UNIVERSIDAD DEL BÍO-BÍO

FACULTAD DE EDUCACIÓN Y HUMANIDADES
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

Análisis continuo de una formulación débil para el acoplamiento de flujo de Brinkman con transporte no lineal.

Una propuesta de orientaciones conceptuales y aplicación para estudiantes de Pedagogía en Matemática

Tesis presentada al Programa de Pedagogía en Educación Matemática, para optar al Título de Profesor(a) de Educación Media en Educación Matemática de la Universidad del Bío-Bío.

Diego Ignacio Parra López
Catalina Belén Retamal Fuentes

Chillán, 2023.

Análisis continuo de una formulación débil para el acoplamiento de flujo de Brinkman con transporte no lineal.

Una propuesta de orientaciones conceptuales y aplicación para estudiantes de Pedagogía en Matemática

por

Diego Ignacio Parra López

Catalina Belén Retamal Fuentes

Comisión examinadora:

Dr. Eligio Colmenares García

Profesor guía

Universidad del Bío-Bío

Dr. Felipe Lepe Araya

Profesor Informante

Universidad del Bío-Bío

Análisis continuo de una formulación débil para el acoplamiento de flujo de Brinkman con transporte no lineal.

Una propuesta de orientaciones conceptuales y aplicación para estudiantes de Pedagogía en Matemática

Diego Ignacio Parra López

Catalina Belén Retamal Fuentes

Universidad del Bío-Bío.

Enero, 2023.

Agradecimientos

Agradecer a mi familia, mis padres, Boris Parra Vega y Carmen Gloria López, quienes siempre con esfuerzo, apoyo y amor incondicional estuvieron presentes durante todas mis etapas tanto académicas como en la vida, sin ellos no estaría en el lugar que hoy estoy, mi hermano Boris Andrés Parra, quien siempre estuvo cuidando de mi, preocupado y protegiéndome como solo un buen hermano lo haría, a mi padrino Rafael Elgueta Gútierrez, a su esposa Veronica Aravena Gútierrez y a mi madrina Carolin Elgueta quienes fueron parte fundamental de mi crianza y que gracias a su paciencia y cariño ayudaron a que fuera la persona que soy y a Rafael Elgueta Aravena, hijo de mi padrino que sin él mi interés en las matemáticas nunca se hubiera desarrollado. Por ultimo agradecer a mi profesor de educación básica Marco Espinoza quien con su gran paciencia y amor por la enseñanza hizo que mi paso por básica fuera una mejor etapa.

Diego Parra López.

En primera instancia quiero agradecer a Dios, quien me permitió estudiar lo que me gusta y es quien me sostiene cada día.
De igual forma quiero agradecer a mis padres, Benjamín Retamal y Ángela Fuentes, y a mi hermana María Francisca Retamal. Muchas gracias por su apoyo emocional, económico y sobre todo por el amor entregado. He visto el esfuerzo de cada uno, el

cual ha sido de motivación para mi. Agradezco lo que me han entregado que será útil en esta vida, pero aprecio aún más que puedo ver al Señor en ustedes. Los amo.
Asimismo, agradezco a los compañeros que me acompañaron estos años de formación, por los momentos de ánimo, los desayunos donde las tías y las siestas en el pasto de la U.
Para finalizar, reitero que si he sido capaz de lograr algo ha sido solo por la gracia de Dios. Toda la Gloria es para Él.

Pero en cuanto a mí, el acercarme a Dios es el bien;
He puesto en Jehová el Señor mi esperanza,
Para contar todas tus obras.

Salmos 73:28

Catalina Retamal Fuentes.

Queremos agradecer a nuestro profesor guia, Dr. Eligio Colmenares, por la paciencia, el apoyo, la confianza que ha tenido en nosotros, por motivarnos a aprender más y por su calidad excelente como profesor desde que lo conocemos. Tambien agradecer por los valiosos consejos, la gran entrega y dedicación que nos brindó durante este proyecto ya que fue clave. Con él, la realización de esta tesis fue una grata experiencia, divertida, interesante y nos permitió conocer un lado de la matemática y de las investigaciones que será muy útil en nuestro futuro.
Finalmente, agradecemos al Fondo Nacional de Desarrollo Científico y Tecnológico (FONDECYT) por otorgar financiamiento para el desarrollo de esta tesis mediante el Proyecto No. 11190241, puesto que el apoyo económico permitió que nos dedicaramos 100 % a la realización de esta.

Diego Parra López y Catalina Retamal Fuentes.

Resumen

En este trabajo presentamos, una introducción al estudio de problemas variacionales, considerando el análisis continuo de un problema de valor en la frontera, reescrito como una formulación débil, enfocado en orientar a estudiantes de Pedagogía respecto a temas no necesariamente abarcados en su formación. Por ello se revisan e introducen conceptos de álgebra lineal, ánalisis matemático y análisis funcional que entregan las herramientas básicas necesarias para abordar el respectivo estudio de buen planteamiento en el sentido de Hadamard. Además, se aborda el modelo matemático de flujo de Brinkman con transporte no lineal, el cual consiste en un sistema de ecuaciones diferenciales parciales a través del acoplamiento de las ecuaciones de Brinkman, para describir la dinámica de un fluido en un medio poroso, y una ecuación de reacción-advección-difusión no lineal, para la concentración de la sustancia que se transporta. Este modelo describe procesos industriales y fenómenos en la naturaleza tales como separación sólido-líquido, destilación química, sedimentación-consolidación, entre otros. Se lleva acabo una respectiva formulación variacional del problema en espacios de Sobolev y se analiza el mismo usando un esquema de punto fijo en términos de operadores. Resultados de existencia y unicidad se demuestran y establecen rigurosamente utilizando el Teorema de Lax-Milgram y el Principio de Leray-Shauder.

Palabras clave: Ecuaciones de Brinkman, reacción-advección-difusión, flujo en medios porosos, teoría de punto fijo, Principio de Leray-Schauder.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

Una formulación débil consiste en reescribir de manera alternativa un problema de ecuaciones diferenciales parciales, de modo que se puedan trabajar desde el álgebra lineal y el análisis funcional. Es por ello que en el presente trabajo se introducen conceptos matemáticos necesarios de estudiar preliminarmente para poder realizar el análisis continuo de una formulación variacional. Se comienza estudiando diversos espacios (espacios vectoriales, espacios de Lebesgue, espacios de Sovolev, entre otros) y se finaliza abordando el teorema de Lax-Milgram, el cual es fundamental para asegurar el buen planteamiento de la formulación débil. Además de presentar los conceptos, se realiza el análisis continuo de un problema, el cual abordamos seguidamente.

El acoplamiento de flujo de fluidos con transporte de sustancias es un fenómeno que aparece en diversos procesos físicos estudiados en la mecánica de fluidos, tales como separación sólido-líquido, destilación química, sedimentación-consolidación, convección natural y térmica y advección-difusíon, entre muchos otros. Por ejemplo, en la industria petrolera, para realizar futuras excavaciones a cielo abierto o en la busqueda de campos de perforación, se estudia el movimiento de las aguas subterraneas en un medio poroso tal como es la arena [13]. Para entender este fenómeno, una de las leyes mas utilizadas es la Ley de Darcy, la cual señala que el flujo del fluido a través del medio poroso es inversamente proporcional a la distancia que este debe atravesar y directamente proporcional a las diferencias de presión [7].

Un modelo matemático para describir este fenómeno se encuentra en [3] a través de las ecuaciones de Stokes, para el fluido, acopladas con una ecuación de advección-difusión, para la concentración. Allí, el sistema de ecuaciones diferenciales parciales describe el estado estacionario del transporte de especies en un fluido. Los autores del citado trabajo, basándose en una formulación mixta-primal propuesta para el modelo de Stokes en [8], proponen un enfoque variacional aumentado, sobre espacios de Hilbert, y establecen resultados de existencia y unicidad junto con análisis de error a priori. Además, realizan pruebas numéricas para confirmar tasas de convergencia y simulan computacionalmente procesos de convección térmica y sedimentación-consolidación.

En [5] se estudia una variante del modelo antes mencionado, por medio del acoplamiento de las ecuaciones de Brinkman y una ecuación de advección-difusión no lineal con condiciones de frontera Dirichlet (no homogénea) para la velocidad y (homogénea) para la concentración. Además, se realiza un enfoque variacional que, a diferencia del trabajo anterior, no considera términos aumentados, dando lugar a una formulación débil sobre espacios de Banach, que particularmente resulta más simple de implementar computacionalmente. En este trabajo, la formulación realizada se re-escribe como una ecuación de punto fijo en término de operadores, estableciendo resultados de existencia y unicidad gracias al teorema de Lax-Milgram, y se aplican los teoremas de Schauder y Banach junto a la teoría de Babuška-Brezzi. Además, se incluye un análisis del error a priori y ensayos númericos que respaldan la teoría.

Otros trabajos en los cuales se aborda el problema de flujo de fluidos en un medio poroso considerando las ecuaciones de Brinkman se pueden encontrar en [2, 4] y las referencias que allí aparecen. En el primer trabajo, se analiza un método de elementos finitos que aproxima numéricamente los patrones de flujo de un fluido viscoso en un medio altamente permeable y su interacción con un flujo no viscoso en un medio poroso. El sistema de ecuaciones, gobernado por la Ley de Darcy, se describe en términos de velocidad y presión del medio junto a vorticidad, velocidad y presión del fluido. En el caso del segundo trabajo, se realiza una formulación mixta de Brinkman-Forchheimer para flujos no estacionarios, cuyas incógnitas principales son la velocidad y un tensor de pseudo-esfuerzos. También, se realiza un análisis de error a priori, experimentos numéricos para confirmar tasas teóricas de convergencia y se ilustra la flexibilidad del método para varios parámetros del modelo.

En este orden de ideas, en la presente tesis se pretende realizar el análisis continuo de una formulación débil para el acoplamiento de las ecuaciones de Brinkman con una ecuación de reacción-advección-difusión no lineal, siguiendo un enfoque similar al empleado en [6] y [12]. Sin embargo, de manera preliminar se definen conceptos enfocados en orientar a estudiantes de Pedagogía en Matemática para nivelar su conocimiento respecto a las herramientas matemáticas que se necesitan para analizar un problema de valor en la frontera, cuando este es escrito en términos de una formulación variacional. Esto les permitirá formar una base para realizar un trabajo tal como el realizado en el capítulo 3. El realizar esta recopilación de teoremas y definiciones será útil como recurso de consulta bibliografica, destacando que posee secciones que no suelen encontrarse en un mismo texto o libro, por lo que, de manera resumida, tiene lo necesario para realizar el análisis continuo de un problema escrito como una formulación variacional. Además, el tener el capítulo 2 de teoría facilita la comprensión del capítulo 3, donde se aplican los conceptos teoricos.

El trabajo está estructurado como sigue. Comenzamos en la Sección 2.1 estableciendo definiciones y propiedades de espacios vectoriales. Siguiendo la misma linea, se definen formalmente espacios con producto interno en 2.2, espacios normados en la Sección 2.3, espacios de funciones continuas en 2.4, espacios de funciones diferenciables en la Sección 2.5, espacios de Lebesgue en 2.6 y espacios de Sobolev en 2.7. Se finaliza el capítulo 2 con la sección 2.8, introduciendo el teorema de Lax-Milgram.

En el capítulo 3 abordamos el modelo fisico de interés. Comenzamos con la sección 3.1 estableciendo algunas notaciones y definiciones preliminares de las condiciones de frontera, hipotesis sobre los datos y espacios a trabajar en el problema modelo, para luego introducir en la Sección 3.2 las ecuaciones gobernantes y la respectiva forma débil del problema. El análisis de solubilidad se lleva a cabo en la Sección 3.3. Finalmente, en el capítulo 4 se realiza la conclusión de la tesis y se describen algunos trabajos a futuros que pueden extender lo realizado.

Capítulo 2

Preliminares Matemáticos

En este capítulo abordaremos herramientas matemáticas necesarias para formular y analizar un problema de valor en la frontera, en especial, cuando este es escrito en términos de una formulación variacional. Entre las secciones 2.1 y 2.7 se definen e introducen espacios fundamentales ricos en propiedades que permiten emplear teorías aplicables en una gran variedad de contextos, los cuales se conocen como espacios de Hilbert y de Banach. Se cierra el capítulo con la sección 2.8 estableciendo teoremas que permiten asegurar existencia, unicidad y dependencia continua de los datos de una eventual solución a un problema variacional tipo elíptico.

La mayor parte del contenido presente en este capítulo, se encuentra detallado de manera más completa en el libro [14].

2.1. Espacios vectoriales

Un espacio vectorial es una estructura algebraica que se genera a partir de un conjunto no vacío y dos operaciones, una interna y una externa, además de satisfacer ciertas propiedades. Este concepto proviene del estudio de la geometría afín, sin embargo tiene aplicaciones en diversas ramas de la matemática y las ciencias. En particular nos interesan pues proporcionan una base para el estudio de espacios necesarios en la resolución de sistemas de ecuaciones en derivadas parciales.

A continuación se define formalmente el concepto de espacio vectorial, subespacio vectorial y las respectivas propiedades de cada uno.

Definición 2.1.1. *Sea V conjunto no vacío. V es un* ***espacio vectorial real*** *si sobre éste se definen las siguientes dos operaciones de: suma*

$$\begin{aligned} + : V \times V &\longrightarrow V \\ (\mathbf{u}, \mathbf{v}) &\longmapsto \mathbf{u} + \mathbf{v}\,, \end{aligned}$$

y multiplicación por escalar

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{R} \times V &\longrightarrow V \\ (\alpha, \mathbf{u}) &\longmapsto \alpha \cdot \mathbf{u}\,. \end{aligned}$$

Además, para todo $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, se satisfacen

(i) $\exists\,!\,\theta_V \in V : \mathbf{u} + \theta_V = \mathbf{u}$,

(ii) $\exists!(-\mathbf{v}) \in V \;/\; \mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \theta_V$,

(iii) $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$,

(iv) $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$,

(v) $1 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}$,

(vi) $\alpha(\beta\mathbf{u}) = (\alpha\beta)\mathbf{u} = \beta(\alpha\mathbf{u})\,.$

Observación 2.1.1. *(i) En particular, un espacio vectorial se caracteriza por la propiedad de linealidad, a saber,*

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ y } \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V \text{ se cumple que } \alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w} \in V.$$

(ii) En la definición anterior se hace énfasis en que el espacio vectorial es ***real*** *dado*

que la operación de multiplicación por escalar esta allí definida para escalares reales. Sin embargo, esta operación puede considerarse sobre cualquier cuerpo o campo, como los complejos.

Definición 2.1.2. *Un subespacio X de un espacio vectorial V es aquel en el cual $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in X$ se cumple*

(i) $\theta_{\mathrm{V}} \in X$,

(ii) $\alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v} \in X$.

2.2. Espacios con producto interno

En la presente sección se define lo que se conoce como producto interno, sus propiedades y los espacios dotados con éste. Preliminarmente, podemos definir un producto interno como una aplicación en un espacio vectorial, donde toma dos elementos en el espacio y retorna un elemento real. Ahora bien, de manera formal tenemos la siguiente definición.

Definición 2.2.1. *Un producto interno en un espacio vectorial real V es una función*

$$\begin{aligned} (\cdot,\cdot)_V : V \times V &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\mathbf{u},\mathbf{v}) &\longmapsto (\mathbf{u},\mathbf{v})_V \end{aligned}$$

que para todo $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ satisface

(i) $(\mathbf{u},\mathbf{u})_V \geq 0$ *y* $(\mathbf{u},\mathbf{u})_V = 0 \iff \mathbf{u} = 0$,

(ii) $(\mathbf{u},\mathbf{v})_V = (\mathbf{v},\mathbf{u})_V$,

(iii) $(\mathbf{u}, \alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w})_V = \alpha(\mathbf{u},\mathbf{v})_V + \beta(\mathbf{u},\mathbf{w})_V$.

Definición 2.2.2. *Si existe una función $(\cdot,\cdot)_V$ en un espacio vectorial V que satisface las propiedades presentes en la definición 2.2.1, se dice que V es un **espacio con producto interno** o **pre-hilbertiano**.*

Observación 2.2.1. *Cuando no hay confusión con la notación, se denota el producto interno $(\cdot,\cdot)_V$ en el espacio V simplemente como $(\cdot,\cdot)$.*

2.3. Espacios normados

En esta sección revisaremos lo que se conoce como espacio normado, comenzando por definir qué es una norma y sus propiedades en un espacio vectorial. Este espacio es de utilidad en la rama de análisis funcional debido a sus diversas aplicaciones y son esenciales en la formulación de problemas variacionales. A continuación se establece una definición formal.

Definición 2.3.1. *Una **norma** en un espacio vectorial V es un aplicación*

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_V : V &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \mathbf{v} &\longmapsto \|\mathbf{v}\|_V, \end{aligned}$$

que asigna a cada elemento del espacio V un número real y satisface para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ y para todo $\mathbf{u},\mathbf{v} \in V$,

(i) $\|\mathbf{u}\|_V \geq 0$ *y* $\|\mathbf{u}\|_V = 0 \iff \mathbf{u} = 0$,

(ii) $\|\alpha\mathbf{u}\|_V = |\alpha|\|\mathbf{u}\|_V$,

(iii) $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|_V \leq \|\mathbf{u}\|_V + \|\mathbf{v}\|_V$ *(Desigualdad triangular).*

Definición 2.3.2. *Si existe una función $\|\cdot\|_V$ en un espacio vectorial V que satisface las propiedades presentes en la definición 2.3.1, se dice que V es un **espacio normado**.*

Observación 2.3.1. *(i) Una norma en un espacio vectorial permite establecer la noción de distancia y constituye una generalización del concepto de longitud.*

(ii) Cuando no hay confusión con la notación, se denota la norma $\|\cdot\|_V$ *en el espacio* V *simplemente como* $\|\cdot\|$.

(iii) Todo producto interno induce una norma. En otras palabras, todo espacio con producto interno es normado. La norma inducida por un producto interno se define como

$$\|\cdot\|_V = (\cdot,\cdot)_V^{1/2}. \tag{2.1}$$

(iv) El recíproco de lo señalado en el ítem anterior no es cierto. Efectivamente, existen normas que no provienen de ningún producto interno (ver observación 2.4.5, más adelante).

En relación a los incisos *(iii)* y *(iv)* de la observación anterior, enunciamos a continuación una propiedad que es válida sobre cualquier espacio normado y que ayuda a responder la pregunta si una norma es o no inducida por algún producto interno.

Teorema 2.3.1 (Ley del paralelogramo)**.** *En todo espacio vectorial normado* V *se cumple*

$$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2 = 2(\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2) \quad \forall\, \mathbf{u},\mathbf{v} \in V\,,$$

donde $\|\cdot\|$ *es la norma inducida por el producto interno* $(\cdot,\cdot)$ *en* V.

El siguiente resultado es clave, aparece en álgebra lineal, análisis y es bastante usado en matemáticas. Como veremos más adelante, es particularmente empleado en las estimaciones requeridas para establecer propiedades importantes en problemas variacionales.

Teorema 2.3.2 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz)**.** *En todo espacio pre-hilbertiano V se cumple que*

$$\big|(\mathbf{u},\mathbf{v})\big| \leq \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \quad \forall\, \mathbf{u},\mathbf{v} \in V\,,$$

donde $\|\cdot\|$ es la norma inducida por el producto interno $(\cdot,\cdot)$ en V.

Demostración. Consideremos la combinación lineal de vectores $(\mathbf{u} - \alpha\mathbf{v})$ con α real arbitrario. Gracias a las propiedades de producto interno (ver definición 2.2.1) y por la definición de norma inducida (ver observación (2.1)), se tiene que

$$\begin{aligned} 0 &\leq (\mathbf{u}-\alpha\mathbf{v}, \mathbf{u}-\alpha\mathbf{v}), \\ &= (\mathbf{u},\mathbf{u}) - 2\alpha(\mathbf{u},\mathbf{v}) + \alpha^2(\mathbf{v},\mathbf{v}), \\ &= \|\mathbf{u}\|^2 - 2\alpha(\mathbf{u},\mathbf{v}) + \alpha^2\|\mathbf{v}\|^2, \end{aligned}$$

Como α es arbitrario, en particular tomando $\alpha = (\mathbf{u},\mathbf{v})/\|\mathbf{v}\|^2$, se consigue que

$$0 \leq \|\mathbf{u}\|^2 - 2\frac{(\mathbf{u},\mathbf{v})^2}{\|\mathbf{v}\|^2} + \frac{(\mathbf{u},\mathbf{v})^2}{\|\mathbf{v}\|^2},$$

y, tras multiplicar a ambos lados por $\|\mathbf{v}\|^2$, se consigue que

$$0 \leq \|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2 - 2(\mathbf{u},\mathbf{v})^2 + (\mathbf{u},\mathbf{v})^2 = \|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2 - (\mathbf{u},\mathbf{v})^2.$$

El resultado deseado se deduce al sumar a a ambos lados de la desigualdad anterior el término $(\mathbf{u},\mathbf{v})^2$ y tomar raíz cuadrada a ambos lados. □

2.3.1. Sucesiones en espacios normados

Un concepto básico que aparece en muchas discusiones sobre espacios normados es el de convergencia de sucesiones. Establecemos a continuación su definición.

Definición 2.3.3. *Una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq V$ de un espacio normado V se dice*

convergente *a* $x \in V$ *si para* n *suficientemente grande la sucesión de números reales* $\{\|x_n - x\|\}_{n\in\mathbb{N}} = \{\|x_1 - x\|, \|x_2 - x\|, \|x_3 - x\| \cdots\}$ *converge a* 0.

Usando la definición de convergencia de sucesiones de números reales, podemos deducir naturalmente la definición formal de convergencia de sucesiones en espacios normados. En efecto, de acuerdo a la definición anterior, se tiene

$$\begin{aligned} x_n \xrightarrow{n\to\infty} x \quad &\Longleftrightarrow \quad \forall\varepsilon > 0, \exists N := N(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ n \geq N, \big|\|x_n - x\| - 0\big| < \varepsilon, \\ &\Longleftrightarrow \quad \forall\varepsilon > 0, \exists N := N(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ n \geq N, \|x_n - x\| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Observación 2.3.2. *Alternativamente, suele escribirse*

$$x_n \xrightarrow{n\to\infty} x \iff \lim_{n\to\infty} x_n = x,$$

y por la definición anterior, es evidente que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \iff x_n - x \xrightarrow{n\to\infty} 0_V\,.$$

Existe un tipo especial de sucesiones para las cuales la distancia entre cualquier par de términos (a partir de un cierto término dado) es lo suficientemente pequeña. A propósito se introduce la siguiente definición.

