si $E^\circ \neq \emptyset$, entonces $\bar{E} = \bar{E}^\circ$.

(c) Si Y es un subespacio de X. Entonces $Y^\circ \neq \emptyset$ si y solo si $Y = X$.

Demostración.

(a) Sea $x \in X$ y $x_1 \in E_1$. Ya que E_1 es abierto, existe $r > 0$ tal que $U_d(x_1, r) \subset E_1$. Pero $U_d(x_1 + x, r) = U_d(x_1, r) + x \subset E_1 + x$. Por lo tanto $E_1 + x$ es abierto para todo $x \in X$. Por consiguiente

$$E_1 + E_2 = \bigcup \{e_1 + x_2 : x_2 \in E_2\}$$

se deduce que $E_1 + E_2$ es abierto.

(b) *Sea* $0 < t < 1$. *Ya que* E *es convexo,* $tE^\circ + (1-t)E^\circ \subset E$. *También, por (a),* $tE^\circ + (1-t)E^\circ$ *es abierto. Por eso,* $tE^\circ + (1-t)E^\circ \subset E$, *es decir,* E° *es convexo.*

Continuando, sea $x, y \in \bar{E}$. *Encontrar sucesiones* (x_n) *y* (y_n) *en* E *tal que* $x_n \longrightarrow x$, *y* $y_n \longrightarrow y$. *Ya que* $tx_n + (1-t)y_n \longrightarrow tx + (1-t)y$, *se observa que* $tx + (1-t)y \in \bar{E}$. *De este modo* $a \in E^\circ$.

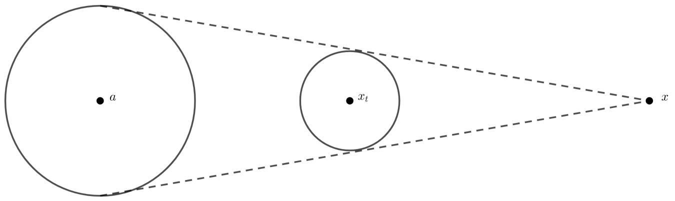

Figura 2

Sea $r > 0$ *tal que* $U_d(a, r) \subset E$, *es decir,* $a + ry \in E$ *para todo* $y \in X$ *con* $\|y\| < 1$. *Sea* $x \in E$ *y* $X_t + try \in E$ *para todo* $y \in X$ *con* $\|y\| < 1$. *Esto se deriva de la convexidad de* E, *porque* $x_t + try = t(a + ry) + (1-t)x$, *donde* $a + ry \in E$ *y* $x \in E$. *De este modo* $x_t \in E^\circ$. *Ya que* $x_t \longrightarrow x$ *mientras* $t \longrightarrow 0$, *tenemos que* $x \in E^\circ$.

(c) *Si* $Y = X$, *entonces* $Y^\circ = X \neq \theta$. *De manera inversa, sea* $Y^\circ \neq \theta$. *Consideremos* $a \in Y^\circ$ *y sea* $r > 0$ *tal que* $\bar{U}_d(a, r) \subset Y$. *Entonces* $\bar{U}_d(0, r) = \bar{U}_d(a, r) - a \subset Y$. *Sea* $x \in X$. *Si* $x = 0$, *entonces* $x \in Y$. *Si* $x \neq 0$, *entonces* $\frac{rx}{\|x\|} \in \bar{U}_d(0, r) \subset Y$. *Por eso,* $x \in Y$ *también.*

4.1 Dualidad

Sea $(X, \| \ \|)$ un espacio vectorial normado sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Toda aplicación $F : X \to \mathbb{K}$ se llama **FUNCIONAL**. Notar que cualquier norma de X es un funcional. Prosiguiendo, se definen los conceptos de linealidad y acotamiento relaciados a un funcional.

Definición 9. *Un funcional $F : X \to \mathbb{K}$ se dice lineal si*

$$F(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha F(x_1) + \beta F(x_2), \qquad \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \qquad \forall\, x_1, x_2 \in X$$

Definición 10. *Un funcional $F : X \to \mathbb{K}$ se dice acotado con respecto a una norma dada $\| \ \|$ de X si existe una constante $K > 0$ tal que*

$$|F(x)| \ \leq K \parallel x \parallel \qquad \forall\, x \in X$$

Ejemplo 8. *El siguiente es un ejemplo de funcional.*

Dado un espacio vectorial normado $(X, \|\cdot\|)$, la norma $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ es un funcional no-lineal. En particular, se tiene que para $\alpha < 0$ y $x \in X$, $x \neq 0$, se tiene $\|\alpha \ x\| = |\alpha| \ \parallel x \parallel \neq \alpha \| \ x\|$

El conjunto de todos los funcionales lineales y acotados definidos sobre X se denomina **dual** de X y se denota por X'. Sobre X' se definen las siguientes operaciones

Definición 11.

$+ : X' \times X' \to X'$

$(F, G) \to F + G, \quad (F + G)(x) := F(x) + G(x) \quad \forall\, x \in X$

y

Definición 12.

$\cdot : \mathbb{K} \times X' \to X'$

$(\lambda, F) \to \lambda F, \quad (\lambda F)(x) := \lambda F(x) \quad \forall\, x \in X$

Entonces, $(X', +, \cdot)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, cuyo elemento neutro para la adición corresponde al funcional nulo $\theta : X \times \mathbb{K}$ definido como $\theta(x) = 0$ para todo $x \in X$.

Definición 13. *Dado $F \in X'$ se define $\|F\|_{x'}$ como el ínfimo de todas las constantes $M > 0$ que satisfacen la condición de acotamiento de F según indica la definición* (12) *esto es*

$$\|F\|_{x'} := inf\{M > 0 : \quad |F(x)| \leq M\|x\|_X \quad \forall x \in X\}$$

Continua con

$$\|F\|_{x'} = \sup_{0 \neq x, x \in X} \frac{|F(x)|}{\|x\|_X} \quad \forall F \in X',$$

De la misma manera, $\|F\|_{x'}$ se puede definir como

$$\|F\|_{x'} = \sup_{x \in X, \|v\| \leq 1} |F(x)|,$$

o bien

$$\|F\|_{x'} = \sup_{x \in X, \|v\| = 1} |F(x)|.$$

En cada uno de los casos, se prueba que $\| \cdot \|_{x'}$ es una norma sobre X', con lo cual$(X', +, \cdot, \| \cdot \|_{X'})$ constituye un espacio vectorial normado. De la misma forma, se puede demostrar, usando la completitud del cuerpo $\mathbb{K}$, que X' es un espacio de Banach.

