



UNIVERSIDAD DEL BÍO-BÍO

UNIVERSIDAD DEL BÍO BÍO
FACULTAD DE EDUCACIÓN Y HUMANIDADES
PEDAGOGÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

**ACTIVIDAD DE TITULACIÓN:
FUNCIONES ANALÍTICAS DE VARIABLE COMPLEJA**

Profesor Guía:
Dr. Luis Friz Roa

Autores:
Nicolás Miranda Bastías
Ismael Paz Carrasco

Chillán, 08 de agosto de 2023.

Resumen

La siguiente memoria se centra en el análisis exhaustivo de los números complejos y las funciones de variable compleja. Se exploran conceptos fundamentales como las propiedades de los números complejos, su interpretación geométrica, forma polar y exponencial, potencias y raíces. Además, se aborda en detalle el análisis de funciones como límites, continuidad, derivadas y ecuaciones de Cauchy-Riemann. También se investigan funciones elementales como la exponencial y las funciones trigonométricas. El estudio de las integrales abarca desde contornos hasta teoremas como el de Cauchy-Goursat y la fórmula integral de Cauchy. La investigación se enfoca en comprender la convergencia de series, incluidas las series de Taylor y de Laurent, junto con la integración y derivación de series de potencias. Además, se abordan en detalle los temas de residuos y polos, con un énfasis en el teorema de los residuos y su aplicación en cálculos integrales. Los objetivos generales y específicos vistos incluyen analizar los conceptos y definiciones de los números complejos y funciones analíticas de variable compleja, así como estudiar la estructura y definiciones de los números complejos, funciones analíticas y las integrales en este contexto. En conjunto, esta investigación proporciona una comprensión profunda de los conceptos matemáticos y sus diversas aplicaciones con el fin de que el lector comprenda y se interese por esta área de las matemáticas tan interesantes y útiles en su aplicación.

Índice general

Capítulo 1. Conceptos preliminares	3
1.1. Introducción	3
1.2. Historia de los números complejos	3
1.3. Línea de tiempo recapitulatoria con antecedentes más relevantes de los números complejos	9
1.4. Conceptos previos	10
1.5. Formulación del problema	11
1.6. Objetivos	11
1.7. Metodología	11
Capítulo 2. Estructura de números complejos	12
2.1. Definición y propiedades	12
2.2. Interpretación Geométrica	15
2.3. Forma polar de los números complejos	24
2.4. Forma exponencial	26
2.5. Potencias de un número complejo	27
2.6. Raíces de un número complejo	28
2.7. Topología del plano complejo	28
Capítulo 3. Funciones Analíticas de Variable Compleja	31
3.1. Funciones de una Variable Compleja	31
3.2. Límites	31
3.3. Límites y el Punto Infinito	35
3.4. Continuidad	36
3.5. Derivadas	37
3.6. Ecuaciones de Cauchy-Riemann	39
3.7. Funciones Analíticas	44
3.8. Funciones Armónicas	45
Capítulo 4. Funciones Elementales	48
4.1. Función exponencial	48
4.2. Funciones Trigonométricas	50
4.3. Función Logaritmo	56
4.4. Funciones Trigonométricas e Hiperbólicas Inversas	59
Capítulo 5. Integrales	63
5.1. Funciones Complejas	63
5.2. Contornos	65
5.3. Integrales de Contorno o de línea	68
5.4. Primitivas	71
5.5. Teorema de Cauchy-Goursat	75
5.6. Fórmula Integral de Cauchy	76
5.7. Derivadas de las funciones analíticas	78

5.8. Teorema de Morera	81
5.9. Desigualdades de Cauchy	81
5.10. Módulos Máximos de Funciones	82
5.11. Teorema de Liouville y el Teorema Fundamental del Álgebra	86
Capítulo 6. Series	88
6.1. Convergencia de sucesiones y series	88
6.2. Series de Taylor	91
6.3. Series de Laurent	94
6.4. Convergencia absoluta y uniforme de las series de potencias	97
6.5. Integración y Derivación de series de potencias	100
6.6. Unicidad de las representaciones por series	102
6.7. Multiplicación y División de series de potencias	104
Capítulo 7. Residuos y Polos	105
7.1. Residuos	105
7.2. El Teorema de los Residuos	106
7.3. Parte principal de una función	107
7.4. Residuos en los polos	108
7.5. Ceros y Polos de orden m	109
7.6. Cálculo de Integrales Reales Impropias	111
7.7. Integrales Impropias en las que aparecen senos y cosenos	113
7.8. Integrales definidas en las que aparecen senos y cosenos	114
7.9. Integración a lo largo de un corte de ramificación	115
7.10. Transformadas Inversas de Laplace	115
7.11. Residuos Logarítmicos y Teorema de Rouché	118
Bibliografía	120

CAPÍTULO 1

Conceptos preliminares

1.1. Introducción

A lo largo de la historia, muchos matemáticos se vieron en la necesidad de ir descubriendo nuevas técnicas, métodos, fórmulas, teorías, conjuntos de números para resolver distintos tipos de ecuaciones. Al principio existía el conjunto de los números naturales, pero éste no respondía todas las preguntas, por ejemplo, ¿A qué número hay que sumarle a 5 para que nos de 2?. No todas las ecuaciones de este estilo tienen una solución necesariamente natural, por esta razón tuvieron que desarrollar otro conjunto que es el de los números enteros. Así, los matemáticos se vieron con la obligación de ir desarrollando otros tipos de conjuntos para ir satisfaciendo todas las ecuaciones que se presentan, luego de los enteros surgieron los racionales y posteriormente los reales. Este último conjunto parecía estar completo, pero ¿qué número real elevado al cuadrado es -1? la respuesta es que no existe dicho número, porque todo número real elevado al cuadrado es mayor o igual que cero, entonces se hace interesante investigar este tipo de ecuaciones, donde los matemáticos le dieron sentido a estas interrogantes a través los llamados “ Números Complejos”, los cuales tiene una parte real y una imaginaria. En la presente tesis se muestran los aspectos más importantes de los números complejos, tales como sus propiedades básicas, estructura, representaciones gráficas, entre otros, siendo el foco principal de esta investigación el Análisis de las funciones de variable compleja.

1.2. Historia de los números complejos

En la historia, las primeras apariciones documentadas que se tienen de los números complejos surgieron en Grecia, donde el término “Número Complejo” ni siquiera se concebía. La primera aparición conocida de este tipo de números, es de raíces cuadradas de números negativos, que proviene del trabajo del matemático griego Herón de Alejandría (Grecia aproximadamente 10-75 d.c) en el siglo I d.c. en su libro Estereometría, como resultado de una imposible sección de una pirámide. Dicho cálculo de raíces de una cantidad negativa vienen del cálculo, que quería realizar el griego, de una altura de una pirámide truncada de base cuadrada, donde $a = 28$ unidades y $b = 4$ unidades, cuyas medidas eran los lados de los cuadrados inferior y superior, respectivamente. Luego $c = 15$ unidades, valor de la arista inclinada.

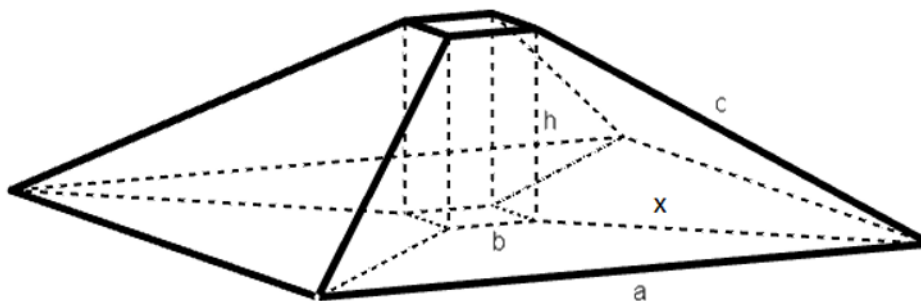


FIGURA 1.2.1. Pirámide truncada base cuadrada

La fórmula para hallar dicha altura es

$$h = \sqrt{c^2 - 2\left(\frac{a-b}{2}\right)^2}$$

Herón conocía dicha fórmula y en la solución de su problema escribió (en términos actuales)

$$h = \sqrt{15^2 - 2\left(\frac{28-4}{2}\right)^2} = \sqrt{225 - 2(144)} = \sqrt{225 - 144 - 144} = \sqrt{81 - 144}$$

Así se puede concluir que la altura de la pirámide es $h = \sqrt{-63}$. Sin embargo, en el siguiente paso Herón calculó $h = \sqrt{144 - 81}$ (Ramírez, 2019), donde existe la posibilidad de que un escribano cometiera un error de escritura.

Otras apariciones suceden nuevamente en Grecia no demasiados años después de Herón, donde Diophantus (275 d.c.) en su obra aritmética plantea el siguiente problema: “Encuentra los lados de un triángulo rectángulo de perímetro 12 unidades y el área 7 unidades al cuadrado”, lo cual llevó a los matemáticos de esa época a pensar en raíces negativas, ya que para encontrar uno de los lados del triángulo había que solucionar la ecuación $336x^2 + 24 = 172x$, la cual se encontraban raíces de números negativos.

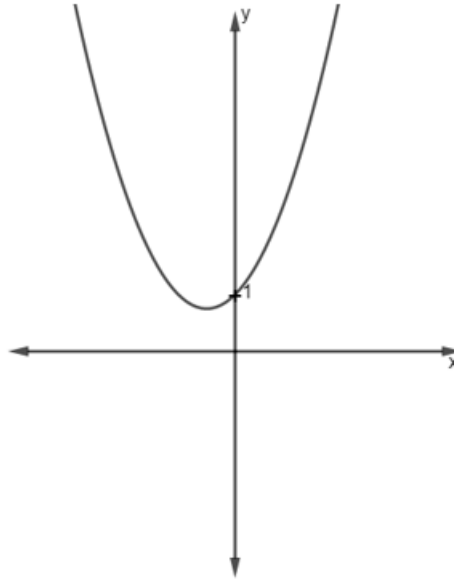
Ya muchos años después nos encontramos con Mahavira un matemático hindú (año 850 aproximadamente), donde afirma en su libro Ganita Sara Samgraha que una cantidad negativa no es un cuadrado y, por lo tanto, no puede tener raíz cuadrada.

Habiendo transcurrido alrededor de 300 años, el matemático y astrónomo hindú Bhaskara Akaria, dice en su libro Bijaganita que el cuadrado de un número, positivo o negativo, es positivo; la raíz cuadrada de un número positivo tiene dos valores, uno positivo y otro negativo; no existe raíz cuadrada de un número negativo, ya que un número negativo no es un cuadrado.

El estudio de los números complejos comenzó a tomar más importancia en el Siglo XVI, cuando los matemáticos italianos como Tartaglia y Cardano encontraron fórmulas en las cuales dieron las raíces exactas de los polinomios de grados 2 y 3. Aunque, en estos tiempos solamente les interesaban las raíces reales de este tipo de ecuaciones, por lo que tuvieron la necesidad de lidiar con raíces de números negativos.

En este periodo de la etapa del renacimiento, en Italia, es en donde los algebristas se tomaron el tiempo para investigar estos números, debido a que trataron con una ecuación de segundo grado, en la cual aparecen soluciones con raíces cuadradas de números negativos, como en el siguiente ejemplo de la ecuación:

$$x^2 + x + 1 = 0.$$

FIGURA 1.2.2. Gráfico $f(x) = x^2 + x + 1$.

Aquí se aprecia una parábola que no interseca al eje x , por lo que ésta no posee soluciones reales. Al emplear la conocida fórmula general de resolución de una ecuación de segundo grado, nos encontraremos con la raíz cuadrada de -3 . Antes los matemáticos griegos, que conocían los métodos geométricos de resolución, consideraban que este tipo de problemas no tenían solución. Pero realmente, los matemáticos no se interesaban en resolver todas las ecuaciones cuadráticas, la motivación empezó de las ecuaciones cúbicas.

Gerolamo Cardano fue un destacado matemático, quien en su obra publicada en el año 1545, *Ars Magna*, divulgó la fórmula de la resolución de las ecuaciones de tercer grado, en ella introdujo por primera vez los objetos de la forma $a + b\sqrt{-1}$ en el álgebra, donde a y b son reales, por lo que consideró la posibilidad de usar estos números.

La fórmula presentada en el libro de Cardano, para resolver ecuaciones cúbicas, parte de la siguiente ecuación:

$$x^3 = 3px + 2q.$$

Cardano entrega un método para encontrar las soluciones de esta ecuación cúbica dando la siguiente fórmula:

$$x = \sqrt[3]{q + \sqrt{q^2 - p^3}} + \sqrt[3]{q - \sqrt{q^2 - p^3}}.$$

Con esta fórmula se pueden hallar las soluciones de esta ecuación cúbica, para su comprobación realizar una ecuación de esta forma y luego aplicar el método de Cardano para encontrar sus raíces.

A partir del siglo XVI, aparecieron obras de los algebristas italianos, tales como 'El Álgebra' de Rafael Bombelli, donde se comienzan a ver la relación entre los conceptos de raíz y radical, en la cual éste expresa que la raíz es referida a un número, mientras que el radical a una notación, por lo que se puede caracterizar como una función. Con la aceptación y desarrollo de nuevos números en el siglo XIX, tanto negativos como complejos, y su participación en las estructuras algebraicas, se comienza a tener más claridad.

Bombelli puede ser llamado, con todo derecho, el padre de los números complejos, pues fue el primero que desarrolló el álgebra formal para trabajar con las expresiones de la forma $a + b\sqrt{-1}$.

El gran aporte de Bombelli al álgebra, fue el de aceptar sin reserva la existencia de $\sqrt{(-1)}$, como un número. A manera de ejemplo, Bombelli nos da las siguientes reglas:

$$\sqrt{(-n)} * \sqrt{(-n)} = -n$$

$$\sqrt{(-n)} * -\sqrt{(-n)} = n$$

siendo n un número natural.

En La Géométrie (1637) de René Descartes, se encuentra que una ecuación debía tener tantas raíces como indica su grado y cómo puede operar con ellas. Entre las raíces que encuentra, están las raíces cuadradas de números negativos, a las que da el nombre de raíces imaginarias.

Gracias a Descartes se nombran con las primeras letras del abecedario, ya sea a, b, c, \dots las cantidades conocidas y como x, y, z, \dots las incógnitas, esto trajo como consecuencia la forma binomial en los números complejos, a saber $a + bi$, donde a y b son las cantidades conocidas en los reales e i es el número imaginario.

Luego, unos cuantos años después el alemán Gottfried Wilhelm Leibniz probó en 1676 la relación:

$$\sqrt{1 + \sqrt{(-3)}} + \sqrt{1 - \sqrt{(-3)}} = \sqrt{6}.$$

Además, en 1702, el mismo Leibniz mostró que $x^4 + a^4$ (Ramírez, 2019) es igual que:

$$x^4 + a^4 = (x \pm a\sqrt{-\sqrt{-1}})(x \pm a\sqrt{\sqrt{-1}}).$$

El inglés Roger Cotes publicó el artículo Logometria in Philosophical Transactions of Royal Society (1714), donde presentó una fórmula interesante a saber,

$$\ln(\cos(\phi) + \sqrt{-1} \sin(\phi)) = \sqrt{-1}\phi,$$

la cual equivale a la fórmula de Euler,

$$\cos(\phi) + i \sin(\phi) = e^{i\phi}.$$

La fórmula de Cotes le permitió al matemático francés Abraham de Moivre introducir en el año 1730 la conocida relación

$$(\cos(\phi) + \sqrt{-1} \sin(\phi))^n = \cos(n\phi) + \sqrt{-1} \sin(n\phi)$$

si consideramos $\phi = \frac{\pi}{2}$ y reemplazamos en la ecuación dada por Cotes, se obtiene:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{\ln(\sqrt{-1})}{\sqrt{-1}}$$

una maravillosa manera de representar π mediante un logaritmo complejo.

Leonhard Euler, en el siglo XVIII fundó la trigonometría moderna definiendo las funciones trigonométricas mediante expresiones con exponenciales de números complejos. En la obra de Euler, Elementos del Álgebra (1765), se entrega la definición de número imaginario, pero expresa que no comprendía realmente el significado de las raíces cuadradas de números negativos. Además, en su obra Introductio in Analysin Infinitorum, publicada en 1748, define la famosa identidad $e^{xi} = \cos x + i \sin x$. Además, expresa que la magnitud de las variables puede ser cualquier número, incluyendo los imaginarios.

Las raíces imaginarias y su representación geométrica fueron abordadas nuevamente en 1797, por el noruego Caspar Wessel en su publicación *On the Analytical Representation of Direction. An Attempt Applied Chiefly to Solving Plane and Spherical Polygon*, quien representó una raíz imaginaria de la forma $a + bi$ mediante un segmento dirigido, además, describió la adición y multiplicación de los segmentos dirigidos (suma y multiplicación de números complejos). (Ramírez, 2019)

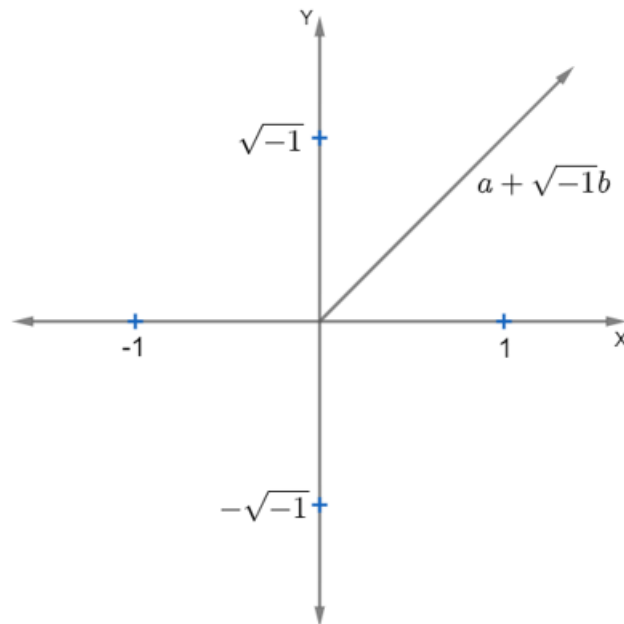


FIGURA 1.2.3. Ilustración de la construcción de $\sqrt{-1}$ de Wessel.

Adentrándose en el siglo XIX, un contador parisino, que poco se sabe de su vida y si contaba o no con educación matemática, Jean Robert Argand, produjo un folleto en 1806, titulado *Essai sur une maniere de presenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques* (Ensayo sobre una forma de representar las cantidades imaginarias mediante construcciones geométricas), Dicho folleto llegó a manos de Jaques un profesor en Ecole Impériale d' Application du Génie et l' Artillerie in Metz, quien publicó un artículo en el año 1813 de la revista *Annales de Mathématiques*. En este artículo Jaques reconoció a Argand como autor de dicho documento. En su artículo Argand da una interpretación de los números imaginarios $a + b\sqrt{-1}$ como un punto en el plano y se describen las reglas de la multiplicación y adición de estos números. Además, se interpreta $\sqrt{-1}$ como una rotación de 180° .

Seguido muy de cerca de Argand, el príncipe de las matemáticas Karl Friedrich Gauss, realizó un aporte a los números imaginarios en abril de 1831 en la Real Sociedad de Gotinga, en el cual Gauss los renombró como Números Complejos. Pero, ¿Qué es realmente un número complejo?. Gauss dio la respuesta satisfactoria al establecer la siguiente interpretación geométrica como un par ordenado: $x + iy \rightarrow (x, y)$. Si bien en 1831 renombró a éstos números, sus ideas comenzaron mucho antes, en el año 1799 presentó su tesis doctoral titulada *Demonstratio nova theorematis omnem functionem algebraicam rationalem instauram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse*, en donde aparece una de las cuatro demostraciones, que publicó a lo largo de su vida del teorema fundamental del álgebra, veremos que dice este teorema.

El Teorema Fundamental del Álgebra asegura que cualquier polinomio con coeficientes reales puede factorizar sobre el campo de los números complejos \mathbb{C} . Consideremos $\{a_0, \dots, a_n\}$ de

$n \geq 1$ y $a_0 \neq 0$. Se toma el polinomio $p(z) = a_n z^n + \dots + a_0$, entonces existe un número complejo $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $p(z_0) = 0$.

Gracias a Argand y Gauss sabemos que un número complejo es un par ordenado (a, b) de números reales, es más común representar el complejo (a, b) de la forma $a + bi$, donde i es la parte imaginaria. A este tipo de representación se le conoce como la forma binómica. El plano en el cual representamos los números complejos se conoce como el plano Argand-Gauss

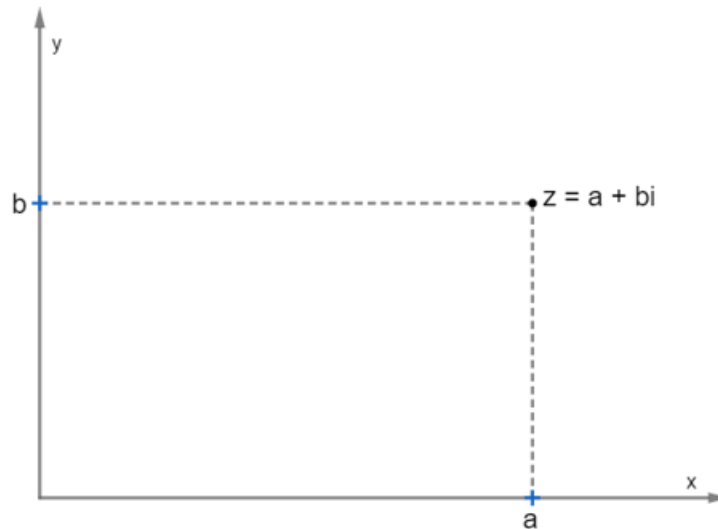


FIGURA 1.2.4. Representación de un número complejo en el plano.

En el plano de Argand-Gauss, los números representados en el eje x corresponde al eje real, ya que su punto de coordenada es $(a, 0)$, es decir, son números reales. El eje de las y recibe el nombre de eje imaginario, así $z = a + bi$. En 1825 Agustín Louis Cauchy publica una memoria sobre integración compleja (que ya había escrito en 1814 pero fue publicada en 1825), ese año es considerado como el nacimiento de la teoría de funciones de variable compleja y su integración. En su escrito *Mémoire sur les intégrales définies* probó que si una función compleja f es analítica en una región G “con ciertas características”, entonces la integral de f a lo largo de la frontera de cualquier rectángulo que está contenido en G es cero. Además Cauchy estudió funciones complejas que son discontinuas en puntos aislados, donde obtuvo la fórmula esencial del cálculo de los residuos. Los conceptos anteriores mencionados serán abordados más adelante en la investigación.