Definición 2.3.4. *Sea* $\{x_n\} \subseteq V$ *una sucesión en un espacio normado. Se dice que* $\{x_n\}$ *es* ***sucesión de Cauchy*** *si cumple que*

$$\forall\varepsilon > 0, \exists N := N(\varepsilon) \in \mathbb{N}/m, n \geq N, \|x_m - x_n\| < \varepsilon.$$

Observación 2.3.3. *En el espacio vectorial de los números reales donde el valor absoluto es definido como norma natural allí, se cumple que toda sucesión de Cauchy es convergente y viceversa. Sin embargo, en un espacio vectorial normado general, si* *bien toda sucesión convergente es de Cauchy (lo cual es fácil de demostrar), no toda sucesión de Cauchy es convergente.*

La observación anterior, da pié a la siguiente definición que engloba a todos aquellos espacios vectoriales normados en donde los conceptos de sucesión convergente y de Cauchy son equivalentes.

Definición 2.3.5. *Un* ***espacio completo*** *es aquel espacio normado en el cual toda sucesión de Cauchy es convergente.*

La relevancia de estos espacios radica en que generalmente es mas sencillo probar que una sucesión es de Cauchy para demostrar su convergencia, puesto que no es necesario conocer el valor exacto al que converge. En un espacio completo, si se logra probar que una sucesión es de Cauchy, como consecuencia esa sucesión converge.

Observación 2.3.4. *A los espacios completos también se les conoce como* ***Espacios de Banach****. Si, además, la norma es inducida por un producto interno, entonces se le llama* ***espacio de Hilbert****.*

2.4. Espacios de funciones continuas

En esta sección recordaremos la definición formal de función continua, de continuidad uniforme y de Lipschitz continuidad . Comenzamos con el primero de estos conceptos en el espacio $\mathbb{R}$.

Definición 2.4.1. *Sea I un intervalo. Decimos que f es* ***continua*** *en $x_0 \in \mathrm{I}$ si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\left|f(x) - f(x_0)\right| < \varepsilon$ siempre que $\left|x - x_0\right| < \delta$.*

Observación 2.4.1. *Se dice que f es continua en $\mathrm{I} \subseteq \mathbb{R}$ si lo es para todo $x_0 \in \mathrm{I}$.*

Observación 2.4.2. *En general, $\delta := \delta(\varepsilon, x_0)$. Cuando δ no depende de x_0, se dice que la continuidad es **uniforme**. Además, continuidad uniforme implica continuidad.*

Definición 2.4.2. *Sea $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ una función definida sobre un conjunto Ω de $\mathbb{R}^d$. Diremos que f es **continua** en $x_0 \in \Omega$, si se cumple que*

$$\forall\, \varepsilon > 0,\, \exists\, \delta > 0 \ \ \textit{tal que } \|x - x_0\| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\,.$$

Observación 2.4.3. *Como en el caso real, el valor de δ puede depender de ε y x_0. Si δ no depende de x_0, se dice que f es **continua uniformemente** sobre Ω.*

En el estudio de ecuaciones diferenciales, existe una condición fundamental que permite precisar existencia y unicidad de soluciones a problemas de valor inicial. Esta condición se conoce como Lipschitz continuidad y se define a continuación.

Definición 2.4.3. *Una función $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ es **Lipschitz-continua** si para alguna constante $L_{\mathrm{LIP}} > 0$ ocurre que*

$$\big|f(x) - f(y)\big| \leq L_{\mathrm{LIP}}\|x - y\|.$$

Observación 2.4.4. *Toda función Lipschitz-continua es uniformemente continua y por tanto continua. En efecto,*
Dado $\varepsilon > 0$ basta tomar $\delta := \dfrac{\varepsilon}{L_{\mathrm{LIP}}}$ pues de esta manera si $\|x - x_0\| < \delta$ entonces se cumple por la Lipshitz-continuidad de f que

$$\big|f(x) - f(x_0)\big| \leq L_{\mathrm{LIP}}\|x - x_0\| = L_{\mathrm{LIP}}\,\delta = L_{\mathrm{LIP}} \cdot \frac{\varepsilon}{L_{\mathrm{LIP}}} = \varepsilon$$

y asi f es (uniformemente) continua.

Denotaremos los siguientes espacios de funciones continuas, respecto a los cuales haremos referencia más adelante.

En $\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} C(a,b) &= \Big\{ f : (a,b) \to \mathbb{R} : f \text{es continua en } (a,b) \Big\}, \\ C[a,b] &= \Big\{ f : [a,b] \to \mathbb{R} : f \text{ es continua en } [a,b] \Big\}. \end{aligned}$$

Si Ω es un conjunto de $\mathbb{R}^d$ y Γ es la frontera de Ω es decir, $\Gamma := \partial\Omega$, entonces $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$. De este modo, denotamos

$$\begin{aligned} C(\Omega) &:= \Big\{ f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \,/\, f \,\text{es continua en}\, \Omega \Big\}, \\ C(\bar{\Omega}) &:= \Big\{ f : \bar{\Omega} \subseteq \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \,/\, f \,\text{es continua en}\, \bar{\Omega} \Big\}. \end{aligned}$$

A continuación establecemos un resultado importante.

Teorema 2.4.1. *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, $f : \bar{\Omega} \subseteq \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces,*

(i) f es acotada en $\bar{\Omega}$, es decir, f alcanza su supremo e ínfimo en $\bar{\Omega}$,

(ii) f es uniformemente continua en $\bar{\Omega}$.

Observación 2.4.5. *En el espacio $C(\bar{\Omega})$, no es difícil comprobar que la aplicación $\|\cdot\|_{\infty,\Omega} : C(\bar{\Omega}) \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por*

$$\|u\|_{\infty,\Omega} = \|u\|_{C(\bar{\Omega})} = \sup_{x\in\bar{\Omega}} \big|u(x)\big| \,, \tag{2.2}$$

es una norma. Sin embargo, como veremos a continuación, esta norma no proviene de ningún producto interno. Efectivamente, en $\mathbb{R}$, sea $\Omega = (0,2)$. Consideramos el conjunto de funciones continuas sobre Ω denotado por $C(\bar{\Omega})$ y equipado con la norma

(2.2). *Luego, sean* $u(x) = x^2$ *y* $v(x) = x$*, entonces, tenemos que*

$$\|u\|_{\infty,\Omega} = \sup_{x\in\bar{\Omega}} |x^2| = 4, \quad y \quad \|v\|_{\infty} = \sup_{x\in\bar{\Omega}} |x| = 2\,,$$

por lo que se cumple que

$$\|u\|_{\infty}^2 + \|v\|_{\infty}^2 = 4 + 2 = 6.$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \|u+v\|_{\infty,\Omega} &= \sup_{x\in\bar{\Omega}} \big|u(x)+v(x)\big| = \sup_{x\in\bar{\Omega}} \big|x^2+x\big| = 6, \\ \|u-v\|_{\infty,\Omega} &= \sup_{x\in\bar{\Omega}} \big|u(x)-v(x)\big| = \sup_{x\in\bar{\Omega}} \big|x^2-x\big| = 2, \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\|u+v\|_{\infty,\Omega}^2 + \|u-v\|_{\infty,\Omega}^2 = 6 + 2 = 8.$$

Así, la ley del paralelogramo (ver Teorema 2.3.1) no se cumple por lo que la norma dada en (2.2) *no proviene de ningún producto interno.*

Observación 2.4.6. *En el espacio* $C(\overline{\Omega})$ *de funciones continuas sobre un dominio* Ω *se puede definir el producto interno (el cual a su vez define una norma) como*

$$(u,v) = \int_{\Omega} u(x)v(x).$$

2.5. Espacios de funciones diferenciables

A continuación, introduciremos los espacios $C^m(\Omega)$ y $C^\infty(\Omega)$ de funciones continuamente diferenciables. Estos espacios tienen la propiedad de que todas las funciones que lo constituyen y sus derivadas, hasta cierto orden son continuas.

Si $\Omega := (a, b) \subseteq \mathbb{R}$, entonces

$$C^m(a,b) = \Big\{ f : (a,b) \to \mathbb{R} / f^{(k)} \text{ es continua en todo } (a,b)\ \forall\, k = 0, ..., m \Big\},$$

$$C^\infty(a,b) = \Big\{ f : (a,b) \to \mathbb{R} / f^{(k)} \text{ es continua en todo } (a,b)\ \forall\, k \in \mathbb{N} \Big\}. \tag{2.3}$$

Ahora bien,si $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ entonces

$$\begin{aligned} C^m(\Omega) \ &:= \ \Big\{ f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} / f \text{ y todas sus derivadas parciales} \\ & \quad \text{hasta el orden } m \text{ son continuas en } \Omega \Big\}, \\ &:= \ \Big\{ f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} / \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} ... \partial x_d^{\alpha_d}} \in C(\Omega), \forall |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_d \leq m \\ & \quad \text{con } \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_d) \in \mathbb{N} \cup 0 \Big\}. \end{aligned}$$

$$\text{y } C^\infty(\Omega) \ := \ \Big\{ f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} / \partial^\alpha f \in \Omega, \forall \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_d \in \mathbb{N}^d \cup 0) \Big\}.$$

Donde $\partial^\alpha f := \dfrac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} ... \partial x_d^{\alpha_d}}$ corresponde a la notación de derivada parcial usando multi-índices.

Observación 2.5.1. *En $C^1([a, b])$ se tiene el producto interno*

$$(u, v)_{C^1([a,b])} = \int_a^b [uv + u'v'].$$

A continuación se define formalmente el soporte de una función.

Definición 2.5.1. *Sea una función $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, el **soporte** de f se denota y define como*

$$sop(f) = \overline{\Big\{ x \in \Omega / f(x) \neq 0 \Big\}}.$$

Observación 2.5.2. *(i) Se cumple por definición que sop(f) es cerrado. Si además sop(f) es acotado, se dice que f tiene soporte compacto.*

(ii) Si f tiene soporte compacto completamente contenido en Ω, entonces es inmediato ver que $f\big|_{\partial\Omega} = 0$.

A continuación, considerando el conjunto de funciones infinitamente diferenciables definido en (2.3) y (2.4), extendemos la definición para aquellos cuyo soporte es acotado.

Definición 2.5.2. *Sea Ω un dominio de $\mathbb{R}^d$. Se denota por $C_0^\infty(\Omega)$ y se le llama* ***espacio de funciones test o de prueba*** *al conjunto de funciones infinitamente diferenciables y con soporte compacto en Ω (ver (2.3) y (2.4)). Es decir,*

$$C_0^\infty(\Omega) = \{f \in C^\infty(\Omega) : b\, sop(f) \subseteq \Omega \text{ es compacto}\}.$$

2.6. Espacios de Lebesgue

En esta sección se abordaran algunos conceptos elementales de espacios de Lebesgue. Particularmente, revisaremos algunas ideas de medida de Lebesgue, funciones medibles y funciones Lebesgue integrables. Se concluye definiendo formalmente los espacios de Lebesgue y desigualdades útiles cuando se trabajan sobre estos.

2.6.1. Breve discusión de medida de Lebesgue

Consideremos una colección $\mathscr{M}$ de subconjuntos medibles de $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, tales que:

(i) $\Omega \in \mathscr{M}$,

(ii) $\mathrm{M} \in \mathscr{M}$, entonces $\mathrm{M}^{\mathrm{C}} \in \mathscr{M}$,

(iii) O es abierto, entonces $\mathrm{O} \in \mathscr{M}$,

(iv) Sea $\{\mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2, ...\}$ familia numerable disjunta de elementos en $\mathscr{M}$, entonces $\mathrm{M}_1 \cup \mathrm{M}_2 \cup ...$ debe pertenecer a $\mathscr{M}$.

Es importante identificar cuales son los conjuntos medibles pues sobre estos se define la integral de Lebesgue, por ello precisamos la definición de medida de Lebesgue.

Definición 2.6.1. *La medida de Lebesgue es una función*

$$\mu : \Omega \subseteq \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup 0,$$

que cumple

(i) $\mu(\emptyset) = 0$,

(ii) Si $C=\{(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times ... \times (a_d, b_d)$ *donde* $a_i, b_i \in \mathbb{R}, a_i < b_i, \forall i = 1, ..., d\}$ *es una d-celda en* $\mathbb{R}^d$, *entonces* $\mu(\mathrm{C}) = \mathrm{vol}(\mathrm{C})$,

(iii) $\{\mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2, ...\}$ *es una colección disjunta de conjuntos medibles, entonces*

$$\mu\big(\mathrm{M}_1 \cup \mathrm{M}_2 \cup ...\big) = \mu\big(\mathrm{M}_1\big) + \mu\big(\mathrm{M}_2\big) + ... ,$$

(iv) $\mu\big(\mathrm{M}\big) = \text{ínf}\{\mu(\mathrm{O}) : \mathrm{M} \subset \mathrm{O},\ \mathrm{O}$ *es abierto*$\}$,

(v) $\mu\big(\mathrm{M}\big) = \sup\{\mu(\mathrm{C}) : \mathrm{C} \subset \mathrm{M},\ \mathrm{C}$ *es cerrado*$\}$.

Observación 2.6.1. *La medida de Lebesgue extiende naturalmente el concepto de longitud, área y volúmen con la propiedad adicional de que su definición por (iv) y (v) permite medir conjuntos mas generales. En efecto, para* $\mathrm{d} = 1$ *y* $\mathrm{d} = 2$ *se tiene*

(i) En $\mathbb{R}$, *la medida de un intervalo es la longitud de este, es decir* $\mu(a_1, b_1) = b_1 - a_1$.

(ii) En $\mathbb{R}^2$, *la medida o volumen de una 2-celda es el área. Esto es* $\mu\big((a_1, b_1) \times (a_2, b_2)\big) = \prod_{i=1}^{2}(b_i \cdot a_i)$

Observación 2.6.2. *Se dice que una propiedad se cumple en casi todas partes (ctp) si los subconjuntos sobre los cuales la propiedad no se satisface tienen medida nula.*

2.6.2. Funciones medibles

Definición 2.6.2. *Una función $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ definida sobre un conjunto medible Ω es medible si la imagen inversa $f^{-1}(\mathrm{M})$ de cualquier conjunto medible M en $\mathbb{R}$ es medible.*

Ejemplos

(i) La imagen inversa de cualquier conjunto abierto por medio de una función continua, es abierta. Por lo tanto toda función continua es medible.

(ii) Funciones discontinuas en un número finito de puntos son medibles.

(iii) El valor absoluto, la parte positiva y la parte negativa de una función f medible, tambien son medibles.

2.6.3. Funciones Lebesgue integrables

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ medible. Se dice que la función f es integrable en el sentido de Lebesgue si

$$\int_\Omega |f| < \infty\,.$$

El concepto de integral de Lebesgue puede definirse siguiendo:

(i) Integral de una función simple s en Ω

$$\int_\Omega s = a_1\mu(M_1 \cap \Omega) + a_2\mu(M_2 \cap \Omega) + ... + a_{\mathrm{N}}\mu(M_{\mathrm{N}} \cap \Omega),$$

donde M_k son conjuntos medibles y disjuntos.

(ii) Integral de funciones escalonadas no negativas

$$u(x) = \begin{cases} C_1 & en \quad M_1 \\ \vdots & \\ C_n & en \quad M_n \end{cases}$$

$$\int_\Omega u = \sum_{i_1}^{n} C_i \mu(M_i)$$

(iii) Integral de una función no negativa

Sea $f(x) \geq 0$ en c.t.p de Ω, f medible sobre Ω medible si

$$\int f dx \quad = \quad \lim_{k \to \infty} \int_\Omega \Big\{ s_k \Big\} dx \,,$$

donde $\Big\{ s_k \Big\}$ sucesión de funciones simples que convergen a f.

(iv) Integral de una función más general

$$\int_\Omega f = \int_\Omega f^+ - \int_\Omega f^- \,,$$

donde f^+ y f^- son la parte positiva y la parte negativa de f, respectivamente.

Observación 2.6.3. *Existen funciones que son Lebesgue integrables, pero no integrables en el sentido de Riemann. A continuación se presenta un ejemplo de esta situación.*

Ejemplo *Consideremos la función de Dirichlet*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x \in \mathbb{Q} \\ & \\ 0 & , \quad x \in \mathbb{I} \,, \end{cases}$$

sobre el intervalo $[0, 1]$ *donde* $\mathbb{Q}$ *e* $\mathbb{I}$, *denotan los conjuntos de números racio-*

nales e irracionales, respectivamente. Esta función no es Riemann integrable. En efecto, recordar que

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} s_n(f,\mathcal{P}),$$

donde $s_n(f,\mathcal{P})$ *es una sucesión de sumas de Riemann de* f *asociadas a una partición* $\mathcal{P} = \{0 = x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n = 1\}$ *del intervalo* $[0,1]$ *de tamaño* Δx*. En particular,* $s_n(f,\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x$*, donde* $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ *es arbitrario. Considerando* $c_i \in \mathbb{Q}$ *y una partición uniforme de* $[0,1]$*, para la cual* $\Delta x = \frac{1}{n}$*, se cumple que*

$$s_n(f,\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x = \sum_{i=1}^{n} 1\Delta x = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} = 1.$$

Ahora, tomando $c_i \in \mathbb{I}$*,*

$$s_n(f,p)\sum_{i=1}^{n} f(C_i)\Delta x = \sum_{i=1}^{n} 0\Delta x = 0$$

Por lo anterior, $\lim_{n\to\infty} s_n(f,\mathcal{P})$ *no existe, y en consecuencia* $f(x)$ *no es integrable en el sentido de Riemann. Por otro lado, la integral de Lebesgue de* f *existe gracias a que el conjunto* $\mathbb{Q}$ *es numerable y tiene medida nula, por lo que*

$$\int_0^1 f(x) = 1\mu(\mathbb{Q}) = 0,$$

en el sentido de Lebesgue.

Toda función que sea Riemann integrable, es integrable en el sentido de Lebesgue. Mas aún, la integral de Lebesgue cumple las propiedades que se resumen en el resultado siguiente.

Teorema 2.6.1. *Sean u, v funciones Lebesgue integrables sobre $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$*

(i) $\displaystyle\int_\Omega \alpha u + \beta v = \alpha \int_\Omega u + \beta \int_\Omega v,\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}\,,$

(ii) $u(x) \leq v(x)$ *ctp en* Ω*, entonces* $\displaystyle\int_\Omega u \leq \int_\Omega v,$

(iii) $m \leq u(x) \leq M$*, entonces* $\displaystyle m\mu(\Omega) \leq \int_\Omega u \leq M\mu(\Omega)\,,$

(iv) $|u|$ *es integrable. Aún más,* $\displaystyle\Big|\int_\Omega u\Big| \leq \int_\Omega |u|.$

Teorema 2.6.2 (Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue)**.** *Sea* $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *sucesión de funciones medibles y* $u_k \leq v,\ \forall k \in \mathbb{N}$*, donde* v *es Lebesgue integrable. Si* $u = \lim\limits_{k\to\infty} u_k$*, entonces* $\displaystyle\int_\Omega u = \lim_{k\to\infty}\int_\Omega u_k$

2.6.4. Espacios de Lebesgue

Consideramos $p \geq 1$ real, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ abierto y acotado. El **espacio de Lebesgue** denotado $L^p(\Omega)$ está dado por

$$L^p(\Omega) = \Big\{u : \Omega \subseteq \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}\ /\int_\Omega |u|^p < \infty\Big\}.$$

Este es un espacio vectorial dotado de la norma

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \|u\|_{0,p,\Omega} = \left\{\int_\Omega |u|^p\right\}^{1/p}.$$

Para el caso en el cual $p = 2$, se le conoce como conjunto de funciones cuadrado integrables y se define

$$L^2(\Omega) = \Big\{u : \Omega \subseteq \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}\ \Big/ \int_\Omega u^2 < \infty\Big\}.$$

La respectiva norma del espacio es

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} = \|u\|_{0,\Omega} = \left\{ \int_\Omega u^2 \right\}^{1/2}. \tag{2.4}$$

La función

$$(\cdot,\cdot)_{0,\Omega} : L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \to \mathbb{R},$$

Definida por

$$(u,v) = \int_\Omega uv,$$

define un producto interno en $L^2(\Omega)$. Se observa que este producto interno induce la norma (2.4). En efecto,

$$\|u\|_{0,\Omega} = \left\{ \int_\Omega u^2 \right\}^{1/2} = \left\{ \int_\Omega uu \right\}^{1/2} = (u,u)_{0,\Omega}^{1/2}.$$

En el caso de $p = \infty$, se tiene el espacio de funciones esencialmente acotadas

$$L^\infty(\Omega) = \Big\{ u : |u(x)| \leq k \text{ ctp sobre } \Omega \Big\},$$

cuya norma se define como

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \|u\|_{\infty,\Omega} = \operatorname{ess\,sup} |u(x)| = \text{ínf} \Big\{ k : |u(x)| \leq k \text{ ctp } \Omega \Big\}.$$

Ejemplos. Algunas funciones en espacios L^p son los siguientes.

(i) Toda función continua y acotada sobre Ω pertenece a $L^p(\Omega),\ \forall p \geq 1$

(ii) Consideremos la función de Heaviside $H(x)$ en $\mathbb{R}$, definida como

$$H(x) = \begin{cases} 1 \quad , \quad x > 0 \\ \\ 0 \quad , \quad x \leq 0. \end{cases}$$

Claramente $H(x) \in L^p(a,b)$ para cualquier $p \leq 1$ y $a < 0 < b$. En efecto,

$$\begin{aligned} \int_{(a,b)} H(x) &= \int_a^b H^p(x), \\ &= \int_0^b 1^p, \\ &= \int_0^b 1, \\ &= 1\mu(0,b), \\ &= b < \infty. \end{aligned}$$

(iii) Si consideramos $u(x) = x^{-1/3}$ en $\Omega = (0,1)$, entonces se tiene que

$$\int_0^1 u^p = \int_0^1 x^{-p/3} = \left. \frac{x^{\frac{-p}{3}+1}}{\frac{-p}{3}+1} \right|_0^1 = \frac{1}{\frac{-p}{3}+1} < \infty,$$

siempre que

$$\frac{-p}{3} + 1 > 0 \Rightarrow p < 3,$$

En consecuencia, $u \in L^p(\Omega)$ para $1 \leq p < 3$.