CAPÍTULO 5

Espacios de Banach

Un espacio normado X sobre $\mathbb{K}$ se denomina **Espacios de Banach** si X es completo con la métrica $d(x,y) = \|x-y\|$ inducido por la norma $\|\cdot\|$.

Un subconjuto de un espacio métrico completo X es completo si y sólo si está cerrado en X, de ello se deduce que un subespacio Y de un espacio de Banach X es un Espacio de Banach si y sólo si es cerrado en X.

Ejemplos

- $\mathbb{K}^n$ con cualquiera de las normas $\|\cdot\|_p$, $1 \leq p \leq \infty$.
- Espacios Normados de dimensión finita.
- ℓ^p, $1 \leq p \leq \infty$, con la norma $\|\cdot\|_p$

5.1 Espacios normados que no son de Banach

Un ejemplo de espacio normado que no es de Banach se genera al considerar el espacio de las funciones continuas definidas en [1, 1], $\mathcal{C}([-1,1])$. En $C([-1,1])$ definimos la norma

$$\|f\| = \left(\int_{-1}^{1} |f(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

Se define

$$f_n(t) = \begin{cases} 0, & -1 < t < 0 \\ nt, & 0 \le t < \frac{1}{n} \\ 1, & \frac{1}{n} \le t \le 1 \end{cases}$$

(f_n) es de Cauchy

$$\|f_n - f_m\| = \int_0^{\frac{1}{n}} (n-m)^2 t^2 dt + \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{m}} (1-mt)^2 dt$$

$$= -\frac{2}{3n} + \frac{m}{3n^2} + \frac{1}{3m} < \frac{1}{3m} - \frac{1}{3n}.$$

Sin embargo f_n converge a f en la norma de la integral, donde

$$f(t) = \begin{cases} 0, & -1 \le t \le 0 \\ 1, & 0 < t \le 1 \end{cases}$$

La cual no es continua.

CAPÍTULO 6

Teorema de Hahn - Banach

El Teorema de Hahn-Banach de extensión y el Hahn-Banach de separación son dos de los resultados más fundamentales en análisis funcional. El primero asegura una extensión lineal que preserva la norma de un funcional en un subespacio de un espacio normado, mientras que el segundo trata de la separación de dos subconjuntos convexos disjuntos de un espacio normado mediante un hiperplano cerrado. La primera forma es de caracter analítico, mientras que la segunda es de naturaleza geométrica. Ambas están estrechamente relacionadas entre sí ya que un hiperplano cerrado de un espacio normado X es una traslación de un núcleo $N(f)$ de alguna f distinta de cero en su dual X'.

A continuación se presentan ambos formas del Teorema, incluyendo ejemplos y la vinculación de ambas.

6.1 Forma Analítica

Para la demostración de esta primera versión del teorema se requiere definir el concepto de funcional sublineal.

Definición 14. *Sea X un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Un **funcional sublineal** en X es una función $p : X \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que*

1. $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ *para todo* $x, y \in X$.

2. $p(tx) = tp(x)$ *para todo* $x \in X$ *y* $t \geq 0$.

Toda seminorma en X, así como cada funcional lineal en X, es un sublineal funcional en X, pero también existen otros funcionales sublineales. Por ejemplo, sea $X := \mathbb{R}$, y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha \leq \beta$. Se define $p(x) := \alpha x$ si $x < 0$ y $p(x) := \beta x$ si $x \geq 0$. Entonces p es un funcional sublineal en $\mathbb{R}$. Si $\beta \geq 0$

Teorema 4. *Sea* X *un espacio vectorial sobre* $\mathbb{R}$ *y sea* $p : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *un funcional sublineal. Sea* Y *un subespacio de* X *y sea* $f : Y \longrightarrow \mathbb{R}$ *un funcional lineal tal que*

$$f(x) \leq p(x) \qquad \forall x \in Y$$

Entonces, existe un funcional lineal $F : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *tal que*

$$F(x) = f(x) \quad \forall x \in Y \qquad y \qquad F(x) \leq p(x) \quad \forall x \in X.$$

DEMOSTRACIÓN. Para realizar esta demostración se hará uso del Lema de Zorn. Para ello, en primera instancia se define la familia $\mathcal{F}$ de todas las extensiones lineales de f acotadas por p, es decir

$\mathcal{F} := \{g : \mathcal{D}(g) \longrightarrow \mathbb{R},\ \textit{lineal} : \mathcal{D}(g)\ \textit{subespacio de}\ X\ \textit{tal que}\ Y \subseteq \mathcal{D}(g),\ g(x) = f(x)\ \ \forall\, x \in Y,\ \ g(x) \leq p(x),\ \ \forall x \in \mathcal{D}(g)\}.$

Notar que $\mathcal{F} \neq \emptyset$ ya que $f \in \mathcal{F}$. Luego, sobre $\mathcal{F}$ definimos la siguiente relación de orden: dados $g, h \in \mathcal{F}$ se dice que $g \leq h$ si y sólo si h es una extensión lineal de g, es decir $\mathcal{D}(g) \subseteq \mathcal{D}(h)$ y $h(x) = g(x)\ \forall x \in \mathcal{D}(g)$.