Uno de los últimos aportes procede de la mano del irlandés William Rowan Hamilton, quien introdujo la definición de números complejos que utilizamos en la actualidad, donde el año 1837 lo introdujo cuando publicó *Theory of Conjugate Functions or Algebraic Couples: with a Preliminary Essay on Algebra as a Science of Pure Time*. En este artículo se define el par ordenado (a, b) de números reales a y b , la suma y multiplicación de pares ordenados como

$$(a, b) + (c, d) := (a + c, b + d)$$

$$(a, b) * (c, d) := (ac - bd, bc + ad).$$

Además, Hamilton definió la raíz cuadrada de un par ordenado, donde identificó su parte real a con el par rodeando $(a, 0)$ y calculó

$$\sqrt{-1} = \sqrt{(-1, 0)} = (0, 1).$$

1.3. LÍNEA DE TIEMPO RECAPITULATORIA CON ANTECEDENTES MÁS RELEVANTES DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS 9

1.3. Línea de tiempo recapitulatoria con antecedentes más relevantes de los números complejos

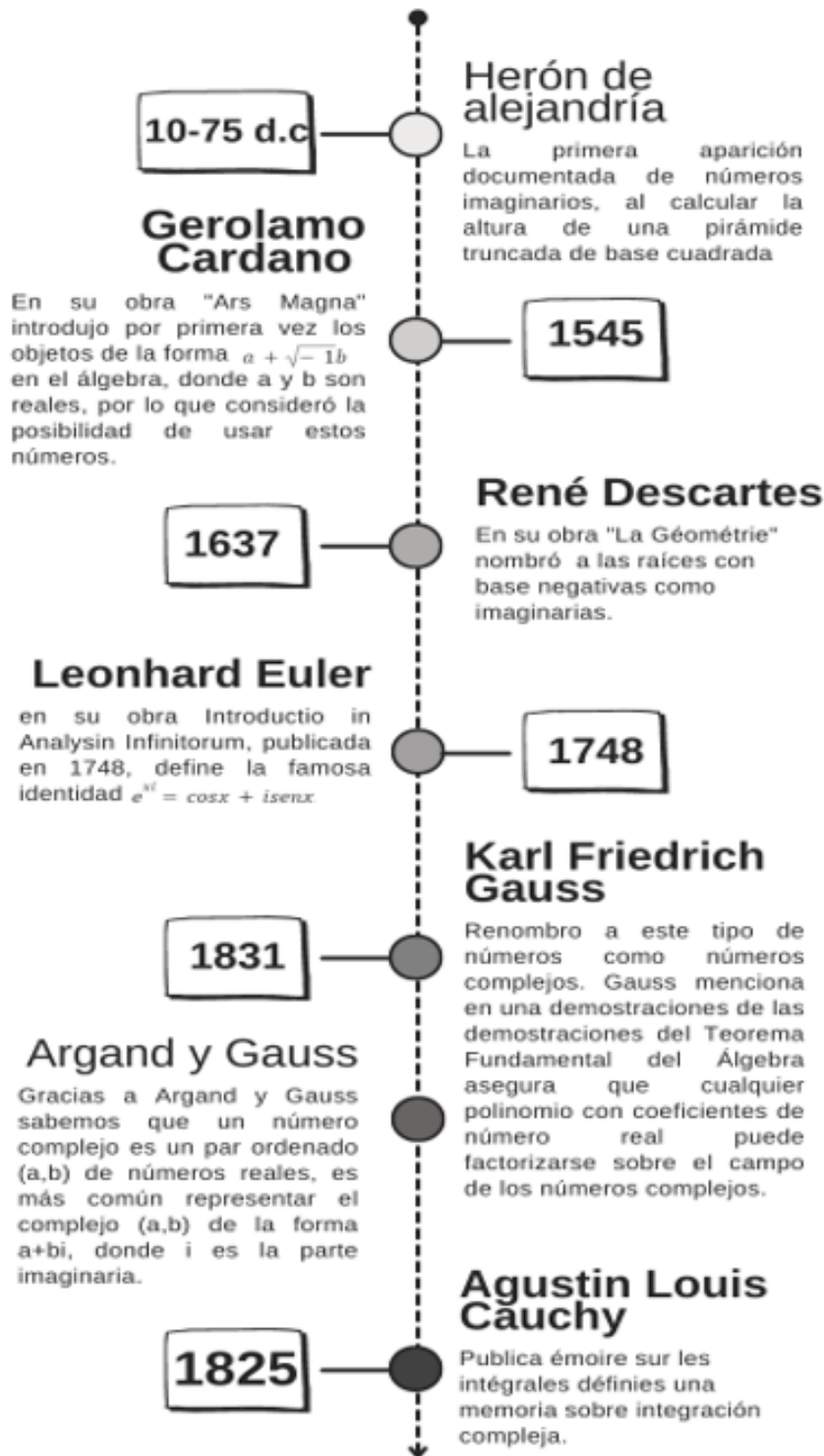


FIGURA 1.3.1. Línea de tiempo de lo más relevante

1.4. Conceptos previos

1.4.1. ¿Qué son los números complejos? Los Números Complejos son una extensión de los números reales, cumpliéndose que:

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

- Los números reales son números usados para representar una cantidad continua (incluyendo el cero y los negativos). Además, se puede pensar en un número real como una fracción decimal posiblemente infinita, como 3.141592...

- Se denomina número real a todo elemento perteneciente al conjunto formado por la unión de los números enteros, el cuerpo de fracciones asociado al conjunto anterior (números racionales) y el conjunto de los números irracionales (los no expresables mediante una fracción).

Los números complejos tienen la capacidad de representar todas las raíces de los polinomios cosa que con los reales no era posible.

Esto se consigue gracias a que los complejos hacen uso de una unidad imaginaria llamada número i , que verifica la propiedad: $i^2 = -1 \Leftrightarrow i = \sqrt{-1}$

Representación binomial (rectangular) Cada complejo se representa en forma binomial como:

$$z = a + bi = bi + a = ib + a = a + ib$$

a , es la parte real del número complejo z , y ib , es su parte imaginaria. Esto se expresa así:

$$a = \operatorname{Re}(z)$$

$$b = \operatorname{Im}(z)$$

a y b son números reales

1.4.2. ¿Para qué sirven los números complejos? Los números complejos se usan en ingeniería electrónica y en otros campos para una descripción adecuada de las señales periódicas variables (Análisis de Fourier). En una expresión del tipo $z = re^{i\phi}$ podemos pensar en r como la amplitud y en ϕ como la fase de una onda sinusoidal de una frecuencia dada. Cuando representamos una corriente o un voltaje de corriente alterna (y por tanto con comportamiento sinusoidal) como la parte real de una función de variable compleja de la forma

$$f(t) = ze^{i\omega t},$$

donde ω representa la frecuencia angular y el número complejo z nos da la fase y la amplitud, el tratamiento de todas las fórmulas que rigen las resistencias, capacidades e inductores pueden ser unificadas introduciendo resistencias imaginarias para las dos últimas (redes eléctricas). Ingenieros eléctricos y físicos usan la letra j para la unidad imaginaria en vez de i que está típicamente destinada a la intensidad de corriente.

El campo complejo es igualmente importante en mecánica cuántica cuya matemática subyacente utiliza Espacios de Hilbert de dimensión infinita sobre \mathbb{C} (\mathbb{C}). En la relatividad especial y la relatividad general, algunas fórmulas para la métrica del espacio-tiempo son mucho más simples si tomamos el tiempo como una variable imaginaria. En ecuaciones diferenciales, es habitual encontrar primero las raíces complejas r de la ecuación característica de la ecuación diferencial de primer grado y luego intentar resolver el sistema en términos de las funciones base de la forma: $f(t) = e^{rt}$.

1.5. Formulación del problema

El estudio de los números complejos es un tema que es muy poco profundizado en la escuela o en algunas carreras matemáticas en la universidad, a pesar de ser un contenido muy interesante y entretenido. Es por ello que esta investigación buscará profundizar sobre estos números y la aplicación en funciones analíticas de variable compleja, buscando que el lector comprenda su estructura y su gran cantidad de aplicaciones en las matemáticas. Además, mediante ejemplos y demostraciones interesantes, motivar a la persona que leerá esta investigación a seguir profundizando sobre estos números.

1.6. Objetivos

1.6.1. Objetivo General. Analizar conceptos y definiciones sobre números complejos y funciones analíticas de variable compleja.

1.6.2. Objetivos Específicos.

- Estudiar definiciones y estructura de los números complejos.
- Estudiar funciones analíticas de variable compleja.
- Estudiar integrales con variable compleja.

1.7. Metodología

La siguiente investigación es realizada, a través de la búsqueda de información sobre funciones analíticas de variable compleja mediante vía web, libros de análisis complejo o variable compleja y cálculo integral complejo. Toda información recopilada es revisada y evaluada por el profesor guía en reuniones semanales o por medio de consultas específicas mediante correo electrónico, donde se resuelven dudas, consultas y se efectúa una orientación de la estructura y enfoque de la investigación. Para la estructura y escritura de la investigación se utiliza un software matemático de texto llamado Lyx (versión 2.3.7) que funciona a base del procesador de texto latex.

CAPÍTULO 2

Estructura de números complejos

2.1. Definición y propiedades

2.1.1. Número complejo. Podemos definir a los números complejos como $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, por lo que un número complejo z se puede denotar como un par ordenado, es decir:

$$z = (x, y), \text{ donde } x, y \in \mathbb{R}.$$

De otra manera se suelen identificar los pares $(x, 0)$ con los números reales x , por consiguiente los números complejos de la forma $(0, y)$ se le llaman *números imaginarios puros*. El conjunto de los números complejos contiene a los números reales como subconjunto. Los números reales x e y en la expresión anterior se conocen como parte *real* y parte *imaginaria* de z , respectivamente.

$$\mathbf{Re} z = x, \mathbf{Im} z = y.$$

Dos números complejos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) se dicen *iguales* si tienen iguales partes real e imaginaria. Es decir:

$$(x_1, y_1) = (x_2, y_2) \text{ si y sólo si } x_1 = x_2 \text{ e } y_1 = y_2.$$

La suma y el productos de dos números completos, se definen de la siguiente manera, respectivamente:

$$\begin{aligned} (x_1, y_1) + (x_2, y_2) &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \\ (x_1, y_1) (x_2, y_2) &= (x_1x_2 - y_1y_2, y_1x_2 + x_1y_2). \end{aligned}$$

El sistema de números complejos es, en consecuencia, una extensión natural de los números reales. Otra forma de escribir un número complejos z es mediante la ecuación:

$$z = (x, y) = x + iy$$

donde es denotado mediante un número real x o como $(x, 0)$ y denotando por i el número imaginario puro $(0, 1)$. Asimismo, con el convenio $z^2 = zz$, $z^3 = zz^2$, etc., deducimos que

$$i^2 = (0, 1) (0, 1) = (-1, 0);$$

es decir,

$$i^2 = -1.$$

De esta manera las expresiones anteriores de suma y el producto entre números complejos se convierten en:

$$\begin{aligned} (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) &= (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2), \\ (x_1 + iy_1) (x_2 + iy_2) &= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(y_1x_2 + x_1y_2). \end{aligned}$$

Observación: Los miembros de la derecha se pueden obtener formalmente manipulando los términos de la izquierda como si contuvieran números reales y sustituyendo i^2 por -1 cuando aparezca.

2.1.2. Propiedades. Propiedades de la suma

(1) Clausura: Sea $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, entonces

$$z_1 + z_2 \in \mathbb{C}$$

(2) Asociativa: Sea z_1, z_2 y $z_3 \in \mathbb{C}$, entonces

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$$

(3) Conmutativa: Sea z_1 y $z_2 \in \mathbb{C}$, entonces:

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1.$$

(4) Elemento Neutro aditivo: El elemento neutro aditivo es el número complejo $0 = (0, 0) = 0 + i0$ y sea $z = x + iy$, con $z \in \mathbb{C}$, entonces

$$z + 0 = (x + iy) + (0 + i0) = x + iy = z.$$

(5) Elemento Inverso aditivo: El elemento inverso aditivo $z = x + iy \in \mathbb{C}$ es $-z = (-x, -y) = -x - iy$, entonces

$$z + (-z) = (x + iy) + (-x - iy) = 0.$$

Propiedades de la multiplicación

(1) Clausura: Sea z_1 y $z_2 \in \mathbb{C}$, entonces:

$$z_1 z_2 \in \mathbb{C}.$$

(2) Asociativa: Sea z_1, z_2 y $z_3 \in \mathbb{C}$, entonces

$$(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3).$$

(3) Conmutativa: Conmutativa: Sea z_1 y $z_2 \in \mathbb{C}$, entonces:

$$z_1 z_2 = z_2 z_1.$$

Observación: De acuerdo a la propiedad conmutativa del producto $iy = yi$, luego se puede escribir

$$z = x + iy \text{ o } z = x + yi.$$

(4) Distributiva: Sea z, z_1 y $z_2 \in \mathbb{C}$, entonces

$$z(z_1 + z_2) = z z_1 + z z_2.$$

(5) Elemento Neutro multiplicativo: El elemento neutro multiplicativo es el complejo $1 = (1, 0) = 1 + i0$, entonces

$$z \cdot 1 = (x + iy)(1 + i0) = z.$$

(6) Elemento Inverso multiplicativo: El elemento inverso multiplicativo $z = x + iy \in \mathbb{C}$ es $z^{-1} = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right)$, $z \neq 0$. Entonces

$$z z^{-1} = (x + iy) \left(\frac{x - iy}{x^2 + y^2}\right) = 1.$$

Demostración: Debido a que el inverso multiplicativo no es tan evidente, se procede a demostrar. Para todo complejo no nulo $z = (x, y)$, existe un número complejo z^{-1} tal que $z z^{-1} = 1$. Para hallar el inverso multiplicativo, buscamos los reales u, v expresados en términos de x e y . La aditiva $0 = 0 + i0$ y la identidad multiplicativa $1 = 1 + 0i$ de los números reales se transfiere a los números complejos, luego

$$(x, y)(u, v) = (1, 0)$$

Según lo visto en el apartado anterior (2.1.1), multiplicación de dos números complejos

$$(xu - yv, yu + xv) = (1, 0)$$

Así u y v deben satisfacer

$$(2.1.1) \quad xu - yv = 1$$

$$(2.1.2) \quad xv + yu = 0$$

En (2.1.1) nos queda

$$(2.1.3) \quad \begin{aligned} xu &= 1 + yv \\ u &= \frac{1 + yv}{x} \end{aligned}$$

Reemplazando en (2.1.2)

$$(2.1.4) \quad \begin{aligned} xv + y \left(\frac{1 + yv}{x} \right) &= 0 \\ xv + y \left(\frac{1 + yv}{x} \right) &= 0 \\ xv + \frac{y + y^2v}{x} &= 0 / \cdot x \\ x^2v + y + y^2v &= 0 \\ v &= \frac{-y}{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

reemplazando (2.1.3) en (2.1.4)

$$\begin{aligned} u &= \frac{1 + y \left(\frac{-y}{x^2 + y^2} \right)}{x} \\ u &= \frac{1 + \frac{-y^2}{x^2 + y^2}}{x} \\ u &= \frac{\frac{x^2 + y^2 - y^2}{x^2 + y^2}}{x} \\ u &= \frac{\frac{x^2}{x^2 + y^2}}{x} \\ u &= \frac{x^2}{x(x^2 + y^2)} \\ u &= \frac{x}{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

Así, el inverso multiplicativo de $z = (x, y)$ es

$$z^{-1} = (u, v) = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right), (\text{con } z \neq 0 \text{ e } y \neq 0, x \neq 0).$$

Observación: Con respecto a las propiedades de la adición, podemos ver que $(\mathbb{C}, +)$ es un grupo abeliano y debido a las propiedades de la multiplicación, podemos ver que $(\mathbb{R}^2 - (0, 0), \cdot)$ también es un grupo abeliano. Con lo anterior podemos concluir que $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ es un **cuero**.

Observación: Como sabemos, los números reales tienen un orden tal y como lo conocemos. Por el contrario en los números complejos no podemos definir relaciones de orden

compatible con la estructura algebraica. Por ejemplo supongamos que $i^2 > 0$, entonces sería verdadero que $i^2 > 0$; $-1 > 0$, hasta el momento no existe ninguna contradicción ya que podría ser que la relación $>$ no respetara el orden de \mathbb{R} , pero por otro lado $1^2 > 0$. Con ambas relaciones obtenemos que $1 + (-1) > 0$, lo cual es contradictorio. Por lo tanto en \mathbb{C} no se define ningún orden.

Por último, es importante mencionar la propiedad de división por un número complejo no nulo, con z_1 y $z_2 \in \mathbb{C}$:

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 z_2^{-1} \quad (z_2 \neq 0).$$

si $z_1 = (x_1, y_1)$ y $z_2 = (x_2, y_2)$, podemos probar utilizando la multiplicación de dos números complejos que:

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= z_1 z_2^{-1} \\ &= (x_1, y_1) \left(\frac{x_2}{x_2^2 + y_2^2}, \frac{-y_2}{x_2^2 + y_2^2} \right) \\ &= \left(\frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \right) + i \left(\frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \right) \end{aligned}$$

Además, es importante mencionar algunas identidades relativas a los cocientes, no por ello menos importantes. La siguiente relación

$$\frac{1}{z} = z^{-1}, \quad (z \neq 0).$$

Y por último podemos mostrar que sea z_1, z_2 y $z_3 \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} \frac{z_1 + z_2}{z_3} &= \frac{z_1}{z_3} + \frac{z_2}{z_3}, \quad (z_3 \neq 0) \\ \frac{z_1 z_2}{z_3 z_4} &= \left(\frac{z_1}{z_3} \right) \left(\frac{z_2}{z_4} \right) \quad (z_3 \neq 0, z_4 \neq 0). \end{aligned}$$

2.2. Interpretación Geométrica

La representación de un número complejo $z = x + iy$ en el plano, corresponde al punto (x, y) . Cada número complejo corresponde a un punto exactamente, por ejemplo el número $-1 + i$, cuyo punto está representado por $(-1, 1)$. Si bien la representación de los números complejos como un punto es idéntica a la representación de números reales, dichos números al representarlos en el plano, ya no estarán representados por ambos ejes reales como lo sería, el eje x y el eje y . Ahora dichos plano xy se llama plano complejo o plano z , donde el eje x corresponde al eje real y el eje y corresponde al eje imaginario. Además, el número z es representado en el plano complejo como un segmento dirigido o un vector, que va desde el origen hasta el punto (x, y) , como podemos verlo en la siguiente figura.

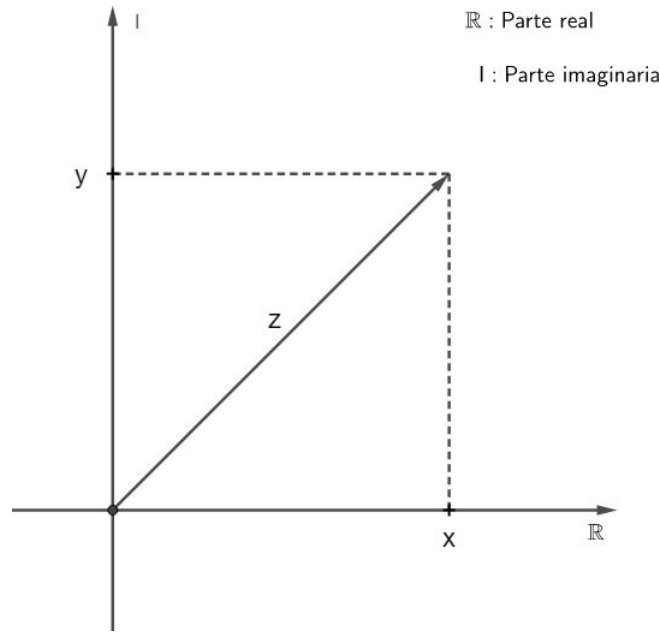


FIGURA 2.2.1. Representación del número complejo $z = x + iy$, en el plano complejo.

2.2.1. Propiedades.

(1) Representación geométrica de la suma: De acuerdo con la definición de suma de números complejos. Sea z_1 y $z_2 \in \mathbb{C}$, donde $z_1 = x_1 + iy_1$ y $z_2 = x_2 + iy_2$. Podemos representar la suma de $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ vectorialmente como se indica en la siguiente figura

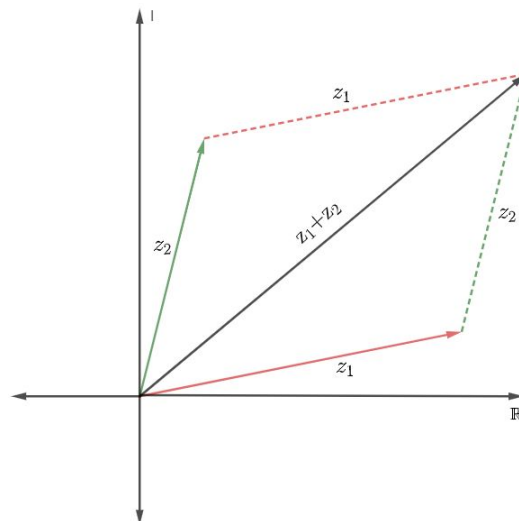


FIGURA 2.2.2. Representación geométrica de la suma de dos números complejos, $z_1 + z_2$.

(2) Representación geométrica de la resta: De igual manera podemos representar geométricamente la resta de dos números complejos. Sea z_1 y $z_2 \in \mathbb{C}$, donde $z_1 = x_1 + iy_1$ y

$z_2 = x_1 + iy_2$. Podemos representar la resta de $z_1 - z_2 = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$ vectorialmente como se indica en la siguiente figura

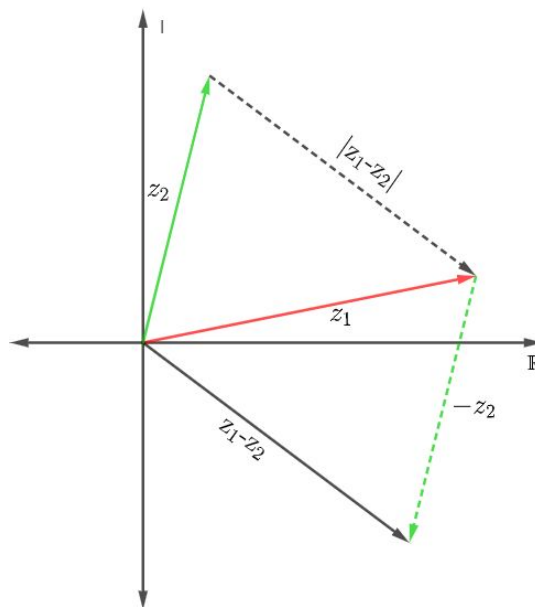


FIGURA 2.2.3. Representación geométrica de la resta de dos números complejos, $z_1 - z_2$.

Observación: La representación geométrica del producto de los números complejos z_1 y z_2 , será el mismo complejo (el resultado al multiplicar $z_1 z_2$) representado por un vector. Dicho producto no será ni el producto escalar ni el producto vectorial que se usa usualmente en el análisis vectorial en los reales.

- (3) **Conjugado:** Es importante mencionar que para cada número complejo existe su conjugado. Sea $z = x + iy \in \mathbb{C}$, el conjugado de z es representado por $\bar{z} \in \mathbb{C}$ está definido por $\bar{z} = x - iy$, cuya representación en el plano complejo de z y su conjugado \bar{z} es

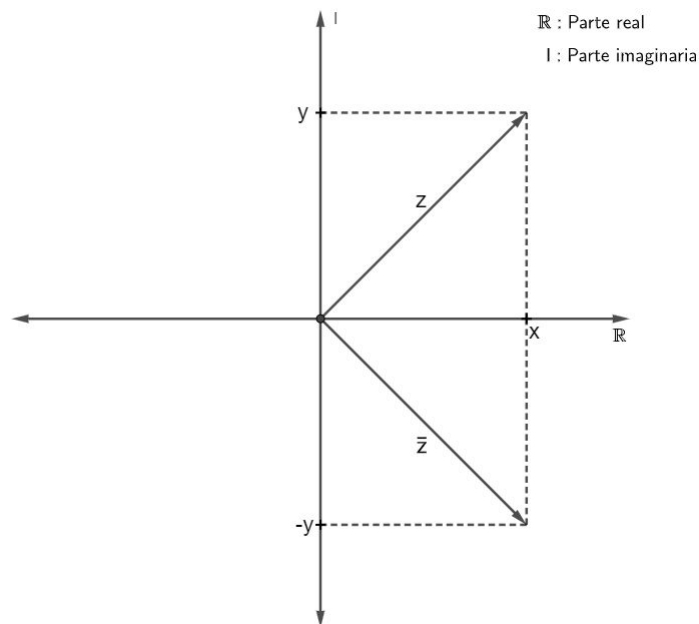


FIGURA 2.2.4. Representación del número complejo $z = x + iy$ y su conjugado $\bar{z} = x - iy$.