2.6.5. Algunas desigualdades importantes

En la presente subsección se enuncian y demuestran dos teoremas fundamentales en el estudio de los espacios L^p: la desigualdad de Hölder y la desigualdad de

Minkowski. En especifico, esta última establece que los espacios L^p son espacios vectoriales normados. La desigualdad de Hölder permite demostrar la desigualdad de Minkowski, por tanto es natural comenzar demostrandola tal como a continuación.

Teorema 2.6.3 (Desigualdad de Hölder)**.** *Sean $u \in L^p(\Omega)$, $v \in L^q(\Omega)$, donde p y q son conjugados de Hölder, es decir,*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

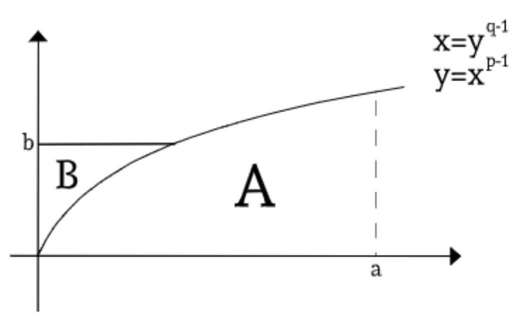
Entonces; $uv \in L^1(\Omega)$, además

$$\begin{aligned} \int_\Omega |uv| &\leq \left(\int_\Omega |u|^p\right)^{1/p} \cdot \left(\int_\Omega |v|^q\right)^{1/q}, \quad \textit{o bien,} \\ (u,v)_{0,\Omega} &\leq \|u\|_{0,p,\Omega} \cdot \|v\|_{0,q,\Omega} \end{aligned}$$

Demostración. Demostraremos primeramente lo que se conoce como desigualdad de Young, la cual establece que si $a, b \in \mathbb{R}^+$, entonces

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\,, \tag{2.5}$$

para p y q cualesquiera. Para este propósito, hacemos uso del gráfico adjunto en el cual se representan las funciones $x = y^{q-1}$ e $y = x^{p-1}$ y las regiones A y B acotadas por estas curvas y los ejes coordenados.



Por lo anterior, es claro que

$$\begin{aligned} ab &\leq \text{área}\,(\text{A}) + \text{área}\,(\text{B}), \\ &= \int_0^a x^{p-1} + \int_0^b y^{q-1}, \\ &= \left.\frac{x^p}{p}\right|_0^a + \left.\frac{y^q}{q}\right|_0^b, \\ &= \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \quad \Longrightarrow \quad ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\,. \end{aligned}$$

Definimos entonces de manera conveniente

$$a = \frac{u(x)}{\left(\displaystyle\int_\Omega |u|^p\right)^{1/p}} \ \text{ y } \ b = \frac{v(x)}{\left(\displaystyle\int_\Omega |v|^q\right)^{1/q}},$$

luego, usando (2.5) y operando se consigue que

$$\frac{u(x)}{\left(\displaystyle\int_\Omega |u|^p\right)^{1/p}} \cdot \frac{v(x)}{\left(\displaystyle\int_\Omega |v|^q\right)^{1/q}} \leq \frac{1}{p}\frac{u^p}{\displaystyle\int_\Omega |u|^p} + \frac{1}{q}\frac{v^q}{\displaystyle\int_\Omega |v|^q}\,,$$

por lo que

$$uv \leq \frac{1}{p}u^p\left[\int_\Omega |u|^p\right]^{\frac{1}{p}-1}\left[\int_\Omega |v|^q\right]^{\frac{1}{q}} + \frac{1}{q}v^q\left[\int_\Omega |u|^p\right]^{\frac{1}{p}}\left[\int_\Omega |v|^q\right]^{\frac{1}{q}-1}.$$

Integrando a ambos lados se tiene

$$\begin{aligned}\int_\Omega uv &\leq \frac{1}{p}\int_\Omega u^p\left[\int_\Omega |u|^p\right]^{\frac{1}{p}-1}\left[\int_\Omega |v|^q\right]^{\frac{1}{q}} + \frac{1}{q}\int_\Omega v^q\left[\int_\Omega |u|^p\right]^{\frac{1}{p}}\left[\int_\Omega |v|^q\right]^{\frac{1}{q}-1},\\ &\leq \left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)\left[\int_\Omega |u|^p\right]^{1/p}\left[\int_\Omega |v|^q\right]^{1/q},\end{aligned}$$

Y por tanto, $\displaystyle\int_\Omega uv \leq \left[\int_\Omega |u|^p\right]^{1/p}\cdot\left[\int_\Omega |v|^q\right]^{1/q}$. $\square$

Observación 2.6.4. *De manera generalizada, sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ abierto y acotado, $u \in L^p(\Omega), v \in L^q(\Omega)$ y $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{r}$. Entonces, $u, v \in L^r(\Omega)$. Además*

$$\left(\int_\Omega |uv|^r\right) \leq \|u\|_{0,p,\Omega}\|v\|_{0,q,\Omega}\,. \tag{2.6}$$

Teorema 2.6.4 (Desigualdad de Minkowsky)**.** *Sean u,v$\in L^P(\Omega)$. Entonces,*

$$\begin{aligned}\|u+v\|_{0,p,\Omega} &\leq \|u\|_{0,p,\Omega}+\|v\|_{0,p,\Omega},\\ \left[\int_\Omega |u+v|^p\right]^{1/p} &\leq \left[\int_\Omega |u|^p\right]^{1/p}+\left[\int_\Omega |v|^p\right]^{1/p}.\end{aligned}$$

Observación 2.6.5. *La desigualdad anterior esencialmente muestra que $\|\cdot\|_{0,p,\Omega}$ satisface la desigualdad triangular en los espacios L^p, por lo que efectivamente es una norma.*

Teorema 2.6.5. *Sea Ω abierto acotado de $\mathbb{R}^d$;*

(i) $L^p(\Omega) \subset L^r(\Omega)$, $p > r$. *Además la inclusión*

$$\begin{aligned} i : L^p(\Omega) &\longrightarrow L^r(\Omega)\\ u &\mapsto i(u) = u,\end{aligned}$$

es lineal y acotada.

(ii) $u \in L^p(\Omega)$ *entonces*

$$\int_\Omega |u| < \infty \quad \wedge \quad \int_\Omega u < \infty\,,\ u \in L^1(\Omega).$$

(iii) Sean $u, v \in L^2(\Omega)$ *entonces*

$$\int_\Omega uv < \infty \quad \textit{para } uv \in L^1(\Omega).$$

Demostración. Es claro que *(ii)* es un caso particular de *(i)* con $p > 1$ generico y $r = 1$. Por su parte, *(iii)* se obtiene al aplicar la desigualdad de Hölder con $p = q = 2$, por tanto solo se demostrará la parte *(i)*. Sea q el conjugado de Hölder de p, es decir, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$. Se sigue entonces por (2.6), que para cualquier $u \in L^p(\Omega)$ y $v \in L^q(\Omega)$

$$\left[\int_\Omega |uv|^r\right]^{1/r} \leq \|u\|\|_{0,p,\Omega}\|v\|_{0,q,\Omega} = \|u\|_{0,p,\Omega}\left[\int_\Omega |v|^q\right]^{1/q},$$

en particular para $v \equiv 1 \in L^q(\Omega)$,

$$\left[\int_\Omega |u|^r\right]^{1/r} \leq \left[\int_\Omega 1\right]^{1/q} \cdot \|u\|_{0,p,\Omega} = \mu(\Omega)^{\frac{1}{r}-\frac{1}{p}}\|u\|_{0,p,\Omega},$$

por lo que finalmente se obtiene que $\|u\|_{0,p,\Omega} \leq \mu(\Omega)^{\frac{1}{r}-\frac{1}{p}}\|u\|_{0,p,\Omega}$. □

Observación 2.6.6. *(i) Gracias a la desigualdad de Minkowsky*

$$\left[\int_\Omega |u+v|^p\right]^{1/p} \leq \left[\int_\Omega |u|^p\right]^{1/p} + \left[\int_\Omega |v|^p\right]^{1/p},$$

Se sabe que $\|\cdot\|_{0,p,\Omega}$ *es norma, pero además, si* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\left[\int_\Omega |\alpha u + \beta v|^p\right]^{1/p} &\leq \left[\int_\Omega |\alpha u|^p\right]^{1/p} + \left[\int_\Omega |\beta v|^p\right]^{1/p}, \\ &= |\alpha| \left[\int_\Omega |u|^p\right]^{1/p} + |\beta| \left[\int_\Omega |v|^p\right]^{1/p}.\end{aligned}$$

De acá se sigue que $\alpha u + \beta v \in L^p(\Omega)$. *Esto justifica el carácter de espacio vectorial de* $L^p(\Omega)$.

(ii) Por las propiedades del ínfimo, se prueba que $L^\infty(\Omega)$ *es un espacio vectorial.*

(iii) $L^p(\Omega)$ *es un espacio de Banach con respecto a la norma* $\|\cdot\|_{0,p,\Omega}$ *para* $p \in [1, \infty]$. *En el caso* $p = 2$, *dado que*

$$\|\cdot\|_{0,\Omega} = (\cdot, \cdot)_{0,\Omega}^{1/2},$$

se tiene que el espacio $L^2(\Omega)$ *es de Hilbert.*

(iv) Notar que si $u, v \in L^2(\Omega)$, *entonces al aplicar Hölder se deduce que* $uv \in L^1(\Omega)$,

$$|(u, v)_{0,\Omega}| = \int_\Omega |uv| \leq \|u\|_{0,\Omega} \cdot \|v\|_{0,\Omega}.$$

Lo anterior indica que la desigualdad de Cauchy-Schwarz es un caso particular de la desigualdad de Hölder en $L^2(\Omega)$.

2.7. Espacios de Sobolev

Los espacios de Sobolev son espacios de funciones dotados de una norma que es combinación de normas tipo $L^p(\Omega)$ de las funciones y sus derivadas (distribucionales) hasta cierto orden. A continuación, se definirá una clase particular de estos espacios y se revisarán algunas de sus propiedades, ya que estos cumplen un papel fundamental en la formulación y solubilidad de un problema variacional o débil en términos del cual se escribe una ecuación diferencial.

Definición 2.7.1. *Sea $\Omega \subseteq R^d$ un dominio y $m \geq 0$, se define el* ***espacio de Sobolev*** *$H^m(\Omega)$ de orden m como el conjunto de funciones cuadrado integrables cuyas derivadas distribucionales hasta el orden m son cuadrado-integrables, es decir*

$$H^m(\Omega) = \Big\{ v : \Omega \subseteq \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R} / D^\alpha \in L^2(\Omega), \forall |\alpha| \leq m \Big\}.$$

Este espacio está dotado del producto interno

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega (D^\alpha u)(D^\alpha v),$$

el cual induce la norma

$$\| \cdot \|_{H^m(\Omega)} = (\cdot, \cdot)^{1/2}_{H^m(\Omega)}.$$

Observación 2.7.1. *Notar que*

(i) *Si $m = 0$, entonces $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$.*

(ii) $(u, v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)$.

(iii) $|u|_{H^m(\Omega)} = \Big[\sum_{|\alpha| = m} \int_\Omega (D^\alpha u)(D^\alpha v) \Big]^{1/2}$.

(iv) *Para $m \geq 0$ y $p \geq 1$, se define el espacio de Sobolev más general*

$$W^{m,p}(\Omega) = \Big\{ v : \Omega \subseteq \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R} / D^\alpha v \in L^p(\Omega), \forall |\alpha| \leq m \Big\}. \tag{2.7}$$

2.7.1. Espacio H^m y propiedades

Algunas de las propiedades básicas que cumple el espacio de Sobolev $H^m(\Omega)$ se resumen en el siguiente resultado.

Teorema 2.7.1. *Sea $H^m(\Omega)$ el espacio de Sobolev definido en* (2.7)*, Ω un dominio acotado de $\mathbb{R}^d$ con frontera Lipschitz. Entonces*

(i) $H^r(\Omega) \subseteq H^m(\Omega), \quad r \geq m.$

(ii) $H^m(\Omega)$ *es un espacio de Hilbert con respecto a la norma* $\|\cdot\|_{H^m(\Omega)}$.

(iii) $H^m(\Omega) = \overline{C^\infty(\overline{\Omega})}^{\|\cdot\|_{H^m(\Omega)}}.$

Demostración. Para demostrar la propiedad *(ii)*, se debe probar que $H^m(\Omega)$ es completo con respecto a la norma $\|\cdot\|_{m,\Omega}$ inducida por el producto interno $(\cdot,\cdot)_{H^m(\Omega)}$. Consideremos una sucesión de Cauchy $\{v_n\}$ en $H^m(\Omega)$, entonces, se cumple que

$$\|v_k - v_l\|^2_{m,\Omega} = \sum_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha v_k - D^\alpha v_l\|^2_{0,\Omega} \xrightarrow{k,l\longrightarrow\infty} 0,$$

y, en consecuencia,

$$\|D^\alpha v_k - D^\alpha v_l\|^2_{0,\Omega} \xrightarrow{k,l\longrightarrow\infty} 0\,, |\alpha| \leq m\,.$$

De acá se sigue que para cada $|\alpha| \leq m$ la sucesión $\{D^\alpha v_k\}$ es de Cauchy en $L^2(\Omega)$ (el cual es de Hilbert), por lo que existe $v^{(\alpha)} \in L^2(\Omega)$ tal que

$$D^\alpha v_k \xrightarrow{k\longrightarrow\infty} v^{(\alpha)}, \forall\, |\alpha| \leq m,$$

en particular, para $\alpha = 0, v_k \longrightarrow v^{(0)} := v$.

Falta ver que $D^\alpha v = v^{(\alpha)}, \forall |\alpha| \leq m$. En efecto,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega v^\alpha \phi &= \int_\Omega \Big(\lim_{k \longrightarrow \infty} D^\alpha v_k \Big) \phi = \Big(\lim_{k \longrightarrow \infty} D^\alpha v_k, \phi \Big)_{0,\Omega}, \\
&= \lim_{k \longrightarrow \infty} (D^\alpha v_k, \phi) = \lim_{k \longrightarrow \infty} (-1)^{|\alpha|} (v_k, D^\alpha \phi)_{0,\Omega}, \\
&= (-1)^{|\alpha|} \Big(\lim_{k \longrightarrow \infty} v_k, D^\alpha \phi \Big)_{0,\Omega} = (-1)^{|\alpha|} (v, D^\alpha \phi)_{0,\Omega}, \\
\therefore \;\; & v^\alpha = D^\alpha v \,.
\end{aligned}$$

□

En este punto vale la pena recordar que si Y es un espacio normado y X es un subconjunto de Y tal que $Y = \overline{X}^{\|\cdot\|_Y}$, entonces podemos afirmar que X es denso en Y y/o que Y es la completación de X respecto a la norma $\|\cdot\|_Y$. En particular, esto significa que:

(i) Para todo $y \in Y$ y para todo $\varepsilon > 0$, existe $x_\varepsilon \in X$ tal que $\|y - x_\varepsilon\|_Y < \varepsilon$.

(ii) Para cualquier $y \in Y$, existe una sucesión $\{x_n\}$ de elementos en X tal que $x_n \xrightarrow{n \longrightarrow \infty} y$ o bien $\|x_n - y\|_Y \xrightarrow{n \longrightarrow \infty} 0$.

De acuerdo a esto, conviene hacer algunas observaciones que se desprenden del teorema anterior.

Observación 2.7.2. *(i) De acuerdo a la propiedad (iii) del Teorema 2.7.1, cualquier función $u \in H^m(\Omega)$ puede aproximarse por una función infinitamente diferenciable en $\overline{\Omega}$, es decir*

$$\forall \varepsilon > 0, \; \exists f_\varepsilon \in C^\infty(\overline{\Omega}) \quad \textit{tal que} \quad \|u - f_\varepsilon\|_{H^m(\Omega)} < \varepsilon.$$

(ii) Como corolario de la propiedad (iii) del Teorema 2.7.1, podemos decir que $L^2(\Omega)$ es la completación de $C^\infty(\overline{\Omega})$ respecto a la norma $\|\cdot\|_{0,\Omega}$.

Otra propiedad importante es establecida a continuación.

Teorema 2.7.2 (Inclusiones de Sobolev)**.** *Sea Ω un dominio acotado de $\mathbb{R}^d$ con frontera Lipschitz. Si $m - k > \dfrac{d}{2}$, entonces $H^m(\Omega) \subset C^k(\overline{\Omega})$ y dicha inclusión es continua.*

Observación 2.7.3. *De acuerdo al teorema anterior, cuando $d = 1$, es decir, $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ y $k = 0$ entonces $H^m(\Omega) \subset C(\overline{\Omega}), \forall m \geq 1$. En el caso $d = 2$, al menos se debe cumplir $m = 2$ para que $H^m(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$.*

A continuación se entrega una definición alternativa para el espacio de Sobolev.

Teorema 2.7.3. *Para $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ un dominio acotado, $H^m(\Omega) = \overline{\widehat{C}^m(\Omega)}^{\|\cdot\|_{H^m(\Omega)}}$, donde*

$$\widehat{C}^m(\Omega) := \left\{u \in C^m(\Omega) / \|u\|_{H^m(\Omega)} < \infty\right\}.$$

En 2.7 se introdujo el espacio de Sobolev más general $W^{m,p}(\Omega)$, respecto al cual se tiene el siguiente resultado.

Teorema 2.7.4. *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ un dominio con frontera tipo Lipschitz. Entonces,*

(i) $W^{m,p}(\Omega)$ *es un espacio de Banach respecto a la norma*

$$\|\cdot\|_{m,p,\Omega} := \|\cdot\|_{W^{m,p}(\Omega)}.$$

(ii) $W^{m,p}(\Omega) = \overline{\widehat{C}^m(\Omega)}^{\|\cdot\|_{m,p,\Omega}}$ *donde*

$$\widehat{C}^m(\Omega) = \left\{u \in C^m(\Omega) \,/\, \|u\|_{m,p,\Omega} < \infty\right\}.$$

(iii) $W^{m,p}(\Omega) = \overline{C^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{m,p,\Omega}}$.

(iv) Para m, k y p enteros no negativos, tales que $1 \leq p < \infty$, se tiene que si $m - k \geq \dfrac{d}{p}$, entonces

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^k(\overline{\Omega}).$$

2.7.2. Operador traza

Dada $u \in C(\overline{\Omega})$, podemos considerar la restricción de u a la frontera de Ω, es decir, $u\big|_{\Gamma}$, donde $\Gamma = \partial\Omega$. En este sentido, podríamos entonces redefinir la restricción de u a la frontera a través del, asi llamado, **operador traza** como

$$\begin{aligned} \gamma_0 : C(\overline{\Omega}) &\longrightarrow C(\Gamma) \\ u &\mapsto \gamma_0(u) = u\big|_{\Gamma}. \end{aligned}$$

Nos preguntamos, ¿Tiene sentido extender esta idea a funciones en $H^m(\Omega)$? En primer lugar, llama la atención que los espacios de Sobolev $H^m(\Omega)$ se definen sobre dominios, es decir, conjuntos abiertos.Una alternativa para definir la traza de funciones en H^m es el hecho que

$$H^m(\Omega) = \overline{C^\infty(\overline{\Omega})}^{\|\cdot\|_{m,\Omega}},$$

en virtud del Teorema 2.7.1. Así, dada $u \in H^m(\Omega), \exists \{u_n\} \subseteq C^\infty(\overline{\Omega})$, tal que $u_k \longrightarrow u$ en $H^m(\Omega)$ y podemos pensar en $\gamma_0(u)$ como

$$\gamma_0(u) = \gamma_0\Big(\lim_{k\longrightarrow\infty} u_k\Big) = \lim_{k\longrightarrow\infty} \gamma_0(u_k),$$

pero esto es solo posible para $m \geq 1$. Al respecto se tiene el siguiente resultado.

Teorema 2.7.5 (Teorema de Trazas)**.** *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ un dominio acotado con frontera Lipschitz. Entonces, existe un operador lineal*

$$\begin{aligned} \gamma_0 \ : \ H^1(\Omega) &\longrightarrow L^2(\Gamma) \\ u &\mapsto \gamma_0(u), \end{aligned}$$

tal que $\|\gamma_0(u)\|_{0,\Gamma} \leq C_{tr}\|u\|_{1,\Omega}$.