Dada una cadena $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{F}$, se define el conjunto

$$\hat{\mathcal{D}} := \cup\{\mathcal{D}(g) : g \in \mathcal{C}\},$$

El cual probaremos que resulta ser un subespacio vectorial de X. En primera instancia, vemos que $\hat{\mathcal{D}} \neq \emptyset$ ya que $\theta \in \hat{\mathcal{D}}$. Luego, dados $\lambda \in \mathbb{R}$ y $x \in \hat{\mathcal{D}}$ se tiene que $x \in \mathcal{D}(g_0)$ para algún $g_0 \in \mathcal{D}$, y por lo tanto $\lambda x \in \mathcal{D}(g_0)$, con lo cual $\lambda x \in \hat{\mathcal{D}}$. Ahora, dados $x, y \in \hat{\mathcal{D}}$, existen $g_1, g_2 \in \mathcal{C}$ tales que $x \in \mathcal{D}(g_1)$ e $y \in \mathcal{D}(g_2)$. Como $\mathcal{C}$ es una cadena, se tiene que $g_1 \leq g_2$ o bien $g_2 \leq g_1$, en cualquiera de ambos casos se concluye que $x + y \in \hat{\mathcal{D}}$.

Entonces, se define

$$\begin{array}{rccl} \hat{g}: & \hat{\mathcal{D}} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & & x \longrightarrow \hat{g} := g(x), \quad \text{si } x \in \mathcal{D}(g), \text{ con } g \in \mathcal{C}. \end{array}$$

Observemos que $\hat{g}$ está bien definida:

Si $x \in \mathcal{D}(g_1) \cap \mathcal{D}(g_2)$, con $g_1, g_2 \in \mathcal{C}$, se tiene que $g_1 \leq g_2$ o bien $g_2 \leq g_1$, en ambos casos resulta que $g_1(x) = g_2(x)$. Además, $\hat{g}$ es una extensión lineal de todo $g \in \mathcal{C}$, lo cual muestra que $g \leq \hat{g}\ \ \forall g \in \mathcal{C}$, y por lo tanto $\hat{g}$ constituye una cota superior de la cadena $\mathcal{C}$.

En consecuencia, por el Lema de Zorn se deduce que la familia $\mathcal{F}$ tiene un elemento maximal F. De acuerdo a la definición de $\mathcal{F}$, esto significa que F es una extensión lineal de f, cuyo dominio $\mathcal{D}(F)$ es un subespacio de X, de modo que

$$Y \subseteq \mathcal{D}(F), \quad F(x) \leq p(x) \ \ \forall x \in \mathcal{D}(F), \quad \text{ y } \quad F(x) = f(x) \ \ \forall x \in Y.$$

También, si $g \in \mathcal{F}$ es tal que $F \leq g$, entonces $F = g$. Sólo resta probar que $\mathcal{D}(F) = X$ para culminar la demostración. Procedemos por contradicción, supongamos que existe $y_1 \in X \notin \mathcal{D}(F)$, y consideremos el subespacio $Y_1 := \mathcal{D}(F)+ < \{y_1\} >$, esto es

$$Y_1 := \{x := y + \alpha y_1 : \quad y \in \mathcal{D}(F), \quad \alpha \in \mathbb{R}\}$$

Notemos que $y_1 \neq \theta$. Además, la representación de los elementos de Y_1 es única, esto es $Y_1 := \mathcal{D}(F) \oplus < \{y_1\} >$ ya que $\mathcal{D}(F) \cap < \{y_1\} >= \{\theta\}$. Entonces, podemos definir el funcional lineal

$$\begin{array}{rccl} g_1: & Y_1 & & \longrightarrow R \\ & & x := y + \alpha y_1 :\longrightarrow g_1(x) := F(y) + \gamma\alpha, & \end{array}$$

donde $\gamma \in \mathbb{R}$ es un parametro por determinar. Se sigue con que $g_1(x) = F(x)$ para todo $x \in \mathcal{D}(F)$, lo cual prueba que g_1 es una extensión propia de F, ya que $\mathcal{D}(F)$ es un subespacio propio de Y_1. Ahora, el objetivo es probar que γ se puede escoger convenientemente de modo que $g_1 \leq p(x)$ para todo $x \in Y_1$. Esto mostraría que $g_1 \in \mathcal{F}$ y que $F \leq g_1$, con $g_1 \neq F$, lo cual contradice la condición de maximalidad de F, y con ello, obligatoriamente $\mathcal{D}(F) = X$.

Dados $y, z \in \mathcal{D}(F)$, podemos escribir

$$F(y) - F(z) = F(y - z) \leq p(y - z) = p((y + y_1) + (-y_1 - z).$$

Utilizando la sublinealidad de p, se obtiene

$$F(y) - F(z) \leq p(y + y_1) + p(-y_1 - z),$$

de donde

$$-p(-y_1 - z) - F(z) \leq p(y + y_1) - F(y), \qquad \forall y, z \in \mathcal{D}(F).$$

Esta desigualdad sugiere definir las constantes

$$m^- := \sup_{z \in \mathcal{D}(F)} \left\{-p(-y_1 - z) - F(z)\right\},$$

y

$$m^+ := \inf_{y \in \mathcal{D}(F)} \left\{p(y + y_1) - F(y)\right\},$$

Las cuales por definición de ínfimo y supremo cumplen que $m^- \leq m^+$. Entonces, dado $\gamma \in [m^-, m^+]$ se tiene

$$-p(-y_1 - z) - F(z) \leq \gamma \qquad \forall z \in \mathcal{D}(F), \tag{6.1.1}$$

y

$$\gamma \leq p(y + y_1) - F(y) \qquad \forall y \in \mathcal{D}(F). \tag{6.1.2}$$

Ahora, sea $x := y + \alpha y_1 \in Y_1$, con $y \in \mathcal{D}(F)$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Para probar que $g_1(x) \leq p(x)$ utilizamos la propiedad de tricotomía en $\mathbb{R}$, así tenemos los tres siguientes casos:

1. Si $\alpha = 0$ se tiene que $x \in \mathcal{D}(F)$ y por lo tanto $g_1(x) = F(x)$.

2. Si $\alpha < 0$ tomamos $z = \alpha^{-1} y$ en (6.1.1) y obtenemos

$$-p(-y_1 - \alpha^{-1} y) - F(\alpha^{-1} y) \leq \gamma,$$

multiplicando por $(-\alpha) > 0$, resulta

$$\alpha p(-y_1 - \alpha^{-1}y) - F(y) \leq -\alpha\gamma$$

o bien

$$g_1(x) := F(y) + \alpha\gamma \leq (-\alpha)p(-y_1 - \alpha^{-1}y) = p(y + \alpha y_1) = p(x).$$