(a) Suma y resta de conjugados: Sea $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2 \in \mathbb{C}$,

$$\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}.$$

Demostración.

$$\begin{aligned} \overline{z_1 + z_2} &= \overline{(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2)} \\ &= \overline{(x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)} \\ &= (x_1 + x_2) - i(y_1 + y_2) \\ &= (x_1 + x_2) - iy_1 - iy_2 \\ &= (x_1 - iy_1) + (x_2 - iy_2) \\ &= \overline{z_1} + \overline{z_2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{z_1 - z_2} &= \overline{(x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2)} \\ &= \overline{x_1 + iy_1 - x_2 - iy_2} \\ &= \overline{(x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)} \\ &= (x_1 - x_2) - i(y_1 - y_2) \\ &= x_1 - x_2 - iy_1 + iy_2 \\ &= x_1 - iy_1 - x_2 + iy_2 \\ &= (x_1 - iy_1) - (x_2 - iy_2) \\ &= \overline{z_1} - \overline{z_2}. \blacksquare \end{aligned}$$

(b) Multiplicación de conjugados: Sea $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2 \in \mathbb{C}$,

$$\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \overline{z_2}$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
 \overline{z_1 z_2} &= \overline{(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)} \\
 &= \overline{(x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(y_1 x_2 + x_1 y_2)} \\
 &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) - i(y_1 x_2 + x_1 y_2) \\
 &= x_1 x_2 - y_1 y_2 - iy_1 x_2 - ix_1 y_2 \\
 &= x_1 x_2 - ix_1 y_2 - y_1 y_2 - iy_1 x_2 \\
 &= x_1(x_2 - iy_2) - y_1 i(x_2 - iy_2) \\
 &= (x_1 - iy_1)(x_2 - iy_2) \\
 &= \overline{z_1 z_2}. \blacksquare
 \end{aligned}$$

Observación: Una identidad importante de mencionar es el producto de un número complejo por su conjugado. Sea $z = x + iy \in \mathbb{C}$, $(x_2 + iy_2)$.

(c) **División de conjugados:** Sea $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2 \in \mathbb{C}$,

$$\frac{\overline{z_1}}{z_2} = \frac{\overline{z_1}}{z_2}, z_2 \neq 0.$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
 \frac{\overline{z_1}}{z_2} &= \frac{\overline{1}}{z_1 z_2} \\
 &= \frac{1}{z_1 z_2^{-1}} \\
 &= \frac{1}{(x_1 + iy_1) \left(\frac{x_2}{x_2^2 + y_2^2} - i \frac{y_2}{x_2^2 + y_2^2} \right)} \\
 &= \frac{\frac{x_1 x_2}{x_2^2 + y_2^2} - i \frac{x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{y_1 x_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}}{\left(\frac{x_1 x_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \right) + \left(i \frac{y_1 x_2}{x_2^2 + y_2^2} - i \frac{x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \right)} \\
 &= \frac{\left(\frac{x_1 x_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \right) - \left(i \frac{y_1 x_2}{x_2^2 + y_2^2} - i \frac{x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \right)}{\frac{x_1 x_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} - i \frac{y_1 x_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}} \\
 &= \frac{\frac{x_1 x_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} - i \frac{y_1 x_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}}{x_1 \left(\frac{x_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{y_2}{x_2^2 + y_2^2} \right) - iy_1 \left(\frac{x_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{y_2}{x_2^2 + y_2^2} \right)} \\
 &= \frac{\frac{x_1 x_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}}{(x_1 - iy_1) \left(\frac{x_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{y_2}{x_2^2 + y_2^2} \right)} \\
 &= \frac{1}{\overline{z_1} z_2^{-1}} \\
 &= \frac{1}{\overline{z_1} \frac{1}{z_2}} \\
 &= \frac{\overline{z_1}}{z_2} \blacksquare
 \end{aligned}$$

Observación: Debido a la propiedad $\frac{1}{z} = z^{-1}, z \neq 0$, es evidente que su conjugado es representado como $\frac{1}{\overline{z}} = \overline{z^{-1}}, z \neq 0$.

- (d) **Conjugado de un conjugado:** Sea $z = x + iy \in \mathbb{C}$. $\bar{\bar{z}} = \overline{x - iy} = x + iy = z$. También podemos ver lo siguiente,

$$\begin{aligned} z\bar{z} &= (x + iy)(x - iy) \\ z\bar{z} &= x^2 + xyi - xyi + y^2 \\ z\bar{z} &= x^2 + y^2 \\ z\bar{z} &= |z|^2. \end{aligned}$$

De lo anterior tenemos podemos obtener otras propiedades de los módulos a partir de los conjugados. Sea $z_1 z_2 \in \mathbb{C}$.

- (e) **Suma de un número complejo con su conjugado:** Sea $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Al realizar la suma de un número complejo con su conjugado, $z + \bar{z}$ obtendremos el número real $2x$ y la diferencia de un número complejo con su conjugado, $z - \bar{z}$ es el número imaginario puro $2iy$. De esta manera,

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} z &= \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \\ &= \frac{1}{2}(x + iy + x - iy) \\ &= \frac{1}{2}2x \\ &= x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} z &= \frac{1}{2i}(z - \bar{z}) \\ &= \frac{1}{2i}(x + iy - x + iy) \\ &= \frac{1}{2i}2iy \\ &= y. \end{aligned}$$

Observación: Un identidad importante de mencionar es el producto de un número complejo por su conjugado. Sea $z = x + iy \in \mathbb{C}$,

$$z\bar{z} = |z|^2.$$

Demostración.

$$\begin{aligned} z\bar{z} &= (x + iy)(x - iy) \\ &= x^2 - ixy + ixy + y^2 \\ &= x^2 + y^2 \\ &= |z|^2. \blacksquare \end{aligned}$$

- (4) **Módulo:** El módulo, o valor absoluto de un número complejo $z = x + iy = (x, y)$ se define como el real $\sqrt{x^2 + y^2}$ y se escribe $|z|$, de esta manera:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

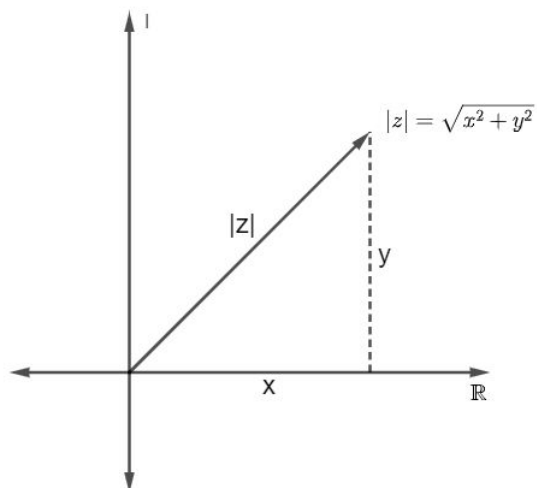


FIGURA 2.2.5. Representación del módulo de un número complejo z

Demostración. Si hablamos geoméricamente, el número $|z|$ es la **distancia** entre el punto (x, y) y el origen. Es decir, $|z|$ es la distancia que representa el vector z . Además, es importante mencionar que en los complejos la desigualdad $z_1 < z_2$ no posee ningún sentido debido a su falta de orden, pero dicha desigualdad en los complejos será válida de esta forma $|z_1| < |z_2|$, puesto que significaría que geoméricamente z_1 está más cerca del origen que z_2 . ■

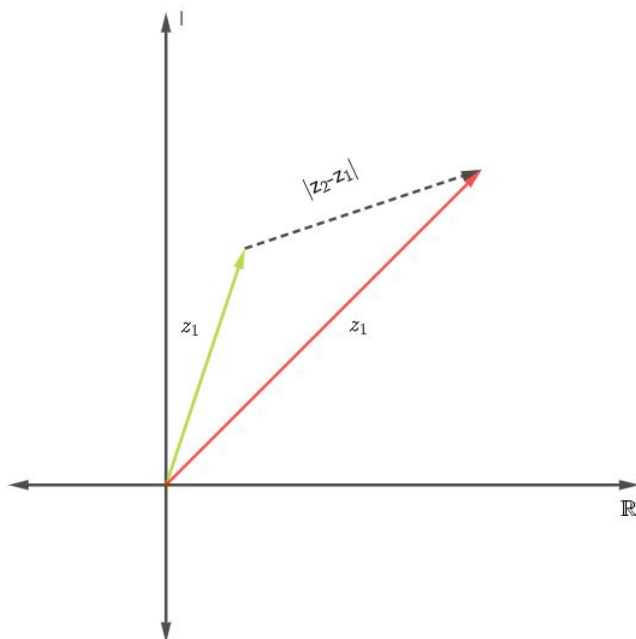


FIGURA 2.2.6. Distancia entre los complejos z_1 y z_2 .

(a) Algunas propiedades del módulo en los complejos

a. $\forall z \in \mathbb{C}, |z| \geq 0, |z| = |\bar{z}|, |Re(z)| \leq |z| \wedge |Im(z)| \leq |z|$

Demostración.

$$\begin{aligned} |z| &= \sqrt{z\bar{z}} \\ &= \sqrt{\overline{\bar{z}z}} \\ &= |\bar{z}| \end{aligned}$$

Observación: notar que $z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2$, también notar que $\overline{\bar{z}} = z$, propiedad vista anteriormente.

El módulo de z se puede escribir de la siguiente manera

$$|z| = \sqrt{(Re(z))^2 + (Im(z))^2}.$$

Como $(Im(z))^2 \geq 0$,

$$\begin{aligned} \sqrt{(Re(z))^2 + (Im(z))^2} &\geq \sqrt{(Re(z))^2} \\ &= |Re(z)| \end{aligned}$$

Así, $|z| \geq |Re(z)|$

De la misma manera

$$|z| = \sqrt{(Re(z))^2 + (Im(z))^2}.$$

Como $(Re(z))^2 \geq 0$,

$$\begin{aligned} \sqrt{(Re(z))^2 + (Im(z))^2} &\geq \sqrt{(Im(z))^2} \\ &= |Im(z)| \end{aligned}$$

Así, $|z| \geq |im(z)|$

(b) $|z| = 0$ si y solo si $z = 0$. Lo anterior si lo vemos como distancia sería: $d(z_1, z_2) = 0$ si y solo si $z_1 = z_2$.

(c) $\forall z \in \mathbb{C}, |z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$

Demostración.

$$\begin{aligned} |z_1 z_2|^2 &= z_1 z_2 \overline{z_1 z_2} \\ &= z_1 z_2 \overline{z_1} \overline{z_2} \\ &= z_1 \overline{z_1} z_2 \overline{z_2} \\ &= |z_1|^2 |z_2|^2 \\ &= (|z_1| |z_2|)^2 \end{aligned}$$

$$\therefore |z_1 z_2| = |z_1| |z_2|. \blacksquare$$

(d) Si $z \in \mathbb{C}, |z^{-1}| = |z|^{-1}$

Demostración. Tenemos $z \neq 0$, entonces $|z| \neq 0$. Si $z\bar{z} = |z|^2$, entonces

$$\frac{z\bar{z}}{|z|^2} = 1,$$

donde

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2},$$

luego

$$|z^{-1}| = \left| \frac{\bar{z}}{|z|^2} \right| = \frac{|\bar{z}|}{|z|^2} = \frac{|z|}{|z|^2} = |z|^{-1}. \blacksquare$$

(e) $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} y z_2 \neq 0, \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

Demostración. Tenemos que $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = |z_1| \left| \frac{1}{z_2} \right|$. Tenemos que probar que $\left| \frac{1}{z_2} \right| = \frac{1}{|z_2|}$, lo que fue demostrado en la propiedad anterior, de esta manera

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}. \blacksquare$$

(f) Sea $z \in \mathbb{C}$, se tiene que, $\max \{|Re(z)|, |Im(z)|\} \leq |z| \leq |Re(z)| + |Im(z)|$

Demostración.

$$\begin{aligned} |z| &= \sqrt{(Re(z))^2 + (Im(z))^2} \\ &\leq \sqrt{(Re(z))^2} + \sqrt{(Im(z))^2} \\ &= |Re(z)| + |Im(z)|. \blacksquare \end{aligned}$$

Demostración. Por otro lado, tenemos que $|Re(z)| \leq |z| y |Im(z)| \leq |z|$, entonces

$$\max \{|Re(z)|, |Im(z)|\} \leq |z|.$$

$$\therefore \max \{|Re(z)|, |Im(z)|\} \leq |z| \leq |Re(z)| + |Im(z)|. \blacksquare$$

(5) Desigualdad triangular: Por las propiedades anteriormente vistas hacen posible deducir algebraicamente la desigualdad triangular, la cual proporciona una cotas superior al módulo de la suma de dos números complejos $z_1 y z_2$:

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

Demostración. Veamos,

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2) \overline{(z_1 + z_2)} \\ &= (z_1 + z_2) (\bar{z}_1 + \bar{z}_2) \\ &= z_1 \bar{z}_1 + z_1 \bar{z}_2 + z_2 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2 \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2Re(z_1 \bar{z}_2) \\ &\leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|Re(z_1 \bar{z}_2)| \\ &\leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1 \bar{z}_2| \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1| |\bar{z}_2| \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1| |z_2| \\ &= (|z_1| + |z_2|)^2 \\ \therefore |z_1 + z_2| &\leq |z_1| + |z_2|. \blacksquare \end{aligned}$$

La desigualdad anterior se puede apreciar en la Figura 2.2.2, donde se puede apreciar que la longitud de un lado de un triángulo es menor que la suma de las longitudes de los otros dos lados.

OBSERVACIÓN. Podemos apreciar que en la desigualdad anterior, será una igualdad si los puntos z_1, z_2 y 0 son colineales.

2.3. Forma polar de los números complejos

La forma polar de un número complejo, también llamada forma trigonométrica, es expresada como un par de números reales. Sea r y θ coordenadas polares del punto (x, y) , cuyo número corresponde a un complejo no nulo $z = x + iy$. Donde podemos observar en la siguiente figura la relación entre las componentes rectangulares y polares.

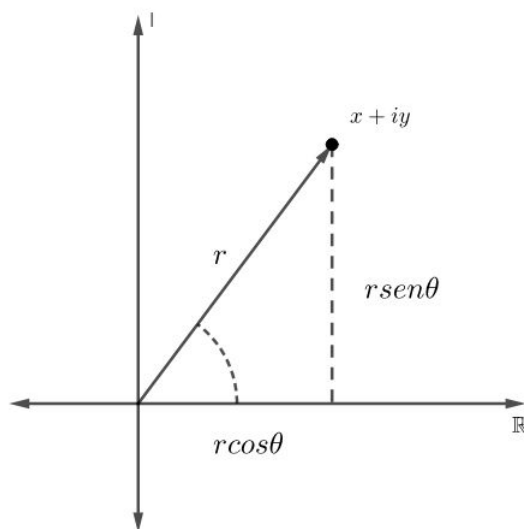


FIGURA 2.3.1. Forma Polar

A continuación, podemos observar un triángulo rectángulo creado con las coordenadas de x e y formando los catetos de un triángulo rectángulo con el ángulo θ en el origen. Por lo anterior podemos obtener las siguientes identidades trigonométricas,

$$r = |z|,$$

$$x = r \cos \theta = |z| \cos \theta$$

y

$$y = r \sin \theta = |z| \sin \theta.$$

Por lo anterior podemos notar que z puede ser expresado en forma polar como,

$$z = r (\cos \theta + i \sin \theta).$$

Tenemos $z \in \mathbb{C}$, con $z \neq 0$, existen infinitos $\theta \in \mathbb{R}$ que prueban la igualdad $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$, donde cualquier θ recibe el nombre de argumento de z y se representa como $Arg(z)$.

$$Arg(z) = \{\theta \in \mathbb{R} : r(\cos \theta + i \sin \theta)\}.$$

OBSERVACIÓN. Es importante mencionar que θ argumento de z denota al ángulo expresado en radianes que forma z con el eje real positivo. Cuando z se interpreta como un radio vector como en la siguiente figura, toma cualquier valor entre los infinitos posibles. Además, hay que notar que cuando el argumento de z con $\theta \pm 2\pi k$ con $k \in \mathbb{Z}$, obtenemos un número complejo.

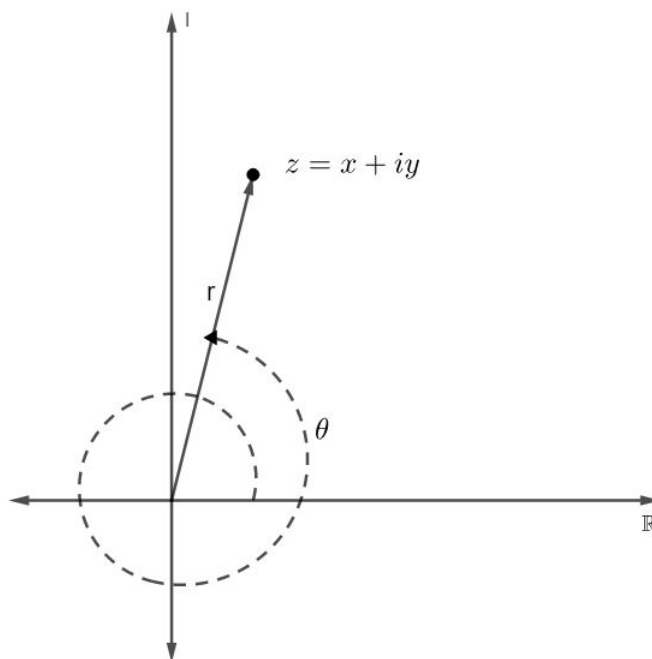


FIGURA 2.3.2. Argumento de z

Después, del argumento de z podemos analizar el producto y la división de números complejos en forma polar, sean:

$$z_1 = r_1 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1),$$

$$z_2 = r_2 (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2).$$

- Multiplicación: Podemos llegar a la fórmula de la multiplicación de la forma polar es de la siguiente manera. Tenemos,

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) r_2 (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \\ &= r_1 r_2 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \\ &= r_1 r_2 [(\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) + i (\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2)] \\ &= r_1 r_2 [\cos (\theta_1 + \theta_2) + i \sin (\theta_1 + \theta_2)]. \end{aligned}$$

- División: podemos llegar a la fórmula de la división en forma polar de la siguiente manera. Tenemos,

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)}{r_2 (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)} \\ &= \frac{r_1 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)}{r_2 (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)} \cdot \frac{(\cos \theta_2 - i \sin \theta_2)}{(\cos \theta_2 - i \sin \theta_2)} \\ &= \frac{r_1 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) (\cos \theta_2 - i \sin \theta_2)}{r_2 (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) (\cos \theta_2 - i \sin \theta_2)} \\ &= \frac{r_1 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) (\cos \theta_2 - i \sin \theta_2)}{r_2 [(\cos \theta_2)^2 + (\sin \theta_2)^2]}, \end{aligned}$$

por la identidad trigonométrica $(\cos \theta)^2 + (\sin \theta)^2 = 1$, nos queda

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) (\cos \theta_2 - i \sin \theta_2)}{r_2} \\ &= \frac{r_1}{r_2} (\cos \theta_1 \cos \theta_2 - i \cos \theta_1 \sin \theta_2 + i \sin \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2) \\ &= \frac{r_1}{r_2} [\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2 + i (\sin \theta_1 \cos \theta_2 - \cos \theta_1 \sin \theta_2)] \\ &= \frac{r_1}{r_2} [\cos (\theta_1 - \theta_2) + i \sin (\theta_1 - \theta_2)]. \end{aligned}$$

2.4. Forma exponencial

La siguiente igualdad

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

que define el símbolo $e^{i\theta}$ o $e^{\theta i}$ para todo valor real de θ , se conoce como fórmula o identidad de Euler. Al escribir un número complejo no nulo en forma polar

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta),$$

la fórmula de Euler permite expresar z más compactamente en forma exponencial:

$$z = r e^{i\theta}.$$

Demostración. La cual se inspira en el desarrollo en series de potencias de la función exponencial, a saber;

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \text{ para números reales}$$

Ahora para z un número complejo:

$$\begin{aligned} e^z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \\ e^z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} \cdots \frac{z^n}{n!} \end{aligned}$$

En particular, para $z = i\theta$, reemplazamos

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= 1 + \frac{i\theta}{1!} + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} \dots \frac{(i\theta)^n}{n!} = \\ &= 1 + i\theta + \frac{i^2\theta^2}{2!} + \frac{i^3\theta^3}{3!} + \frac{i^4\theta^4}{4!} \dots \frac{i^n\theta^n}{n!} = \\ &= 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2!} - \frac{i\theta^3}{3!} + \frac{i\theta^4}{4!} \dots \frac{i^n\theta^n}{n!}. \end{aligned}$$

Agrupando,

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} \dots\right) + i \left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} \dots\right) \\ e^{i\theta} &= \cos\theta + i\sin\theta. \end{aligned}$$

En consecuencia, forma exponencial:

$$z = re^{i\theta}. \blacksquare$$

2.5. Potencias de un número complejo

Las potencias enteras de un número complejo no nulo $z = re^{i\theta}$ vienen dadas por

$$z^n = (re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Como $z^{n+1} = zz^n$ cuando $n = 1, 2, \dots$, esto se comprueba fácilmente para valores positivos de n por inducción, con ayuda de la expresión $z_1 z_2 = r_1 r_2 \exp[i(\theta_1 + \theta_2)]$, para el producto de números complejos en forma exponencial. La ecuación es válida también para $n = 0$ con el convenio de que $z^0 = 1$. Si $n = -1, -2, \dots$, por otro lado, definimos z^n en términos del inverso multiplicativo de z escribiendo $z^n = (z^{-1})^m$, donde $m = -n = 1, 2, \dots$. Entonces, como la ecuación $z^n = r^n e^{in\theta}$ es válida para potencias enteras positivas, se sigue de la forma exponencial de z^{-1}

$$z^n = \left[\frac{1}{r} e^{i(-\theta)}\right]^m = \left(\frac{1}{r}\right)^m e^{im(-\theta)} = r^n e^{in\theta}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Por lo tanto, la ecuación también es válida para toda potencia entera. si $r = 1$, la ecuación se convierte en

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Cuando se expresa en la forma

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta \quad n \in \mathbb{Z},$$

esta se conoce como la fórmula de De Moivre.

Esta relación es útil para cálculo de raíces de números complejos no nulos, nos da un algoritmo bastante eficiente para hallar la potencia n-ésima de cualquier número complejo en forma polar.

Según lo observado, las potencias de un número complejo se calculan de manera similar a las potencias de un número real. Cuando las potencias son negativas en un número complejo se pueden expresar en términos de las potencias inversas de ese número complejo.

2.6. Raíces de un número complejo

Al resolver la ecuación

$$z^n = 1$$

donde n es un número natural, $n \geq 2$ y $z \neq 0$, es un número complejo conocido, para hallar las raíces n -ésimas de la unidad. Se escribe la ecuación $z^n = r^{i\theta}$, buscamos valores de r y θ de forma que si $z = re^{i\theta}$

$$(e^{i\theta})^n = 1,$$

es decir,

$$r^n e^{in\theta} = 1e^{i0}.$$

$$r^n = 1 \quad y \quad n\theta = 0 + 2k\pi,$$

donde k es un número entero. Por lo tanto, $r = 1$ y $\theta = 2k\pi/n$; y se deduce que los números complejos

$$z = e^{i(2k\pi/n)} \quad k \in \mathbb{Z}$$

son raíces n -ésimas de la unidad.

Para aclarar, las raíces de un número complejo, son los valores complejos que al ser elevados a una cierta potencia n , estos dan como el resultado del número complejo original, para calcular estas raíces es útil hacerlos en su forma polar.