Observación 2.7.4. *(i) Se cumple que si* $u \in C^1(\overline{\Omega})$ *entonces* $\gamma_0(u) = u\big|_\Gamma$*, en el sentido convencional. En otras palabras, el operador traza extiende la idea de restricción a la frontera de funciones continuas en el sentido convencional.*

(ii) Para $u \in H^1(\Omega)$*, suele escribirse la traza* $\gamma_0(u)$ *como* $\gamma(u)$ *o, simplemente, como* $u\big|_\Gamma$*.*

Definición 2.7.2 (Kernel e imagen del operador traza)**.** *Sea* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ *un dominio acotado con frontera Lipschitz* Γ *y sea el operador traza* $\gamma_0 \, : \, H^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\Gamma)$ *introducido en el Teorema 2.7.5,*

(i) El ***kernel o nucleo*** *del operador* γ_0 *se denota y define como*

$$\ker(\gamma_0) = \{v \in H^1(\Omega)/\gamma_0(v) = 0\}.$$

(ii) El ***conjunto imagen o rango*** *del operador traza se conoce como* ***espacio de trazas*** *y se denota como*

$$H^{1/2}(\Gamma) = Im(\gamma_0) = \{v_0 \in L^2(\Omega) \,/\, \exists v \in H^1(\Omega),\ \textit{tal que}\, \gamma(v) = v_0\}.$$

Observación 2.7.5. *Notar que el rango de* γ_0 *no es* $L^2(\Gamma)$ *pero ocurre que* $Im(\gamma_0) = H^{1/2}(\Gamma)$ *es denso en* $L^2(\Gamma)$*.*

Teorema 2.7.6. $H^{1/2}(\Gamma)$ *es denso en* $L^2(\Gamma)$ *y es un espacio de Banach con respecto a la norma*

$$\|v_0\|_{1/2,\Gamma} \;\; = \;\; \text{ínf}\{\|v\|_{1,\Omega} : \, v \in H^1(\Omega) \,/\, v\big|_\Gamma = v_0\}.$$

2.7.3. Fórmulas de integración por partes e identidades de Green

Comenzamos recordando el Teorema de la divergencia de Gauss, el cual indica que, para un campo vectorial G lo suficientemente regular, sobre un conjunto acotado Ω, con frontera Γ y vector unitario normal saliente $\mathbf{n}$ se cumple que

$$\int_\Omega \operatorname{div}(G) = \int_\Gamma G \cdot \mathbf{n} \quad ; G = (G_1, G_2, ..., G_d).$$

Ahora bien, aplicándolo a $G = (0, 0, ..., uv, 0, ..., 0)$; donde la i-ésima componente de G es uv, siendo $u, v : \Omega \subseteq \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones escalares lo suficientemente suaves, se sigue que

$$\begin{aligned} \int_\Omega \frac{\partial(uv)}{\partial x_i} &= \int_\Gamma uv \cdot n_i, \\ \Rightarrow \int_\Omega \Big(\frac{\partial u}{\partial x_i} v + u\frac{\partial v}{\partial x_i}\Big) &= \int_\Gamma uvn_i, \\ \Rightarrow \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v &= \int_\Gamma uvn_i - \int_\Omega u\frac{\partial v}{\partial x_i}. \end{aligned}$$

Si hacemos $u = \frac{\partial w}{\partial x_i}$, donde w es un campo escalar lo suficientemente regular, entonces se consigue que

$$\begin{aligned} \int_\Omega \frac{\partial^2 w}{\partial x_i^2} v &= \int_\Gamma \frac{\partial w}{\partial x_i} vn_i - \int_\Omega \frac{\partial w}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i} \quad \forall i = 1, ..., d, \\ \Rightarrow \int_\Omega \Delta wv &= \int_\Gamma v\frac{\partial w}{\partial n} - \int_\Omega \nabla w \cdot \nabla v. \end{aligned}$$

La identidad anterior es la que se conoce como Fórmula de Green o de integración por partes, válida para funciones lo suficientemente suaves en el sentido convencional. A continuación, se establece y demuestra este resultado en espacios de Sobolev.

Teorema 2.7.7. *Sean u, v en $H^1(\Omega)$, entonces*

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v = \int_\Gamma u v n_i - \int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i}.$$

Demostración. Consideramos $u, v \in H^1(\Omega)$ y recordamos que $H^1(\Omega) = \overline{C^\infty(\overline{\Omega})}^{\|\cdot\|_{1,\Omega}}$, por lo que podemos garantizar que existen sucesiones $u_k, v_k \subseteq C^\infty(\overline{\Omega})$ tales que

$$\|u_k - u\|_{1,\Omega} \xrightarrow{k \longrightarrow \infty} 0 \quad \text{y} \quad \|v_k - v\|_{1,\Omega} \xrightarrow{k \longrightarrow \infty} 0\,.$$

Pero gracias a la formula de integración por partes en $C^1(\Omega)$

$$\int_\Omega \frac{\partial u_k}{\partial x_i} v_k = \int_\Gamma u_k v_k n_i - \int_\Omega u_k \frac{\partial v_k}{\partial x_i}, \tag{2.8}$$

observar que

$$\begin{aligned}
\left| \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v - \int_\Omega \frac{\partial u_k}{\partial x_i} v_k \right| &= \left| \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v - \frac{\partial u_k}{\partial x_i} v_k \right|, \\
&= \left| \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v - \frac{\partial u_k}{\partial x_i} v + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} v - \frac{\partial u_k}{\partial x_i} v_k \right|, \\
&= \left| \int_\Omega (\frac{\partial u}{\partial x_i} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i}) v + (v - v_k) \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right|, \\
&\leq \left\| \tfrac{\partial u}{\partial x_i} - \tfrac{\partial u_k}{\partial x_i} \right\|_{0,\Omega} \|v\|_{0,\Omega} + \|v - v_k\|_{0,\Omega} \left\| \tfrac{\partial u_k}{\partial x_i} \right\|_{0,\Omega}, \\
&\leq \|u - u_k\|_{1,\Omega} \|v\|_{1,\Omega} + \|v - v_k\|_{1,\Omega} \|u_k\|_{1,\Omega}, \\
&\xrightarrow{k \longrightarrow \infty} 0 \cdot \|v\|_{1,\Omega} + 0 \cdot \|u\| = 0.
\end{aligned}$$

De manera análoga se prueba que

$$\left| \int_\Omega u_k \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i} \right| \xrightarrow{k \longrightarrow \infty} 0\,,$$

y, usando también desigualdad de traza, que

$$\left| \int_\Gamma u_k v_k n_i - \int_\Gamma u v n_i \right| \xrightarrow{k \longrightarrow \infty} 0\,.$$

El resultado deseado se sigue al tomar límite en (2.8).

□

2.7.4. Espacio de Sobolev H_0^m

Los espacios $H_0^m(\Omega)$ son un subespacio de $H^m(\Omega)$. Estos se caracterizan por poseer derivadas cuyas trazas son nulas en la frontera. Formalmente, se tiene el siguiente resultado.

Teorema 2.7.8. *Sea Ω un dominio acotado de $\mathbb{R}^d$ con frontera lo suficientemente suave Γ y sea $H_0^m = \overline{C_0^\infty(\overline{\Omega})}^{\|\cdot\|_{m,\Omega}}$, entonces $H_0^m(\Omega) \subseteq H^m(\Omega)$ y si $u \in H_0^m(\Omega)$ entonces se cumple que $D^\alpha u = 0$ sobre Γ para $|\alpha| \leq m-1$.*

Observación 2.7.6. *Si $v \in H_0^1(\Omega)$, $D^\alpha v = 0$ sobre Γ para $|\alpha| \leq 1-1 = 0$, o sea v=0 sobre $\Gamma \Rightarrow \gamma(v) = 0$. Por lo tanto, $H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) \,/\, \gamma_0(v) = 0\} = \ker(\gamma_0)$.*

Un resultado clave es el siguiente.

Teorema 2.7.9 (Desigualdad de Friedrich-Poincare)**.** *$\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ dominio acotado. $\exists C_{FP} > 0$ tal que*

$$\|v\|_{1,\Omega} \leq C_{FP}|v|_{1,\Omega} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

2.8. El Teorema de Lax-Milgram

El teorema de Lax-Milgram es un resultado muy poderoso usado, particularmente, para demostrar el buen planteamiento de un problema variacional del tipo elíptico. En la presente sección se estudiarán conceptos necesarios para comprender este teorema y estableceremos dos versiones del mismo.

Definición 2.8.1. *Sea $\big(H,(\cdot,\cdot)\big)$ un espacio de Hilbert. Llamaremos* ***funcional*** *sobre H a la aplicación que asocia a cada elemento de H un único número real*

$$\begin{aligned} F : H &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto F(x). \end{aligned}$$

Observación 2.8.1. *Diremos que el funcional:*

(i) Es ***lineal*** *si cumple que*

$$F(\alpha x+\beta y)=\alpha F(x)+\beta F(y) \quad \forall x,y\in H \wedge \forall \alpha,\beta\in\mathbb{R}.$$

(ii) Es ***acotado****, si existe $C>0$, tal que*

$$|F(x)|\leq C\|x\| \quad \forall x\in H.$$

Donde $\|\cdot\|:=(\cdot,\cdot)^{1/2}$ es la norma inducida por el respectivo producto interno.

Definición 2.8.2. *El espacio dual de H es el conjunto*

$$H^{'} := \{F : H \longrightarrow \mathbb{R} \,/\, F \text{ es lineal y acotado}\},$$

dotado de la norma

$$\|F\|_{H'} = \sup_{u\in H-\{0\}} \frac{|F(x)|}{\|x\|}.$$

Teorema 2.8.1 (Teorema de Representación de Riesz). *Sea H un espacio de Hilbert con producto interno $(\cdot,\cdot)$ y sea $F \in H'$. Entonces, existe un único $u_F \in H$ tal que*

$$F(x) = (u_F, x) \quad \forall x \in H \quad y \quad \|F\|_{H'} = \|u_F\|.$$

Un tipo especial de operador que podemos encontrar frecuentemente en el estudio de problemas con valor en la frontera envía un par de elementos en su respectivo espacio, hacia un elemento dentro de los reales (o en ocasiones a los complejos). Este operador se define a continuación.

Definición 2.8.3. *Sea H un espacio normado, llamaremos **forma** a la aplicación*

$$\begin{aligned} a : H \times H &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto a(x, y) \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Observación 2.8.2. *En cuanto a la definición de forma, diremos que*

(i) $a(\cdot,\cdot)$ *es **bilineal** si* $\forall x, y, z \in H \wedge \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *se cumple que*

$$\begin{aligned} a(\alpha x + \beta y, z) &= \alpha a(x, z) + \beta a(y, z), \\ a(x, \alpha y + \beta z) &= \alpha a(x, y) + \beta a(x, z). \end{aligned}$$

(ii) $a(\cdot,\cdot)$ *es **acotada** si existe $M > 0$ tal que*

$$a(x, y) \leq M\|x\|\,\|y\|, \quad \forall x, y \in H.$$

(iii) $a(\cdot,\cdot)$ *es **simétrica**, es decir,*

$$a(x, y) = a(y, x), \quad \forall x, y \in H.$$

(iv) $a(\cdot,\cdot)$ *es **positiva** si* $a(x, y) > 0\,, \forall x, y \in H$.

(v) $a(\cdot,\cdot)$ es ***coerciva o H-elíptica*** *si existe una constante $\alpha > 0$ tal que*

$$a(y,y) \geq \alpha \|y\|^2, \quad \forall y \in H.$$

Enunciamos a continuación, sin demostración, un resultado clave para establecer el buen planteamiento de un problema variacional del tipo elíptico.

Teorema 2.8.2 (Teorema de Lax-Milgram)**.** *Sea H un espacio con producto interno y $a(\cdot,\cdot) : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal acotada con constante $M > 0$ y coerciva con constante $\alpha > 0$. Entonces, para cada $F \in H'$, existe un único $u \in H$ tal que $a(u,v) = F(v)$, $\forall v \in H$. Además,*

$$\|u\|_H \leq \frac{1}{\alpha}\|F\|_{H'}.$$

Observación 2.8.3. *(i) Notar que si $a(\cdot,\cdot)$ es simétrica, además de coerciva y acotada, entonces $a(\cdot,\cdot)$ define un producto interno, a través de la aplicación*

$$\begin{array}{rcl} (\cdot,\cdot)_a : H \times H & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (u,v) & \mapsto & (u,v)_a = a(u,v) \in \mathbb{R}, \end{array}$$

el cual induce, a su vez, la norma

$$\|v\|_a = (v,v)_a^{1/2} = a(v,v)^{1/2}.$$

Pero, como $a(\cdot,\cdot)$ es coerciva, se tiene que

$$\begin{array}{rcl} \alpha\|v\|_H^2 \leq a(v,v) & = & \|v\|_a^2, \\ \Rightarrow \sqrt{\alpha}\|v\|_H & \leq & \|v\|_a. \end{array}$$

También, como $a(\cdot,\cdot)$ es acotada, se tiene que $a(v,v) \leq M\|v\|_H^2$, es decir,

$\|v\|_a \leq \sqrt{M}\|v\|_H$. De acá se desprende que

$$\sqrt{\alpha}\|v\|_H \leq \|v\|_a \leq \sqrt{M}\|v\|_H,$$

lo que establece efectivamente que $\|\cdot\|_a$ y $\|\cdot\|_H$ son equivalentes.

(ii) El inciso anterior, nos permite afirmar que si H es un espacio de Hilbert respecto al producto interno $(\cdot,\cdot)_H$, entonces también lo será con respecto al producto interno $(\cdot,\cdot)_a$.

(iii) Del item (i), es fácil ver que

$$F \in (H,(\cdot,\cdot))' \Leftrightarrow F \in \big(H,(\cdot,\cdot)_a\big)'.$$

(iv) Como $a(\cdot,\cdot)$ induce un producto interno en H, por el teorema de representación de Riez, para todo $F \in H'$ existe un único $u \in H$ tal que

$$F(v) = (u,v)_a = a(u,v) \quad \forall v \in H,$$

Además,

$$\begin{aligned}\sqrt{\alpha}\|u\|_H &\leq a(u,u)^{1/2}\\ &= \|u\|_a = \|F\|_{H'},\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\|u\|_H \leq \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\|F\|_{H'}.$$

Teorema 2.8.3 (Teorema de Lax-Milgram generalizado)**.** *Sean $(H_1(\cdot,\cdot)_{H_1})$ y $(H_2(\cdot,\cdot)_{H_2})$ espacios de Hilbert reales y sea $a(\cdot,\cdot) : H_1 \times H_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal acotada.*

Suponga que:

(a) Existe una constante positiva α, la cual cumple que

$$\sup_{\substack{v \in H \\ v \neq \mathbf{0}}} \frac{a(u,v)}{\|v\|_{H_2}} \geq \alpha \|u\|_{H_1} \quad \forall u \in H_1.$$

(b) Para todo $v \neq 0$

$$\sup_{u \in H_1} a(u,v) > 0 \quad \forall v \in H_2.$$

Entonces, para cada $F \in H_2^{'}$ existe un único $u \in H_1$, de modo que

$$a(u,v) = F(v) \quad , \forall v \in H_2 \quad \wedge \quad \|u\|_{H_1} \leq \frac{1}{\alpha} \|F\|_{H_2'}.$$

Se omite la demostración, debido a que esta se puede encontrar en [9].

Observación 2.8.4. *(i) En la versión clásica del teorema de Lax-Milgram se pide que $a(\cdot,\cdot)$ sea coerciva, es decir,*

$$\begin{aligned} a(v,v) &\geq \alpha \|v\|^2 \\ \Rightarrow \frac{a(v,v)}{\|v\|} &\geq \alpha \|v\| \quad v \in H - \{0\} \\ \Rightarrow \sup_{v \in H - \{0\}} \frac{a(u,v)}{\|v\|} &\geq \alpha \|u\| \quad \forall u \in H \end{aligned}$$

Lo cual representa la primera condición del teorema 2.8.3. Además, es evidente de la misma coercividad que

$$a(v,v) \geq \alpha \|v\|^2.$$

Entonces, para $v \neq 0$

$$a(v,v) > 0,$$

lo cual da la segunda condición. Esto prueba que coercividad implica el cumplimiento las dos condiciones de 2.8.3.

(ii) La primera condición en el Teorema 2.8.3 indica que

$$\exists\alpha > 0 : \sup_{v\in H_2-\{0\}} \frac{a(u,v)}{\|v\|_{H_2}} \geq \alpha\|u\|_{H_1} \quad \forall u \in H_1,$$

lo cual es equivalente a

$$\sup_{v\in H_2-\{0\}} \frac{a(u,v)}{\|u\|_{H_1}\|v\|_{H_2}} \geq \alpha \quad \forall u \in H_1 - \{0\} \Leftrightarrow \inf_{u\in H_1-\{0\}} \sup_{v\in H_2-\{0\}} \frac{a(u,v)}{\|u\|_{H_1}\|v\|_{H_2}} \geq \alpha.$$

Esto se conoce como condición $\text{ínf} - \sup$ *asociada con la sobreyectividad de un cierto operador inducido por la forma bilineal* $a(\cdot,\cdot)$. *La condición* $\text{ínf} - \sup$ *también se conoce como condición LBB (Ladyzhenskaya-Babŭska-Brezzi) o simplemente condición Babŭska-Brezzi o Banach-Neĉas-Babŭska.*

Capítulo 3

El problema modelo de flujo con transporte

En este capítulo abordaremos el problema modelo de interés, el cual corresponde al de un flujo de Brinkman acoplado con transporte no lineal. Partiremos con la Sección 3.1 en donde introduciremos una serie de definiciones, notaciones y espacios funcionales con los cuales trabajaremos, además de establecer las hipótesis que asumiremos sobre los datos del modelo. Luego, en la Sección 3.2 presentaremos las ecuaciones diferenciales parciales que describen el problema modelo y llevaremos a cabo su respectiva formulación variacional o débil. En este punto, discutiremos las propiedades de estabilidad de las formas involucradas. Finalmente, revisaremos en la Sección 3.3 replantearemos este problema en términos de un operador de punto fijo para garantizar la existencia y unicidad de la solución al problema variacional.

3.1. Notaciones y definiciones preliminares

Dominio y espacio de funciones. El modelo se considerará en un dominio Ω de $\mathbb{R}^d$ $(d = 2, 3)$, que representa un medio poroso, con frontera poliédrica $\Gamma = \bar{\Gamma}_{\mathrm{D}} \cup \bar{\Gamma}_{\mathrm{N}}$, con $\Gamma_{\mathrm{D}}\,, \Gamma_{\mathrm{N}} \subseteq \Gamma$ tales que $\Gamma_{\mathrm{D}} \cap \Gamma_{\mathrm{N}} = \emptyset$, $|\Gamma_{\mathrm{D}}| > 0$, y con vector normal unitario saliente $\mathbf{n} = (n_1, ..., n_d)^{\mathrm{t}}$. Emplearemos la notación estándar para espacios de Lebesgue y Sobolev. En particular, $W^{s,p}(\Omega)\,(s \geq 0\,, p \geq 1)$ denotará el espacio de Sobolev de todas las funciones en $L^p(\Omega)\,(p \geq 1)$ cuya derivada distribucional hasta el orden s están en $L^p(\Omega)$ y su respectiva norma y seminorma están denotadas por $\|\cdot\|_{s,p,\Omega}$ y $|\cdot|_{s,p,\Omega}$. Como es habitual, en el caso $p = 2$, simplemente denotaremos por $H^s(\Omega) := W^{s,2}(\Omega)$, $\|\cdot\|_{s,\Omega} := \|\cdot\|_{s,2,\Omega}$ y $|\cdot|_{s,\Omega} := |\cdot|_{s,p,\Omega}$.

El espacio de funciones cuadrado integrables con media nula en Ω será denotado como $L^2_0(\Omega)$ y viene dado por

$$L^2_0(\Omega) = \left\{ \psi \in L^2(\Omega) : \quad \int_\Omega \psi = 0 \right\}. \tag{3.1}$$

Recordamos que el operador traza usual $\gamma_0 : H^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\Gamma)$ es lineal y acotado. En particular, existe $C_{\mathrm{tr}} > 0$ tal que

$$\|\gamma_0(\psi)\|_{0,\Gamma} =: \|\psi\|_{0,\Gamma} \leq C_{\mathrm{tr}} \|\psi\|_{1,\Omega} \quad \forall \psi \in H^1(\Omega)\,. \tag{3.2}$$

También, denotamos y definimos los subespacios cerrados del Hilbert $H^1(\Omega)$

$$H^1_{\Gamma_{\mathrm{D}}}(\Omega) = \left\{ \psi \in H^1(\Omega) : \quad \psi\big|_{\Gamma_{\mathrm{D}}} = \gamma_0(\psi)\big|_{\Gamma_{\mathrm{D}}} = 0 \right\}, \tag{3.3}$$

$$H^1_0(\Omega) = \left\{ \psi \in H^1(\Omega) : \quad \psi\big|_{\Gamma} = \gamma_0(\psi) = 0 \right\}, \tag{3.4}$$

en los cuales, de acuerdo a la desigualdad de Fridrichs-Poincaré, se cumple que existe una constante $C_{\mathrm{FP}} > 0$, dependiente de Ω, tal que

$$\|\psi\|_{1,\Omega} \leq C_{\mathrm{FP}} |\psi|_{1,\Omega} \quad \forall\, \psi \in H^1_0(\Omega) \quad \text{o} \quad \forall\, \psi \in H^1_{\Gamma_{\mathrm{D}}(\Omega)}\,. \tag{3.5}$$

También, consideraremos los espacios de Hilbert constituido por funciones a valores vectoriales siguientes

$$\boldsymbol{H}(\mathrm{div}\,,\Omega) := \left\{\mathbf{w} \in [L^2(\Omega)]^d \;:\; \qquad \mathrm{div}\;\mathbf{w} \in L^2(\Omega)\right\},$$

$$\boldsymbol{H}_0(\mathrm{div}\,,\Omega) := \left\{\mathbf{w} \in \boldsymbol{H}(\mathrm{div}\,,\Omega) \;:\; \qquad \mathbf{w}\cdot\mathbf{n} = 0 \quad \text{sobre} \quad \Gamma\right\},$$

$$\boldsymbol{H}_0(\mathrm{div}^{\,0},\Omega) := \left\{\mathbf{w} \in \boldsymbol{H}_0(\mathrm{div}\,,\Omega) \;:\; \qquad \mathrm{div}\;\mathbf{w} = 0 \quad \text{en} \quad \Omega\right\}.$$

Por otro lado, la desigualdad de Hölder generalizada establece que si $u \in L^p(\Omega)$ y $v \in L^q(\Omega)$, con p y q conjugados de Hölder, es decir, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$ entonces se cumple que $uv \in L^r(\Omega)$ y

$$||uv||_{0,r,\Omega} \leq \|u\|_{0,p,\Omega}\|v\|_{0,q,\Omega}. \tag{3.6}$$

Finalmente, recordamos la inclusión de Sobolev $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ la cual es válida para $1 \leq q \leq \infty$ si $d = 2$ y $1 \leq q \leq 6$ cuando $d = 3$. Esto particularmente, significa que existe una constante positiva $C_{Sob} > 0$, dependiendo únicamente del dominio, tal que

$$\|\psi\|_{0,q,\Omega} \;\leq\; C_{\mathrm{Sob}}\|\psi\|_{1,\Omega} \quad \text{for } q \in [1,6]. \tag{3.7}$$

Hipótesis sobre los datos. En cada punto genérico $\mathbf{x} = (x_i)_{1\leq i\leq d} \in \Omega$, denotaremos por $\mathbb{K} = (k_{ij}(\mathbf{x}))_{1\leq i,j\leq d}$ a un tensor continuo que representa la permeabilidad del dominio, para el cual asumimos que existen constantes reales positivas $\kappa_0, \kappa_1, \alpha_{\mathbb{K}}$ y $\tilde{\alpha}_{\mathbb{K}}$ tales que

$$\begin{gathered} k_0 \leq \Big|\Big|\mathbb{K}(\mathbf{x})\Big|\Big|, \Big|\Big|\mathbb{K}^{-1}(\mathbf{x})\Big|\Big| \leq k_1 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \\ \mathbb{K}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{v}^t\mathbb{K}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{v} \geq \alpha_{\mathbb{K}}|\mathbf{v}|^2 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^d \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \\ \mathbb{K}(\mathbf{x})\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{v}^t\mathbb{K}(\mathbf{x})\mathbf{v} \geq \tilde{\alpha}_{\mathbb{K}}|\mathbf{v}|^2 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^d, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega. \end{gathered} \tag{3.8}$$

Suponemos que la viscosidad del fluido es una constante $\mu > 0$ y la porosidad del medio es denotada por una constante $\rho > 0$. Además, consideraremos funciones no lineales $\vartheta := \vartheta(\cdot)$ y $\eta := \eta(\cdot)$ dependientes de la concentración que se asumen acotadas y Lipschitz-continuas sobre Ω, es decir, existen constantes reales positivas $\vartheta_1, \vartheta_2, \eta_1, \eta_2, L_\vartheta$ y L_η tales que

$$\begin{aligned} \vartheta_1 \leq \vartheta(s) \leq \vartheta_2 \quad \text{y} \quad \eta_1 \leq \eta(s) \leq \eta_2 \quad \forall s \in \mathbb{R}, \\ |\vartheta(s) - \vartheta(t)| \leq L_\vartheta |s-t| \quad \text{y} \quad \big|\eta(s) - \eta(t)\big| \leq L_\eta |s-t| \quad \forall s,t \in \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{3.9}$$

Por su parte, $\mathbf{g}$ denota el vector constante en dirección a la gravedad y $\mathbf{f}$ una función definida en Ω. La norma $\|\cdot\|$, sin subíndices, se utilizará para denotar la norma natural de un elemento en cualquier espacio producto o de un operador. Una constante positiva genérica se denotará por C que, a menos que se indique, es independiente de cualquier parámetro de malla y de datos.