3. Si $\alpha > 0$ tomamos $\alpha^{-1}y$ en (6.1.2) y obtenemos

$$\gamma \leq p(\alpha^{-1}y + y_1) - F((\alpha^{-1}y),$$

multiplicando por α, resulta

$$\alpha\gamma \leq (\alpha)p(\alpha^{-1}y + y_1) - F(y),$$

o bien

$$g_1(x) := F(y) + \alpha\gamma \leq (\alpha)p(\alpha^{-1}y + y_1) = p(y + \alpha y_1) = p(x).$$

Lo que resulta ser una contradicción pues F es maximal. □

A continuación, se considera el caso particular en que X es un espacio vectorial normado, el cual constituye una de las versiones más conocidas del Teorema de Hahn-Banach.

Teorema 5. *(TEOREMA DE HAHN-BANACH EN ESPACIOS NORMADOS) Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial normado sobre $\mathbb{R}$ y sea $f \in Y'$, donde Y es un subespacio de X. Entonces, existe $F \in X'$ tal que*

$$F(x) = f(x) \forall x \in Y y \ \ \|\mathbb{F}\|_{X'} = \|f\|_{Y'}$$

DEMOSTRACIÓN: Aplicando el teorema (4) a $f \in Y'$ y al funcional sublineal $p : X \longrightarrow \mathbb{R}$ definido por $p(x) = \|f\|_{Y'}\|x\|$ para todo $x \in X$, se deduce que existe $F : X \longrightarrow \mathbb{R}$ lineal, tal que

$$F(x) = f(x) \qquad \forall x \in Y \qquad y \qquad F(x) \leq \|f\|_{Y'}\|x\| \qquad \forall x \in X.$$

Se sigue que

$$F(-x) \leq \|f\|_{Y'}\| - x\| = \|f\|_{Y'}\|x\|,$$

de donde, usando la linealidad de F,

$$F(x) \geq \; - \; \|f\|_{Y'}\|x\|,$$

y por lo tanto

$$\mid F(x) \mid \; \leq \; \|f\|_{Y'} \; \forall x \; \in \; X.$$

Esta desigualdad prueba que $F \in X'$ y $\|F\|_{X'} \leq \|f\|_{Y'}$. Por otro lado, se tiene que

$$\|F\|_{X'} = \sup_{x\in X, x\neq\theta} \frac{|F(x)|}{\|x\|} \geq \sup_{x\in Y, x\neq\theta} \frac{|F(x)|}{\|x\|} = \sup_{x\in X, x\neq\theta} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \|f\|_{Y'} \qquad \square$$

Ejemplo 9. *Sea $X = \mathbb{K}^2$ con la norma $\|\cdot\|$. Considerar*

$$Y = \{(x(1), x(2)) \in X : x(2) = 0\}.$$

definimos $g \in Y'$ por

$$g(x(1), x(2)) = x(1)$$

Entonces, se tiene que $\|g\| = 1 = g(a)$, donde $a = (1, 0) \in Y$. Ya que $Y =< \{a\} >$, observamos que una función f en X es una extensión de Hahn- Banach de g a X si y sólo si f es lineal sobre X y $\|f\| = 1 = f(a)$. Ahoram si f es lineal sobre X, entonces $f(x(1), x(2)) = k_1x(1) + k_2x(2)$ para todo $(x(1), x(2))$ en $\mathbb{K}^2$ y algunos puntos fijos k_1 y k_2 en $\mathbb{K}$. Entonces $\|f\| = \max\{|k_1|, |k_2|\}$, y $f(a) = 1$ si y sólo si $k_1 = 1$. De este modo, la extensión de Hahn-Banach de g sobre X está dada por

$$f(x(1), x(2)) = x(1) + k_2x(2),$$

donde $k_2 \in \mathbb{K}$ con $|k_2| \leq 1$. Observamos que el hiperplano real $\{x \in X : Re(x(1) + k_2x(2)) = 1\}$ es un hiperplano de soporte para el cuerpo convexo $\{x \in X : \|x\|_1 \leq 1\}$ para $a = (1, 0)$. Observar la figura 4 para el caso $=\mathbb{R}$ Continuando, considerar

$$N = \{(x(1), x(2)) \in X : x(1) = x(2)\}.$$

. Definimos $h \in N'$ como

$$h(x(1), x(2)) = 2x(1).$$

entonces, se tiene que si $\|h\| = 1 = h(b)$, donde $b = (1\backslash 2, 1\backslash 2) \in N$. Puesto que $N =< \{b\} >$, se oberva que la función f sobre X es una extensión de Hahn-Banach de h sobre X si y sólo si f es lineal en X y $\|f\| = 1 = f(b)$. De manera analoga, en este caso si y sólo si $f(x(1), x(2)) = k_1 x(1) + k_2 x(2)$ con $\max\{|k_1|, |k_2|\} = 1$ y $k_1 + k_2 = 2$, eso es, $k_1 = 1 = k_2$. Por lo tanto, la única extensión de Hahn-Banach de h sobre X está dada por

$$f(x(1), x(2)) = x(1) + x(2).$$

Observemos que el hiperplano real $\{x \in X : Re(x(1) + x(2)) = 1\}$ es un hiperplano de soporte para el cuerpo convexo $\{x \in X : \|x\|_1 \leq 1\}$ para $b = (1\backslash 2, 1\backslash 2)$. Observar la figura 4 para el caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

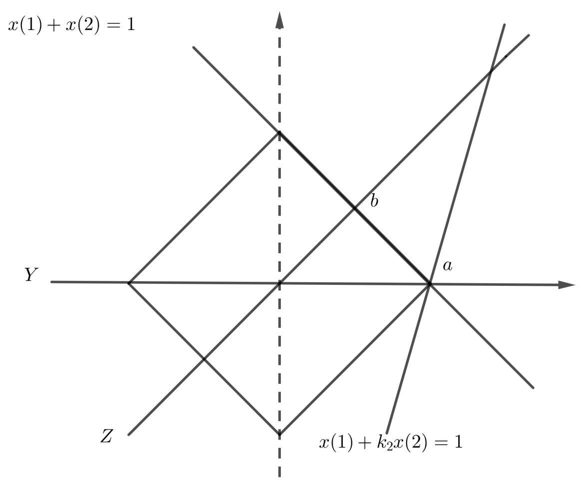

Figura 3

6.2 Consecuencias del Teorema de Hahn-Banach

A continuación, se exponen algunos resultados derivados del Teorema de Hahn-Banach, los cuales encuentran aplicación recurrente en distintos contextos.