2.7. Topología del plano complejo

En el conjunto de los números complejos, al igual que en otros conjuntos tales como los números reales, es necesario definir una métrica, la cual se definirá a partir del concepto de módulo. Se define el disco abierto centrado en z_0 y de radio ε como el conjunto de todos aquellos puntos $z \in \mathbb{C}$ satisfaciendo

$$|z - z_0| < \varepsilon.$$

Lo denotaremos por

$$D(z_0, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \varepsilon\}.$$

Gráficamente,

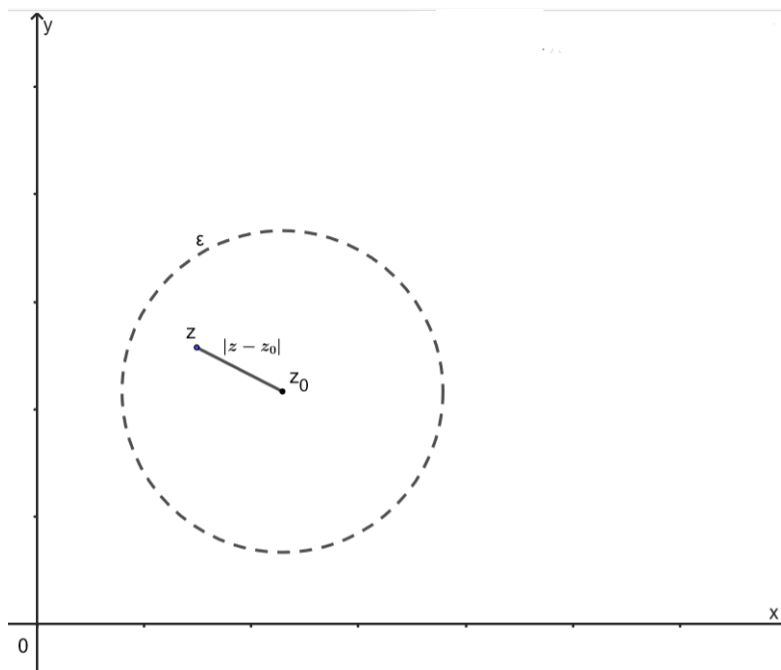


FIGURA 2.7.1. Representación gráfica de los números complejos

Si $0 < |z - z_0| < \varepsilon$, se llama entorno punteado de z_0 . Un entorno o vecindad de z_0 es un conjunto A que contiene a $D(z_0, \varepsilon)$, para algún $\varepsilon > 0$.

Cuando se dice que z_0 es un punto interior de un conjunto S siempre que exista algún entorno o vecindad de z_0 que esté contenida totalmente en S ; se le llamará un punto exterior de S cuando halla un entorno o vecindad de z_0 cuando no contenga puntos de S . En el caso que z_0 no sea ninguno de los dos tipos, se le llamará punto frontera de S , donde el punto frontera contiene tantos puntos en el interior como el exterior de S .

Ejemplo, $|z| = 1$, en la frontera de los conjuntos, i

$$(2.7.1) \quad |z| < 1 \text{ y } |z| \leq 1.$$

Si todos los puntos de z del conjunto S son puntos interiores, entonces S es un conjunto abierto, en cambio, cuando un conjunto es cerrado si su complemento es el conjunto abierto, es decir, si contiene todos sus puntos fronteras.

Hay ocasiones donde el conjunto no es abierto, ni cerrado, como se observa en la figura. Para que este conjunto no sea abierto, debe contener alguno de sus puntos fronteras; y para no ser cerrado debe haber algún punto frontera que no esté en él. Observemos el disco punteado $0 < |z| \leq 1$, no es abierto ni cerrado, en el conjunto de los números complejos.

Un conjunto abierto S es conexo si cada par de punto z_1 y z_2 se pueden unir por una línea poligonal definida por $\lambda_{z_1+1}, \lambda_{z_2-1}$ (como resultado la recta poligonal), la que consiste en un número finito de segmentos sucesivos, la cual está enteramente contenida en S . El conjunto $z < 1$ esta contenida, es conexo. El anillo $1 < |z| < 2$ es conexo y que S es abierto y conexo. Los conjuntos que son abiertos y conexos son conocido como dominio. (Un conjunto abierto no vacío con la propiedad de que dos puntos cualesquiera del mismo pueden unirse por una curva sin salirse del conjunto se llama un dominio).

Se le llama región al dominio junto con algunos, ninguno o todos sus puntos de frontera.

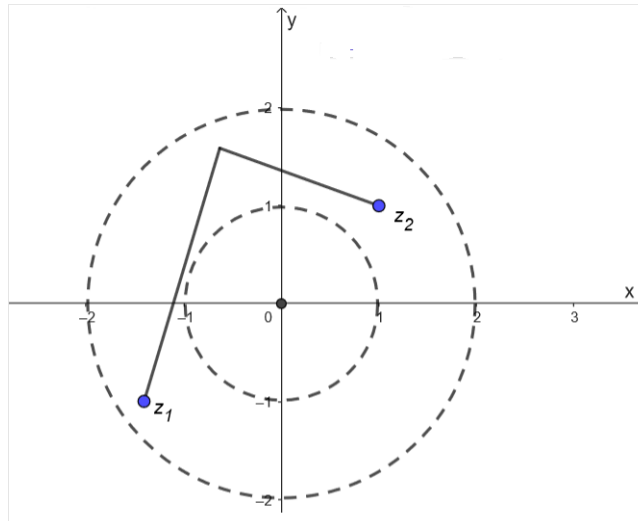


FIGURA 2.7.2. Conjunto abierto y conexo

Un conjunto S es acotado, cuando todo punto de S está dentro de algún círculo, $|z| = R$, en cualquier otro caso, el conjunto es no acotado.

En el ejemplo, (2.7.1) ambos conjuntos son regiones acotadas.

Conceptos preliminares:

Un punto z_0 se llama punto de acumulación de un conjunto S , cuando cada entorno centrado en z_0 contiene al menos un punto de S distinto de z_0 . Claramente, si el conjunto es cerrado, contiene todos sus puntos de acumulación.

Análogamente, diremos que $z_0 \in \mathbb{C}$ es un punto de acumulación de un conjunto no vacío $S \subseteq \mathbb{C}$, si para cada $r > 0$ existe $z_n \in S$, $z_n \neq z_0$, de modo que,

$$|z_n - z_0| < r.$$

Equivalentemente, si existe una sucesión $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} = (z_n) = (z_n)_{n \geq 1}$ de elementos de S , $z_n \neq z_0$ para cada $n \in \mathbb{N}$, de modo que,

$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0$. Si para todo $\varepsilon > 0$ existe \mathbb{N} que cumpla

$$n \geq \mathbb{N} \Rightarrow |z_n - z_0| < \varepsilon.$$

Además, si un conjunto cumple con estas dos propiedades, es decir, es cerrado y acotado, entonces se considera compacto en los números complejos.

CAPÍTULO 3

Funciones Analíticas de Variable Compleja

3.1. Funciones de una Variable Compleja

Sea S un subconjunto de \mathbb{C} . Se define f una función de variable compleja a una aplicación $f : S \rightarrow \mathbb{C}$. El número w se llama valor de f en z y se denota como $f(z)$; esto es; $w = f(z)$. En este caso S representa el dominio de f .

Supongamos que $w = u + iv$ es el valor de una función f en $z = x + iy$, así:

$$u + iv = f(x + iy)$$

donde u y v son funciones reales que dependen de x e y . Es decir, $u = u(x, y)$ y $v = v(x, y)$.

3.2. Límites

Sea f una función compleja definida en todos los puntos z de un entorno de $z_0 \in \mathbb{C}$, siendo éste un punto de acumulación de S . Se afirma que el límite de $f(z)$, cuando z tiende a z_0 , es un número w_0 , lo que se denota,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$$

si para cada número positivo ε , existe un número positivo δ , tal que

$$|f(z) - w_0| < \varepsilon \text{ siempre que } 0 < |z - z_0| < \delta.$$

Geoméricamente, se dice que para cada ε entorno $|w - w_0| < \varepsilon$ de w_0 , existe un entorno δ , $0 < |z - z_0| < \delta$ de z_0 tal que todo punto z en él tiene una imagen w que está en el entorno ε de tal modo que cuando z se esté acercando a z_0 , la imagen w se acercará a w_0 .

Esto, se puede reescribir de la siguiente forma:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(z \in D(z_0, \delta) \text{ tal que } \{z_0\} \cap S \Rightarrow w = f(z) \in D(w_0, \varepsilon).$$

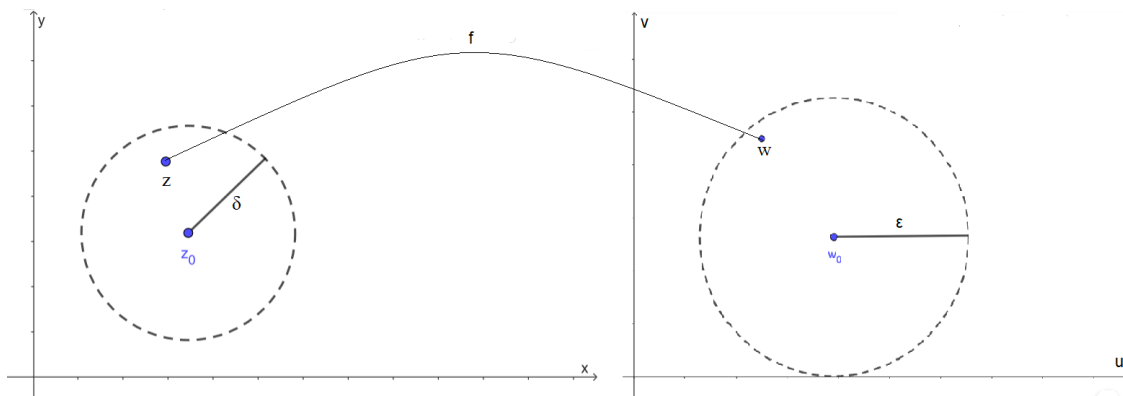


FIGURA 3.2.1. Límite de f .

Se observa que la variable z se aproxima a z_0 , pero nunca toma este valor. También, se ve que z debe siempre pertenecer al dominio de la función f .

Para límites en los complejos, resulta que se puede trabajar con el concepto de límite de funciones de varias variables, es decir, tanto para la parte real como la parte imaginaria,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0 \iff \begin{cases} \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(x,y) = \text{Re}(w_0) \\ \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v(x,y) = \text{Im}(w_0) \end{cases}$$

Teorema 1. Supongamos que $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, $z_0 = x_0 + iy_0$ y $w_0 = u_0 + iv_0$. Entonces,

$$(3.2.1) \quad \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0 \iff \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(x,y) = u_0 \text{ y } \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v(x,y) = v_0.$$

Demostración. De acuerdo con la definición de límite, para cada número positivo ε existe un número positivo δ tal que

$$|(u - u_0) + i(v - v_0)| < \varepsilon$$

siempre que $x + iy \in D$ y

$$0 < |(x - x_0) + i(y - y_0)| < \delta.$$

Como

$$|u - u_0| \leq |(u - u_0) + i(v - v_0)| \text{ y } |v - v_0| \leq |(u - u_0) + i(v - v_0)|$$

si

$$0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta,$$

se tiene que $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(x,y) = u_0$ y $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v(x,y) = v_0$.

Recíprocamente, dado (3.2.1) para el mismo $\varepsilon > 0$ podemos encontrar $\delta_1 > 0$ y $\delta_2 > 0$ tales que:

$$|u - u_0| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ si } 0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta_1,$$

del mismo modo,

$$|v - v_0| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ si } 0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta_2.$$

Sea δ el menor de los número δ_1 y δ_2 . Dado que,

$$|u - u_0| + |v - v_0| \leq |(u - u_0) + i(v - v_0)|,$$

se concluye que

$$|(u + iv) - (u_0 + iv_0)| < \varepsilon$$

de igual modo

$$0 < |(x + iy) - (x_0 + iy_0)| < \delta.$$

Por lo tanto

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = u_0 + iv_0 = w_0 \blacksquare$$

Teorema 2. Supongamos que,

$$(3.2.2) \quad \lim_{z \rightarrow z_0} f_1(z) = w_0 \text{ y } \lim_{z \rightarrow z_0} f_2(z) = W_0.$$

Entonces

$$(3.2.3) \quad \lim_{z \rightarrow z_0} [f_1(z) + f_2(z)] = \lim_{z \rightarrow z_0} f_1(z) + \lim_{z \rightarrow z_0} f_2(z) = w_0 + W_0.$$

$$(3.2.4) \quad \lim_{z \rightarrow z_0} [f_1(z)f_2(z)] = \lim_{z \rightarrow z_0} f_1(z) \cdot \lim_{z \rightarrow z_0} f_2(z) = w_0 W_0.$$

Y, si $W_0 \neq 0$, se tiene

$$(3.2.5) \quad \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f_1(z)}{f_2(z)} = \frac{w_0}{W_0}.$$

Demostraciones. Para verificar vamos a suponer que $z_0 = x_0 + iy_0$, $f_1(z) = u_1(x, y) + iv_1(x, y)$ y $f_2(z) = u_2(x, y) + iv_2(x, y)$.

Dado que los límites $\lim_{z \rightarrow z_0} f_1(z)$ y $\lim_{z \rightarrow z_0} f_2(z)$ existen, podemos inferir que las partes reales e imaginarias de estas funciones, es decir, $u_1(x, y)$, $v_1(x, y)$, $u_2(x, y)$ y $v_2(x, y)$, también tienen límites existentes cuando (x, y) tiende a (x_0, y_0) . Entonces, los límites de $u_1(x, y) + u_2(x, y)$ y $v_1(x, y) + v_2(x, y)$, que corresponden a las partes reales e imaginarias de $f_1 + f_2$, respectivamente, también existen cuando (x, y) tiende a (x_0, y_0) .

Así, usando las propiedades del límite de funciones de varias variables reales, tenemos que, por Teorema 1:

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} (f_1(z) + f_2(z)) &= \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} (u_1(x, y) + u_2(x, y)) \\ &+ i \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} (v_1(x, y) + v_2(x, y)) \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u_1(x, y) + \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u_2(x, y) \\ &+ i \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v_1(x, y) + i \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v_2(x, y) \\ &= \left(\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u_1(x, y) + i \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v_1(x, y) \right) \\ &+ \left(\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u_2(x, y) + i \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v_2(x, y) \right) \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} f_1(z) + \lim_{z \rightarrow z_0} f_2(z) \\ &= w_0 + W_0. \blacksquare \end{aligned}$$

Para verificar la propiedad (3.2.4), escribamos

$$\begin{aligned} f_1(z)f_2(z) &= (u_1(x, y) + iv_1(x, y))(u_2(x, y) + iv_2(x, y)) \\ &= u_1(x, y)u_2(x, y) + iu_1(x, y)v_2(x, y) \\ &+ iv_1(x, y)u_2(x, y) - v_1(x, y)v_2(x, y) \\ &= u_1(x, y)u_2(x, y) - v_1(x, y)v_2(x, y) \\ &+ i(u_1(x, y)v_2(x, y) + v_1(x, y)u_2(x, y)). \end{aligned}$$

Como existen los límites de las partes reales e imaginarias de $f_1(z)$ y $f_2(z)$ cuando (x, y) tiende a (x_0, y_0) , entonces también existen los límites de la parte real e imaginaria de $f_1 \cdot f_2$ en el punto z_0 .

Utilizando el Teorema 1, se tiene,

$$\begin{aligned}
 \lim_{z \rightarrow z_0} [f_1(z)f_2(z)] &= \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} (u_1(x,y)u_2(x,y) - v_1(x,y)v_2(x,y)) \\
 &+ i \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} (u_1(x,y)v_2(x,y) + v_1(x,y)u_2(x,y)) \\
 &= \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u_1(x,y) \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u_2(x,y) \\
 &- \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v_1(x,y) \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v_2(x,y) \\
 &+ i \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u_1(x,y) \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v_2(x,y) \\
 &+ i \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v_1(x,y) \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u_2(x,y) \\
 &= \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u_1(x,y) \left[\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u_2(x,y) \right. \\
 &+ i \left. \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v_2(x,y) \right] + i \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v_1(x,y) \\
 &\left[\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u_2(x,y) + i \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v_2(x,y) \right] \\
 &= \left[\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u_2(x,y) + i \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v_2(x,y) \right] \\
 &\left[\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u_1(x,y) + i \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v_1(x,y) \right] \\
 &= \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u_2(x,y) + i \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v_2(x,y) \\
 &= \lim_{z \rightarrow z_0} f_1(z) \cdot \lim_{z \rightarrow z_0} f_2(z) \\
 &= w_0 W_0. \blacksquare
 \end{aligned}$$

Por último, para verificar (3.2.5) tenemos que:

$$\begin{aligned}
 \frac{f_1(z)}{f_2(z)} &= \frac{u_1(x,y) + iv_1(x,y)}{u_2(x,y) + iv_2(x,y)} \\
 &= \frac{u_1(x,y)u_2(x,y) - iu_1(x,y)v_2(x,y) + iv_1(x,y)u_2(x,y) + v_1(x,y)v_2(x,y)}{u_2^2(x,y) + v_2^2(x,y)} \\
 &= \frac{u_1(x,y)u_2(x,y) + v_1(x,y)v_2(x,y) - i(u_1(x,y)v_2(x,y) - v_1(x,y)u_2(x,y))}{u_2^2(x,y) + v_2^2(x,y)} \\
 &= \frac{u_1(x,y)u_2(x,y) + v_1(x,y)v_2(x,y)}{u_2^2(x,y) + v_2^2(x,y)} - i \frac{u_1(x,y)v_2(x,y) - v_1(x,y)u_2(x,y)}{u_2^2(x,y) + v_2^2(x,y)}
 \end{aligned}$$

Como existen los límites de $u_1(x,y)$, $v_1(x,y)$, $u_2(x,y)$ y $v_2(x,y)$, entonces existen los límites de la parte real e imaginaria de $\frac{f_1}{f_2}$, cuando (x,y) tiende a (x_0,y_0) . Por consiguiente,

$$\begin{aligned}
 \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f_1(z)}{f_2(z)} &= \frac{\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u_1(x,y)u_2(x,y) + \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v_1(x,y)v_2(x,y)}{\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} (u_2^2(x,y) + v_2^2(x,y))} \\
 &- \frac{\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u_1(x,y)v_2(x,y) + i \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v_1(x,y)u_2(x,y)}{\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} (u_2^2(x,y) + v_2^2(x,y))} \\
 &= \left\{ \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u_1(x,y) \left[\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u_2(x,y) - i \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v_2(x,y) \right] \right. \\
 &+ \left. i \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v_1(x,y) \left[\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u_2(x,y) - i \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v_2(x,y) \right] \right\} \\
 &/ \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} (u_2^2(x,y) + v_2^2(x,y)) \\
 &= \frac{\left\{ \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} [u_1(x,y) + iv_1(x,y)] \right\} \left\{ \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} [u_2(x,y) - iv_2(x,y)] \right\}}{\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} [u_2(x,y) + iv_2(x,y)] \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} [u_2(x,y) - iv_2(x,y)]} \\
 &= \frac{\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} [u_1(x,y) + iv_1(x,y)]}{\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} [u_2(x,y) + iv_2(x,y)]} \\
 &= \frac{\lim_{z \rightarrow z_0} f_1(z)}{\lim_{z \rightarrow z_0} f_2(z)} \\
 &= \frac{w_0}{W_0}. \blacksquare
 \end{aligned}$$

3.3. Límites y el Punto Infinito

Se incluye el plano complejo con el punto del infinito, denotado por ∞ , dado como en el caso de las funciones de variable real, se puede usar límites relacionados con él. El plano complejo junto con este punto se llama plano complejo extendido.

La inclusión del punto del infinito en el plano complejo extendido permite considerar límites relacionados con ∞ y analizar el comportamiento de las funciones complejas cerca de este punto. Esto puede ser útil en situaciones en las que la función tiende al infinito a medida que la variable compleja se aleja hacia valores grandes o cuando se estudian singularidades en el infinito.

Dada una función $f : S \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, se dice que $f(z)$ tiene *límite finito* w_0 cuando z tiende al infinito (∞) si, para cualquier $\varepsilon > 0$, existe un $M > 0$ tal que $|f(z) - w_0| < \varepsilon$, para todo z en el dominio de f , con $|z| > M$ y $z \in S$. Es decir:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M > 0 \text{ tal que } |z| > M \wedge z \in S \Rightarrow |f(z) - w_0| < \varepsilon.$$

Dada una función $f : S \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, con S y $z_0 \in \mathbb{C}$, se dice que $f(z)$ tiene *límite infinito* cuando z tiende a z_0 si, para cualquier $M > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que si $0 < |z - z_0| < \delta$ y $z \in S$, entonces $|f(z)| > M$. Es decir:

$$\forall M > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que } 0 < |z - z_0| < \delta \wedge z \in S \Rightarrow |f(z)| > M.$$

Dada una función $f : S \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, con $M \in \mathbb{R}$, se dice que $f(z)$ tiene *límite infinito en el infinito* cuando z tiende a infinito si, para cualquier $M > 0$, existe un $K > 0$ tal que si $|z| > K$ y $z \in S$, entonces $|f(z)| > M$. Es decir:

$$\forall M > 0, \exists K > 0 \text{ tal que } |z| > K \wedge z \in S \Rightarrow |f(z)| > M.$$

3.4. Continuidad

Una función $f(z)$ es continua en un punto z_0 si cumple con las condiciones de continuidad en el punto z_0 :

$$(3.4.1) \quad \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \text{ existe,}$$

$$(3.4.2) \quad f(z_0) \text{ existe,}$$

$$(3.4.3) \quad \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0).$$

Si no cumple con lo anterior mencionado, se dice que $f(z)$ es discontinua en z_0 .

La condición (3.4.3) implica tanto la existencia del límite como la existencia del valor de la función en el punto en consideración. Esta dice que para cada número positivo ε existe un número positivo δ tal que,

$$(3.4.4) \quad |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon \text{ si } |z - z_0| < \delta.$$

Ejemplo. Sea la función

$$f(z) = xy^2 + i(2x - y).$$

Para demostrar esto, podemos verificar que ambas componentes, la parte real $u(x, y)$ y la parte imaginaria $v(x, y)$, son funciones continuas en todo punto (x, y) .

Las funciones $u(x, y) = xy^2$ y $v(x, y) = 2x - y$ son polinomios en x e y , lo que implica que son funciones continuas en todo punto del plano complejo. Los polinomios son conocidos por ser funciones continuas en todo su dominio, y esto se aplica tanto para la parte real como para la parte imaginaria de la función $f(z)$.

Por lo tanto, podemos concluir que la función $f(z) = xy^2 + i(2x - y)$ es continua en todo el plano complejo.

Propiedades.

Dada una función $f : S \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ se dice que es continua en una región S si $f(z)$ es continua en cada punto $z_0 \in S$.

Si consideramos dos funciones $f(z)$ y $g(z)$ continuas en un punto z_0 , se tienen las siguientes propiedades:

- (1) $f(z) + g(z)$ es continua en z_0 .
- (2) $f(z)g(z)$ es continua en z_0 .
- (3) $\frac{f(z)}{g(z)}$ es continua en z_0 , siempre que $g(z_0) \neq 0$.
- (4) Si f es continua en $g(z_0)$, $f \circ g$ es continua en (z_0) .

Demostración. Si $f(z)$ y $g(z)$ son dos funciones continuas en una región S , entonces mostraremos que también es continua en el punto $z_0 \in S$, a través de límites.

1. Para demostrar que $f(z) + g(z)$ es continua en z_0 , utilizaremos la propiedad de los límites de sumas. Tenemos:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (f(z) + g(z)) = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) + \lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = f(z_0) + g(z_0),$$

por lo tanto, $f(z) + g(z)$ es continua en z_0 .