3.2. El modelo de flujo acoplado con transporte y su forma débil

El problema que nos interesamos en estudiar está dado por encontrar la velocidad $\mathbf{u} = (u_i)_{1\leq i \leq d} : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^d$, la presión $p : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ y la concentración $\phi : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ de una cierta sustancia en un fluido confinado en un medio poroso Ω tal que

$$\begin{gathered} \mathbb{K}^{-1}\mathbf{u} - \mu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \phi \mathbf{f} \qquad \text{en} \quad \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad \text{en} \quad \Omega, \\ \rho\phi - \operatorname{div}(\vartheta(\phi)\nabla\phi - \phi\mathbf{u} - \eta(\phi)\mathbf{g}) = 0 \qquad \text{en} \quad \Omega, \\ \mathbf{u} = 0 \qquad \text{sobre} \quad \Gamma, \quad \phi = 0 \qquad \text{sobre} \quad \Gamma_{\mathrm{D}}, \quad \frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{n}} = 0 \qquad \text{sobre} \quad \Gamma_{\mathrm{N}}. \end{gathered} \tag{3.10}$$

Acá, los datos $\mathbb{K}$, μ, , ρ, $\vartheta = \vartheta(\cdot)$, $\eta = \eta(\cdot)$ y $\boldsymbol{g}$ son los especificados en la subsección precedente y $\Delta(\cdot)$, $\nabla(\cdot)$ y $\operatorname{div}(\cdot)$ son los operadores diferenciales lineales usuales conocidos como el Laplaciano, el gradiente y la divergencia, respectivamente. Mencionamos que el sistema de ecuaciones diferenciales parciales (3.10) es el resultado de un acoplamiento entre las ecuaciones de Darcy (primera y segunda ecuación de (3.10)) y una ecuación de transporte no lineal (tercera ecuación de (3.10)) que involucra términos de reacción, difusión y advección del campo ϕ con velocidad convectiva dada por la propia velocidad del fluido.

Nos proponemos buscar la eventual solución débil $\mathbf{u}$ para (3.10) en el espacio $[H_0^1(\Omega)]^d$ (ver (3.4)), por la condición impuesta sobre Γ, el campo escalar de presión p en el espacio $L_0^2(\Omega)$ (ver (3.1)) y el campo escalar de concentración ϕ (ver (3.3)) en el espacio $H^1_{\Gamma_\mathrm{D}}(\Omega)$. De acuerdo a lo anterior, para obtener una formulación variacional de (3.10) multiplicamos las ecuaciones apropiadamente por funciones test $\mathbf{v} \in [H_0^1(\Omega)]$, $q \in L_0^2(\Omega)$ y $\psi \in H^1_{\Gamma_\mathrm{D}}(\Omega)$, integramos sobre el dominio Ω, y utilizando fórmulas de integración por partes junto a las condiciones de frontera, obtenemos la siguiente formulación débil: Encontrar $(\mathbf{u}, p, \phi) \in [H_0^1(\Omega)]^d \times L_0^2(\Omega) \times H^1_{\Gamma_\mathrm{D}}(\Omega)$ tal que

$$
\begin{aligned}
\mathscr{A}^F(\mathbf{u},\mathbf{v}) \,+\, \mathscr{B}(\mathbf{v},p) &\;=\; \mathscr{F}(\phi;\mathbf{v}),\\
\mathscr{B}(\mathbf{u},q) &\;=\; 0\,,\\
\mathscr{A}^T(\phi;\phi,\psi) \,+\, \mathscr{C}(\mathbf{u};\phi,\psi) &\;=\; \mathscr{G}(\phi;\psi),
\end{aligned} \tag{3.11}
$$

para todo $(\mathbf{v}, q, \psi) \in [H_0^1(\Omega)]^d \times L_0^2(\Omega) \times H^1_{\Gamma_\mathrm{D}}(\Omega)$. Donde, dado $\varphi \in H^1(\Omega)$ las formas bilineales $\mathscr{A}^F : [H_0^1(\Omega)]^d \times [H_0^1(\Omega)]^d \to \mathbb{R}$ y $\mathscr{A}^T := \mathscr{A}^T(\varphi;\cdot,\cdot) : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ están dadas por

$$
\mathscr{A}^F(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \int_\Omega \mathbb{K}^{-1}\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} \,+\, \mu\int_\Omega \nabla\mathbf{u} : \nabla\mathbf{v}\,, \tag{3.12}
$$

$$
\mathscr{A}^T(\varphi;\phi,\psi) = \rho\int_\Omega \phi\psi \,+\, \int_\Omega \vartheta(\varphi)\nabla\phi\cdot\nabla\psi\,, \tag{3.13}
$$

respectivamente. La forma $\mathscr{B} : [H_0^1(\Omega)]^d \times L_0^2(\Omega) \to \mathbb{R}$, asociada con el operador divergencia, se define por

$$\mathscr{B}(\mathbf{v}, q) = -\int_\Omega q \,\mathrm{div}\; \mathbf{v}\,. \tag{3.14}$$

A su vez, definimos kernel de $\mathscr{B}$ como

$$Ker(\mathscr{B}) = \Big\{ \mathbf{v} \in [H^1(\Omega)]^d : \int_\Omega q \,\mathrm{div}\, \mathbf{v} = 0 \quad \forall q \in L^2_0(\Omega) \Big\}. \tag{3.15}$$

Por su parte, dado $\mathbf{w} \in [H^1_0(\Omega)]^d$ la forma $\mathscr{C} := \mathscr{C}(\mathbf{w}; \cdot, \cdot) : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ está dada por:

$$\mathscr{C}(\mathbf{w}; \phi, \psi) = \int_\Omega (\mathbf{w} \cdot \nabla \phi)\psi \tag{3.16}$$

Finalmente, dada una función $\varphi \in H^1(\Omega)$, los funcionales $\mathscr{F} := \mathscr{F}(\varphi; \cdot) : [H^1_0(\Omega)]^d \to \mathbb{R}$ y $\mathscr{G} : \mathscr{G}(\varphi; \cdot) : H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ están dados por:

$$\mathscr{F}(\varphi; \mathbf{v}) = \int_\Omega \varphi \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \quad \text{y} \quad \mathscr{G}(\varphi; \psi) = \int_\Omega \nabla \psi \cdot \eta(\varphi) \boldsymbol{g} - \int_{\Gamma_\mathrm{N}} \psi \eta(\varphi) \boldsymbol{g} \cdot \mathbf{n} \tag{3.17}$$

Los siguientes lemas esteblecen las principales propiedades de las formas (3.12)-(3.17) involucradas en la formulación variacional (3.11). Comenzaremos con las formas $\mathscr{A}^F(\cdot, \cdot)$ y $\mathscr{A}^T(\varphi; \cdot, \cdot)$.

Lema 3.2.1. *Las formas* $\mathscr{A}^F(\cdot, \cdot) : [H^1_0(\Omega)]^d \times [H^1_0(\Omega)]^d \to \mathbb{R}$ *y* $\mathscr{A}^T(\varphi;\, \cdot, \cdot) : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ *(con* $\varphi \in H^1(\Omega)$ *dado) definidas en* (3.12) *y* (3.13)*, son bilineales, acotadas y coercivas. Más precisamente, existen* $\|\mathscr{A}^F\| = \text{máx}\{k_1, \mu\} > 0$, $\|\mathscr{A}^T\| := \text{máx}\{\rho, \vartheta_2\} > 0$, $\alpha_F := \text{mín}\{\alpha_\mathbb{K}, \mu\} > 0$ *y* $\alpha_T := \text{mín}\{\rho, \vartheta_1\} > 0$*, tales que*

$$\begin{aligned}
\Big|\mathscr{A}^F(\mathbf{u}, \mathbf{v})\Big| &\leq \|\mathscr{A}^F\|\, \|\mathbf{u}\|_{1,\Omega} \|\mathbf{v}\|_{1,\Omega} \quad \forall\, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in [H^1(\Omega)]^d\,, \\
\Big|\mathscr{A}^T(\varphi; \phi, \psi)\Big| &\leq \|\mathscr{A}^T\|\, \|\phi\|_{1,\Omega} \|\psi\|_{1,\Omega} \quad \forall\, \phi, \psi \in H^1(\Omega)\,, \\
\mathscr{A}^F(\mathbf{v}, \mathbf{v}) &\geq \alpha_F \|\mathbf{v}\|^2_{1,\Omega} \quad \forall\, \mathbf{v} \in [H^1(\Omega)]^d\,, \\
\mathscr{A}^T(\varphi; \psi, \psi) &\geq \alpha_T \|\psi\|^2_{1,\Omega} \quad \forall\, \psi \in H^1(\Omega)\,.
\end{aligned}$$

Demostración. Empezaremos por probar que la forma $\mathscr{A}^F$ es bilineal. Para la primera componente, sean $\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{v} \in [H^1(\Omega)]^d$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ entonces por linealidad del operador gradiente y la integral se tiene que

$$\begin{aligned}
\mathscr{A}^F(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{w}, \mathbf{v}) &= \int_\Omega \mathbb{K}^{-1}(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{w}) \cdot \mathbf{v} + \mu \int_\Omega \nabla(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{w}) : \nabla\mathbf{v} \\
&= \alpha \int_\Omega \mathbb{K}^{-1}\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \beta \int_\Omega \mathbb{K}^{-1}\mathbf{w} \cdot \mathbf{v} + \alpha\mu \int_\Omega \nabla\mathbf{u} : \nabla\mathbf{v} + \beta\mu \int_\Omega \nabla\mathbf{w} : \nabla\mathbf{v} \\
&= \alpha\Big[\int_\Omega \mathbb{K}^{-1}\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mu \int_\Omega \nabla\mathbf{u} : \nabla\mathbf{v}\Big] + \beta\Big[\int_\Omega \mathbb{K}^{-1}\mathbf{w} \cdot \mathbf{v} + \mu \int_\Omega \nabla\mathbf{w} : \nabla\mathbf{v}\Big] \\
&= \alpha\mathscr{A}^F(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \beta\mathscr{A}^F(\mathbf{w}, \mathbf{v}) \,.
\end{aligned}$$

En consecuencia, $\mathscr{A}^F(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{w}, \mathbf{v}) = \alpha\mathscr{A}^F(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \beta\mathscr{A}^F(\mathbf{w}, \mathbf{v})$. Para la segunda componente el procedimiento es análogo y entonces $\mathscr{A}^F$ es bilineal.

Considerando ahora que que μ es una constante positiva, $\|\mathbb{K}^{-1}\| \leq k_1$ por (3.8) y haciendo uso de la desigualdad triangular y la desigualdad de Cauchy-Schwarz se tiene para todo $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in [H^1(\Omega)]^d$

$$\begin{aligned}
\Big|\mathscr{A}^F(\mathbf{u}, \mathbf{v})\Big| &= \Big| \int_\Omega \mathbb{K}^{-1}\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mu \int_\Omega \nabla\mathbf{u} : \nabla\mathbf{v}\Big| \\
&\leq ||\mathbb{K}^{-1}||\Big| \int_\Omega \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}\Big| + \mu\Big| \int_\Omega \nabla\mathbf{u} : \nabla\mathbf{v}\Big| \\
&= ||\mathbb{K}^{-1}|||(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{0,\Omega}| + \mu|(\nabla\mathbf{u}, \nabla\mathbf{v})_{0,\Omega}| \\
&\leq k_1||\mathbf{u}||_{0,\Omega}||\mathbf{v}||_{0,\Omega} + \mu||\nabla\mathbf{u}||_{0,\Omega}||\nabla\mathbf{v}||_{0,\Omega} \\
&\leq \text{máx}\{k_1, \mu\}(||\mathbf{u}||_{0,\Omega}||\mathbf{v}||_{0,\Omega} + ||\nabla\mathbf{u}||_{0,\Omega}||\nabla\mathbf{v}||_{0,\Omega}) \\
&\leq \text{máx}\{k_1, \mu\}\big(||\mathbf{u}||^2_{0,\Omega}|| + ||\nabla\mathbf{u}||^2_{0,\Omega}\big)^{1/2}\big(||\mathbf{v}||^2_{0,\Omega}|| + ||\nabla\mathbf{v}||^2_{0,\Omega}\big)^{1/2} \\
&\leq \text{máx}\{k_1, \mu\}||\mathbf{u}||_{1,\Omega}||\mathbf{v}||_{1,\Omega} = ||\mathscr{A}^F||\,||\mathbf{u}||_{1,\Omega}||\mathbf{v}||_{1,\Omega} \,.
\end{aligned}$$

$$\therefore \quad \Big|\mathscr{A}^F(\mathbf{u}, \mathbf{v})\Big| \leq ||\mathscr{A}^F||\,||\mathbf{u}||_{1,\Omega}||\mathbf{v}||_{1,\Omega} \quad \text{donde} \quad ||\mathscr{A}^F|| = \text{máx}\{k_1, \mu\}.$$

La coercividad de $\mathscr{A}^F$ se obtiene utilizando la condición presente en (3.8). En efecto,

$$\begin{aligned}\mathscr{A}^F(\mathbf{v},\mathbf{v}) &= \int_\Omega \mathbb{K}^{-1}\mathbf{v}\mathbf{v} + \mu\int_\Omega \nabla\mathbf{v} : \nabla\mathbf{v} \geq \int_\Omega \alpha_{\mathbb{K}}|\mathbf{v}|^2 + \mu\int_\Omega \nabla\mathbf{v} : \nabla\mathbf{v} \\ &= \alpha_{\mathbb{K}}\int_\Omega |\mathbf{v}|^2 + \mu\int_\Omega \nabla\mathbf{v} : \nabla\mathbf{v} = \alpha_{\mathbb{K}}||\mathbf{v}||_{0,\Omega}^2 + \mu||\nabla\mathbf{v}||_{0,\Omega}^2 \\ &\geq \text{mín}\{\alpha_{\mathbb{K}},\mu\}\left[||\mathbf{v}||_{0,\Omega}^2 + ||\nabla\mathbf{v}||_{0,\Omega}^2\right] = \alpha_F||\mathbf{v}||_{1,\Omega}^2,\end{aligned}$$

donde $\alpha_F := \text{mín}\{\alpha_{\mathbb{K}},\mu\} > 0$ entonces satisface $\mathscr{A}^F(\mathbf{v},\mathbf{v}) \geq \alpha_F||\mathbf{v}||_{1,\Omega}^2$ para todo $\mathbf{v} \in [H^1(\Omega)]^d$. Procedemos a continuación a demostrar que la forma $\mathscr{A}^T$ es bilineal. Se prueba la linealidad para la primera componente ya que para la segunda componente el procedimiento es análogo. Sean entonces $\phi, \psi, \bar{\phi} \in H^1(\Omega)$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, se tiene por linealidad del operador gradiente y de la integral que

$$\begin{aligned}\mathscr{A}^T(\varphi;\alpha\phi+\beta\bar{\phi},\psi) &= \rho\int_\Omega(\alpha\phi+\beta\bar{\phi})\psi + \int_\Omega \vartheta(\varphi)\nabla(\alpha\phi+\beta\bar{\phi})\cdot\nabla\psi \\ &= \alpha\rho\int_\Omega \phi\psi + \beta\rho\int_\Omega \bar{\phi}\psi + \alpha\int_\Omega \vartheta(\varphi)\nabla\phi\cdot\nabla\psi + \beta\int_\Omega \vartheta(\varphi)\nabla\bar{\phi}\cdot\nabla\psi \\ &= \alpha\Big[\rho\int_\Omega \phi\psi \int_\Omega \vartheta(\varphi)\nabla\phi\cdot\nabla\psi\Big] + \beta\Big[\rho\int_\Omega \bar{\phi}\psi + \int_\Omega \vartheta(\varphi)\nabla\bar{\phi}\cdot\nabla\psi\Big].\end{aligned}$$

$$\therefore \mathscr{A}^T(\varphi;\alpha\phi+\beta\bar{\phi},\psi) = \alpha\mathscr{A}^T(\varphi;\phi,\psi) + \beta\mathscr{A}^T(\varphi;\bar{\phi},\psi).$$

Para el acotamiento de $\mathscr{A}^T(\varphi,\cdot,\cdot)$ se hace uso del hecho que $\vartheta(\cdot)$ es una función acotada, de acuerdo a lo proporcionado en (3.9). Además, usando desigualdad triangular y desigualdad de Cauchy-Schwarz se consigue que

$$
\begin{aligned}
\Big|\mathscr{A}^T(\varphi;\phi,\psi)\Big| &= \Big|\rho\int_\Omega \phi\psi + \int_\Omega \vartheta(\varphi)\nabla\phi\cdot\nabla\psi\Big| \\
&\leq \Big|\rho\int_\Omega \phi\psi\Big| + \Big|\int_\Omega \vartheta(\varphi)\nabla\phi\cdot\nabla\psi\Big| \leq \rho\Big|\int_\Omega \phi\psi\Big| + \vartheta_2\Big|\int_\Omega \nabla\phi\cdot\nabla\psi\Big| \\
&= \rho|(\phi,\psi)_{0,\Omega}| + \vartheta_2|(\nabla\phi,\nabla\psi)_{0,\Omega}| \leq \rho||\phi||_{0,\Omega}||\psi||_{0,\Omega} + \vartheta_2||\nabla\phi||_{0,\Omega}||\nabla\psi||_{0,\Omega} \\
&\leq \text{máx}\{\rho,\vartheta_2\}\big(\|\phi\|^2_{0,\Omega} + \|\nabla\phi\|^2_{0,\Omega})^{1/2}(\|\psi\|^2_{0,\Omega} + \|\nabla\psi\|^2_{0,\Omega}\big)^{1/2} \\
&= \|\mathscr{A}^T\|||\phi||_{1,\Omega}||\psi||_{1,\Omega}\,.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, existe $\|\mathscr{A}^T\| := \text{máx}\{\rho,\vartheta_2\} > 0$ tal que

$$
\Big|\mathscr{A}^T(\varphi;\phi,\psi)\Big| \leq \|\mathscr{A}^T\|\,\|\phi\|_{1,\Omega}\|\psi\|_{1,\Omega} \quad \forall\,\phi,\psi\in H^1(\Omega).
$$

Finalmente, para la coercividad de $\mathscr{A}^T(\varphi,\cdot,\cdot)$ tomamos en cuenta la desigualdad para $\vartheta(\varphi)$ en (3.9), con lo cual

$$
\begin{aligned}
\mathscr{A}^T(\varphi;\psi,\psi) &= \rho\int_\Omega \psi\psi + \int_\Omega \vartheta(\varphi)\nabla\psi\nabla\psi \geq \rho\int_\Omega \psi\psi + \int_\Omega \vartheta_1\nabla\psi\nabla\psi \\
&= \rho(\psi,\psi) + \vartheta_1(\nabla\psi,\nabla\psi) = \rho||\psi||^2_{0,\Omega} + \vartheta_1||\nabla\psi||^2_{0,\Omega} \\
&\geq \text{mín}\{\rho,\vartheta_1\}\Big[||\psi||^2_{0,\Omega} + ||\nabla\psi||^2_{0,\Omega}\Big] = \alpha_T||\psi||^2_{1,\Omega}\,,
\end{aligned}
$$

donde $\alpha_T := \text{mín}\{\rho,\vartheta_1\} > 0$. □

Lema 3.2.2. *La forma* $\mathscr{B} : [H^1_0(\Omega)]^d \times L^2_0(\Omega) \to \mathbb{R}$ *definida en* (3.14) *es bilineal, acotada y satisface la condición inf-sup*

$$
\sup_{\substack{\mathbf{v}\in[H^1(\Omega)]^d \\ \mathbf{v}\neq\mathbf{0}}} \frac{\mathscr{B}(\mathbf{v},q)}{\|\mathbf{v}\|_{1,\Omega}} \;\geq\; \beta\,\|q\|_{L^2(\Omega)} \qquad \forall\,q\in L^2_0(\Omega)\,, \tag{3.18}
$$

para alguna constante $\beta > 0$.