Teorema 6. *Sea* $(X, \|\cdot\|)$ *un espacio vectorial normado sobre* $\mathbb{R}$ *y sea* $x_0 \in X$ *tal que* $x_0 \neq \theta$*. Entonces, existe* $F \in X'$ *tal que* $\|F\| = 1$ *y* $F(x_0) = \|x_0\|$*.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $Y := <\{x_0>\} := \{\alpha x_0 : \quad \alpha \in \mathbb{R}\}$ y definamos el funcional

$$\begin{array}{lccc} f: & Y & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x = \alpha x_0 & \longrightarrow & f(x) := \alpha \|x_0\|. \end{array}$$

podemos ver que f es lineal. Además $|f(\alpha x_0)| = |\alpha|\|x_0\| = \|x_0\|$, lo cual muestra que f es acotado y $\|f_{Y'}\| = 1$. Así, aplicando el teorema de Hahn-Banach se concluye que $\exists F \in X'$ tal que $F(x) = f(x)$ para todo $x \in Y$ y $\|F\|_{X'} = \|f\|_{Y'} = 1$. Singularmente, para $x_0 \in Y$ se tiene $F(x_0) = f(x_0) = \|x_0\|$. $\square$

Observemos que si X' es estrictamente convexo entonces el funcional $F \in X'$ del teorema anterior es único. De hecho, utilizando la convexidad estricta del dual la que implica que para todo $F_1, F_2 \in X'$ tal que $F_1 \neq F_2$ y $\|F_1\| = \|f_1\| = 1$, se tiene que $\|tF_1 + (1-t)F_2\| < 1$ para todo $t \in]0,1[$. Entonces, si suponemos que existen $F, G \in X'$, distintos, tales que $\|F\| = \|G\| = 1$ y $F(x_0) = G(x_0) = \|x_0\|$, obtenemos

$$1 > \|tF + (1-t)G\|_{X'} = \sup_{x \in X, X \neq \theta} \frac{tF(x) + (1-t)G(x)}{\|x\|} \geq \frac{tF(x_0) + (1-t)G(x_0)}{\|x_0\|}$$

Lo cual es una contradicción.

Lema 3. *Sea* $(X, \|\cdot\|)$ *un espacio vectorial normado. Entonces*

$$\|v\| = \sup_{\theta \neq F \in X'} \frac{|F(x)|}{\|F\|} = \max_{\theta \neq F \in X'} \frac{|F(x)|}{\|F\|} \qquad \forall \ x \quad \in \quad X.$$

DEMOSTRACIÓN. Si $x = \theta$ el resultado es inmediato. Si $x \neq \theta$, utilizando el lema (6) tenemos que existe $\bar{F} \in X'$ tal que $\|\bar{F}\| = 1$ y $\bar{F}(x) = \|x\|$, con lo cual

$$\sup_{\theta \neq F \in X'} \frac{|F(x)|}{\|F\|} \geq \frac{|\bar{F}(x)|}{\|\bar{F}\|} = \|x\|.$$

A su vez, se observa que

$$\sup_{\theta \neq F \in X'} \frac{|F(x)|}{\|F\|} \leq \|x\|.$$

$\square$

Teorema 7. *Sea Y un subespacio de un espacio vectorial normado de $(X, \|\cdot\|)$ y sea $x_0 \in X$ tal que $d = d(x_0, Y) > 0$. Entonces existe $F \in X'$ tal que $\|F\| = 1, F(x_0) = d$ y $F(x) = 0$ para todo $x \in Y$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $Y_1 := Y + < \{x_0\} >$, esto es

$$Y_1 := \{z = x + \alpha x_0 : \quad x \in Y, \quad \alpha \in \mathbb{R}\}$$

Notar que la representación de los elementos del subespacio Y_1 es única, entonces $Y_1 := Y \oplus < \{x_0\} >$. Así, si $x \in Y \cap < \{x_0\} >$ entonces $x \in Y$ y $x = \alpha x_0$, con $\alpha \in \mathbb{R}$. La demostración continúa, necesariamente, con que $\alpha = 0$ y así $x = \theta$, ya que en caso contrario se tendría $x_0 = \frac{1}{\alpha} x \in Y$, lo cual es una contradicción al hecho de que $d(x_0, Y) > 0$. De acuerdo con ello, se puede definir el siguiente funcional

$$\begin{aligned} f : \quad Y_1 \quad &\longrightarrow \quad \mathbb{R} \\ z = x + \alpha x_0 &\longrightarrow \quad f(z) := \alpha d, \end{aligned}$$

el cual es lineal y satisface $f(z) = 0$ para todo $z \in Y$. Además, dado $z = x + \alpha x_0 \in Y_1$ con $\alpha \neq 0$, se tiene que $\frac{1}{\alpha} x \in Y$ y luego

$$|f(z)| = |\alpha d| = |\alpha| d \leq |\alpha| \left\| x_0 + \frac{1}{\alpha} x \right\| = \|z\|,$$