2. Para demostrar que $f(z)g(z)$ es continua en z_0 , utilizaremos la propiedad de los límites de productos. Tenemos:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)g(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = f(z_0)g(z_0),$$

por lo tanto, $f(z)g(z)$ es continua en z_0 .

3. Para demostrar que $\frac{f(z)}{g(z)}$ es continua en z_0 , utilizaremos la propiedad de los límites de cocientes. Si $g(z_0) \neq 0$, tenemos:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)}{\lim_{z \rightarrow z_0} g(z)} = \frac{f(z_0)}{g(z_0)},$$

por lo tanto $\frac{f(z)}{g(z)}$ es continua en z_0 .

4. Para demostrar que f es continua en $g(z_0)$. Diremos que, como $f(z)$ es continua, por definición de continuidad, se tiene

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(g(z)) = f(g(z_0)),$$

a la vez, por definición de composición

$$f(g(z_0)) = (f \circ g)(z_0),$$

al mantener la igualdad, se tiene que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(g(z)) = f(g(z_0)) = (f \circ g)(z_0),$$

así, queda demostrado que $f \circ g$ es continua en z_0 .

3.5. Derivadas

Al igual que las funciones en variable real, la derivada de $f(z)$ en z_0 se denota por $f'(z_0)$, por definición, tenemos:

$$(3.5.1) \quad f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

siempre que el límite exista. Si $f'(z_0)$ existe, entonces, se dice que f es diferenciable en z_0 , cuando existe la derivada en z_0 .

Ejemplo.

Se tiene $f(z) = z^2$ es diferenciable en $z = 4$, ya que:

$$f'(4) = \lim_{z \rightarrow 4} \frac{z^2 - 16}{z - 4} = \lim_{z \rightarrow 4} \frac{(z + 4)(z - 4)}{z - 4} = \lim_{z \rightarrow 4} (z + 4) = 8$$

por lo tanto, existe.

3.5.1. Fórmulas de Derivación. La definición de la derivada en (3.5.1) es semejante a la definición de la derivada en los reales, del mismo modo, las formulas de derivación son equivalentes. La derivada de una función $f(z)$ se denota por $f'(z)$ o por $\frac{d}{dz}[f(z)]$, el lector puede trabajar con la notación más conveniente.

Como las definiciones son equivalentes en los reales y en los complejos, se utilizan las mismas reglas de la derivación, las cuales son las siguientes:

- (1) $(cf(z))' = cf'(z)$, para $c \in \mathbb{C}$.
- (2) $(f(z) + g(z))' = f'(z) + g'(z)$.
- (3) $(f(z) \cdot g(z))' = f'(z) \cdot g(z) + f(z) \cdot g'(z)$.

$$(4) \left[\frac{f(z)}{g(z)} \right]' = \frac{f'(z) \cdot g(z) - f(z) \cdot g'(z)}{g^2(z)}.$$

(5) Regla de la cadena, esta se dispone para derivar funciones compuestas. Supongamos que f tiene derivada en z_0 y que g tiene derivada en el punto $f(z_0)$. En este caso, la función $F(z) = g[f(z_0)]$ tiene derivada en z_0 ,

$$F'(z_0) = g'[f(z_0)]f'(z_0).$$

Al denotar que $w_1 = f(z)$ y $w_2 = g(w_1)$, de tal modo que $w_2 = F(z)$, la regla de la cadena se entiende por:

$$\frac{dw_2}{dz} = \frac{dw_2}{dw_1} \cdot \frac{dw_1}{dz},$$

o escrito de otra forma

$$[g(f(z))]' = g'(f(z)) \cdot f'(z).$$

Ahora veamos si una función f es derivable en un punto z_0 , entonces f es continua en z_0 . Para demostrarlo se asume que el límite (3.5.1) existe y que una función f es continua en z_0 si (3.4.3) existe.

Como f es derivable en z_0 , se puede escribir la diferencia $f(z) - f(z_0)$ de la siguiente forma:

$$f(z) - f(z_0) = \left[\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right] (z - z_0),$$

aplicando el límite cuando z se acerca a z_0 :

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} [f(z) - f(z_0)] &= \lim_{z \rightarrow z_0} \left[\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right] \cdot \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \\ &= f'(z) \cdot 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, queda demostrado que $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$, entonces se asegura que f es continua en z_0 cuando f es derivable en z_0 . ■

Hay algunas derivadas de las principales funciones complejas como las siguientes:

Se dice que $f(z) = z^n$ es derivable en todo $z \in \mathbb{C}$ y $(z^n)' = n \cdot z^{n-1}$

Demostración. Para la demostración utilizaremos el método por inducción, vamos a considerar n como un número natural. Primero, vamos a verificar para $n = 1$, tenemos

$$f(z) = z^1 = z$$

su derivada $f'(z)$, es

$$f'(z) = 1 \cdot z^{1-1} = 1.$$

Ahora, asumimos que la afirmación es verdadera para $n = k$, supongamos que $f(z) = z^k$ es derivable en todo $z \in \mathbb{C}$, se tiene $(z^k)' = k \cdot z^{k-1}$.

Demostraremos que es verdadero para $n = k + 1$. Consideremos $g(z) = z^{k+1}$, entonces $g(z) = f(z) \cdot z$ donde $f(z) = z^k$, utilizando la regla del producto, nombrada anteriormente, se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
 (g(z))' &= (f(z) \cdot z)' \\
 &= f'(z) \cdot z + z' \cdot f(z) \\
 &= f'(z) \cdot z + 1 \cdot f(z) \\
 &= k \cdot z^{k-1} \cdot z + z^k \\
 &= (k+1) \cdot z^k.
 \end{aligned}$$

Hemos demostrado que si es verdadera para $n = k$, entonces también lo es para $n = k + 1$, podemos concluir, por el principio de inducción, que $f(z) = z^n$ es derivable en todo $z \in \mathbb{C}$. ■

Por mencionar algunas de las derivadas más conocidas, se tienen:

- (1) $f(z) = e^z$ es derivable en todo $z \in \mathbb{C}$ y $(e^z)' = e^z$.
- (2) $f(z) = \cos z$ es derivable en todo $z \in \mathbb{C}$ y $(\cos z)' = -\sin z$.
- (3) $f(z) = \sin z$ es derivable en todo $z \in \mathbb{C}$ y $(\sin z)' = \cos z$.

3.6. Ecuaciones de Cauchy-Riemann

Las ecuaciones de Cauchy-Riemann son necesarias para saber que una función f tiene derivada. Entonces, se define $f : S \rightarrow \mathbb{C}$, con S un conjunto abierto. Se escribe $f = u(x, y) + iv(x, y)$.

Supongamos que $z = x + iy$ es un punto de S y $f'(z)$ existe, entonces,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{y} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

la cual se les conoce como las condiciones de Cauchy-Riemann

Demostración.

Supongamos que f es una función en un punto z , donde $f(z) = (x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$ que es derivable en un punto $z_0 \in \mathbb{C}$, con $z_0 = (x_0, y_0) = x_0 + iy_0$. Como es derivable y existe, se tiene que:

$$f'(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{u(x, y) + iv(x, y) - u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0)}{(x - x_0) + i(y - y_0)}.$$

Como los límites direccionales existen tanto en \mathbb{R}^2 como en \mathbb{C} , entonces existen los límites direccionales en $x = x_0$ y de $y = y_0$, por lo tanto se tiene que:

Cuando $y = y_0$,

$$\begin{aligned}
 f'(z_0) &= \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{u(x, y_0) + iv(x, y_0) - u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0)}{(x - x_0) + i(y_0 - y_0)} \\
 &= \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{u(x, y_0) - u(x_0, y_0) + iv(x, y_0) - iv(x_0, y_0)}{(x - x_0)} \\
 &= \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{u(x, y_0) - u(x_0, y_0)}{(x - x_0)} + i \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{v(x, y_0) - v(x_0, y_0)}{(x - x_0)} \\
 (3.6.1) \quad &= \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}.
 \end{aligned}$$

Cuando $x = x_0$,

$$\begin{aligned}
 f'(z_0) &= \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{u(x_0, y) + iv(x_0, y) - u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0)}{(x_0 - x_0) + i(y - y_0)} \\
 &= \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{u(x_0, y) - u(x_0, y_0) + iv(x_0, y) - iv(x_0, y_0)}{i(y - y_0)} \\
 &= \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{u(x_0, y) - u(x_0, y_0)}{i(y - y_0)} + i \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{v(x_0, y) - v(x_0, y_0)}{i(y - y_0)} \\
 &= \frac{1}{i} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \\
 (3.6.2) \quad &= -i \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}.
 \end{aligned}$$

Se igualan las ecuaciones (3.6.1) y (3.6.2) para verificar de $f'(z)$ y se obtiene lo siguiente:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = -i \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y},$$

de esto se pueden igualar tanto la parte real como la imaginaria y se llega a las ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y} \\
 \frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{\partial u}{\partial y}
 \end{aligned}$$

escrito de otra forma, es:

$$\begin{aligned}
 u_x &= v_y \\
 v_x &= -u_y. \blacksquare
 \end{aligned}$$

(3.6.3)

Teorema. Se puede expresar las ecuaciones en forma polar de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
 u_r &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r}, \\
 u_\theta &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta}, \\
 v_r &= \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r}, \\
 v_\theta &= \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta}
 \end{aligned}$$

donde se obtiene la siguiente forma de las ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \\
 \frac{\partial v}{\partial r} &= -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}.
 \end{aligned}$$

Demostración. se define la función $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ donde $x = r \cos \theta$ y $y = r \sin \theta$, entonces se tiene para u_r

$$(3.6.4) \quad \begin{aligned} u_r &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} \\ &= u_x \cos \theta + u_y \sin \theta. \end{aligned}$$

Ahora, para u_θ

$$(3.6.5) \quad \begin{aligned} u_\theta &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ &= -u_x r \sin \theta + u_y r \cos \theta. \end{aligned}$$

Ahora, para encontrar v_r

$$(3.6.6) \quad \begin{aligned} v_r &= \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} \\ &= v_x \cos \theta + v_y \sin \theta. \end{aligned}$$

Por último, vamos hacer lo mismo para v_θ

$$\begin{aligned} v_\theta &= \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ &= -v_x r \sin \theta + v_y r \cos \theta. \end{aligned}$$

Por ecuaciones de Cauchy-Riemann en (3.6.3) se obtiene lo siguiente:
Para (3.6.4) al reemplazar con (3.6.3) resulta,

$$\begin{aligned} u_r &= u_x \cos \theta + u_y \\ u_r &= v_y \cos \theta - v_x \sin \theta. \end{aligned}$$

Al dividir por r a v_θ se obtiene la igualdad con u_r

$$\frac{1}{r} v_\theta = v_y \cos \theta - v_x \sin \theta,$$

por lo tanto, se obtiene

$$u_r = \frac{1}{r} v_\theta$$

análogamente:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}$$

y para (3.6.6) al utilizar la igualdad en (3.6.3) queda como,

$$\begin{aligned} v_r &= v_x \cos \theta + v_y \sin \theta \\ &= -u_y \cos \theta + u_x \sin \theta, \end{aligned}$$

luego, al dividir por r a $-u_\theta$, se obtiene la igualdad con v_r

$$-\frac{1}{r} u_\theta = -u_y \cos \theta + u_x \sin \theta,$$

por lo tanto, se obtiene que

$$v_r = -\frac{1}{r} u_\theta,$$

equivalentemente:

$$\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}$$

estas son las ecuaciones de Cauchy-Riemann en coordenadas polares. ■

Lo anteriormente analizado supusimos que $f'(z_0)$ existía, debido a que satisfacen la ecuaciones de Cauchy-Riemann en z_0 pero no basta para asegurar la existencia de la derivada, es por esto que se introduce el siguiente teorema.

Teorema. Se tiene la función

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y),$$

las derivadas parciales de la parte real e imaginaria de $f(z)$ con respecto a x e y existen y son continuas en el punto z_0 y además cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en ese punto, entonces la función compleja $f(z)$ es diferenciable en z_0 , y su derivada $f'(z_0)$ existe.

$$u_x = v_y, \text{ y } u_y = -v_x.$$

Demostración. Supongamos que $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ es diferenciable en el punto z_0 y que su derivada $f'(z_0)$ existe, dadas las condiciones, las cuales, las derivadas parciales de la parte real e imaginaria de $f(z)$ con respecto a x e y existen y son continuas en z_0 , y además, cumplen con las ecuaciones de Cauchy-Riemann en ese punto, se puede utilizar el teorema del valor medio.

El teorema del valor medio establece que si una función g es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y es derivable en el intervalo abierto (a, b) , entonces existe al menos un punto c en el intervalo abierto (a, b) tal que:

$$g'(c) = \frac{g(b) - g(a)}{b - a},$$

consideraremos las funciones $u(x, y)$ y $v(x, y)$ en el punto $z_0 = x_0 + iy_0$. Dado que las derivadas parciales de u y v con respecto a x e y existen y son continuas en el punto z_0 , aplicando el teorema del valor medio a la primera variable, se tiene para la función $u(x, y)$:

$$u(x_0 + h, y_0) - u(x_0 - y_0) = u_x(c_1, y_0) \cdot h,$$

donde $x_0 < c_1 < x_0 + h$.

Ahora para la función $v(x, y)$, se tiene:

$$v(x_0, y_0 + k) - v(x_0 - y_0) = v_x(c_2, y_0) \cdot k,$$

donde $y_0 < c_2 < y_0 + k$.

Luego, reemplazando lo obtenido anteriormente con las igualdades de las ecuaciones de Cauchy-Riemann, se obtiene

$$\begin{aligned} u(x_0 + h, y_0) - u(x_0 - y_0) &= v_y(x_0, y_0) \cdot h \\ v(x_0, y_0 + k) - v(x_0 - y_0) &= -v_x(x_0, y_0) \cdot k. \end{aligned}$$

Ahora, definimos $g(h) = f(z_0 + h) - f(z_0) = u(x_0 + h, y_0) - u(x_0, y_0) + i(v(x_0, y_0 + k) - v(x_0, y_0))$. Se observa que $g(h)$ es una función de una variable, entonces, podemos escribir $g(h)$ como:

$$g(h) = v_y(x_0, y_0) \cdot h + i(-v_x(x_0, y_0) \cdot k).$$

Ahora, tomando $h = k = t$ en la expresión anterior, se obtiene:

$$g(t) = v_y(x_0, y_0) \cdot t + i(-v_x(x_0, y_0) \cdot t).$$

Luego, notemos que $g(t)$ es una función de una variable t , y las derivadas parciales de su parte real y la imaginaria con respecto a t existen y son continuas, debido a que las derivadas parciales de u y v existen y son continuas en el punto z_0 . Además, cumplen con las ecuaciones de Cauchy-Riemann:

$$g'(t) = v_y(x_0, y_0) + i(-v_x(x_0, y_0)).$$

Dado que las ecuaciones de Cauchy-Riemann se satisfacen para $g(t)$, podemos concluir que $g(t)$ es diferenciable en $t = 0$, lo que implica que la derivada $g'(0)$ existe.

Como $g(t) = f(z_0 + t)$ y $g'(0) = f'(z_0)$, entonces, hemos demostrado que la función compleja $f(z)$ es diferenciable en el punto z_0 , y su derivada $f'(z_0)$ existe. ■

Ahora para reformular lo demostrado anteriormente en coordenadas polares cuando $z_0 \neq 0$ se tienen las siguientes transformaciones de coordenadas:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta.$$

donde se sabe que

$$\begin{aligned} u_r &= \frac{1}{r} v_\theta \\ v_r &= -\frac{1}{r} u_\theta. \end{aligned}$$

Teorema. Sea la función

$$f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$$

definida en un entorno ε de un punto no nulo $z_0 = r_0 e^{i\theta_0}$ y supongamos que para que la derivada $f'(z_0)$ exista, las derivadas parciales de primer orden de u y v con respecto a r y θ deben existir y ser continuas en una vecindad de z_0 , y además, deben satisfacer las ecuaciones de Cauchy-Riemann en coordenadas polares,

$$(3.6.7) \quad u_r = \frac{1}{r} v_\theta, \quad v_r = -\frac{1}{r} u_\theta.$$

Entonces $f'(z_0)$ existe y viene dada por

$$f'(z_0) = e^{-i\theta_0} (u_r + iv_r),$$

donde u_r y v_r son las derivadas parciales de u y v con respecto a r , evaluadas en (r_0, θ_0) .

Demostración. Supongamos que $f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$ es diferenciable en $z_0 = r_0 e^{i\theta_0}$ y su derivada $f'(z_0)$ existe. Dadas las condiciones, las cuales las derivadas parciales de primer orden u y v con respecto a r y θ existen y son continuas en un entorno de z_0 , y además, deben satisfacer las ecuaciones de Cauchy-Riemann en coordenadas polares (3.6.7), se puede utilizar la demostración anterior pero con las siguientes transformaciones de coordenadas:

$$\begin{aligned} x &= \frac{r}{\cos \theta}, \\ y &= \frac{r}{\sin \theta}. \end{aligned}$$

Se define $g(r) = f(r, \theta) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$. Como θ está fijo en θ_0 , entonces $g(r)$ es una función de una variable, luego, derivamos $g(r)$ con respecto a r

$$g'(r) = u_r(r, \theta_0) + iv_r(r, \theta_0).$$

Ahora, la derivada $f'(z_0)$ viene dada por

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= e^{i\theta_0} g'(r_0) \\ &= e^{i\theta_0} (u_r(r_0, \theta_0) + iv_r(r_0, \theta_0)). \end{aligned}$$

Dado que las ecuaciones de Cauchy-Riemann se satisfacen para u y v en coordenadas polares, decimos que $f'(z_0)$ existe y está dada por

$$f'(z_0) = e^{-i\theta_0}(u_r + iv_r).$$

Por lo tanto, queda demostrado. ■

Veamos un **ejemplo** de lo anterior. Se tiene la siguiente función

$$f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{re^{i\theta}}.$$

Verificaremos si cumple con las ecuaciones de Cauchy-Riemann y calcularemos la derivada de $f(z)$ con $z = re^{i\theta}$ no nulo, y se tiene

$$\begin{aligned} u(r, \theta) &= \frac{\cos \theta}{r}, \\ v(r, \theta) &= -\frac{\sin \theta}{r}, \end{aligned}$$

calculamos las derivadas parciales y se obtiene:

$$\begin{aligned} ru_r &= -\frac{\cos \theta}{r} = v_\theta \\ u_\theta &= -\frac{\sin \theta}{r} = -rv_r, \end{aligned}$$

por lo tanto $f'(z)$ existe con $z \neq 0$,

$$\begin{aligned} f'(z) &= e^{-i\theta} \left(-\frac{\cos \theta}{r^2} + i\frac{\sin \theta}{r^2} \right) \\ &= -e^{-i\theta} \left(\frac{e^{-i\theta}}{r^2} \right) \\ &= -\frac{1}{z^2}. \end{aligned}$$

3.7. Funciones Analíticas

Cuando se habla de una función analítica u holomorfa, quiere decir que su derivada existe en todo conjunto de puntos entorno a un cierto punto z_0 . Una función f es analítica en una región R , si es analítica en cada punto de R . Una función entera es una función analítica en todos los puntos del plano finito, un ejemplo de esto son los polinomios. Si una función f deja de ser analítica en un punto z_0 , pero lo es en algún punto en cada entorno de z_0 , entonces a este punto se le conoce como punto singular o singularidad de f .

Para que la función f sea analítica en un dominio D , es imprescindible que f sea continua en todo el dominio D . También es necesario que se cumplan las ecuaciones de Cauchy-Riemann con sus respectivas condiciones nombradas en la sección anterior, es decir, que existan las derivadas parciales de primer orden de u y de v en los puntos del entorno del punto z_0 y, además, estas deben ser continuas y satisfacer las ecuaciones de Cauchy-Riemann en el punto z_0 .

Otra condición útil vista en las formulas de la derivación, son las propiedades de la suma y el producto de dos funciones. Entonces, si se tienen dos funciones analíticas $f(z)$ y $g(z)$ en un dominio D , la suma $f(z) + g(z)$ y el producto $f(z) \cdot g(z)$ también son analíticos en D , lo mismo pasa con su cociente $\frac{f(z)}{g(z)}$ que es analítico en D , siempre que la función denominador $g(z)$ no se anule en el dominio.

Si una función f es analítica en un punto z_0 y g es analítica en el punto $f(z_0)$, entonces la función compuesta $g \circ f$ es analítica en z_0 .

Teorema. Sea f una función analítica tal que $f'(z) = 0$ en todo el dominio D , entonces la función $f(z)$ tiene que ser constante sobre D .

Demostración. Sea

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

con $f'(z) = 0$ en D , entonces

$$u_x + iv_x = 0$$

por las ecuaciones de Cauchy-Riemann, se tiene

$$v_y - iv_x = 0.$$

Por lo que se tiene las siguientes igualdades

$$u_x = u_y = 0 \text{ y } v_x = v_y = 0$$

en cada punto sobre D . Por lo tanto, se concluye que u y v son constantes. ■

3.8. Funciones Armónicas

Una función real $h(x, y)$ se dice **armónica** en un dominio en el plano xy , si sus derivadas parciales son continuas de primer y segundo orden, y debe satisfacer la ecuación de Laplace,

$$h_{xx}(x, y) + h_{yy}(x, y) = 0.$$

Teorema. Si una función $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ es analítica sobre un dominio D , entonces u y v son armónicas en D .

Demostración.

Se tiene que si una función de una variable compleja es analítica en un punto, entonces su parte real y la imaginaria tienen derivadas parciales continuas de todos los órdenes en ese punto, es decir, si $f = u + iv$ es analítica en z_0 , existen $u_x, u_{xx}, \dots, u_y, u_{yy}, \dots, u_{xy}, \dots$ y así sucesivamente.

Supongamos que $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ es analítica en un dominio D , entonces satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann en su dominio, es decir,

$$u_x = v_y,$$

$$u_y = -v_x.$$

Derivando los componentes con respecto a x , resulta

$$u_{xx} = v_{yx},$$

$$u_{yx} = -v_{xx},$$

luego, derivando con respecto a y , resulta

$$u_{xy} = v_{yy},$$

$$u_{yy} = -v_{xy}.$$

Sumando los términos con derivadas parciales, y utilizando la igualdad de las derivadas cruzadas, se obtiene

$$u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = v_{yx}(x, y) + (-v_{xy}(x, y)) = 0$$

$$v_{xx}(x, y) + v_{yy}(x, y) = (-u_{yx}(x, y)) + u_{yx}(x, y) = 0$$

o escrito de otra forma:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= 0 \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} &= 0.\end{aligned}$$

Por lo tanto, las componentes u y v de f son armónicas sobre D siempre que f sea analítica en D . ■

Si dos funciones u y v son armónicas en un dominio D y sus derivadas parciales satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en todo D , se dice entonces que v es **armónica conjugada** de u .

Teorema. Una condición necesaria y suficiente para que una función $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ sea analítica en el dominio D es que v sea armónica conjugada de u en D .

Su demostración escapa del objetivo de esta actividad de titulación.

Veámoslo a través de un **ejemplo**,

Sea

$$f(z) = z^2 = x^2 - y^2 + i2xy$$

donde $u(x, y) = x^2 - y^2$ y $v(x, y) = 2xy$

Primero veamos si cumple con las ecuaciones de Cauchy-Riemann:

$$\begin{aligned}u_x &= v_y \\ v_y &= -u_x,\end{aligned}$$

se tiene que,

$$\begin{aligned}u_x &= 2x \\ v_y &= 2x,\end{aligned}$$

cumple la primera condición, ya que $u_x = v_y$, ahora veamos la siguiente

$$\begin{aligned}v_x &= 2y \\ u_y &= -2y,\end{aligned}$$

cumple con $v_x = -u_y$, por lo tanto cumple con las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

Para que sea armónica se debe cumplir lo siguiente:

$$\begin{aligned}u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) &= 0 \\ v_{xx}(x, y) + v_{yy}(x, y) &= 0\end{aligned}$$

entonces, se tiene,

$$\begin{aligned}u_{xx}(x, y) &= 2 \\ u_{yy}(x, y) &= -2\end{aligned}$$

la suma de lo anterior es cero, por lo que cumple con la primera condición. Ahora veamos para la segunda

$$\begin{aligned}v_{xx}(x, y) &= 0 \\v_{yy}(x, y) &= 0.\end{aligned}$$

Por lo tanto, decimos que tiene funciones armónicas, ya que cumple con las dos condiciones, y además cumplen con las ecuaciones de Cauchy-Riemann, por lo que son holomorfas, ya que cumple con ambos teoremas.