Demostración. Se probará la bilinealidad de la forma $\mathscr{B}$ haciendo uso de la linealidad del operador divergencia y de la integral. Para la primera componente, sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in [H^1(\Omega)]^d$ y $q \in L_0^2(\Omega)$ se tiene

$$\begin{aligned}\mathscr{B}(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}, q) &= -\int_\Omega q\,\mathrm{div}\,(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) = -\int_\Omega q\,(\alpha\mathrm{div}\,\mathbf{u} + \beta\,\mathrm{div}\,\mathbf{v}) \\ &= -\Big[\alpha\int_\Omega q\,\mathrm{div}\,\mathbf{u} + \beta\int_\Omega q\,\mathrm{div}\,\mathbf{v}\Big] - \alpha\int_\Omega q\,\mathrm{div}\,\mathbf{u} - \beta\int_\Omega q\,\mathrm{div}\,\mathbf{v} \\ &= \alpha\mathscr{B}(\mathbf{u}, q) + \beta\mathscr{B}(\mathbf{v}, q).\end{aligned}$$

Ahora, respecto a la segunda componente, sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\mathbf{v} \in [H^1(\Omega)]^d$ y $p, q \in L_0^2(\Omega)$. Entonces,

$$\begin{aligned}&\mathscr{B}(\mathbf{v}, \alpha p + \beta q) = -\int_\Omega (\alpha p + \beta q)\mathrm{div}\,\mathbf{v} = -\int_\Omega (\alpha p\,\mathrm{div}\,\mathbf{v} + \beta q\,\mathrm{div}\,\mathbf{v}) \\ &-\alpha\int_\Omega p\,\mathrm{div}\,\mathbf{v} - \beta\int_\Omega q\,\mathrm{div}\,\mathbf{v} = \alpha\mathscr{B}(\mathbf{v}, p) + \beta\mathscr{B}(\mathbf{v}, q).\end{aligned}$$

Para probar el acotamiento de la forma $\mathscr{B}$, por desigualdad de Cauchy-Schwarz se tiene que

$$\Big|\mathscr{B}(\mathbf{v}, q)\Big| = \Big|(q, \mathrm{div}\,\mathbf{v})_{L^2(\Omega)}\Big| \leq ||q||_{0,\Omega}||\mathrm{div}\,\mathbf{v}||_{0,\Omega} \tag{3.19}$$

Pero notar que al desarrollar el cuadrado de la suma y aplicar desigualdad de Young en los productos cruzados, combinar apropiadamente los términos semejantes y utilizar la definición de gradiente se consigue que

$$\begin{aligned}||\mathrm{div}\ \mathbf{v}||_{0,\Omega}^2 &= \int_\Omega (\mathrm{div}\,\mathbf{v})^2 = \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^d \frac{\partial v_i}{\partial x_i}\right)^2 = \int_\Omega \Big\{\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial v_d}{\partial x_d}\Big\}^2 \\ &= \int_\Omega \Big[\Big(\frac{\partial v_1}{\partial x_1}\Big)^2 + \frac{\partial v_1}{\partial x_1}\frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial v_1}{\partial x_1}\frac{\partial v_d}{\partial x_d}\Big] + \Big[\frac{\partial v_2}{\partial x_2}\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \Big(\frac{\partial v_2}{\partial x_2}\Big)^2 + \cdots + \frac{\partial v_2}{\partial x_2}\frac{\partial v_d}{\partial x_d}\Big] \\ &\quad + \cdots + \Big[\frac{\partial v_d}{\partial x_d}\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_d}{\partial x_d}\frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \cdots + \Big(\frac{\partial v_d}{\partial x_d}\Big)^2\Big]\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_\Omega \Big[\Big(\frac{\partial v_1}{\partial x_1}\Big)^2 + \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial v_1}{\partial x_1}\Big)^2 + \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial v_2}{\partial x_2}\Big)^2 + \cdots \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial v_1}{\partial x_1}\Big)^2 + \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial v_d}{\partial x_d}\Big)^2\Big] \\
&\qquad + \Big[\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial v_2}{\partial x_2}\Big)^2 + \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial v_1}{\partial x_1}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial v_2}{\partial x_2}\Big)^2 + \cdots + \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial v_2}{\partial x_2}\Big)^2 + \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial v_d}{\partial x_d}\Big)^2\Big] \\
&\qquad + \cdots + \Big[\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial v_d}{\partial x_d}\Big)^2 + \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial v_1}{\partial x_1}\Big)^2 + \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial v_d}{\partial x_d}\Big)^2 + \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial v_2}{\partial x_2}\Big)^2 + \cdots + \Big(\frac{\partial v_d}{\partial x_d}\Big)^2\Big] \\
&= \int_\Omega \Big[\Big(\frac{\partial v_1}{\partial x_1}\Big)^2 + \frac{1}{2}(d-1)\Big(\frac{\partial v_1}{\partial x_1}\Big)^2 + \frac{1}{2}(d-1)\Big(\frac{\partial v_1}{\partial x_1}\Big)^2\Big] \\
&\qquad + \cdots + \Big[\Big(\frac{\partial v_2}{\partial x_2}\Big)^2 + \frac{1}{2}(d-1)\Big(\frac{\partial v_2}{\partial x_2}\Big)^2 + \frac{1}{2}(d-1)\Big(\frac{\partial v_2}{\partial x_2}\Big)^2\Big] \\
&\qquad + \cdots + \Big[\Big(\frac{\partial v_d}{\partial x_d}\Big)^2 + \frac{1}{2}(d-1)\Big(\frac{\partial v_d}{\partial x_d}\Big)^2 + \frac{1}{2}(d-1)\Big(\frac{\partial v_d}{\partial x_d}\Big)^2\Big] \\
&= \int_\Omega d\Big(\frac{\partial v_1}{\partial x_1}\Big)^2 + d\Big(\frac{\partial v_2}{\partial x_2}\Big)^2 + \cdots + d\Big(\frac{\partial v_d}{\partial x_d}\Big)^2 \\
&\le d\int_\Omega \Big\{\Big[\Big(\frac{\partial v_1}{\partial x_1}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial v_1}{\partial x_2}\Big)^2 + \cdots + \Big(\frac{\partial v_1}{\partial x_d}\Big)^2\Big] + \Big[\Big(\frac{\partial v_2}{\partial x_1}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial v_2}{\partial x_2}\Big)^2 + \cdots + \Big(\frac{\partial v_2}{\partial x_d}\Big)^2\Big] \\
&\qquad + \cdots + \Big[\Big(\frac{\partial v_d}{\partial x_1}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial v_d}{\partial x_2}\Big)^2 + \cdots + \Big(\frac{\partial v_d}{\partial x_d}\Big)^2\Big]\Big\} \\
&\le d\int_\Omega |\nabla v_1|^2 + |\nabla v_2|^2 + \ldots + |\nabla v_d|^2 = d\int_\Omega |\nabla \mathbf{v}|^2 = d\,|\mathbf{v}|^2_{1,\Omega} = d\,\|\mathbf{v}\|^2_{1,\Omega}
\end{aligned}
$$

En consecuencia, se sigue que

$$
||\mathrm{div}\ \mathbf{v}||_{0,\Omega} \le \sqrt{d}\,||\mathbf{v}||_{1,\Omega}\,, \tag{3.20}
$$

por lo que al reemplazar (3.20) en (3.19), se deduce que

$$
\Big|\mathscr{B}(\mathbf{v},q)\Big| \le \sqrt{d}\|q\|_{0,\Omega}\|\mathbf{v}\|_{1,\Omega}\,.
$$

La condición inf-sup (3.18), es una propiedad estándar consecuencia de la sobreyectividad del operador divergencia. Efectivamente, de acuerdo con [10, Corolario 2.4], para cada $q \in L^2_0(\Omega)$ existe $\mathbf{v}_q \in [H^1_0(\Omega)]^d$ satisfaciendo $\mathrm{div}\,\mathbf{v}_q = -q$ y una constante $C > 0$ tal que $\|\mathbf{v}_q\|_{1,\Omega} \leq C\|q\|_{0,\Omega}$. Con lo cual,

$$\sup_{\substack{\mathbf{v}\in[H^1(\Omega)]^d \\ \mathbf{v}\neq\mathbf{0}}} \frac{\mathscr{B}(\mathbf{v},q)}{\|\mathbf{v}\|_{1,\Omega}} \geq \frac{\mathscr{B}(\mathbf{v}_q,q)}{\|\mathbf{v}_p\|_{1,\Omega}} = \frac{-\displaystyle\int_\Omega q \,\mathrm{div}\,\mathbf{v}_q}{\|\mathbf{v}_p\|_{1,\Omega}} = \frac{\displaystyle\int_\Omega q^2}{\|\mathbf{v}_p\|_{1,\Omega}} \geq \frac{\|q\|^2_{0,\Omega}}{C\|q\|_{0,\Omega}} = \frac{1}{C}\|q\|_{0,\Omega}$$

y entonces $\beta = \frac{1}{C}$. □

Lema 3.2.3. *$\mathscr{C} : [H^1(\Omega)]^d \times H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ (cf. (3.16)), es forma trilinear acotada. Además $\mathscr{C}$ satisface la propiedad de antisimetría*

$$\mathscr{C}(\mathbf{w};\phi,\psi) = -\mathscr{C}(\mathbf{w};\phi,\psi) \tag{3.21}$$

para todo $\mathbf{w} \in \boldsymbol{H}_0(\mathrm{div}^{\,0},\Omega)$, $\phi,\psi \in H^1(\Omega)$.

Demostración. Se prueba que $\mathscr{C}$ es acotada haciendo uso de desigualdad triangular, desigualdad de Hölder (3.6) e inclusiones de Sobolev (3.7) tal como se aprecia a continuación

$$\begin{aligned}
\big|\mathscr{C}(\mathbf{w};\phi,\psi)\big| &= \Big|\int_\Omega (\mathbf{w}\cdot\nabla\phi)\psi\Big| = \Big|\int_\Omega \sum_{i=1}^d (w_i \frac{\partial\phi}{\partial x_i})\psi\Big| = \Big|\sum_{i=1}^d \int_\Omega w_i \frac{\partial\phi}{\partial x_i}\psi\Big| \\
&\leq \sum_{i=1}^d ||w_i||_{0,4,\Omega}||\frac{\partial\phi}{\partial x_i}||_{0,\Omega}||\psi||_{0,4,\Omega} \leq C_{sob}\sum_{i=1}^d ||w_i||_{1,\Omega}||\frac{\partial\phi}{\partial x_i}||_{2,\Omega}||\psi||_{1,\Omega} \\
&= C_{sob}\big(||w_1||^2_{1,\Omega} + ||w_2||^2_{1,\Omega} + ... + ||w_d||^2_{1,\Omega}\big)^{1/2}\times \\
&\quad \times\Big(||\tfrac{\partial\phi}{\partial x_1}||^2_{L^2(\Omega)} + ||\tfrac{\partial\phi}{\partial x_2}||^2_{0,\Omega} + ... + ||\tfrac{\partial\phi}{\partial x_d}||^2_{0,\Omega}\Big)^{1/2}||\psi||_{1,\Omega} \\
&= C_{sob}||\mathbf{w}||_{1,\Omega}||\nabla\phi||_{0,\Omega}||\psi||_{1,\Omega} \leq C_{sob}||\mathbf{w}||_{1,\Omega}||\phi||_{1,\Omega}||\psi||_{1,\Omega}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\mathscr{C}$ es acotada con constante $C_{sob}||\mathbf{w}||_{1,\Omega}$. En cuanto a la propiedad de anti-simetría, se considera ahora $\mathbf{w} \in \boldsymbol{H}_0(\mathrm{div}^{\,0},\Omega)$, por lo que div $\mathbf{w} = 0$ y $\mathbf{w}\big|_\Gamma = 0$.

Entonces, tras una integración por partes se deduce que

$$\begin{aligned}\mathscr{C}(\mathbf{w};\phi,\psi) &= \int_\Omega (\mathbf{w}\cdot\nabla\phi)\psi = \int_\Omega \psi\mathbf{w}\cdot\nabla\phi = \int_\Gamma \phi\psi\mathbf{w}\cdot\mathbf{n} - \int_\Omega \mathrm{div}\,(\psi\mathbf{w})\phi \\ &= -\int_\Omega [\psi\mathrm{div}\ \mathbf{w} + \nabla\psi\cdot\mathbf{w}]\phi = -\int_\Omega (\mathbf{w}\cdot\nabla\psi)\phi = -\mathscr{C}(\mathbf{w};\psi,\phi),\end{aligned}$$

como se quería demostrar. □

Lema 3.2.4. *Dado φ en $H^1(\Omega)$, los funcionales $\mathscr{F}(\varphi;\cdot) : [H^1(\Omega)]^d \longrightarrow \mathbb{R}$ y $\mathscr{G}(\varphi;\cdot) : H^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ (cf.* (3.17)*) son lineales y acotados.*

Demostración. Sean $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ y $\mathbf{u},\mathbf{v}\in[H^1(\Omega)]^d$. Haciendo uso de la linealidad de la integral se sigue que

$$\begin{aligned}\mathscr{F}(\varphi;\alpha\mathbf{u}+\beta\mathbf{v}) &= \int_\Omega \varphi\mathbf{f}\cdot(\alpha\mathbf{u}+\beta\mathbf{v}) = \int_\Omega (\alpha\varphi\mathbf{f}\cdot\mathbf{u}+\beta\varphi\mathbf{f}\cdot\mathbf{v}) \\ &= \alpha\int_\Omega \varphi\mathbf{f}\cdot\mathbf{u} + \beta\int_\Omega \varphi\mathbf{f}\cdot\mathbf{v} = \alpha\mathscr{F}(\varphi;\mathbf{u}) + \beta\mathscr{F}(\varphi;\mathbf{v}).\end{aligned}$$

Al cumplirse que $\mathscr{F}(\varphi;\alpha\mathbf{u}+\beta\mathbf{v}) = \alpha\mathscr{F}(\varphi;\mathbf{u})+\beta\mathscr{F}(\varphi;\mathbf{v})$, se prueba que el funcional $\mathscr{F}$ es lineal. Análogamente, se prueba la linealidad de $\mathscr{G}(\varphi;\cdot)$.

Para probar que el funcional $\mathscr{F}(\varphi;\cdot)$ es acotado se considerará la desigualdad de Hölder (3.6) y las inclusiones de Sobolev (3.7) tal como se detalla a continuación

$$\Big|\mathscr{F}(\varphi;\mathbf{v})\Big| = \Big|\int_\Omega \varphi\mathbf{f}\cdot\mathbf{v}\Big| \le ||\varphi||_{0,4,\Omega}||\mathbf{f}||_{0,\Omega}||\mathbf{v}||_{0,4,\Omega} \le C_{sob}||\varphi||_{1,\Omega}||\mathbf{f}||_{0,\Omega}||\mathbf{v}||_{1,\Omega} \tag{3.22}$$

Por lo tanto, $\mathscr{F}(\varphi;\cdot)$ es acotada con constante $C_{sob}||\varphi||_{1,\Omega}||\mathbf{f}||_{0,\Omega}$.

Respecto al acotamiento de $\mathscr{G}(\varphi;\cdot)$ se tiene por desigualdad triangular, desigualdad de Cauchy-Schwarz y de traza (3.2) que

$$
\begin{aligned}
\left|\mathscr{G}(\varphi;\psi)\right| &= \left|\int_\Omega \eta(\varphi)\boldsymbol{g}\cdot\nabla\psi - \int_{\Gamma_{\mathrm{N}}} \psi\eta(\varphi)\boldsymbol{g}\cdot\mathbf{n}\right| \\
&\leq \left|\int_\Omega \eta(\varphi)\boldsymbol{g}\cdot\nabla\psi\right| + \left|\int_{\Gamma_{\mathrm{N}}} \psi\eta(\varphi)\boldsymbol{g}\cdot\mathbf{n}\right| \\
&= |(\eta(\varphi)\boldsymbol{g},\nabla\psi)_{0,\Omega} + |(\psi,\eta(\varphi)\boldsymbol{g}\cdot\mathbf{n})_{0,\Gamma_N}| \\
&\leq ||\eta(\varphi)\boldsymbol{g}||_{0,\Omega}||\nabla\psi||_{0,\Omega} + ||\psi||_{0,\Gamma_N}||\eta(\varphi)\boldsymbol{g}\cdot\mathbf{n}||_{0,\Gamma_N} \\
&\leq \eta_2|\boldsymbol{g}||\Omega|^{1/2}||\psi||_{1,\Omega} + \eta_2|\boldsymbol{g}||\Gamma_{\mathrm{N}}|^{1/2}C_{tr}||\psi||_{1,\Omega} \\
&\leq \left[\eta_2|\boldsymbol{g}|(|\Omega|^{1/2+}C_{\mathrm{tr}}|\Gamma_{\mathrm{N}}|^{1/2})\right]||\psi|||_{1,\Omega}
\end{aligned}
\tag{3.23}
$$

Donde los términos $||\eta(\varphi)\boldsymbol{g}||_{0,\Omega}$ y $||\eta(\varphi)\boldsymbol{g}\cdot\mathbf{n}||_{0,\Gamma_{\mathrm{N}}}$ se acotaron de la siguiente manera

$$
||\eta(\varphi)\boldsymbol{g}||_{0,\Omega}^2 = \int_\Omega \eta(\varphi)\boldsymbol{g}\cdot\eta(\varphi)\boldsymbol{g} = \int_\Omega \eta(\varphi)^2|\boldsymbol{g}|^2 \leq \eta_2^2|\boldsymbol{g}|^2|\Omega|\,,
$$

con lo que $||\eta(\varphi)\boldsymbol{g}||_{0,\Omega} \leq \eta_2|\boldsymbol{g}||\Omega|^{1/2}$, y por su parte,

$$
\begin{aligned}
||\eta(\varphi)\boldsymbol{g}\cdot\mathbf{n}||_{0,\Gamma_{\mathrm{N}}}^2 &= \int_{\Gamma_{\mathrm{N}}} [\eta(\varphi)\boldsymbol{g}\cdot\mathbf{n}][\eta(\varphi)\boldsymbol{g}\cdot\mathbf{n}] = \int_{\Gamma_{\mathrm{N}}} \eta(\varphi)^2[\boldsymbol{g}\cdot\mathbf{n}]^2 \\
&\leq \eta_2^2\int_{\Gamma_{\mathrm{N}}} [\boldsymbol{g}\cdot\mathbf{n}]^2 \leq \eta_2^2\int_{\Gamma_{\mathrm{N}}} |\boldsymbol{g}|^2|\mathbf{n}|^2 = \eta_2^2|\boldsymbol{g}|^2|\Gamma_{\mathrm{N}}|\,,
\end{aligned}
$$

y asi $||\eta(\varphi)\boldsymbol{g}\cdot\mathbf{n}||_{0,\Gamma_{\mathrm{N}}} \leq \eta_2|\boldsymbol{g}||\Gamma_{\mathrm{N}}|^{1/2}$. □

3.3. Buen planteamiento de la formulación débil

En esta sección estableceremos resultados de existencia y unicidad para el problema variacional (3.11). Partimos por notar que en virtud de la segunda ecuación de (3.11) es evidente que la eventual solución $\mathbf{u}$ pertenece al kernel $\ker(\mathscr{B})$ de la forma bilineal $\mathscr{B}$. En este sentido, es decir, la formulación debil podemos reducirla en cuando a buscar $\mathbf{u}$ en $\ker(\mathscr{B})$ en lugar de buscar $[H_0^1(\Omega)]^d$. Así, nos enfocamos ahora en el problema reducido siguiente: Encontrar $(\mathbf{u}, \phi) \in \ker(\mathscr{B}) \times H^1_{\Gamma_D}(\Omega)$ tal que

$$\begin{aligned} \mathscr{A}^F(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \mathscr{F}(\phi; \mathbf{v}) \\ \mathscr{A}^T(\phi; \phi, \psi) + \mathscr{C}(\mathbf{u}; \phi, \psi) &= \mathscr{G}(\phi; \psi) \end{aligned} \tag{3.24}$$

$\forall \mathbf{v} \in \ker(\mathscr{B})$ y $\forall \psi \in H^1_{\Gamma_D}(\Omega)$. Notar que una vez garantizada la existencia de la velocidad $\mathbf{u}$ y la concentración ϕ, podemos garantizar existencia del campo de presiones p gracias a la condición inf-sup (3.18).

Para abordar el análisis de solubilidad de (3.24), debemos desacoplar y linealizar el mismo, lo cual se puede hacer a través de un operador de punto fijo que permita establecer resultados de existencia y unicidad. Esto es lo que se llevará a cabo en las siguientes subsecciones.

3.3.1. Problema reducido al Kernel

Dado $(\mathbf{w}, \varphi) \in \ker(\mathscr{B}) \times H^1_{\Gamma_{\mathrm{D}}}(\Omega)$, introducimos la versión linealizada y desacoplada de (3.24): Encontrar $\mathbf{u}, \phi \in Ker(\mathscr{B}) \times H^1_{\Gamma_{\mathrm{D}}}(\Omega)$ tal que

$$\begin{gathered} \mathscr{A}^F(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathscr{F}(\varphi; \mathbf{v}), \\ \mathscr{A}^T(\varphi; \phi, \psi) + \mathscr{C}(\mathbf{w}; \phi, \psi) = \mathscr{G}(\varphi; \psi). \end{gathered} \tag{3.25}$$

para todo $\mathbf{v}, \psi \in Ker(\mathscr{B}) \times H^1_{\Gamma_{\mathrm{D}}}(\Omega)$. El siguiente resultado establece estimados a priori para las soluciones eventuales del problema (3.25).