Lo cual muestra que f es acotado y $\|f\|_{Y_1'} \leq 1$. continuando, dado $\epsilon > 0$ existe $x_1 \in Y$ tal que $\| -x_1 + x_0\| < d + \epsilon$. Se sigue que $f(-x_1 + x_0) = d$ y luego

$$\frac{|f(-x_1 + x_0)|}{\| -x_1 + x_0\|} > \frac{d}{d + \epsilon},$$

con lo cual

$$\|f\|_{Y_1'} := \sup_{z \in Y_1, z \neq \theta} \frac{|f(z)|}{\|z\|} \geq \frac{|f(-x_1 + x_0)|}{\| -x_1 + x_0\|} > \frac{d}{d + \epsilon} \qquad \forall\ \epsilon > 0,$$

ahora, tomando el límite cuando $\epsilon \longrightarrow 0$, resulta $\|f\|_{Y_1'} \geq 1$. Así, $\|f\|_{Y_1'} = 1$ y aplicando el teorema (5) se deduce que existe $F \in X'$ tal que $\|F\|_{X'} = \|f\|_{Y_1'} = 1$ Y $F(z) = f(z)$ para todo $z \in Y_1$. En particular, $F(x_0)d$ y $F(x) = 0$ para todo $x \in Y$. □

6.3 Forma Geométrica

A continuación se demostrará la formulación del Teorema de Hahn-Banach versión geométrica, la cual se relaciona con la separación de conjuntos convexos.

Definición 15. *Un* ***Hiperplano*** *es un conjunto de la forma*

$$H = \{x \in E : f(x) = \alpha\}$$

Donde f es un funcional lineal sobre E ***no nulo****, no necesariamente acotado y con $\alpha \in \mathbb{R}$. Se dice que H es el hiperplano de ecuación $[f = \alpha]$.*

Lema 4. *El hiperplano de ecuación $[f = \alpha]$* ***es cerrado si y sólo si f es continua****.*

DEMOSTRACIÓN. Si f es continuo entonces $H = f^{-1}(\{\alpha\})$ es cerrado porque $\{\alpha\}$ es cerrado en $\mathbb{R}$. De manera recíproca, supongamos que H es cerrado. Se continúa con que $H^c = E \setminus H$ es abierto y no vacío ya que f es no nulo. Sea entonces $x_0 \in H^c$ y supongamos, sin perdida de generalidad, que $f(x_0) < \alpha$. Elegimos $r > 0$ tal que $U_d(x_0, r) \subset H^c$. Afirmamos que $f(x) < \alpha \ \forall x \in U_d(x_0, r)$. En efecto, supongamos por contradicción que existe $x_1 \in U_d(x_0, r)$ tal que $f(x_1) > \alpha$. Notar que $f(x_1) \neq \alpha$ ya que $x_1 \neq H$. Así el segmento $\{(1-t)x_1 + tx_0 t \in [0,1]\} \subseteq U_d(x_0, r)$ y por

lo tanto

$$f((1-t)x_1 + tx_0) \neq \alpha \quad \forall t \in [0,1].$$

Sin embargo, dado que $f(x_0) < \alpha < f(x_1)$ se deduce que

$$\tilde{t} := \tfrac{f(x_1)-\alpha}{f(x_1)-f(x_0)} \in]0,1]$$

y

$$f((1-\tilde{t})x_1 + \tilde{t}x_0) = (1-\tilde{t})f(x_1) + \tilde{t}f(x_0) = \alpha,$$

Lo cual es una contradicción. Así, necesariamente $f(x) < \alpha \forall x \in U_d(x_0, r)$ o de manera equivalente $f(x_0 + rz) < \alpha \forall z \in U_d(0,1)$, de donde

$$f\left(x_0 \pm r\epsilon \frac{x}{\|x\|}\right) < \alpha \qquad \forall\, x \in E,\ \forall\, \epsilon \in (0,1),$$

o bien

$$|f(x)| < \frac{1}{r\epsilon}(\alpha - f(x_0))\ \|x\| \qquad \forall\, x \in E,\ \forall\ \epsilon \in (0,1).$$

Luego, tomando $\lim\limits_{\epsilon \to 1^-}$ nos queda

$$|f(x)| < \frac{1}{r}(\alpha - f(x_0))\ \|x\| \qquad \forall\, x \in E,$$

lo cual prueba que f es acotado y $\|f\|_{E'} \leq \frac{1}{r}(\alpha - f(x_0))$. $\square$

Definición 16. *Sean $A, B \subseteq E$. Se dice que el hiperplano $[f = \alpha]$ separa A y B en el sentido **amplio** si se tiene*

$$f(x) \leq \alpha \quad \forall\, x \in A \qquad y \qquad f(x) \geq \alpha \quad \forall\ x \in B.$$

*A su vez, se dice que este hiperplano separa A y B en el sentido **estricto** si existe $\epsilon > 0$ tal que*

$$f(x) \leq \alpha - \epsilon \quad \forall\, x \in A \qquad y \qquad f(x) \geq \alpha + \epsilon \quad \forall\ x \in B.$$

Geométricamente la separación significa que A y B se sitúan «**de un lado y de otro de H**».

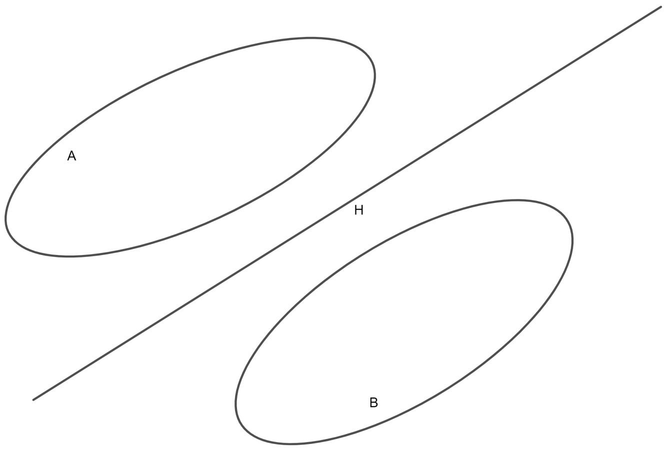

Figura 4

Lema 5. *(FUNCIONAL DE MINKOWSKI DE UN CONVEXO) Sea $s \subseteq E$ convexo, abierto, tal que $\theta \in S$, y definamos el funcional de Minkowski $p : E \Longrightarrow \mathbb{R}$ por:*