CAPÍTULO 4

Funciones Elementales

Las funciones estudiadas a continuación son varias funciones elementales consideradas en el cálculo, donde definimos funciones correspondientes de una variable compleja z , la cual es reducida al cálculo real cuando $z = x + i0$. A continuación, comenzaremos definiendo la función exponencial.

4.1. Función exponencial

Para representar la función exponencial, recordaremos que en el caso de los números reales dicha función puede ser representada como una serie,

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

De la misma manera podemos representar la función exponencial de $z \in \mathbb{C}$,

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \forall z \in \mathbb{C}.$$

En la sección 6 sobre series se verá que esta serie aplicando el criterio del cociente $\frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} \rightarrow 0$ converge para todo $z \in \mathbb{C}$.

OBSERVACIÓN. Es importante mencionar que las identidades trigonométricas de la suma y diferencia de senos y cosenos se suponen conocidas.

DEFINICIÓN. $\forall z = x + iy \in \mathbb{C}$, se tiene que:

$$f(z) = e^z = e^x (\cos y + i \sin y),$$

definida en todo el plano complejo.

Esta función está compuesta por las siguientes dos funciones,

$$u(x, y) = e^x \cos y$$

$$v(x, y) = e^x \sin y.$$

Por otro lado

$$u_x = e^x \cos y = v_y$$

$$u_y = -e^x \sin y = -v_x.$$

De esta manera f es una función entera y

$$\begin{aligned} f'(z) &= f(z) \\ (e^z)' &= e^z. \end{aligned}$$

OBSERVACIÓN. Es importante resaltar que cuando la parte imaginaria de un número complejo es 0, o sea $z = x + i0$ solo nos queda la parte real, por lo que la función exponencial será

$$f(z) = e^x.$$

Además, si el número es imaginario puro, o sea $z = iy$, la función nos quedaría

$$f(z) = \cos y + i \sin y.$$

4.1.1. Propiedades. Sea $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2 \in \mathbb{C}$, tenemos que,

(1) $e^0 = 1,$

Demostración.

$$\begin{aligned} e^0 &= e^{0+i0} \\ &= e^0 (\cos 0 + i \sin 0) \\ &= 1 \cdot 1 \\ &= 1. \blacksquare \end{aligned}$$

(2) $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2},$

Demostración.

$$\begin{aligned} e^{z_1}e^{z_2} &= e^{x_1} (\cos y_1 + i \sin y_1)e^{x_2} (\cos y_2 + i \sin y_2) \\ &= e^{x_1}e^{x_2} (\cos y_1 \cos y_2 - \sin y_1 \sin y_2 + i (\sin y_1 \cos y_2 + \cos y_1 \sin y_2)) \\ &= e^{x_1+x_2} (\cos (y_1 + y_2) + i \sin (y_1 + y_2)) \\ &= e^{x_1+x_2+i(y_1+y_2)} \\ &= e^{x_1+iy_1+x_2+iy_2} \\ &= e^{z_1+z_2}. \blacksquare \end{aligned}$$

(3) $\frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1-z_2},$

Demostración.

$$\begin{aligned} \frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} &= \frac{e^{x_1} (\cos y_1 + i \sin y_1)}{e^{x_2} (\cos y_2 + i \sin y_2)} \\ &= e^{x_1-x_2} \frac{(\cos y_1 + i \sin y_1)}{(\cos y_2 + i \sin y_2)} \cdot \frac{(\cos y_2 - i \sin y_2)}{(\cos y_2 - i \sin y_2)} \\ &= e^{x_1-x_2} \frac{(\cos y_1 + i \sin y_1) (\cos y_2 - i \sin y_2)}{(\cos y_2)^2 + (\sin y_2)^2} \\ &= e^{x_1-x_2} \frac{(\cos y_1 \cos y_2 - \sin y_1 \sin y_2 + i (\sin y_1 \cos y_2 - \cos y_1 \sin y_2))}{(\cos y_2)^2 + (\sin y_2)^2} \\ &= e^{x_1-x_2} (\cos(y_1 - y_2) + i \sin(y_1 - y_2)) \\ &= e^{x_1-x_2+i(y_1-y_2)} \\ &= e^{x_1+iy_1-(x_2+iy_2)} \\ &= e^{z_1-z_2}. \blacksquare \end{aligned}$$

(4) $\frac{1}{e^z} = e^{-z},$

Demostración.

$$\begin{aligned} e^{-z} &= (e^z)^{-1} \\ &= \frac{1}{e^z}. \blacksquare \end{aligned}$$

(5) $(e^z)^n = e^{zn}, n \in \mathbb{Z}$,

Demostración.

$$\begin{aligned} e^{zn} &= e^{n(x+iy)} \\ &= e^{xn+iny} \\ &= e^{xn} e^{iny} \\ &= (e^x e^{iy})^n \\ &= (e^x (\cos y + i \sin y))^n \\ &= (e^z)^n. \blacksquare \end{aligned}$$

(6) e^z es una función periódica, cuyo periodo es $2k\pi i, k \in \mathbb{Z}$.

Demostración. e^z es una función periódica si y solo si $e^z = e^{z+2k\pi i}$,

$$\begin{aligned} e^{z+2k\pi i} &= e^{Re(z+2k\pi i)} (\cos Im(z+2k\pi i) + i \sin Im(z+2k\pi i)) \\ &= e^{Re(z)} (\cos(Imz+2k\pi) + i \sin(Imz+2k\pi)) \\ &= e^{Re(z)} (\cos(Imz) + i \sin(Imz)) \\ &= e^x (\cos y + i \sin y) \\ &= e^z. \blacksquare \end{aligned}$$

4.2. Funciones Trigonómicas

Para obtener el seno y el coseno complejo, podemos deducirlo de la fórmula de Euler

(4.2.1)
$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta, \forall \theta \in \mathbb{R}.$$

De igual manera tenemos

(4.2.2)
$$e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta, \forall \theta \in \mathbb{R}.$$

Si restamos (4.2.1) - (4.2.2), obtenemos

$$e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i \sin \theta.$$

Por lo que función seno esta definida por,

$$\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}, \forall \theta \in \mathbb{R},$$

es debido a que la función exponencial es periódica.

De igual manera podemos sumar (4.2.1) + (4.2.2), para obtener la función coseno

$$e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2 \cos \theta.$$

Así, la función coseno esta definida por,

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \forall \theta \in \mathbb{R}.$$

A continuación, podemos definir las funciones seno y coseno complejo, de la siguiente forma

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \forall z \in \mathbb{C},$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \forall z \in \mathbb{C}.$$

4.2.1. Propiedades. Sea $z \in \mathbb{C}$, tenemos las siguientes propiedades. Además, se consideran las propiedades de seno y coseno usual, ya conocidas.

(1) $\cos(-z) = \cos z$. Función par.

Demostración.

$$\begin{aligned}\cos(-z) &= \frac{e^{-iz} + e^{iz}}{2} \\ &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \\ &= \cos z. \blacksquare\end{aligned}$$

(2) $\sin -z = -\sin z$. Función impar.

Demostración.

$$\begin{aligned}\sin -z &= \frac{e^{-iz} - e^{iz}}{2i} \\ &= \frac{-e^{iz} + e^{-iz}}{2i} \\ &= -\left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right) \\ &= -\sin z. \blacksquare\end{aligned}$$

(3) $\cos' z = -\sin z$.

Demostración. Tenemos que,

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

Luego, derivando

$$\begin{aligned}\cos' z &= \frac{(ie^{iz} - ie^{-iz})2 - (e^{iz} + e^{-iz})0}{4} \\ &= \frac{2i(e^{iz} - e^{-iz})}{4} \\ &= \frac{i(e^{iz} - e^{-iz})}{2} \cdot \frac{i}{i} \\ &= -\frac{(e^{iz} - e^{-iz})}{2i} \\ &= -\sin z. \blacksquare\end{aligned}$$

(4) $\sin' z = \cos z$.

Demostración. Tenemos que,

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

Ahora, derivando obtenemos

$$\begin{aligned} \sin' z &= \frac{(ie^{iz} + ie^{-iz}) 2i - (e^{iz} - e^{-iz}) 0}{-4} \\ &= \frac{2i^2 (e^{iz} + e^{-iz})}{-4} \\ &= \frac{-2 (e^{iz} + e^{-iz})}{-4} \\ &= \frac{-2 (e^{iz} + e^{-iz})}{-4} \\ &= \frac{(e^{iz} + e^{-iz})}{2} \\ &= \cos z. \blacksquare \end{aligned}$$

(5) $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$.

Demostración.

$$\begin{aligned} \cos^2 z + \sin^2 z &= \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \right)^2 + \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \right)^2 \\ &= \frac{e^{2iz} - 2e^{iz}e^{-iz} + e^{-2iz}}{-4} + \frac{e^{2iz} + 2e^{iz}e^{-iz} + e^{-2iz}}{4} \\ &= \frac{e^{2iz} - 2e^0 + e^{-2iz}}{-4} + \frac{e^{2iz} + 2e^0 + e^{-2iz}}{4} \\ &= \frac{-e^{2iz} + 2 - e^{-2iz}}{4} + \frac{e^{2iz} + 2 + e^{-2iz}}{4} \\ &= \frac{4}{4} \\ &= 1. \blacksquare \end{aligned}$$

(6) $\cos z = \sin \left(\frac{\pi}{2} + z \right)$.

Demostración.

$$\begin{aligned} \sin \left(\frac{\pi}{2} + z \right) &= \sin \frac{\pi}{2} \cos z + \sin z \cos \frac{\pi}{2} \\ &= 1 \cdot \cos z + \sin z \cdot 0 \\ &= \cos z. \blacksquare \end{aligned}$$

(7) $\sin (z + 2\pi) = \sin z$, $\cos (z + 2\pi) = \cos z$, $\sin (z + \pi) = -\sin z$, $\cos (z + \pi) = -\cos z$.

Demostración. Comenzamos demostrando $\sin (z + 2\pi) = \sin z$, de esta manera

$$\begin{aligned} \sin (z + 2\pi) &= \sin z \cos 2\pi + \sin 2\pi \cos z \\ &= \sin z \cdot 1 + 0 \cdot \cos z \\ &= \sin z. \blacksquare \end{aligned}$$

De otra manera demostramos $\sin (z + \pi) = -\sin z$, por consiguiente

$$\begin{aligned} \sin (z + \pi) &= \sin z \cos \pi + \sin \pi \cos z \\ &= \sin z \cdot (-1) + 0 \cos z \\ &= -\sin z. \blacksquare \end{aligned}$$

Ahora vemos si $\cos(z + 2\pi) = \cos z$, entonces

$$\begin{aligned}\cos(z + 2\pi) &= \cos z \cos 2\pi - \sin z \sin 2\pi \\ &= \cos z \cdot 1 - \sin z \cdot 0 \\ &= \cos z. \blacksquare\end{aligned}$$

Continuamos con la demostración de $\cos(z + \pi) = -\cos z$, Así

$$\begin{aligned}\cos(z + \pi) &= \cos z \cos \pi - \sin z \sin \pi \\ &= \cos z \cdot (-1) - \sin z \cdot 0 \\ &= -\cos z. \blacksquare\end{aligned}$$

(8) $\overline{\cos z} = \cos \bar{z}$, $\overline{\sin z} = \sin \bar{z}$.

Demostración. Primero demostramos $\overline{\cos z} = \cos \bar{z}$, quedándonos

$$\begin{aligned}\overline{\cos z} &= \overline{\cos(x + iy)} \\ &= \overline{\cos(x - iy)} \\ &= \overline{\cos x \cos iy + \sin x \sin iy} \\ &= \overline{\cos x \cos iy - \sin x \sin iy} \\ &= \overline{\cos(x + iy)} \\ &= \overline{\cos z}. \blacksquare\end{aligned}$$

Luego, demostramos $\overline{\sin z} = \sin \bar{z}$, donde

$$\begin{aligned}\overline{\sin z} &= \overline{\sin(x + iy)} \\ &= \overline{\sin(x - iy)} \\ &= \overline{\sin x \cos iy - \sin iy \cos x} \\ &= \overline{\sin x \cos iy + \sin iy \cos x} \\ &= \overline{\sin(x + iy)} \\ &= \overline{\sin z}. \blacksquare\end{aligned}$$

$$(9) \cos z = 0 \Leftrightarrow z = \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z}.$$

Demostración. Primero vemos lo siguiente

$$\begin{aligned} \cos z &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \\ &= \frac{e^{i(x+iy)} + e^{-i(x+iy)}}{2} \\ &= \frac{e^{ix-y} + e^{-ix+y}}{2} \\ &= \frac{e^{ix}e^{-y} + e^{-ix}e^y}{2} \\ &= \frac{e^{-y}(\cos x + i \sin x) + e^y(\cos x - i \sin x)}{2} \\ &= \frac{e^{-y} \cos x + ie^{-y} \sin x + e^y \cos x - ie^y \sin x}{2} \\ &= \frac{e^{-y} \cos x + e^y \cos x + ie^{-y} \sin x - ie^y \sin x}{2} \\ &= \frac{\cos x (e^{-y} + e^y) + i \sin x (e^{-y} - e^y)}{2}. \end{aligned}$$

Podemos analizar que para que la función $\cos z = 0$ en el numerador de la fracción anterior sea nula, por lo que $\cos x (e^{-y} + e^y) = 0$ y $i \sin x (e^{-y} - e^y) = 0$. Para lo anterior basta que en la primera ecuación se cumpla que $\cos x = 0$, para ello $Re(z) = x = \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z}$. Y en la segunda ecuación basta que se cumpla $(e^{-y} - e^y) = 0$, donde se ve fácilmente que para que esto ocurra $Im(z) = y = 0$. De manera más general, para que $\cos z = 0$, el valor de z debe ser $z = (\frac{\pi}{2} + n\pi) + i0, n \in \mathbb{Z}$. ■

$$(10) \sin z = 0 \Leftrightarrow z = n\pi, n \in \mathbb{Z}.$$

Demostración. Resolvemos la siguiente demostración de la misma manera que la anterior, de la siguiente forma,

$$\begin{aligned} \sin z &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \\ &= \frac{e^{i(x+iy)} - e^{-i(x+iy)}}{2i} \\ &= \frac{e^{ix-y} - e^{-ix+y}}{2i} \\ &= \frac{e^{ix}e^{-y} - e^{-ix}e^y}{2i} \\ &= \frac{e^{-y}(\cos x + i \sin x) - e^y(\cos x - i \sin x)}{2i} \csc = \frac{1}{\sin z}. \\ &= \frac{e^{-y} \cos x + ie^{-y} \sin x - e^y \cos x + ie^y \sin x}{2i} \\ &= \frac{e^{-y} \cos x - e^y \cos x + ie^{-y} \sin x + ie^y \sin x}{2i} \\ &= \frac{\cos x (e^{-y} - e^y) + i \sin x (e^{-y} + e^y)}{2i}. \end{aligned}$$

Podemos analizar que para que la función $\cos z = 0$. En el numerador de la fracción anterior sea nula, por lo que $\cos x (e^{-y} - e^y) = 0$ y $i \sin x (e^{-y} + e^y) = 0$. Para lo anterior basta que se cumpla en la primera ecuación que $(e^{-y} - e^y) = 0$, para ello $y = 0$. Y en la

segunda ecuación basta que se cumpla $\sin x = 0$, donde se ve fácilmente que para que esto ocurra $Re(z) = x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$. De manera más general, para que $\cos z = 0$, el valor de z debe ser $z = \pi n + i0, n \in \mathbb{Z}$. ■

- (11) El seno y coseno hiperbólico de una variable compleja se definen como en una variable real,

$$\sinh z = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

$$\cosh z = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Y como e^x y e^{-x} son enteras, por consiguiente $\sinh z$ y $\cosh z$ son enteras.

- (12) $\cos iy = \cosh y, \sin iy = i \sinh y, y \in \mathbb{R}$.

Demostración. Comenzamos con la demostración de $\cosh y$, donde

$$\begin{aligned} \cos iy &= \frac{e^{i(iy)} + e^{-i(iy)}}{2} \\ &= \frac{e^{-y} + e^y}{2} \\ &= \frac{e^y + e^{-y}}{2} \\ &= \cosh y, \forall y \in \mathbb{Z}. \blacksquare \end{aligned}$$

De igual manera, realizamos la demostración de $i \sinh y$, entonces

$$\begin{aligned} \sin iy &= \frac{e^{i(iy)} - e^{-i(iy)}}{2i} \\ &= \frac{-(-e^{-y} + e^y)}{2i} \cdot \frac{i}{i} \\ &= \frac{-i(e^y - e^{-y})}{-2} \\ &= i \frac{e^y - e^{-y}}{2} \\ &= i \sinh y, \forall y \in \mathbb{Z}. \blacksquare \end{aligned}$$

OBSERVACIÓN. Por lo anterior, podemos ver que la suma de ángulos de \sin y \cos nos quedaría de la siguiente manera,

$$\begin{aligned} \cos z &= \cos(x \pm iy) \\ &= \cos x \cos iy \mp \sin x \sin iy \\ &= \cos x \cosh y \mp i \sin x \sinh y. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin z &= \sin(x \pm iy) \\ &= \sin x \cos iy \pm \cos x \sin iy \\ &= \sin x \cosh y \pm i \cos x \sinh y. \end{aligned}$$

Además, también podemos ver claramente que las otras identidades trigonométricas se definen en términos de \sin y \cos , por lo que

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z},$$

$$\begin{aligned}\sec z &= \frac{1}{\cos z}, \\ \cot z &= \frac{\cos z}{\sin z}, \\ \csc z &= \frac{1}{\sin z}.\end{aligned}$$

4.3. Función Logaritmo

De el mismo modo que en los reales, la función logaritmo puede ser definida como $\log z$ la función inversa de la función exponencial e^z . Pero con algunas restricciones, debido a que la función exponencial debe ser biyectiva. Para que lo anterior se cumpla e^z debe ser sobreyectiva y podemos ver que la función exponencial no lo es debido a que,

$$e^z \neq 0, \forall z \in \mathbb{C}.$$

Para esto solo hace falta restringir el dominio del logaritmo al de la función exponencial. Esto quedaría restringido a $\mathbb{C} - \{0\}$.

La segunda restricción es que e^z debe ser inyectiva, que debido a que esta función es periódica dicha propiedad no se cumple. Para ello definiremos la función logaritmo, donde al igual que los reales

$$y = \ln x \Leftrightarrow x = e^y,$$

Ahora, de manera análoga

$$w = \ln z \Leftrightarrow z = e^w,$$

donde $w = x + iy$. Si ahora lo escribimos en forma polar, z nos quedaría por definición,

$$\begin{aligned}z &= re^{i\theta} \\ &= e^{x+iy} \\ &= e^x e^{iy},\end{aligned}$$

entonces,

$$re^{i\theta} = e^x e^{iy}.$$

De lo anterior podemos ver claramente la igualdad $r = e^x$ y $e^{i\theta} = e^{iy}$. Siguiendo lo anterior con la forma polar podemos darnos cuenta que,

$$|re^{i\theta}| = |e^x e^{iy}|,$$

donde si el lector calcula los módulos anteriores, es claro que para el primero $|re^{i\theta}| = r$ y para el segundo $|e^x e^{iy}| = e^x$, por lo que

$$r = e^x.$$

De esta forma al aplicar \ln ,

$$(4.3.1) \quad \ln r = \ln |z| = x.$$

Retomando la segunda igualdad $e^{iy} = e^{i\theta}$, podemos realizar lo siguiente

$$\begin{aligned}\frac{e^{iy}}{e^{i\theta}} &= 1 \\ e^{iy-i\theta} &= 1 \\ e^{i(y-\theta)} &= e^0,\end{aligned}$$

por lo anterior podemos mencionar que $y - \theta = 2n\pi$, lo que nos queda

$$(4.3.2) \quad y = \theta + 2n\pi,$$

de modo que $\theta + 2n\pi = \text{Arg}(z), n \in \mathbb{Z}$. Debido a (4.3.1) y (4.3.2), podemos decir que,

$$x + iy = \ln |z| + i \text{Arg}(z).$$

Retomando la restricción del principio, debemos restringir el $\text{arg}(z)$ al dominio $(-\pi, \pi)$.

DEFINICIÓN. Podemos definir la función n -ésima, $n \in \mathbb{C}$ del logaritmo complejo. Sea $\log^n : \mathbb{C} - \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$, la función está definida por

$$\log^n(z) = \ln |z| + i(\text{arg}(z) + 2n\pi).$$

La definición general de la función logaritmo

$$\log : \mathbb{C} - \{0\} \rightarrow \mathbb{C},$$

está definida por

$$\log(z) = \ln |z| + i \text{Arg}(z),$$

donde el $\text{arg}(x) \in (-\pi, \pi)$.

OBSERVACIÓN. Es posible que en distintos libros o documentos la función logaritmo complejo esté definida como $\log z$ ó $\ln z$, donde $\log z = \ln z$. En las siguientes propiedades se verá la propiedad $\log_a z = \frac{\ln z}{\ln a}$, para que el lector no se confunda con la notación.

4.3.1. Propiedades. Sea $z, w \in \mathbb{C}$, entonces podemos considerar las siguientes propiedades de la función logaritmo complejo.