Lema 3.3.1. *Cualquier solución* $(\mathbf{u}, \phi) \in Ker(\mathscr{B}) \times H^1_{\Gamma_{\mathrm{D}}}(\Omega)$ *de* (3.25) *satisface los siguientes estimados a priori*

$$||\mathbf{u}||_{1,\Omega} \leq r_1 \quad y \quad ||\phi||_{1,\Omega} \leq r_2 \tag{3.26}$$

donde

$$r_1 = \eta_2 \alpha_F^{-1} \alpha_T^{-1} C_{sob} ||\mathbf{f}||_{0,\Omega} |\boldsymbol{g}| (|\Omega|^{1/2} + C_{\mathrm{tr}} |\Gamma_{\mathrm{N}}|^{1/2}) \tag{3.27}$$

$$r_2 = \alpha_T^{-1} + \eta_2 |\boldsymbol{g}| (|\Omega|^{1/2} + C_{\mathrm{tr}} |\Gamma_{\mathrm{N}}|^{1/2})$$

Demostración. Suponemos que $(\mathbf{u}, \phi) \in \ker(\mathscr{B}) \times H^1_{\Gamma_{\mathrm{D}}}(\Omega)$ es solución del problema (3.25). Esto quiere decir que $(\mathbf{u}, \phi)$ satisface dicho problema. En particular,

$$\mathscr{A}^F(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathscr{F}(\varphi; \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \ker(\mathscr{B}).$$

Así, tomando $\mathbf{v} = \mathbf{u}$ y la cota (3.22) para el funcional $\mathscr{F}(\varphi; \cdot)$ se tiene

$$\alpha_F ||\mathbf{u}||^2_{1,\Omega} \leq \mathscr{A}^F(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \mathscr{F}(\varphi; \mathbf{v}) \leq C_{sob} ||\phi||_{1,\Omega} ||f||_{0,\Omega} ||\mathbf{u}||_{1,\Omega}$$

y al simplificar se consigue que

$$||\mathbf{u}||_{1,\Omega} \leq \alpha_F^{-1} C_{sob} ||\phi||_{1,\Omega} ||f||_{0,\Omega}.$$

Así, de manera análoga, como ϕ satisface $\mathscr{A}^T(\varphi; \phi, \psi) + \mathscr{C}(\mathbf{w}; \phi, \psi) = \mathscr{G}(\varphi; \psi) \quad \forall \psi \in H^1_{\Gamma_{\mathrm{D}}}(\Omega)$, en particular haciendo $\psi = \phi$ y usando la antisimetría de $\mathscr{C}$ (ver (3.21)) se tiene que $\mathscr{A}^T(\varphi; \phi, \phi) + \mathscr{C}(\mathbf{w}; \phi, \phi) = \mathscr{A}^T(\varphi; \phi, \phi) = \mathscr{G}(\varphi; \phi)$. Entonces, gracias a la coercividad de la forma $\mathscr{A}^T$ (ver (3.2)) y el acotamiento de $\mathscr{G}$ (ver (3.23)) se consigue que

$$\begin{aligned} \alpha_T ||\phi||^2_{1,\Omega} \leq \mathscr{A}^T(\varphi; \phi, \phi) &= \mathscr{G}(\varphi; \phi) \leq \eta_2 |\boldsymbol{g}| (|\Omega|^{1/2} + C_{\mathrm{tr}} |\Gamma_{\mathrm{N}}|^{1/2}) ||\phi||_{1,\Omega} \\ \alpha_T ||\phi||^2_{1,\Omega} &\leq \eta_2 |\boldsymbol{g}| (|\Omega|^{1/2} + C_{tr} |\Gamma_{\mathrm{N}}|^{1/2}) ||\phi||_{1,\Omega} \\ ||\phi||_{1,\Omega} &\leq \alpha_T^{-1} \eta_2 |\boldsymbol{g}| (|\Omega|^{1/2} + C_{tr} |\Gamma_{\mathrm{N}}|^{1/2}) \end{aligned}$$

Por lo anterior se tiene que

$$\begin{aligned} ||\mathbf{u}||_{1,\Omega} &\leq \eta_2 \alpha_F^{-1} \alpha_T^{-1} C_{sob} |\boldsymbol{g}| (|\Omega|^{1/2} + C_{tr} |\Gamma_{\mathrm{N}}|^{1/2}) ||\mathbf{f}||_{0,\Omega} =: r_1 \,, \\ ||\phi||_{1,\Omega} &\leq \alpha_T^{-1} \eta_2 |\boldsymbol{g}| (|\Omega|^{1/2} + C_{\mathrm{tr}} |\Gamma_{\mathrm{N}}|^{1/2}) =: r_2 \,, \end{aligned}$$

con r_1 y r_2 dados en (3.27), como se quería demostrar. □

3.3.2. Operador de punto fijo

Para establecer el buen planteamiento del problema (3.11), debemos reescribir el problema reducido al kernel (3.24) como uno de punto fijo en términos de operadores y esto es lo que haremos en esta subsección. Motivados por el Lema 3.3.1, definimos primeramente la bola

$$B := \Big\{ (v, \psi) \in \ker(\mathscr{B}) \times H^1_{\Gamma_{\mathrm{D}}}(\Omega) \} : \quad ||\mathbf{v}|| \leq r_1 \,, \;\; ||\psi|| \leq r_2 \Big\} \,, \tag{3.28}$$

donde r_1 y r_2 son las constantes dadas por (3.27). Se define entonces el operador

$$\begin{aligned} T : B \subseteq \ker(\mathscr{B}) \times H^1_{\Gamma_{\mathrm{D}}}(\Omega) &\longrightarrow \ker(\mathscr{B}) \times H^1_{\Gamma_{\mathrm{D}}}(\Omega) \\ (\mathbf{w}, \varphi) &\longmapsto T(\mathbf{w}, \varphi) = (\mathbf{u}, \phi), \end{aligned}$$

donde $(\mathbf{u}, \phi) \in Ker(\mathscr{B}) \times H^1_{\Gamma_{\mathrm{D}}}(\Omega)$ corresponde a la solución del problema (3.25). Es decir, dado $(\mathbf{w}, \varphi) \in \ker(\mathscr{B}) \times H^1_{\Gamma_{\mathrm{D}}}(\Omega)$, el par $(\mathbf{u}, \phi)$ satisface

$$A((\mathbf{w}, \varphi); (\mathbf{u}, \phi), (\mathbf{v}, \psi)) = F((\mathbf{w}, \varphi); (\mathbf{v}, \psi)) \qquad \forall (\mathbf{v}, \psi) \in \ker(\mathscr{B}) \times H^1_{\Gamma_{\mathrm{D}}}(\Omega) \,, \tag{3.29}$$

donde $A((\mathbf{w},\varphi);(\cdot,\cdot),(\cdot,\cdot))$ y $F((\mathbf{w},\varphi);\cdot)$ están dadas por

$$\begin{aligned} A((\mathbf{w},\varphi);(\mathbf{u},\phi),(\mathbf{v},\psi)) &= \mathscr{A}^F(\mathbf{u},\mathbf{v}) + \mathscr{A}^T(\varphi;\phi,\psi) + \mathscr{C}(\mathbf{w};\phi,\psi)\,, \\ F((\mathbf{w},\varphi);(\mathbf{v},\psi)) &= \mathscr{F}(\varphi;\mathbf{v}) + \mathscr{G}(\varphi;\psi)\,. \end{aligned}$$

El siguiente resultado establece que T es un operador que está bien definido.

Lema 3.3.2. *T está bien definido.*

Demostración. Para probar que T está bien definido debemos demostrar que el problema (3.29) está bien planteado, lo cual puede establecerse a través del Teorema de Lax-Milgram (ver Teorema 2.8.2 en el capítulo precedente). Necesitamos entonces ver que, para cada $(\mathbf{w},\varphi)\in B$ dado, A es bilineal, acotada y coerciva y F es lineal y acotado. En efecto, sean $(\mathbf{u},\phi),(\widetilde{\mathbf{u}},\widetilde{\phi})\in \ker(\mathscr{B})\times H^1_{\Gamma_{\mathrm{D}}}(\Omega)$ usando la bilinealidad de las formas $\mathscr{A}^F,\mathscr{A}^T(\varphi,\cdot,\cdot)$ y $\mathscr{C}(\mathbf{w};\cdot,\cdot)$

$$\begin{aligned} A((\mathbf{w},\varphi);\alpha(\mathbf{u},\phi)+\beta(\widetilde{\mathbf{u}},\widetilde{\phi}),(\mathbf{v},\psi)) &= A((\mathbf{w},\varphi);(\alpha\mathbf{u}+\beta\widetilde{\mathbf{u}},\alpha\phi+\beta\widetilde{\phi}),(\mathbf{v},\psi)), \\ &= \mathscr{A}^F(\alpha\mathbf{u}+\beta\widetilde{\mathbf{u}},\mathbf{v}) + \mathscr{A}^T(\varphi;\alpha\phi+\beta\widetilde{\phi},\psi) + \mathscr{C}(\mathbf{w};\alpha\phi+\beta\widetilde{\phi},\psi), \\ &= \alpha\mathscr{A}^F(\mathbf{u},\mathbf{v}) + \beta\mathscr{A}^F(\widetilde{\mathbf{u}},\mathbf{v}) + \alpha\mathscr{A}^T(\varphi;\phi,\psi) + \beta\mathscr{A}^T_\varphi(\widetilde{\phi},\psi) + \alpha\mathscr{C}(\mathbf{w};\phi,\psi) + \beta\mathscr{C}(\mathbf{w};\widetilde{\phi},\psi), \\ &= \alpha[\mathscr{A}^F(\mathbf{u},\mathbf{v}) + \mathscr{A}^T(\varphi;\phi,\psi) + \mathscr{C}(\mathbf{w};\phi,\psi)] + \beta[\mathscr{A}^F(\widetilde{\mathbf{u}},\mathbf{v}) + \mathscr{A}^T(\varphi;\widetilde{\phi},\psi) + \mathscr{C}(\mathbf{w};\widetilde{\phi},\psi)], \\ &= \alpha A((\mathbf{w},\phi);(\mathbf{u},\phi),(\mathbf{v},\psi)) + \beta A((\widetilde{\mathbf{u}},\phi),(\mathbf{v},\psi))\,. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la forma A es lineal en la primera componente. La linealidad en la segunda componente se demuestra de manera análoga.

Para estudiar el acotamiento de A, empleamos el acotamiento de las formas $\mathscr{A}^F$,

$\mathscr{A}^T(\varphi;\cdot,\cdot)$ y $\mathscr{C}(\mathbf{w};\cdot,\cdot)$ con lo que se deduce que

$$\begin{aligned}
&|A((\mathbf{w},\phi);(\mathbf{u},\phi),(\mathbf{v},\psi))| \leq |\mathscr{A}^F(\mathbf{u},\mathbf{v})| + |\mathscr{A}^T(\varphi;\phi,\psi)| + |\mathscr{C}(\mathbf{w};\phi,\psi)|,\\
&\leq ||\mathscr{A}^F||||\mathbf{u}||_{1,\Omega}||\mathbf{v}||_{1,\Omega} + ||\mathscr{A}^T||||\phi||_{1,\Omega}||\psi||_{1,\Omega} + C_{sob}||\mathbf{w}||_{1,\Omega}||\phi||_{1,\Omega}||\psi||_{1,\Omega},\\
&\leq \text{máx}\{||A^F||,||A^T||,C_{sob}||\mathbf{w}||_{1,\Omega}\}[||\mathbf{u}||_{1,\Omega}||\mathbf{v}||_{1,\Omega} + ||\phi||_{1,\Omega}||\psi||_{1,\Omega} + ||\phi||_{1,\Omega}||\psi||_{1,\Omega}],\\
&\leq 2\,\text{máx}\{||A^F||,||A^T||,C_{sob}||\mathbf{w}||_{1,\Omega}\}(||\mathbf{u}||^2_{1,\Omega} + ||\phi||^2_{1,\Omega})^{1/2}(||\mathbf{v}||^2_{1,\Omega} + ||\psi||^2_{1,\Omega})^{1/2},\\
&= 2\,\text{máx}\{||A^F||,||A^T||,C_{sob}||\mathbf{w}||_{1,\Omega}\}||(\mathbf{u},\phi)||\cdot||(\mathbf{v},\psi)||\,,
\end{aligned}$$

Se sigue que la forma bilineal A esta acotada en el espacio $\ker(\mathscr{B})\times H^1_{\Gamma_\mathrm{D}}$ con constante de acotamiento $2\,\text{máx}\{||A^F||,||A^T||,C_{sob}||\mathbf{w}||_{H^1(\Omega)}\}$.

A continuación, procedemos a demostrar que A es coerciva. En efecto, basta hacer uso de la coercividad de las formas $\mathscr{A}^F,\mathscr{A}^T(\varphi;\cdot,\cdot)$ y la antisimetría de $\mathscr{C}(\mathbf{w};\cdot,\cdot)$, siguiéndose que

$$\begin{aligned}
A((\mathbf{v},\psi),(\mathbf{v},\psi)) &= \mathscr{A}^F(\mathbf{v},\mathbf{v}) + \mathscr{A}^T_\varphi(\psi,\psi) + \mathscr{C}(\mathbf{w};\psi,\psi),\\
&\geq \alpha_F||\mathbf{v}||^2_{1,\Omega} + \alpha_T||\psi||^2_{1,\Omega} \geq \text{mín}\{\alpha_F,\alpha_T\}[||\mathbf{v}||^2_{1,\Omega} + ||\psi||^2_{1,\Omega}],\\
&= \alpha_A||(\mathbf{v},\psi)||^2\,,
\end{aligned}$$

donde $\alpha_A := \text{mín}\{\alpha_F,\alpha_T\}$. Por su parte, veamos a continuación que F es un elemento del dual de $\ker(\mathscr{B})\times H^1_{\Gamma_\mathrm{D}}(\Omega)$. Para tal fin, debemos chequear que F debe es un funcional lineal y acotada. Â´Por un lado, notar que

$$\begin{aligned}
&F((\alpha\mathbf{v}+\beta\widetilde{\mathbf{v}},\alpha\psi+\beta\widetilde{\psi})) = \mathscr{F}(\varphi;\alpha\mathbf{v}+\beta\widetilde{\mathbf{v}}) + \mathscr{G}(\varphi;\alpha\psi+\beta\widetilde{\psi}),\\
&= \alpha\mathscr{F}(\varphi;\mathbf{v}) + \beta\mathscr{F}(\varphi;\widetilde{\mathbf{v}}) + \alpha\mathscr{G}(\varphi;\psi) + \beta\mathscr{G}(\varphi;\widetilde{\psi}),\\
&= \alpha[\mathscr{F}(\varphi;\mathbf{v}) + \mathscr{G}(\varphi;\psi)] + \beta[\mathscr{F}(\varphi;\widetilde{\mathbf{v}} + \mathscr{G}(\varphi;\widetilde{\psi}))],\\
&= \alpha F((\mathbf{v},\psi)) + \beta F((\widetilde{\mathbf{v}},\widetilde{\psi}))\,,
\end{aligned}$$

y asi F es lineal. Finalmente, dado que F es combinación de los funcionales $\mathscr{F}$ y $\mathscr{G}$ que a su vez están acotados, de acuerdo al Lema 3.2.4, entonces se deduce que F

también está acotado. Más precisamente,

$$
\begin{aligned}
|F((\mathbf{v};\psi))| &= |\mathscr{F}(\varphi;\mathbf{v})+\mathscr{G}(\varphi;\psi)| \le |\mathscr{F}(\varphi;\mathbf{v})|+|\mathscr{G}(\varphi;\psi)|,\\
&\le C_{sob}||\varphi||_{1,\Omega}||\boldsymbol{f}||_{0,\Omega}||\mathbf{v}||_{1,\Omega}+[\eta_2|\boldsymbol{g}|(|\Omega|^{1/2}+C_{\mathrm{tr}}|\Gamma_N|^{1/2})]||\psi||_{1,\Omega},\\
&\le \text{máx}\{C_{sob}||\varphi||_{1,\Omega}||\boldsymbol{f}||_{0,\Omega},\eta_2|\boldsymbol{g}|(|\Omega|^{1/2}+C_{tr}|\Gamma_N|^{1/2})\}[||\mathbf{v}||_{1,\Omega}+||\psi||_{1,\Omega}],\\
&= \sqrt{2}\,\text{máx}\{C_{sob}r_2||\boldsymbol{f}||_{0,\Omega},\eta_2|\boldsymbol{g}|(|\Omega|^{1/2}+C_{tr}|\Gamma_N|^{1/2})\}||(\mathbf{v},\psi)||\,,
\end{aligned}
$$

donde se usó el hecho que $||\varphi||_{1,\Omega}\le r_2$ dado que $(\mathbf{w},\varphi)\in B$.

Por el teorema de Lax-Milgram (cf. Teorema 2.8.2), concluimos que existe una única solución $(\mathbf{u},\phi)\in \ker(\mathscr{B})\times H^1_{\Gamma_{\mathrm{D}}}(\Omega)$ del problema (3.29), para cada $(\mathbf{w},\varphi)$ dado en la bola $B\subseteq \ker(\mathscr{B})\times H^1_{\Gamma_{\mathrm{D}}}(\Omega)$. Esto permite, equivalentemente, asegurar el buen planteamiento del pdel operador T, para el cual $T(\mathbf{w},\varphi)=(\mathbf{u},\phi)$. Aún más, de la dependencia continua que provee el Teorema de Lax-Milgram, se puede deducir que

$$
\begin{aligned}
&\|(\mathbf{u},\phi)\| = \|T(\mathbf{w},\varphi)\|\\
&\le \frac{2\sqrt{2}}{\alpha_A}\,\text{máx}\left\{||A^F||,||A^T||,C_{sob}r_1,C_{sob}r_2||\boldsymbol{f}||_{0,\Omega},\eta_2|\boldsymbol{g}|(|\Omega|^{1/2}+C_{tr}|\Gamma_N|^{1/2})\right\},
\end{aligned}
$$

donde r_1 y r_2 están dados por (3.27) en el Lema 3.3.1. □

El siguiente resultado establece que el operador T está completamente incluido en (3.28).

Lema 3.3.3. *El operador* $T : B\subseteq Ker(\mathscr{B})\times H^1_{\Gamma_{\mathrm{D}}}(\Omega)\}\longrightarrow Ker(\mathscr{B})\times H^1_{\Gamma_{\mathrm{D}}}(\Omega)$ *satisface* $T(B)\subseteq B$.

Demostración. Dado $(\mathbf{w},\varphi)$, por Lema 3.3.2 que establece la buena definición del operador T, se cumple que existe un único $(\mathbf{u},\phi)\in Ker(\mathscr{B})\times H^1_{\Gamma_{\mathrm{D}}}(\Omega)$ para el cual

$$(\mathbf{u},\phi)=T(\mathbf{w},\varphi)\,.$$

lo cual a su vez, por la definición de T, es equivalente a decir que $(\mathbf{u}, \phi)$ satisface

$$\begin{aligned} \mathscr{A}^F(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \mathscr{F}(\varphi; \mathbf{v}) \\ \mathscr{A}^T(\varphi; \phi, \psi) + \mathscr{C}(\mathbf{w}; \phi, \psi) &= \mathscr{G}(\varphi; \psi). \end{aligned} \tag{3.30}$$

Tomando $\mathbf{v} = \mathbf{u}$ y $\psi = \phi$ en (3.30) y haciendo uso de los resultados de los Lemas 3.2.1 y 3.2.4 se sigue, por un lado que,

$$\alpha_F ||\mathbf{u}||_{1,\Omega}^2 \leq \mathscr{A}^F(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \mathscr{F}(\varphi; \mathbf{u}) \leq |\mathscr{F}(\varphi; \mathbf{u})| \leq C_{sob} ||\varphi||_{1,\Omega} ||f||_{0,\Omega} ||\mathbf{u}||_{1,\Omega},$$

por lo que al despejar y usar que $||\varphi||_{1,\Omega} \leq r_2$ se deduce que $||\mathbf{u}||_{1,\Omega} \leq \alpha_F^{-1} C_{sob} r_2 = r_1$. Por otro lado,

$$\alpha_T ||\phi||_{1,\Omega}^2 \leq \mathscr{A}^T(\varphi; \phi, \phi) + \mathscr{C}(\mathbf{w}; \phi, \phi) = \mathscr{G}(\varphi; \phi) \leq ||\mathscr{G}|| \cdot ||\phi||_{1,\Omega},$$

y al usar la cota para el funcional $\mathscr{G}$ y simplificar se llega a que $||\phi|| \leq r_2$. Finalmente, podemos entonces concluir que $(\mathbf{u}, \phi) \in B$ y de esta manera $T(B) \subseteq B$. $\square$

Sabiendo en este punto que T es un operador bien definido y que mapea la bola B, definida en (3.28), en sí misma, nuestro objetivo ahora será demostrar la existencia de un punto fijo de este operador. Para tal propósito emplearemos un caso particular del Principio de Leray–Schauder, conocido como Teorema de Schaefer.

Teorema 3.3.4. *Sea B un espacio de Banach and $L : B \longrightarrow B$ un operador continuo y compacto. Asuma que el conjunto*

$$\Big\{ x \in B : \quad x = \lambda\, L(x) \quad \textit{para algún } \lambda \in [0,1] \Big\},$$

es acotado. Entonces, L tiene al menos un punto fijo.

Comenzaremos demostrando que T satisface la condición de Lipschitz y, por lo tanto, es continuo (cf. ver Observación 2.4.4). En este punto, con el objetivo de estimar un término que aparece dentro de las estimaciones a causa de la no linealidad del problema, necesitaremos asumir una hipótesis de regularidad adicional que establecemos a continuación.

(H) Dado $(\mathbf{w},\varphi) \in Ker(\mathscr{B}) \times H^1_{\Gamma_D}(\Omega)$, la imagen $(\mathbf{u},\phi) = T(\mathbf{w},\varphi)$ cumple que $\phi \in H^1_{\Gamma_D}(\Omega) \cup H^{1+\varepsilon}(\Omega)$ con $\varepsilon \in (0,1)$ (resp. $\varepsilon \in (1/2,1)$) cuando $d=2$ (resp. cuando $d=3$) y existe $C_\varepsilon > 0$, independiente de $(\mathbf{w},\varphi)$, tal que

$$\|\phi\|_{1+\varepsilon,\Omega} \leq C_\varepsilon |\boldsymbol{g}|. \tag{3.31}$$

.

A propósito de lo anterior, si ∇_ε denota el operador gradiente usual de $H^{1+\varepsilon}(\Omega)$ en $H^\varepsilon(\Omega)$, se garantiza la continuidad de la inclusión (cf. [11, Theorem 1.3.4] and [1, Theorem 4.12])

$$i_\varepsilon \,:\, H^\varepsilon(\Omega) \,\rightarrow\, L^{\varepsilon^\star}(\Omega)\,,$$

donde

$$\epsilon^* := \begin{cases} \dfrac{2}{1-\epsilon} & \text{if} \quad n=2\,, \\ \dfrac{6}{3-2\epsilon} & \text{if} \quad n=3\,. \end{cases}$$

Estamos en posición ahora de establecer la Lipshitz continuidad de T.