$$p(x) = inf\{\alpha > 0 : \alpha^{-1} x \in S\} \quad \forall x \in E.$$

Entonces p es sublineal y existe $M \geq 0$ tal que $0 \leq p(x) \leq M\|x\| \quad \forall x \in E$. Además

$$S = \{x \in E : \quad p(x) < 1\}.$$

DEMOSTRACIÓN. Puesto que el vector nulo θ pertenece al abierto S, se sigue que existe $r > 0$ tal que $\bar{U}_d(\theta, r) \subseteq S$. Ahora, para cada $x \in E, x \neq \theta$, se tiene $r\frac{x}{\|x\|} \in S$. Además, dado $z \in S$ es claro que $p(z) \leq 1$ porque $1^{-1}z = z \in S$, y en particular se tiene $p\left(r\frac{x}{\|x\|}\right) \leq 1$. Pero, de la definición de p se observa que

$$p(\lambda x) = \lambda p(x) \quad \forall \lambda > 0, \forall x \in E,$$

y por tanto

$$p(x) \leq \frac{1}{r}\|x\| \quad \forall\ x \in E, \quad x \neq \theta,$$

lo que implica la estimación requerida ya que $p(\theta) = 0$.

A continuación probamos que $S = \{x \in E : \quad p(x) < 1\}$. En efecto, sea

$x \in S$. Como S es abierto existe $\epsilon > 0$, suficientemente pequeño, tal que $(x + \epsilon x) = (1 + \epsilon)x$ pertenece a S, y luego $1 \geq p((1 + \epsilon)x) = (1 + \epsilon)p(x)$, de donde

$$p(x) \leq \frac{1}{1+\epsilon} < 1.$$

Recíprocamente, sea $x \in E$ tal que $p(x) < 1$. Se sigue que existe $\alpha \in]0, 1[$ tal que $\alpha^{-1}x \in S$ y por tanto, como S es convexo, $\alpha(\alpha^{-1}x) + (1 - \alpha)\theta = x \in S$. Queda probar la propiedad tipo desigualdad triangular que caracteriza la sublinealidad del funcional p. En efecto, dados $x, y \in E$ y $\epsilon > 0$, se observa primero que

$$p\left(\frac{x}{p(x)+\epsilon}\right) = \frac{p(x)}{p(x)+\epsilon} < 1 \quad y \quad p\left(\frac{y}{p(y)+\epsilon}\right) = \frac{p(y)}{p(y)+\epsilon} < 1,$$

lo cual indica que $\frac{x}{p(x)+\epsilon}, \frac{y}{p(y)+\epsilon} \in S$, y luego, de acuerdo a la convexidad de S, se tiene

$$\frac{tx}{p(x)+\epsilon} + \frac{(1-t)y}{p(y)+\epsilon} \in S \quad \forall t \quad \in [0,1].$$

En particular, para $t := \dfrac{p(x)+\epsilon}{p(x)+p(y)+2\epsilon} \in]0, 1[$, y resulta $\dfrac{x+y}{p(x)+p(y)+2\epsilon} \in S$, y por lo tanto

$$1 > p\left(\frac{x+y}{p(x)+p(y)+2\epsilon}\right) = \frac{p(x+y)}{p(x)+p(y)+2\epsilon} \quad \forall \epsilon > 0,$$

de donde $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ □

Lema 6. *Sea $S \subseteq E$, convexo, abierto, no vacío, y sea $x_0 \in E$ tal que $x_0 \notin S$. Entonces, exxiste $f \in E'$ tal que $f(x) < f(x_0) \quad \forall x \in S$, lo cual indica que el hiperplano de ecuación $[f = f(x_0)]$ separa $\{x_0\}$ y S en el sentido amplio.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $\theta \in S$, y definamos el funcional de Minkowski $p : E \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$p(x) \;=\; inf\{\alpha \; > 0 : \quad \alpha^{-1}\, x \; \in \; S\} \quad \forall\, x \; \in \; E.$$

A su vez, sea G el espacio generado por x_0, esto es $G := \{tx_0 : \quad t \in \mathbb{R}\}$, y sea $g : G \longrightarrow \mathbb{R}$ el funcional lineal definido por $g(tx_0) := t$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Puesto que $x_0 \notin S$ del Lema 5 que $p(x_0) \leq 1$. Entonces, para $t > 0$ resulta

$$g(tx_0) = t \leq tp(x_0) = p(tx_0).$$

A su vez, si $t \leq 0$ se obtiene

$$g(tx_0) = t \leq 0 \leq p(tx_0),$$

y en consecuencia

$$g(x) \leq p(x) \qquad \in G.$$

Aplicando la versión analítica del Teorema de Hahn-Banach se deduce que existe un funcional lineal $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = g(x) \ \ \forall x \ \in \ G$ y $f(x) \leq p(x) \ \ \forall x \in E$. En particular, se tiene $f(x_0) = g(x_0) = 1$. Además, de acuerdo al Lema 5 sabemos que $0 \leq p(x) \leq M\|x\| \ \ \forall x \in E$, y luego $f(x) \leq M\|x\| \ \ \forall x \ \in \ E$. A su vez, $-f(x) = f(-x) \leq M\|x\|$, con lo cual $f(x) \geq -M\|x\|$, y por lo tanto

$$|f(x)| \leq M\|x\| \quad \forall x \in E,$$

probando así que $f \in E'$. Por último, utilizando la caracterización del convexo S dada el Lema 5, se concluye que $f(x) \leq p(x) < 1 = f(x_0) \ \ \forall x \ \in \ S$, lo cual completa la demostración en primera instancia. En el caso en que el vector nulo θ no pertenece a S, se considera un elemento arbitrario $\tilde{x} \in S$ y se define el conjunto trasladado $\tilde{S} := \{x - \tilde{x} : \ \ x \in S\}$, el cual, además de convexo y abierto, sí contiene a θ. Entonces, aplicando el análisis el análisis anterior a $\tilde{S}$ y al vector $\tilde{x}_0 := x_0 - \tilde{x}$ que no está en $\tilde{S}$, se deduce que exisye $f \in E'$ tal que $f(z) < f(\tilde{x}_0) \ \forall\, z \ \in \ \tilde{S}$, esto es $f(x) < f(x_0) \ \forall\ x \ \in \ S$. $f(z) < f(\tilde{x}_0 \ \forall\ z \ \in \ \tilde{s}$

A partir de los Lemas estudiados, se puede demostar las dos versiones geométricas del Teorema de Hahn- Banach, las cuales establecen separaciones amplia y estricta de conjuntos convexos.