(1) $\forall z \neq 0, e^{\log z} = z.$

Demostración. Por definición de logaritmo complejo tenemos que,

$$\begin{aligned} e^{\log z} &= e^{\ln |z| + i \text{arg}(z)} \\ &= e^{\ln |z|} e^{i \text{arg}(z)} \\ &= |z| e^{i \text{arg}(z)} \\ &= r e^{i(\theta + 2n\pi)}, n \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

lo anterior corresponde a la forma polar de un número complejo, por lo que $r e^{i(\theta + 2n\pi)} = z.$

$$e^{\log z} = z. \blacksquare$$

(2) $\log(e^z) = z.$

Demostración.

$$\begin{aligned} \log e^z &= \ln |e^z| + i \text{arg}(e^z) \\ &= \ln e^x + iy \\ &= x + iy \\ &= z. \blacksquare \end{aligned}$$

(3) $\log(zw) = \log z + \log w.$

Demostración.

$$\begin{aligned} \log(zw) &= \ln |zw| + i \text{arg}(zw) \\ &= \ln |z| |w| + i (\text{arg } z + \text{arg } w) \\ &= \ln |z| + \ln |w| + i \text{arg } z + i \text{arg } w \\ &= \ln |z| + i \text{arg } z + \ln |w| + i \text{arg } w \\ &= \log z + \log w. \blacksquare \end{aligned}$$

(4) $\log\left(\frac{z}{w}\right) = \log z - \log w.$

Demostración.

$$\begin{aligned} \log\left(\frac{z}{w}\right) &= \ln\left|\frac{z}{w}\right| + i \arg\left(\frac{z}{w}\right) \\ &= \ln\frac{|z|}{|w|} + i(\arg z - \arg w) \\ &= \ln|z| - \ln|w| + i \arg z - i \arg w \\ &= \ln|z| + i \arg z - (\ln|w| + i \arg w) \\ &= \log z - \log w. \blacksquare \end{aligned}$$

(5) $\log z$ es analítica en $\mathbb{C} - \mathbb{R}$ y además,

$$\log'(z_0) = \frac{1}{z_0}, \text{ donde } z_0 \in \mathbb{C} - \{0\}.$$

Demostración. Por definición de derivada, tenemos que $f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$, quedándonos

$$\log'(z_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log(z_0 + h) - \log(z_0)}{h},$$

Por propiedades de logaritmos nos queda

$$\begin{aligned} \log'(z_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log\left(\frac{z_0+h}{z_0}\right)}{h \cdot \frac{z_0}{z_0}} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{z_0} \cdot \frac{\log\left(1 + \frac{h}{z_0}\right)}{\frac{h}{z_0}} \\ &= \frac{1}{z_0} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log\left(1 + \frac{h}{z_0}\right)}{\frac{h}{z_0}}, \end{aligned}$$

Realizamos un cambio de variable

$$\begin{aligned} w &= \log\left(1 + \frac{h}{z_0}\right) \\ e^w &= 1 + \frac{h}{z_0} \\ e^w - 1 &= \frac{h}{z_0} \\ e^w - e^0 &= \frac{h}{z_0}. \end{aligned}$$

Luego notamos que $\lim_{h \rightarrow 0} w = \lim_{h \rightarrow 0} \log\left(1 + \frac{h}{z_0}\right) = \log 1 = 0$, podemos reescribir la igualdad anterior, como

$$\begin{aligned} \log'(z_0) &= \frac{1}{z_0} \lim_{w \rightarrow 0} \frac{w}{e^w - e^0} \\ &= \frac{1}{z_0} \cdot \frac{1}{\lim_{w \rightarrow 0} \frac{e^{w+0} - e^0}{w}} \end{aligned}$$

donde, por definición de derivada $\lim_{w \rightarrow 0} \frac{e^{w+0} - e^0}{w} = (e^x)'(0) = 1$, donde se concluye que

$$\log'(z_0) = \frac{1}{z_0}. \blacksquare$$

4.4. Funciones Trigonómicas e Hiperbólicas Inversas

Las funciones inversas trigonométricas e hiperbólicas que veremos a continuación pueden ser escritas en términos de logaritmos, tales como $\sin^{-1} z$, $\cos^{-1} z$, y $\tan^{-1} z$.

4.4.1. Función Arcoseno complejo o $\sin^{-1} z$. Para definir la función inversa del seno, definiremos $\sin w = z$. De esta manera nos queda que

$$\begin{aligned} \sin w &= z \\ \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i} &= z \\ e^{iw} - e^{-iw} &= 2zi \\ e^{iw} - e^{-iw} - 2zi &= 0, \end{aligned}$$

multiplicamos por e^{iw} en ambos lados de la ecuación, quedándonos

$$\begin{aligned} e^{2iw} - 2zie^{iw} - 1 &= 0 \\ (e^{iw})^2 - 2iz(e^{iw}) - 1 &= 0. \end{aligned}$$

Calculando las raíces mediante la fórmula general cuadrática, quedando

$$e^{iw} = iz \pm \sqrt{1 - z^2},$$

aplicamos logaritmo en ambos lados de la ecuación, lo que nos queda

$$\begin{aligned} \log e^{iw} &= \log \left(iz + \sqrt{1 - z^2} \right) \\ iw &= \log \left(iz + \sqrt{1 - z^2} \right), \end{aligned}$$

recordamos que $w = \sin^{-1} z$

$$i \sin^{-1} z = \log \left(iz + \sqrt{1 - z^2} \right),$$

multiplicamos por $-i$ en ambos lados de la ecuación, lo que nos queda finalmente,

$$\sin^{-1} z = -i \log \left(iz + \sqrt{1 - z^2} \right), \forall z \in \mathbb{C}.$$

OBSERVACIÓN. Notar que al calcular las raíces de la ecuación solo se toma la solución positiva, esto debido a que al aplicar logaritmo el argumento de este debe ser positivo o cero. Esta observación se da de igual manera en las próximas demostraciones.

4.4.2. Función Arcocoseno complejo o $\cos^{-1} z$. Para definir la función inversa del coseno, podemos realizarla de la misma manera que la función inversa de seno vista en el punto anterior. Donde $\cos w = z$. Luego tenemos que

$$\begin{aligned} \cos w &= z \\ \frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2} &= z \\ e^{iw} + e^{-iw} &= 2z \\ e^{iw} + e^{-iw} - 2z &= 0, \end{aligned}$$

multiplicamos por e^{iw} , lo que nos queda

$$\begin{aligned} e^{2iw} - 2ze^{iw} + 1 &= 0 \\ (e^{iw})^2 - 2z(e^{iw}) + 1 &= 0, \end{aligned}$$

donde al calcular las raíces de dicha ecuación, obtenemos

$$e^{iw} = z \pm i\sqrt{1-z^2},$$

donde al aplicar logaritmo en ambos lados nos queda,

$$iw = \log\left(z + i\sqrt{1-z^2}\right),$$

multiplicamos por $-i$ en ambos lados de la ecuación

$$w = -i \log\left(z + i\sqrt{1-z^2}\right),$$

y recordamos que $w = \cos^{-1} z$, ahora reemplazando nos queda la función arcocoseno,

$$\cos^{-1} z = -i \log\left(z + i\sqrt{1-z^2}\right).$$

4.4.3. Función Arcotangente o $\tan^{-1} z$. Para calcular la función arcotangente, realizamos lo siguiente. Sea $z, w \in \mathbb{C}$, tal que $z = \tan w$, según lo anterior esto sería $z = \frac{\sin w}{\cos w}$ lo que se traduce en $z \cos w = \sin w$. Donde por definición de seno y coseno, nos quedaría

$$\begin{aligned} z \frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2} &= \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i} \\ 2zi(e^{iw} + e^{-iw}) &= 2(e^{iw} - e^{-iw}) \\ zi(e^{iw} + e^{-iw}) &= e^{iw} - e^{-iw} \\ zie^{iw} + zie^{-iw} &= e^{iw} - e^{-iw}, \end{aligned}$$

multiplicamos en ambos lados por e^{iw} ,

$$\begin{aligned} zi(e^{iw})^2 + zi &= (e^{iw})^2 - 1 \\ zi(e^{iw}) - (e^{iw})^2 &= -zi - 1 \\ (e^{iw})^2 - zi(e^{iw})^2 &= 1 + zi \\ (e^{iw})^2(1 - zi) &= 1 + zi \\ (e^{iw})^2 &= \frac{1 + zi}{1 - zi} \\ e^{iw} &= \left(\frac{1 + zi}{1 - zi}\right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

multiplicando por $\frac{i}{i}$ al lado derecho de la igualdad y luego aplicando logaritmo nos queda,

$$iw = \log\left(\frac{i-z}{i+z}\right)^{\frac{1}{2}},$$

multiplicamos por $-i$ en ambos lados de la igualdad,

$$\begin{aligned} w &= -i \log \left(\frac{i-z}{i+z} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= -i \log \left(\frac{i+z}{i-z} \right)^{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{i}{2} \log \left(\frac{i+z}{i-z} \right), \end{aligned}$$

como $z = \tan w$, eso quiere decir que $\arctan z = w$, lo que nos queda como la definición del arcotangente complejo

$$\arctan z = \frac{i}{2} \log \left(\frac{i+z}{i-z} \right), z \neq i.$$

4.4.4. Funciones Hiperbólicas inversas o $\cosh^{-1} z$ y $\sinh^{-1} z$. Para demostrar las funciones inversas hiperbólicas, se pueden encontrar de la misma manera que la inversa del seno y del coseno.

Comenzamos demostrando $\cosh^{-1} z$, donde tenemos que $\cosh w = z$, por lo que

$$\begin{aligned} \cosh w &= z \\ \frac{e^w + e^{-w}}{2} &= z \\ e^w + e^{-w} &= 2z \\ e^w + e^{-w} - 2z &= 0, \end{aligned}$$

multiplicamos la igualdad por e^w

$$(e^w)^2 - 2ze^w + 1 = 0,$$

Calculamos las raíces de la ecuación mediante la fórmula general cuadrática, quedando

$$e^w = z \pm (z^2 - 1)^{\frac{1}{2}}.$$

Aplicamos logaritmo en ambos lados de la igualdad

$$w = \log \left(z + (z^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \right),$$

luego vemos que como $\cosh w = z$, entonces como $w = \cosh^{-1} z$. Lo que resulta en el coseno hiperbólico inverso de z

$$\cosh^{-1} z = \log \left(z + (z^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \right). \blacksquare$$

Luego demostramos la función del seno hiperbólico inversa de la siguiente manera. Tenemos que $\sinh w = z$, lo que se traduce como

$$\begin{aligned} \sinh w &= z \\ \frac{e^w - e^{-w}}{2} &= z \\ e^w - e^{-w} &= 2z \\ e^w - e^{-w} - 2z &= 0, \end{aligned}$$

multiplicamos en ambos lados de la igualdad por e^w ,

$$(e^w)^2 - 2ze^w - 1 = 0.$$

Calculamos las raíces de la ecuación mediante la fórmula general cuadrática, quedando

$$e^w = z \pm (z^2 + 1)^{\frac{1}{2}},$$

aplicamos logaritmo en ambos lados de la igualdad

$$w = \log \left(z + (z^2 + 1)^{\frac{1}{2}} \right),$$

luego vemos que como $\cosh w = z$, entonces como $w = \sinh^{-1} z$. Lo que resulta en el seno hiperbólico inverso de Z

$$\sinh^{-1} z = \log \left(z + (z^2 + 1)^{\frac{1}{2}} \right). \blacksquare$$

CAPÍTULO 5

Integrales

En esta sección estudiaremos el concepto de integral compleja, siendo ésta muy importantes en las funciones de una variable compleja, ya que tiene múltiples aplicaciones en Matemática.

5.1. Funciones Complejas

Para introducir el concepto de integrales de $f(z)$, consideraremos las integrales de las funciones complejas $w(t)$, definida como

$$w(t) = u(t) + iv(t)$$

donde las funciones u y v son funciones reales de t , son continuas por trozos $a \leq t \leq b$.

Las integrales definidas de funciones $w(t)$ sobre intervalos $a \leq t \leq b$, se definen como

$$\int_a^b w(t)dt = \int_a^b u(t)dt + i \int_a^b v(t)dt$$

siempre que las integrales del lado derecho existan, lo cual se verifican para funciones continuas a trozos en el intervalo $a \leq t \leq b$.

Veamos algunas **propiedades** importantes en la integración:

1. La parte real e imaginaria satisface lo siguiente

$$Re \int_a^b w(t)dt = \int_a^b Re[w(t)]dt$$

$$Im \int_a^b w(t)dt = \int_a^b Im[w(t)]dt.$$

Demostración.

Sea $w(t) = u(t) + iv(t)$, donde $u(t)$ es la parte real y $v(t)$ es la parte imaginaria de $w(t)$, consideremos la integral definida en el intervalo $[a, b]$:

$$\int_a^b w(t)dt.$$

Notemos que $Re[w(t)] = u(t)$ y $Im[w(t)] = v(t)$, entonces se tiene para la parte real:

$$\begin{aligned} Re \left(\int_a^b w(t)dt \right) &= Re \left(\int_a^b (u(t)dt + i \int_a^b v(t)dt) \right) = \int_a^b u(t)dt \\ &= \int_a^b Re [u(t) + iv(t)] dt \\ &= \int_a^b Re [w(t)] dt. \end{aligned}$$

Ahora para la parte imaginaria, se tiene:

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \left(\int_a^b w(t) dt \right) &= \operatorname{Im} \left(\int_a^b (u(t) + iv(t)) dt \right) = \int_a^b v(t) dt \\ &= \int_a^b \operatorname{Im} [u(t) + iv(t)] dt \\ &= \int_a^b \operatorname{Im} [w(t)] dt. \blacksquare \end{aligned}$$

2. Sea z_0 una constante compleja, se tiene

$$\int_a^b z_0 w(t) dt = z_0 \int_a^b w(t) dt.$$

Demostración.

$$\begin{aligned} \int_a^b z_0 w(t) dt &= \int_a^b z_0 [u(t) + iv(t)] dt \\ &= \int_a^b z_0 u(t) dt + \int_a^b z_0 v(t) dt \\ &= z_0 \int_a^b u(t) dt + z_0 i \int_a^b v(t) dt \\ &= z_0 \int_a^b [u(t) + iv(t)] dt \\ &= z_0 \int_a^b w(t) dt. \blacksquare \end{aligned}$$

3. Integral definida para funciones continuas por trozos: Dado que $w(t)$ es continua por trozos en $a \leq t \leq b$, y considerando dos puntos $a \leq c \leq b$, podemos aplicar la propiedad de la integral definida. Esta propiedad establece que la integral definida de $w(t)$ en el intervalo $[a, b]$ es igual a la suma de dos integrales definidas en intervalos más pequeños, $[a, c]$ y $[c, b]$:

$$\int_a^b w(t) dt = \int_a^c w(t) dt + \int_c^b w(t) dt.$$

Demostración.

Supongamos que

$$\begin{aligned} w(t) &= u(t) + iv(t) \\ W(t) &= U(t) + iV(t) \end{aligned}$$

son continuas en $a \leq t \leq b$. Si

$$W'(t) = w(t)$$

en $a \leq t \leq b$, entonces

$$\begin{aligned} U'(t) &= u(t) \\ V'(t) &= v(t). \end{aligned}$$

Por lo tanto, se tiene

$$\begin{aligned} \int_a^b w(t)dt &= U(t)|_a^b + iV(t)|_a^b \\ &= W(t)|_a^b \\ &= W(b) - W(a). \blacksquare \end{aligned}$$

4. Desigualdad del valor absoluto de la integral definida. Matemáticamente, esta desigualdad se expresa de la siguiente manera:

$$\left| \int_a^b w(t)dt \right| \leq \int_a^b |w(t)| dt.$$

Demostración.

Sea $w(t) = |w(t)| e^{i\theta(t)}$ en su forma polar, donde $|w(t)|$ es el módulo de $w(t)$ y $\theta(t)$ es el argumento de $w(t)$, entonces la integral en su forma polar es

$$\int_a^b w(t)dt = \int_a^b |w(t)| e^{i\theta(t)} dt,$$

se tiene que $|e^{i\theta(t)}| = 1$ para cualquier valor de $\theta(t)$, por lo que se tiene

$$\left| \int_a^b w(t)dt \right| = \left| \int_a^b |w(t)| e^{i\theta(t)} dt \right|,$$

por desigualdad triangular, tenemos que

$$\left| \int_a^b |w(t)| e^{i\theta(t)} dt \right| \leq \int_a^b |w(t)| dt,$$

por lo tanto, se obtiene

$$\left| \int_a^b w(t)dt \right| \leq \int_a^b |w(t)| dt. \blacksquare$$

5. Por último, para valor ∞ de una integral impropia se establece lo siguiente:

$$\left| \int_a^\infty w(t)dt \right| \leq \int_a^\infty |w(t)| dt,$$

la cual se puede demostrar de la misma forma que la desigualdad anterior en el intervalo $[a, \infty)$.

6. El teorema del valor medio para la derivada ya no es aplicable, no es necesario un número c en el intervalo $a < t < b$, tal que

$$\int_a^b w(t)dt \neq w(c)(b - a).$$

5.2. Contornos

Las integrales en funciones complejas a variable compleja se define sobre curvas en el plano complejo, en vez de estar sobre intervalos sobre el eje real.

Se define arco como un conjunto de punto $z = (x, y)$ en el plano complejo, constituyen un arco si

$$\begin{aligned}x &= x(t) \\ y &= y(t)\end{aligned}$$

con $a \leq t \leq b$, donde $x(t)$ e $y(t)$ son funciones continuas del parámetro real t . Esto establece una aplicación continua del intervalo $a \leq t \leq b$ en el plano xy o en z . Los puntos de la imagen z se ordenan por los valores crecientes de t en una curva C y se escribe por medio de la ecuación

$$z = z(t) = x(t) + iy(t) \quad (a \leq t \leq b).$$

Se denomina arco **simple** o **arco de Jordan** cuando el arco no se corta a sí mismo, esto es, si $z(t_1) \neq z(t_2)$ cuando $t_1 \neq t_2$.

Cuando el arco C es simple pero excepto por el hecho que $z(a) = z(b)$, con $a \leq t \leq b$, es decir, cuando no se interseca a sí misma, se dice que C es una **curva cerrada simple**, o una **curva de Jordan**.

Cuando esta curva de Jordan recorre en sentido anti horario se le considera positivamente orientada, esto se le conoce como **convención de circulación**.

Veámoslo con un **ejemplo**:

Supongamos que se tiene una curva C en el plano complejo definida por la función $z(t) = e^{it}$ en el parámetro $0 \leq t \leq 2\pi$.

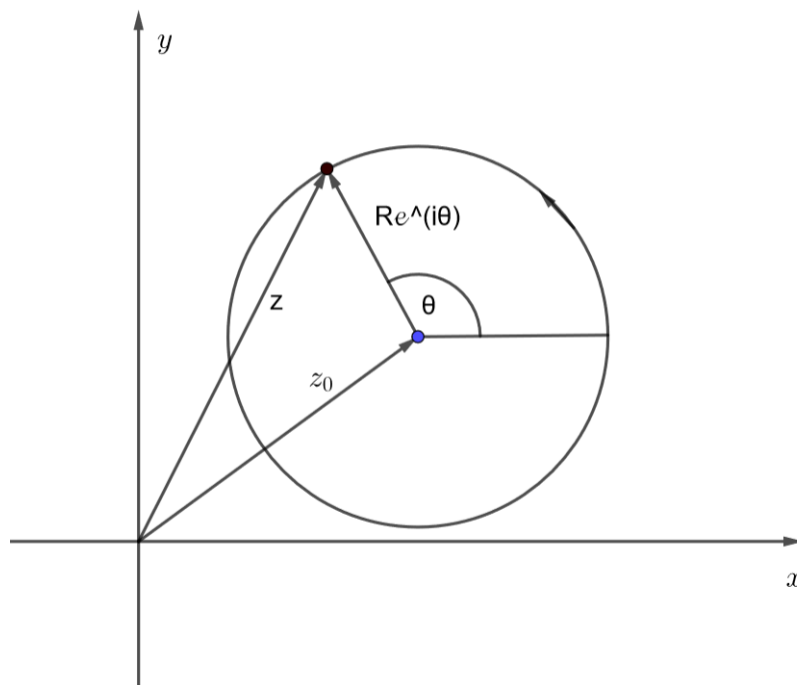
Esta función describe una circunferencia de radio 1 con centro en el origen, recorre en sentido antihorario desde $t = 0$ hasta $t = 2\pi$.

La curva C es cerrada, ya que $z(0) = e^{i \cdot 0} = 1$ que es lo mismo para $z(2\pi) = e^{i \cdot 2\pi} = 1$, esta curva no se corta por lo que es una curva cerrada simple.

También lo es el círculo

$$z = z_0 + Re^{i\theta}$$

con $0 \leq \theta \leq 2\pi$ y centrado en z_0 y de radio R , como se ve en la figura:


 FIGURA 5.2.1. Círculo $z = z_0 + Re^{i\theta}$

Sea

$$z(t) = x(t) + iy(t)$$

que describe un arco C . Supongamos que existen y son continuas en todo el intervalo $a \leq t \leq b$ las derivadas de los componentes x' e y' . Bajo tales condiciones, C se denomina **arco diferenciable**, cuya longitud L del arco viene dado por la integral

$$\begin{aligned} L &= \int_a^b |z'(t)| dt \\ &= \int_a^b \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt. \end{aligned}$$

Cuando $z = z(t)$ en un intervalo $a \leq t \leq b$, si la derivada $z'(t)$ es continua en el intervalo cerrado $a \leq t \leq b$ y no nula en el intervalo abierto $a < t < b$, se le llama **arcos suaves**.

Un **contorno** es un arco que se forma por un número finito de arcos suaves unidos por sus extremos, $z(t)$ es continua y $z'(t)$ es continua a trozos, por esto también se le conoce como **arco suave a trozos**.

La longitud de algún contorno simple o un contorno simple cerrado es la suma de las longitudes que se conforman por los arcos suave.

Sobre el **Teorema de la Curva de Jordan**: Sea C una curva simple y cerrada en el plano, es decir, una curva continua que no se intersecta a sí misma y que forma una figura cerrada sin puntos finales. Entonces, el complemento del interior de la curva C , es decir, el conjunto de puntos que no están en el interior de la curva, consiste en dos componentes conexas: una componente interior y una componente exterior. La componente interior es el conjunto de puntos que están rodeados por la curva C y la componente exterior es el conjunto de puntos que están fuera de la curva C . La demostración rigurosa no es sencilla.

5.3. Integrales de Contorno o de línea

Se conoce la integral de una función compleja f de la variable compleja z , como

$$\int_C f(z)dz,$$

donde C es un contorno en el plano complejo, este se extiende desde el un punto $z = z_1$ hasta un punto $z = z_2$, se les llama integrales de línea, su valor depende, en general, del contorno C y de la función f . Entonces, se utiliza la siguiente notación

$$\int_C f(z)dz \quad \text{o} \quad \int_{z_1}^{z_2} f(z)dz.$$

Para definir la integral, supongamos que la ecuación

$$z = z(t)$$

con $a \leq t \leq b$, representa un contorno C de $z_1 = z(a)$ hasta un $z_2 = z(b)$. Además, $f(z)$ es continua a trozos sobre el contorno C , es decir,

$$f[z(t)],$$

es continua a trozos en $a \leq t \leq b$, por lo que se entiende que $f(z)$ es continua a trozos a lo largo del contorno C . Luego, se define la integral de línea de la función f a lo largo del contorno C en el parámetro t de la siguiente forma

$$(5.3.1) \quad \int_C f(z)dz = \int_a^b f[z(t)]z'(t)dt.$$

Si tomamos la parte real e imaginaria,

$$u(x(t), y(t)) \quad \text{y} \quad v(x(t), y(t)),$$

podemos definir la integral de línea de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \int_C f(z)dz &= \int_a^b f[z(t)]z'(t)dt \\ &= \int_a^b [u(z(t)) + iv(z(t))][x'(t) + iy'(t)]dt \\ &= \int_a^b \{(u(z(t))x'(t) - v(z(t))y'(t) + i[u(z(t))y'(t) \\ &\quad + v(z(t))x'(t)]\}dt \end{aligned}$$

con $z'(t) = x'(t) + iy'(t)$.

Ahora, consideremos la misma integral en (5.3.1) pero recorriendo el contorno en el sentido opuesto. Este contorno se denotará como $-C$. Esta se describe por la ecuación

$$z = z(-t)$$

con $-b \leq t \leq -a$. Entonces, se obtiene lo siguiente

$$\int_{-C} f(z)dz = \int_{-b}^{-a} f[z(-t)]z'(-t)dt,$$

donde $z'(-t)$ es la deriva de $z(t)$ con respecto a t evaluada en $-t$.

Definición. Si C es una curva en el plano complejo y $f(z)$ es una función analítica en una región que contiene C , entonces la integral de $f(z)$ a lo largo de C es independiente de la parametrización de C . Esto se puede representar como:

$$\int_C f(z)dz = \int_{C'} f(z)dz.$$

Propiedades de las Integrales de Linealidad

(1) Se tiene que a es una constante, entonces se cumple

$$\int_C af(z)dz = a \int_C f(z)dz, \forall a \in \mathbb{C}.$$

(2) Sea f y g funciones de variable compleja continuas en tramos sobre el contorno C , se tiene

$$\int_C [f(z) + g(z)]dz = \int_C f(z)dz + \int_C g(z)dz.$$

(3) Sea C_1 y C_2 contornos, tal que $C_1 + C_2$ también es un contorno, y C es la suma de ambos contornos se cumple lo siguiente

$$\int_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz.$$

(4) Se dice que $-C$ es la curva C con orientación opuesta, entonces

$$\int_{-C} f(z)dz = - \int_C f(z)dz.$$

(5) El valor absoluto de la desigualdad es

$$\left| \int_C f(z)dz \right| \leq \int_a^b |f[z(t)]z'(t)| dt.$$

Supongamos que $f(z)$ continua por trozos en el contorno C . Si M es una constante no negativa, tal que

$$|f(z)| \leq M, \forall z \in C$$

entonces,

$$\begin{aligned} \left| \int_C f(z)dz \right| &\leq \int_a^b |z'(t)| dt \\ &\leq ML, \end{aligned}$$

donde L es la longitud del contorno C .