Lema 3.3.5. *T es Lipshitz-contínuo en la bola B definida en* (3.28). *Más precisamente, existe una constante $C_{\mathrm{LIP}} > 0$ (ver ecuación* (3.40) *debajo), tal que*

$$||T(\mathbf{w},\varphi) - T(\mathbf{w}_0,\varphi_0)|| \leq C_{lp}||(\mathbf{w},\varphi) - (\mathbf{w}_0,\varphi_0)||\,, \quad \forall\,(\mathbf{w},\varphi),(\mathbf{w}_0,\varphi_0) \in B. \tag{3.32}$$

Demostración. Sean $(\mathbf{w},\varphi),(\mathbf{w}_0,\varphi_0) \in B \subset Ker(\mathscr{B}) \times H^1_{\Gamma_D}$. Entonces, por el Lema (3.3.2) y el Lema 3.3.3, asi como la definición del operador T, existen únicos

$(\mathbf{u}, \phi), (\mathbf{u}_0, \phi_0) \in B$, tales que

$$T(\mathbf{w}, \varphi) = (\mathbf{u}, \phi) \Rightarrow A\big((\mathbf{w}, \varphi); (\mathbf{u}, \phi), (\mathbf{v}, \psi)\big) = F((\mathbf{w}, \varphi); (\mathbf{v}, \psi)), \tag{3.33}$$

$$T(\mathbf{w}_0, \varphi_0) = (\mathbf{u}_0, \phi_0) \Rightarrow A\big((\mathbf{w}_0, \varphi_0); (\mathbf{u}_0, \phi_0), (\mathbf{v}, \psi)\big) = F((\mathbf{w}_0, \varphi_0); (\mathbf{v}, \psi)), \tag{3.34}$$

para todo $(\mathbf{v}, \psi) \in Ker(\mathscr{B}) \times H^1_{\Gamma_{\mathrm{D}}}(\Omega)$ Utilizando las igualdades presentes en (3.33) y (3.34), junto a la coercividad y linealidad de las formas se tiene

$$\begin{aligned}
&||T(\mathbf{w}, \varphi) - T(\mathbf{w}_0, \varphi_0)||^2 = ||(\mathbf{u} - \mathbf{u}_0, \phi - \phi_0)||^2, \\
&\quad \leq \alpha_A^{-1} A\big((\mathbf{w}, \varphi); (\mathbf{u} - \mathbf{u}_0, \phi - \phi_0), (\mathbf{u} - \mathbf{u}_0, \phi - \phi_0)\big), \\
&\quad \leq \alpha_A^{-1}\Big\{A\big((\mathbf{w}, \varphi); (\mathbf{u}, \phi), (\mathbf{u} - \mathbf{u}_0, \phi - \phi_0)\big) - A\big((\mathbf{w}, \varphi); (\mathbf{u}_0, \phi_0), (\mathbf{u} - \mathbf{u}_0, \phi - \phi_0)\big)\Big\}, \\
&\quad = \alpha_A^{-1}\Big\{F((\mathbf{w}, \varphi); (\mathbf{u} - \mathbf{u}_0, \phi - \phi_0)) - A\big((\mathbf{w}, \varphi); (\mathbf{u}_0, \phi_0), (\mathbf{u} - \mathbf{u}_0, \phi - \phi_0)\big)\Big\}.
\end{aligned}$$

Ahora bién, sumando y restando convenientemente $F((\mathbf{w}_0, \varphi_0); (\mathbf{u} - \mathbf{u}_0, \phi - \phi_0))$, usar en uno de ellos que este es equivalente a $A\Big((\mathbf{w}_0, \varphi_0); (\mathbf{u}_0, \phi_0), (\mathbf{u} - \mathbf{u}_0, \phi - \phi_0)\Big)$ y agrupando, se infiere que

$$\begin{aligned}
&||T(\mathbf{w}, \varphi) - T(\mathbf{w}_0, \varphi_0)||^2 = ||(\mathbf{u} - \mathbf{u}_0, \phi - \phi_0)||^2, \\
&\quad \leq \alpha_A^{-1}\Big\{F((\mathbf{w}, \varphi); (\mathbf{u} - \mathbf{u}_0, \phi - \phi_0)) - A\big((\mathbf{w}, \varphi); (\mathbf{u}_0, \phi_0), (\mathbf{u} - \mathbf{u}_0, \phi - \phi_0)\big) \\
&\qquad\quad + F((\mathbf{w}_0, \varphi_0); (\mathbf{u} - \mathbf{u}_0, \phi - \phi_0)) - F((\mathbf{w}_0, \varphi_0); (\mathbf{u} - \mathbf{u}_0, \phi - \phi_0))\Big\}, \\
&\quad = \alpha_A^{-1}\Big\{\Big[F((\mathbf{w}, \varphi); (\mathbf{u} - \mathbf{u}_0, \phi - \phi_0)) - F((\mathbf{w}_0, \varphi_0); (\mathbf{u} - \mathbf{u}_0, \phi - \phi_0))\Big] \\
&+ \Big[A\big((\mathbf{w}, \varphi); (\mathbf{u}_0, \phi_0), (\mathbf{u} - \mathbf{u}_0, \phi - \phi_0)\big) - A\big((\mathbf{w}_0, \varphi_0); (\mathbf{u}_0, \phi_0), (\mathbf{u} - \mathbf{u}_0, \phi - \phi_0)\big)\Big]\Big\}, \\
&\quad =: \alpha_A^{-1}\Big\{E_1 + E_2\Big\}.
\end{aligned} \tag{3.35}$$

Procederemos a acotar las expresiones E_1 y E_2, separadamente, usando las definiciones y propiedades de las formas involucradas allí. Por un lado, En el caso de E_1, por definición de las formas, por la Lipshitz-continuidad de la función η (ver (3.9)) y desigualdad de Hölder (ver Teorema 2.6.3), se consigue que

$$\begin{aligned} E_1 &= \int_\Omega (\varphi - \varphi_0)\boldsymbol{f} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) + \int_\Omega \nabla\big(\phi - \phi_0\big) \cdot \big[\eta(\varphi) - \eta(\varphi_0)\big]\boldsymbol{g}, \\ &\leq \|\varphi - \varphi_0\|_{0,4,\Omega}\|\boldsymbol{f}\|_{0,\Omega}\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_0\|_{0,4,\Omega} + L_\eta|\boldsymbol{g}|\|\varphi - \varphi_0\|_{0,\Omega}|\phi - \phi_0|_{1,\Omega}. \end{aligned} \tag{3.36}$$

En el caso de la expresión E_2, es fácil ver que

$$\begin{aligned} E_2 &= \int_\Omega \big[\vartheta(\varphi) - \vartheta(\varphi_0)\big]\nabla\phi_0 \cdot \nabla\big(\phi - \phi_0\big) + \int_\Omega \big[\big(\mathbf{w} - \mathbf{w}_0\big) \cdot \nabla\phi_0\big]\,\big(\phi - \phi_0\big), \\ &\leq \Big\{L_\vartheta\|\varphi - \varphi_0\|_{0,2k,\Omega}\|\nabla\phi_0\|_{0,2m,\Omega} + \|\mathbf{i}\|\|\mathbf{w} - \mathbf{w}_0\|_{0,4,\Omega}\|\phi_0\|_{1,\Omega}\Big\}\|\phi - \phi_0\|_{1,\Omega}. \end{aligned} \tag{3.37}$$

donde $k, m \in (1, +\infty)$ son conjugados de Hölder. Por lo que al reemplazar (3.36) y (3.37) en (3.35) y simplificar, se consigue que

$$\begin{aligned} &||T(\mathbf{w}, \varphi) - T(\mathbf{w}_0, \varphi_0)|| = ||(\mathbf{u} - \mathbf{u}_0, \phi - \phi_0)|| \\ &\leq \alpha_A^{-1}\Big\{\|\varphi - \varphi_0\|_{0,4,\Omega}\|\boldsymbol{f}\|_{0,\Omega} + L_\eta|\boldsymbol{g}|\|\varphi - \varphi_0\|_{0,\Omega} \\ &\qquad + L_\vartheta\|\varphi - \varphi_0\|_{0,2k,\Omega}\|\nabla\phi_0\|_{0,2m,\Omega} + \|\mathbf{i}\|\|\mathbf{w} - \mathbf{w}_0\|_{0,4,\Omega}\|\phi_0\|_{1,\Omega}\Big\}. \end{aligned} \tag{3.38}$$

Para controlar el tercer término del lado derecho de la desigualdad anterior, procedemos de manera análoga a [3], usamos la continuidad de $\mathrm{i}_\varepsilon \circ \nabla_\varepsilon : H^{1+\varepsilon}(\Omega) \to L^{\varepsilon^\star}$ y se toma m de modo que $2m = \varepsilon^\star$. Asi,

$$\|\nabla\phi_0\|_{0,2m,\Omega} = \|\nabla\phi_0\|_{0,\varepsilon^\star,\Omega} \leq \|\mathrm{i}_\varepsilon\|\|\nabla\phi_0\|_{\varepsilon,\Omega} \leq \|\mathrm{i}_\varepsilon\|\|\nabla_\varepsilon\|\|\phi_0\|_{1+\varepsilon,\Omega}\,.$$

Con la escogencia anterior, se sigue necesariamente que $2k = \frac{d}{\varepsilon}$ y en consecuencia

(3.38) se reduce a

$$
\begin{aligned}
&||T(\mathbf{w},\varphi) - T(\mathbf{w}_0,\varphi_0)|| = ||(\mathbf{u}-\mathbf{u}_0, \phi-\phi_0)||,\\
&\le \alpha_A^{-1}\Big\{\|\varphi-\varphi_0\|_{0,4,\Omega}\|\boldsymbol{f}\|_{0,\Omega} + L_\eta|\boldsymbol{g}|\|\varphi-\varphi_0\|_{0,\Omega}\\
&\qquad + L_\vartheta\|\varphi-\varphi_0\|_{0,\frac{d}{\varepsilon},\Omega}\|\mathrm{i}_\varepsilon\|\|\nabla_\varepsilon\|\|\phi_0\|_{1+\varepsilon,\Omega} + \|\mathbf{i}\|\|\mathbf{w}-\mathbf{w}_0\|_{0,4,\Omega}\|\phi_0\|_{1,\Omega}\Big\},\\
&\le \alpha_A^{-1}\Big\{\|\boldsymbol{f}\|_{0,\Omega} + L_\eta|\boldsymbol{g}| + L_\vartheta\|\mathrm{i}_\varepsilon\|\|\nabla_\varepsilon\|\|\phi_0\|_{1+\varepsilon,\Omega} + \|\mathbf{i}\|\|\phi_0\|_{1,\Omega}\Big\}||(\mathbf{w},\varphi)-(\mathbf{w}_0,\varphi_0)||.
\end{aligned}
\tag{3.39}
$$

donde se usaron las inclusiones continuas de H^1 en L^t con $t \in \{2, 4, \frac{d}{\varepsilon}\}$. Desde acá, usando ahora la hipótesis de regularidad adicional dada en (3.31), la cual establece que $\|\phi_0\|_{1+\varepsilon,\Omega} \le C_\varepsilon|\boldsymbol{g}|$, y el hecho que $\|\phi_0\|_{1,\Omega} \le r_2$, se deduce que el operador T es Lipshitz continuo con constante $C_{\mathrm{LIP}} > 0$, dada por

$$
C_{\mathrm{LIP}} := \|\boldsymbol{f}\|_{0,\Omega} + L_\eta|\boldsymbol{g}| + C_\varepsilon L_\vartheta\|\mathrm{i}_\varepsilon\|\|\nabla_\varepsilon\||\boldsymbol{g}| + \|\mathbf{i}\|r_2\,. \tag{3.40}
$$

□

Procedemos ahora con la compacidad del operador T.

Lema 3.3.6. *T es compacto.*

Demostración. De las estimación (3.39) obtenida en el lema anterior, se tiene particularmente que

$$
\begin{aligned}
&||T(\mathbf{w},\varphi) - T(\mathbf{w}_0,\varphi_0)||\\
&\quad\le \alpha_A^{-1}\Big\{\|\varphi-\varphi_0\|_{0,4,\Omega}\|\boldsymbol{f}\|_{0,\Omega} + L_\eta|\boldsymbol{g}|\|\varphi-\varphi_0\|_{0,\Omega}\\
&\qquad + C_\varepsilon L_\vartheta\|\varphi-\varphi_0\|_{0,\frac{d}{\varepsilon},\Omega}\|\mathrm{i}_\varepsilon\|\|\nabla_\varepsilon\||\boldsymbol{g}| + r_1\|\mathbf{i}\|\|\mathbf{w}-\mathbf{w}_0\|_{0,4,\Omega}\Big\}.
\end{aligned}
\tag{3.41}
$$

Sea entonces $(\mathbf{w}_n, \varphi_n)$ una sucesión en B que converge débilmente a $(\mathbf{w}, \varphi)$. Entonces, podemos asegurar a partir de (3.3.2) que

$$
\begin{aligned}
&||T(\mathbf{w}_n,\varphi_n) - T(\mathbf{w},\varphi)|| \\
&\quad \le \alpha_A^{-1}\Big\{\|\varphi_n-\varphi\|_{0,4,\Omega}\|\boldsymbol{f}\|_{0,\Omega} + L_\eta|\boldsymbol{g}|\|\varphi_n-\varphi\|_{0,\Omega} \\
&\qquad\qquad + C_\varepsilon L_\vartheta\|\varphi_n-\varphi\|_{0,\frac{d}{\varepsilon},\Omega}\|\mathrm{i}_\varepsilon\|\|\nabla_\varepsilon\||\boldsymbol{g}| + r_1\|\mathbf{i}\|\|\mathbf{w}_n-\mathbf{w}\|_{0,4,\Omega}\Big\}.
\end{aligned}
$$

Ahora, dado que las inyecciones de $H^1(\Omega)$ en $L^t(\Omega)$ con $t \in \{2,4,\frac{d}{\varepsilon}\}$ son compactas, para $d = 2$ y 3, se concluye que $\{T(\mathbf{w}_n,\varphi_n)\}$ converge en norma a $T(\mathbf{w},\varphi)$, lo cual entrega la compacidad de T. □

Estamos ahora en posición de establecer formalmente el siguiente resultado de existencia de solución débil.

Teorema 3.3.7. *Existe al menos una solución* $(\mathbf{u},\phi)$ *para* (3.24).

Demostración. Primeramente, observamos que por la continuidad y la compacidad de T, el Teorema de Shaefer (ver Teorema (3.3.4)) asegura la existencia de al menos un punto fijo $(\mathbf{u},\phi) \in Ker(\mathscr{B}) \times H^1_{\Gamma_D}(\Omega)$ de T; es decir,

$$
(\mathbf{u},\phi) = T(\mathbf{u},\phi)\,,
$$

y, por la definición de T, se satisface que

$$
\begin{aligned}
\mathscr{A}^F(\mathbf{u},\mathbf{v}) &= \mathscr{F}(\phi;\mathbf{v}), \\
\mathscr{A}^T(\phi;\phi,\psi) + \mathscr{C}(\mathbf{u};\phi,\psi) &= \mathscr{G}(\phi;\psi).
\end{aligned}
$$

para todo $\mathbf{v},\psi \in Ker(\mathscr{B}) \times H^1_{\Gamma_D}(\Omega)$, y asi $(\mathbf{u},\phi)$ es una solución de (3.24). □

La existencia de la presión p solución al problema 3.11 sigue de la condición inf-sup (ver Lema 3.2.2). Estableceremos ahora el resultado de unicidad para el problema (3.24) bajo hipótesis de datos pequeños.

Teorema 3.3.8. *Asuma que la constante de Lipschitz continuidad (ver ecuación 3.40) satisface*

$$C_{\mathrm{LIP}} := \|\boldsymbol{f}\|_{0,\Omega} + L_\eta|\boldsymbol{g}| + C_\varepsilon L_\vartheta \|\mathrm{i}_\varepsilon\| \|\nabla_\varepsilon\| |\boldsymbol{g}| + \|\mathbf{i}\| r_2 < 1.$$

Entonces, existe una única solución $(\mathbf{u}, \phi) \in [H_0^1(\Omega)]^d \times H^1_{\Gamma_{\mathrm{D}}}(\Omega)$ *del problema* (3.24).

Demostración. Se deduce fácilmente por contradicción y usando la Lipschitz continuidad del operador T. En efecto, si suponemos que $(\mathbf{u}, \phi)$ y $(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\phi})$ son dos soluciones del problema (3.24) o, dicho de otra manera, son puntos fijos del operador T, entonces, gracias a la propiedad de Lipschitz continuidad de T (3.32) se tiene que

$$\|(\mathbf{u}, \phi) - (\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\phi})\| = \|T(\mathbf{u}, \phi) - T(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\phi})\| \le C_{\mathrm{LIP}} \|(\mathbf{u}, \phi) - (\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\phi})\|.$$

De acá se desprende que

$$(1 - C_{\mathrm{LIP}})\|(\mathbf{u}, \phi) - (\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\phi})\| \le 0\,. \tag{3.42}$$

Pero como $(\mathbf{u}, \phi)$ y $(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\phi})$ son diferentes, entonces se tiene que $\|(\mathbf{u}, \phi) - (\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\phi})\| > 0$ y, por hipótesis, dado que $C_{\mathrm{LIP}} < 1$ entonces $1 - C_{\mathrm{LIP}} > 0$. Por lo tanto, lo obtenido en (3.42) es una contradicción que surge al suponer que $(\mathbf{u}, \phi)$ y $(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\phi})$ son diferentes. Se concluye entonces que la solución es única. □

Capítulo 4

Conclusiones y Trabajos Futuros

4.1. Conclusiones

En la presente tesis hemos brindado un estudio preliminar de conceptos matemáticos fundamentales para realizar la formulación débil de un problema de valor en la frontera. Junto a esto, se desarrolló y analizó una formulación variacional para el modelo de flujo de Brinkman con transporte no lineal, respecto al cual se establecieron resultados de existencia y unicidad de las respectivas soluciones. A continuación complementamos lo realizado.

1. Se otorgaron orientaciones conceptuales que sirven como base para la realización del análisis continuo de un problema de valor en la frontera.
2. Se formuló variacionalmente el problema de flujo con transporte no lineal.
3. Se obtuvieron estimados a priori para soluciones débiles asociadas con el problema continuo.
4. Se establecieron resultados de existencia y unicidad para el problema varia-

cional asociado con el modelo, reescribiendo la forma débil en términos de un operador de punto fijo.

4.2. Trabajos a futuro

Existen distintas actividades que pueden extender lo realizado en esta tesis. Dentro de ellas,

1. En cuanto al análisis discreto del problema, desarrollar una discretización de elementos finitos y analizar la solubilidad del mismo.

2. Llevar a cabo estimados de análisis de error a priori e implementar computacionalmente para confirmar tasas de convergencia demostradas.

Bibliografía

[1] R. A. Adams, J. J. F. Fourier, *Sobolev Spaces. Second edition.* Pure and Applied Mathematics (Amsterdam), 140. Elsevier/Academic Press, Amsterdam, 2003.

[2] M. Álvarez, G. Gatica and R. Ruiz-Baier *Analysis of a vorticity-based fully-mixed for mulation for the 3D Brinkman-Darcy problem.* Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 307 (2016), 68-95

[3] M. Álvarez, G. Gatica and R. Ruiz-Baier *An augmented mixed-primal finite element method for a coupled flow-transport problem.* ESAIM Math. Model. Numer. Anal. 49 (2015), no. 5, 1399-1427

[4] S. Caucao and I. Yotov *A Banach space mixed formulation for the unsteady Brinkman-Forchheimer equations.*IMA J. Numer. Anal. 41 (2021), no. 4, 2708-2743

[5] E. Colmenares, G. Gatica and J.C. Rojas *A Banach spaces-based mixed-primal finite element method for coupling of Brinkman flow and nonlinear transport* Preprint 2022-10, Centro de Investigación en Ingeniería MatemÃ¡tica (CI^{2}MA), Universidad de Concepción, Concepción, Chile, (2022).

[6] E. Colmenares, R. Oyarzúa and F. Piña *A Discontinuous Galerkin Method for the Stationary Boussinesq System* Computational Methods in Applied Mathematics, 2022. https://doi.org/10.1515/cmam-2022-0021

[7] M. Duran-Pinzón, P. García-Guarín y J. Páez-Arango *Modelado numérico*

y análisis experimental para flujos en un medio poroso homogéneo a través de suelos ITECKNE Vol. 15 http://dx.doi.org/10.15332/iteckne.v15i1.1961

[8] L.E. Figueroa, G.N. Gatica and A. Márquez *Augmented mixed finite element methods for the stationary Stokes equations.* SIAM J. Sci. Comput. 31 (2008/09) 1082-1119.

[9] G. N. Gatica *A Simple Introduction to the Mixed Finite Element Method: Theory and Applications.* SpringerBriefs in Mathematics, Springer, Cham Heidelberg New York Dordrecht London, 2014.

[10] V. Girault and P.-A. Raviart, *Finite element methods for Navier-Stokes equations*, vol. 5 of Springer Series in Computational Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1986. Theory and algorithms.

[11] A. Quarteroni and A. Valli, *Numerical Approximation of Partial Differential Equations.* Springer Series in Computational Mathematics, 23. Springer-Verlag, Berlin, 1994.

[12] R. Oyarzúa, T. Qin and D. Schötzau, *An exactly divergence-free finite element method for a generalized Boussinesq problem.* IMA J. Numer. Anal. 34 (2014), no. 3, 1104-1135, .

[13] A. Perazzo, G. Tomaiuolo, V. Preziosi and S. Guido *Emulsions in porous media: From single droplet behavior to applications for oil recovery.* Representación de flujo de fluidos en un medio poroso (2018). Advances in Colloid and Interface Science. Vol. 256. pp. 305-325.

[14] D. Reddy *Introductory Functional Analysis.* Springer Science+Business Media, LLC. (1997)