Teorema 8. *(PRIMERA VERSIÓN GEOMÉTRICA DEL TEOREMA DE HAHN-BANACH) Sean $A, B \subseteq E$ convexos, no vacíos y disjuntos, tales que A es abierto. Entonces, existe un hiperplano cerrado que separa A y B en sentido amplio.*

DEMOSTRACIÓN. Sea

$$S = A - B := \{x - y : \quad x \in A, y \in B\}.$$

Se observa que S es convexo ya que A y B lo son, Además, S es abierto ya que $S = \cup := \{A - \{y\} : \quad y \in B\}$ y el conjunto $A - \{y\} := \{x - y : \quad x \in A\}$ es abierto ya que A lo es. También $\theta \notin A$ porque $A \cup B = \phi$. Entonces, aplicando el Lema (6) se deduce que existe $f \in E'$ tal que $f(z) < f(\theta) = 0 \ \forall z \in S$, esto es

$$f(x) < f(y) \ \forall x \in A, \quad \forall y \in B.$$

Definamos

$$m := \sup_{x \in A} f(x) \quad y \quad M := \inf_{y \in B} f(y).$$

Continuando, para cualquier $\alpha \in [m, M]$, el hiperplano H de la ecuación $[f = \alpha]$ Separa A y B en el sentido amplio. □

Teorema 9. *(SEGUNDA VERSIÓN GEOMÉTRICA DEL TEOREMA DE HAHN-BANACH) Sea $A, B \subseteq E$, convexos, no vacíos y disjuntos, tales que A es cerrado y B es compacto. Entonces existe un hiperplano cerrado que separa A y B en el sentido estricto.*

DEMOSTRACIÓN. Dado $\epsilon > 0$ definamos los conjuntos no vacíos

$$A_\epsilon := A + U_d(\theta, \epsilon) \quad y \quad B_\epsilon := B + U_d(\theta, \epsilon) \quad ,$$

Se observa, por la convexidad de A, B y $U_d(\theta, \epsilon)$, que A_ϵ y B_ϵ son convexos. Además, A_ϵ y B_ϵ son abiertos ya que los conjuntos $\{x\} + U_d(\theta, \epsilon)$ y $\{y\} + U_d(\theta, \epsilon)$ lo son $\forall x \in A, \forall y \in B$ y se tiene

$$A_\epsilon = \cup\{\{x\} + U_d(\theta, \epsilon) : \ x \in A\} \ y \ B_\epsilon = \cup\{\{y\} + U_d(\theta, \epsilon) : \ y \in B\}$$

A continuación se probará que existe $\epsilon > 0$ tal que A_ϵ y B_ϵ son disjuntos. procediendo por contradicción, supondremos que ambos conjuntos no son disjuntos. Entonces, para todo $n \in \mathbb{N}$ el conjunto $A_{1\backslash n} \cup B_{1\backslash n}$ es no vacío, lo cual implica la existencia de $x_n \in A$, $y_n \in B$, u_n, $v_n \in U_d(\theta, 1\backslash n)$ tales que $x_n + u_n = y_n + v_n$. Se sigue que

$$\|x_n - y_n\| = \|u_n - v_n\| > \frac{2}{n}.$$

Ahora, como B es compacto, existen una subsucesión $\{y_n^{(1)}\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $y \in B$ tales que $\{y_n^{(1)}\} \overset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} y$, y de acuerdo a la desigualdad anterior, se deduce que $\{x_n^{(1)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ también converge a y. Luego, como A es cerrado, necesariamente se tiene que $y \in A$, lo cual contradice el hecho de que A y B son disjuntos.

Entonces, aplicando la primera versión geométrica del Teorema de Hahn-Banach a los conjuntos disjuntos A_ϵ y B_ϵ, se deduce que existe un hiperplano cerrado de ecuación $[f = \alpha]$ que los separa en el sentido amplio. Esto significa que

$$f(x+u) \leq \alpha \leq f(y+v) \qquad \forall x \in A, \quad y \in B, \quad \forall u, v \in U_d(\theta, \epsilon),$$

En particular

$$f(x+\epsilon z) \leq \alpha \leq f(y-\epsilon z) \qquad \forall x \in A, \quad y \in B, \quad \forall z \in U_d(\theta, 1),$$

o bien

$$f(x)+\epsilon f(z) \leq \alpha \leq f(y)-\epsilon f(z) \qquad \forall x \in A, \quad y \in B, \quad \forall z \in U_d(\theta, 1).$$

Finalmente, eligendo $\tilde{z} \in U_d(\theta, 1)$ tal que $f(\tilde{z}) > 0$, se deduce que

$$f(x) \leq \alpha - \epsilon f(\tilde{z}) \qquad y\ f(y) \geq \alpha + \epsilon f(\tilde{z}) \qquad \forall x \in A, \quad y \in B,$$

Lo cual prueba que el hiperplano $[f = \alpha]$ separa A y B en el sentido estricto.$\square$

Bibliografía

[1] H. Brezis. Analyse Fonctionnelle. Th´eorie at Applications. Masson, Paris, 1983.

[2] E. Bell. Historia de las matemáticas. México: FCE - Fondo de Cultura Económica, 2016.

[3] F. Bombal. Análisis Funcional: una Perspectiva Histórica, Universidad de Sevilla. 2003.

[4] C. Boyer. Historia de la Matemática. Alianza Editorial, Barcelona, 1987.

[5] G. Gatica. Introducción al Análisis Funcional. Teoría y Aplicaciones. Editorial Reverté —S.A. de C.V. 2014.

[6] E. Kreiszig, Introductory Functional Analysis with Applications. John Wiley, 1978.

[7] B. Limaye.. Functional Analysis. New Age International Limited Publishers. 1996.