Demostraciones.

Para las demostraciones 1, 2 y 5 estas son análogas a las realizadas en las propiedades de integrales de funciones complejas. Para la demostración 3, se tiene:

3. Supongamos que C_1 y C_2 son dos contornos, de modo que C_1 recorre desde z_1 hasta z_3 y C_2 va desde z_3 hasta z_2 . Entonces, el contorno C es la suma de C_1 y C_2 que recorre de z_1 hasta z_2 .

Entonces, se define la integral de línea como:

$$\int_C f(z)dz = \int_{z_1}^{z_2} f(z(t))z'(t)dt.$$

Por las definiciones dadas, tenemos

$$\begin{aligned} \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz &= \int_{z_1}^{z_3} f(z(t))z'(t)dt + \int_{z_3}^{z_2} f(z(t))z'(t)dt \\ &= \int_{z_1}^{z_2} f(z(t))z'(t)dt \\ &= \int_C f(z)dz. \blacksquare \end{aligned}$$

4. Supongamos que C tiene parámetros por la función $z(t)$, con $a \leq t \leq b$, entonces $-C$ también tiene parámetros por $-z(t)$, con $a \leq t \leq b$, por lo que la integral a lo largo de $-C$ se expresa como:

$$\int_{-C} f(z)dz = \int_a^b f(-z(t))(-z'(t))dt,$$

aplicamos un cambio de variable $u = -z(t)$, $du = -z'(t)dt$, se obtiene:

$$\int_{-C} f(z)dz = - \int_{-z(a)}^{-z(b)} f(u)du,$$

se aplica otro cambio de variable $v = -u$, $dv = -du$, y se tiene que:

$$\int_{-C} f(z) = - \int_{z(a)}^{z(b)} f(v)dv = - \int_C f(z)dz$$

por lo tanto,

$$\int_{-C} f(z)dz = - \int_C f(z)dz.$$

Queda demostrado. \blacksquare

Veamos un **ejemplo** de las integrales de contorno.

Encontremos el valor de la integral

$$I = \int_C \bar{z}dz,$$

donde C es la mitad derecha del círculo $|z| = 2$

$$z = 2e^{i\theta}$$

con $\left(-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right)$, desde $z = -2i$ a $z = 2i$. Dado que

$$\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} \quad \text{y} \quad \frac{d}{d\theta}e^{i\theta} = ie^{i\theta},$$

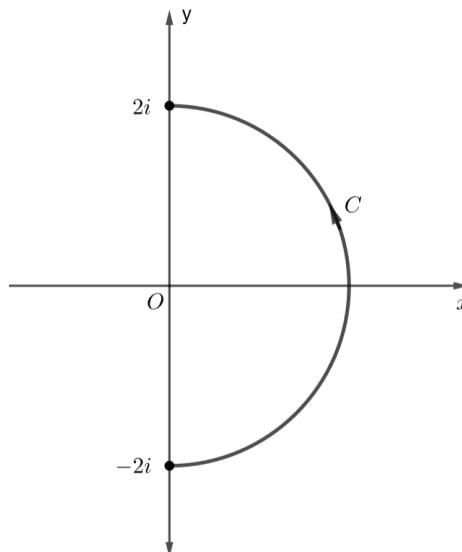


FIGURA 5.3.1. Mitad derecha del círculo para el ejemplo.

con la definición vista anteriormente (5.3.1), nos dice que

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2e^{-i\theta} 2ie^{i\theta} d\theta \\ &= 4i \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \\ &= 4\pi i. \end{aligned}$$

Notemos que cuando z está sobre el círculo $|z| = 2$, se sigue que $z\bar{z} = 4$, o sea, $\bar{z} = \frac{4}{z}$. Luego, el valor de la integral $I = 4\pi i$ se puede reformular de la siguiente forma:

$$\int_C \frac{dz}{z} = \pi i.$$

5.4. Primitivas

Sea f continua en D , y supongamos que existe una función analítica F , tal que, para cada punto del dominio D se tiene

$$F'(z) = f(z),$$

entonces se dice que F es la primitiva de f en D .

Supongamos que un contorno C tiene un parámetro por la función $z = z(t)$, con $a \leq t \leq b$, entonces,

$$\begin{aligned}
 \int_C f(z)dz &= \int_a^b [z(t)]z'(t)dt \\
 &= \int_a^b F'(t)z'(t)dt \\
 &= F[z(t)]\Big|_a^b \\
 &= F(z(b)) - F(z(a)).
 \end{aligned}$$

Se denota a $z_1 = z(t = a)$ y $z_2 = z(t = b)$ como el punto de inicio y de llegada respectivamente a lo largo de C , esto puede ser calculada a través de su primitiva, por lo que

$$\int_C f(z)dz = \int_{z_1}^{z_2} f(z)dz = F(z_2) - F(z_1),$$

donde F es la primitiva de f , siendo esta continua D y C está contenido en D .

Para el caso particular donde la **curva es cerrada** y se tiene que $z_1 = z_2$, entonces,

$$\int_C f(z)dz = 0.$$

La existencia de una primitiva para una función compleja $f(z)$ en un dominio D está estrechamente relacionada con el teorema fundamental del cálculo complejo y con la propiedad de que una función analítica en D admite una primitiva en ese dominio.

5.4.1. Teorema Fundamental del Cálculo: Sea una función $f(z)$ continua en un dominio D . Si se cumple cualquiera de las siguientes afirmaciones, entonces también se cumplen las otras:

a) $f(z)$ tiene una primitiva $F(z)$ en D .

b) La integral de $f(z)$ a lo largo de contornos contenidos completamente en D desde cualquier punto z_1 a otro punto z_2 tienen el mismo valor

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz = F(z_2) - F(z_1),$$

donde $F(z)$ es la primitiva de $f(z)$.

c) Las integrales de $f(z)$ en contornos cerrados contenidos completamente en D tienen valor nulo.

Demostración. Este teorema afirma que las tres propiedades son simultáneamente válidas o falsas. Para la demostración de este teorema probaremos que a) implica a b), que b) implica a c) y finalmente que c) implica a).

Supongamos que a) se cumple. Para un contorno C que va desde z_1 hasta z_2 , que están contenidos en un arco suave D , con parametrización $z = z(t)$ en $(a \leq t \leq b)$, se sabe que

$$\frac{d}{dt}F[z(t)] = F'[z(t)]z'(t) = f[z(t)]z'(t)$$

con $(a \leq t \leq b)$, se tiene que por el teorema fundamental del cálculo, para funciones complejas de una variable real, se deduce que

$$\begin{aligned}
 \int_C f(z)dz &= \int_a^b f[z(t)]z'(t)dt = \\
 &= F[z(t)]\Big|_a^b = \\
 &= F[z(b)] - F[z(a)].
 \end{aligned}$$

Donde $z(b) = z_2$ y $z(a) = z_1$, el valor de esta integral de contorno es $F(z_2) - F(z_1)$, este valor es independiente del contorno C , en cuanto esté contenido en D y una a z_1 con z_2 , es decir,

$$\begin{aligned} \int_{z_1}^{z_2} f(z) dz &= F(z)|_a^b = \\ &= F(z_2) - F(z_1). \end{aligned}$$

Esto es válido también cuando C es un contorno arbitrario no necesariamente suave, contenido en D .

Si C consta de un número finito de arcos suaves C_k con $(k = 1, 2, \dots, n - 1)$, cada C_k yendo de z_k a z_{k+1} , entonces

$$\begin{aligned} \int_C f(z) dz &= \sum_{k=1}^{n-1} \int_{C_k} f(z) dz = \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} [F(z_{k+1}) - F(z_k)] = \\ &= F(z_n) - F(z_1). \end{aligned}$$

Por lo que a) implica b).

Ahora, para ver que b) implica c), sean z_1 y z_2 dos puntos cualesquiera de un contorno cerrado C contenido en D , y tomemos dos caminos, ambos con un punto inicial z_1 y final z_2 , tales que $C = C_1 - C_2$. Suponiendo que la afirmación b) se cumple, podemos escribir

$$(5.4.1) \quad \int_{C_1} f(z) dz = \int_{C_2} f(z) dz,$$

es decir, por propiedad de que $-C$ es la curva C con orientación opuesta, tenemos

$$(5.4.2) \quad \int_{C_1} f(z) dz + \int_{-C_2} f(z) dz = 0.$$

Ahora, debemos probar que c) implica a). Para esto, suponemos que c) se cumple, demostraremos la validez de b) y después se concluirá en a).

Para ver que b) es cierto, sea C_1 y C_2 dos contornos cualesquiera contenidos en D , de un punto z_1 a z_2 , y vemos que, en c) la ecuación vista anteriormente cuando se hacen nula se satisface. Luego, la ecuación (5.4.1) se cumple. Entonces, la integración es independiente del camino en D , podemos definir la función

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(s) ds,$$

sobre D . Por lo que, nos falta demostrar que $F'(z) = f(z)$ en todo punto de D . Tomamos un punto $z + \Delta z$ que sea distinto de z , en un entorno de z que sea suficientemente pequeño para que esté contenido en D . Entonces

$$F(z + \Delta z) - F(z) = \int_{z_0}^{z+\Delta z} f(s) ds - \int_{z_0}^z f(s) ds = \int_z^{z+\Delta z} f(s) ds,$$

donde escogemos un camino de integración desde z hasta $z + \Delta z$ el segmento recto como muestra la figura.

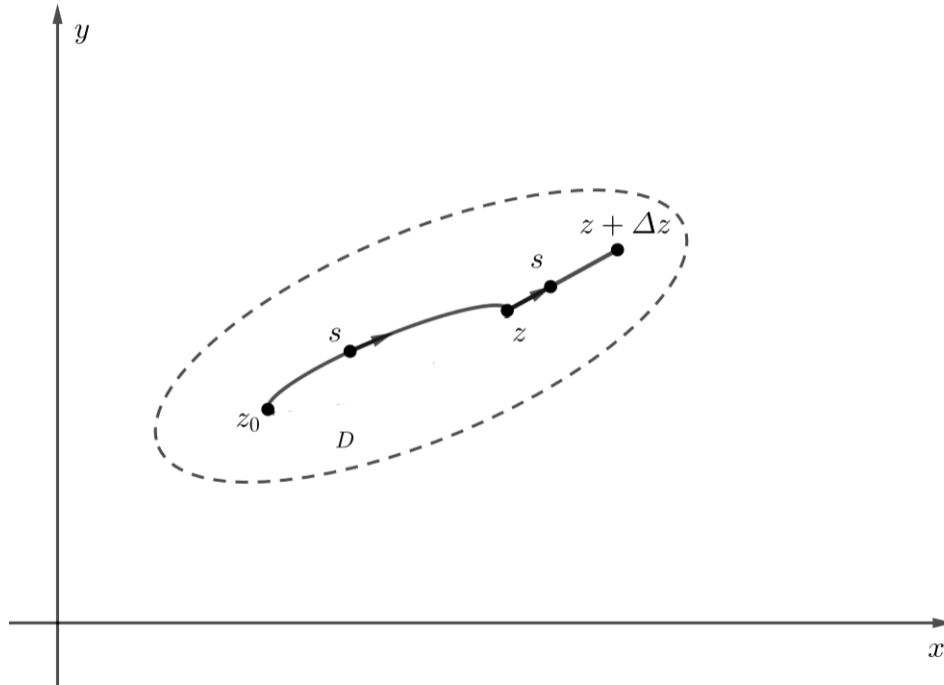


FIGURA 5.4.1. Ilustración del camino para la demostración del teorema

Como

$$\int_z^{z+\Delta z} ds = \Delta z,$$

podemos escribir

$$f(z) = \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z+\Delta z} f(z) ds,$$

y se sigue que

$$\frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) = \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z+\Delta z} [f(s) - f(z)] ds.$$

f es continua en el punto z , de modo que para cada ε positivo, existe un número positivo δ , tal que

$$|f(s) - f(z)| < \varepsilon$$

siempre que

$$|s - z| < \delta.$$

En consecuencia, si el punto $z + \Delta z$ se toma muy próximo a z como para que $|\Delta z| < \delta$, entonces

$$\left| \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) \right| < \frac{1}{|\Delta z|} \varepsilon |\Delta z| = \varepsilon,$$

es decir,

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} = f(z),$$

por lo tanto, $F'(z) = f(z)$. ■

Veamos un **ejemplo**, se tiene

$$\int_{z_1}^{z_2} z^2 dz$$

para todo el contorno C entre $z_1 = 0$ y $z_2 = 1 + i$.

Primero, debemos encontrar la función $F(z)$ que es $\frac{z^3}{3}$, como la función $f(z)$ es entera, luego es analítica en el plano complejo, y además es continua. La función $F(z)$ es analítica y $F'(z) = z^2$, entonces aplicando el teorema fundamental del cálculo, que establece que si $F(z)$ es una primitiva de $f(z)$, que lo es, en un dominio simplemente conexo D , se tiene

$$\int_{z_1}^{z_2} z^2 dz = F(z_2) - F(z_1),$$

sustituyendo las coordenadas $z_1 = 0$ y $z_2 = 1 + i$, se obtiene:

$$\begin{aligned} \int_0^{1+i} z^2 dz &= \frac{(1+i)^3}{3} - \frac{0^3}{3} \\ &= \frac{(1+i)^3}{3} \\ &= \frac{1 + 3i + 3i^2 + i^3}{3} \\ &= \frac{-2 + 2i}{3}. \end{aligned}$$

5.5. Teorema de Cauchy-Goursat

Teorema de Cauchy-Goursat: Si una función f es analítica en todos los puntos de un contorno simple cerrado C y también en su interior, entonces

$$\int_C f(z) dz = 0.$$

Información preliminar: Se supone que dos funciones reales P y Q , con variables (x, y) son continuas, y sus derivadas parciales de primer orden también son continuas en toda la región cerrada R conformada por los puntos de un contorno simple cerrado C y los de su interior en el plano xy . Por el teorema de Green que relaciona la integral de linealidad con la integral en el área, se tiene

$$\int_C [P(x, y) dx + Q(x, y) dy] = \iint_R \left(-\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x} \right) dx dy$$

donde el contorno recorre en sentido antihorario, es decir, positivo.

Es importante mencionar el *Teorema de Green*, ya que, se aplica para la siguiente demostración, pero su demostración escapa del objetivo de esta Actividad de Titulación.

Demostración. Consideremos $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ una función analítica en el contorno y en el interior de C , además, sabemos que la parte real u y la parte imaginaria v satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann:

$$u_x = v_y \quad y \quad u_y = -v_x.$$

Entonces reescribimos la integral de $f(z)$ a lo largo de C , como:

$$\int_C f(z)dz = \int_C (udx + vdy).$$

Aplicamos el teorema de Green, teniendo en cuenta que u y v tienen derivadas parciales continuas

$$\int_C (udx + vdy) = \int \int_R \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dxdy$$

debido a las ecuaciones de Cauchy-Riemann,

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned} \int_C (udx + vdy) &= \int \int_R 0dxdy \\ &= 0 \end{aligned}$$

entonces

$$\int_C f(z)dz = 0. \blacksquare$$

La contribución de Goursat fue demostrar que la condición de continuidad sobre f' se puede omitir. Esto nos permite probar que la derivada de f' de una función analítica f es analítica, sin necesidad de suponer la continuidad de f' .

Algunas de las aplicaciones del Teorema de Cauchy-Goursat, sin necesidad de calcular las integrales, se tienen, en cada caso, para cualquier contorno C ,

- (1) $\int_C dz = 0.$
- (2) $\int_C z dz = 0.$
- (3) $\int_C z^2 dz = 0.$

5.6. Fórmula Integral de Cauchy

Sea f una función analítica en un contorno cerrado simple y en el interior C . Para cualquier z_0 interior a C , se tiene lo siguiente,

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz,$$

donde el contorno recorre en sentido antihorario, esta se le conoce como la **Fórmula Integral de Cauchy**.

Particularmente, los valores de una función analítica en el interior de una curva C están determinados por los valores de la función en C .

Se utiliza la formula integral de Cauchy para calcular ciertas integrales a lo largo de contornos cerrados simples, se puede expresar como:

$$\int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0).$$

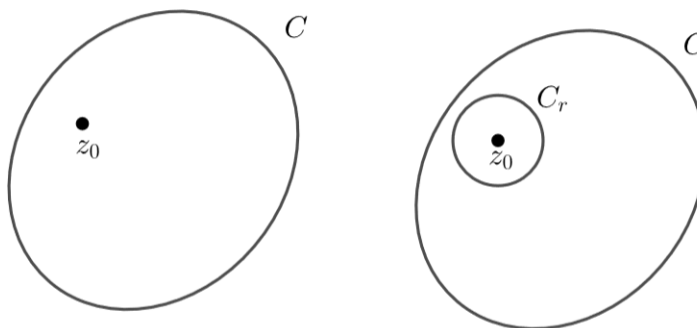


FIGURA 5.6.1. Representación del círculo C_r con centro z_0 dentro del contorno C

Demostración.

Se observa que la función $\frac{f(z)}{z - z_0}$ es analítica en todos los puntos del interior de C , a excepción de z_0 , por lo tanto, si C_r es un círculo de radio r centrado en z_0 entonces, se tiene

$$\int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \int_{C_r} \frac{f(z)}{z - z_0} dz,$$

basta con probar esta igualdad, ya que, se sabe

$$f(z_0) \int_{C_r} \frac{1}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0).$$

Entonces, veamos que

$$\int_{C_r} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - \int_{C_r} \frac{f(z_0)}{z - z_0} dz = \int_{C_r} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz = 0$$

como $f(z)$ es continua en el punto z_0 , para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ si $|z - z_0| < \delta$, entonces si $r < \delta$, se tiene

$$\left| \int_{C_r} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz \right| \leq \frac{\varepsilon}{r} 2\pi r = 2\pi \varepsilon.$$

Esto vale para todo ε cuando r es suficientemente pequeño y no afecta al valor de la integral al disminuir r , la integral debe valer 0. ■

Ejemplo.

Calcular la integral

$$\int_C \frac{f(z)}{z + i} dz \quad \text{con} \quad f(z) = \frac{z}{9 - z^2},$$

y $C = |z| = 2$ con recorrido antihorario, es decir, positivamente.

Solución: Como $f(z)$ es analítica en el contorno C y en su interior. Entonces,

$$\int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0)$$

se expresa como

$$\int_C \frac{f(z)}{z - i} dz = \int_C \frac{f(z)}{z - (-i)} dz,$$

donde $z_0 = -i$. Además, se tiene $f(z_0) = f(-i) = \frac{-i}{9 - (-i)^2} = \frac{-i}{10}$, reemplazando:

$$\begin{aligned} \int_C \frac{f(z)}{z + i} dz &= 2\pi i f(z_0) \\ &= 2\pi i \frac{(-i)}{10} \\ &= \frac{\pi}{5}. \end{aligned}$$

5.7. Derivadas de las funciones analíticas

La fórmula integral de Cauchy nos dice que si $f(z)$ es analítica en el contorno C y en su interior, entonces para cada punto z en el interior de contorno C ,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi.$$

Es importante resaltar que para que la integral del lado derecho tenga sentido, basta con que $f(z)$ esté definida y sea continua en todo el contorno C y su interior. No se requiere que $f(z)$ sea analítica en todo el plano complejo, solo en la región que contiene a C y su interior.

Probaremos que la derivada del $f(z)$ existe y tiene la siguiente representación

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi$$

Demostración. Para esta demostración utilizaremos el teorema de continuidad de la integral con parámetros, el hecho de que $f(\xi)$ es analítica y continua en C , y la cota superior M para la función $f(\xi)$ en el contorno C , esto para demostrar que la derivada de $f(z)$ existe y tiene la representación dada.

Decimos que

$$f'(z) = \lim_{w \rightarrow z} \frac{f(w) - f(z)}{w - z},$$

si es que el límite existe.

Por definición, si $w, z \notin C$,

$$\begin{aligned} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} &= \frac{1}{2\pi i(w - z)} \int_C \left[\frac{f(\xi)}{\xi - w} - \frac{f(\xi)}{\xi - z} \right] d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - w)(\xi - z)} d\xi. \end{aligned}$$

Veamos si

$$\lim_{w \rightarrow z} \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - w)(\xi - z)} d\xi = \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - w)(\xi - z)} d\xi.$$

La diferencia entre las integrales es la siguiente

$$\int_C \left[\frac{1}{(\xi - w)(\xi - z)} - \frac{1}{(\xi - w)(\xi - z)} \right] f(\xi) d\xi = \int_C \frac{w - z}{(\xi - w)(\xi - z)^2} f(\xi) d\xi.$$

Sea L la longitud de C y M una cota superior para la norma de los valores de $f(\xi)$ en el contorno C . Si la distancia mínima de z a los puntos de C esta definida como d y la distancia entre w y z es menor que $\frac{d}{2}$ entonces,

$$\left| \int_C \frac{w - z}{(\xi - w)(\xi - z)^2} f(\xi) d\xi \right| \leq \frac{|w - z|}{\frac{d}{2} d^2} M \cdot L,$$

la última cantidad tiende a cero cuando $|w - z| \rightarrow 0$. ■

Teorema sobre la analiticidad de f y sus derivadas: Si una función f es analítica en un punto, entonces sus derivadas de todos los órdenes también son analíticas en ese punto. El valor de cada punto interior viene dado por

$$(5.7.1) \quad f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} dz,$$

donde f es analítica en el contorno simplemente cerrado C y en su interior, con su recorrido antihorario, n es el orden de la derivada, y z es un punto interior al contorno C .

Demostración. La derivada de la función $f(z)$ es analítica y verificaremos primero que

$$f''(z) = \frac{2}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^3} dz.$$

Se sabe que $f(z)$ es derivable y que

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi,$$

por lo que

$$\begin{aligned} \frac{f'(w) - f'(z)}{w - z} &= \frac{1}{2\pi i(w - z)} \int_C \left[\frac{f(\xi)}{(\xi - w)^2} - \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} \right] d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\xi - w + \xi - z}{(\xi - w)^2(\xi - z)^2} f(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Veamos si

$$\lim_{w \rightarrow z} \int_C \frac{\xi - w + \xi - z}{(\xi - w)^2(\xi - z)^2} f(\xi) d\xi = \int_C \frac{2}{(\xi - z)^3} f(\xi) d\xi$$

La diferencia entre las integrales es la siguiente

$$\int_C \frac{(\xi - w + \xi - z)(\xi - z) - 2(\xi - w)^2}{(\xi - w)^2(\xi - z)^3} f(\xi) d\xi = \int_C \frac{(3\xi - 2w - z)(w - z)}{(\xi - w)^2(\xi - z)^3} f(\xi) d\xi.$$

Sea L la longitud de C y M una cota los valores de $f(\xi)$ en el contorno C . Si la distancia mínima de z a los puntos de C esta definida como d y la distancia máxima es D y si w dista de z menos que $\frac{d}{2}$ entonces,

$$\left| \int_C \frac{(\xi - z + 2\xi - 2w)(w - z)}{(\xi - w)^2(\xi - z)^3} f(\xi) d\xi \right| \leq \frac{4D |w - z|}{\frac{1}{4}d^2d^3} M \cdot L$$

y la última cantidad tiende a cero cuando $|w - z| \rightarrow 0$, así queda verificado

$$f''(z) = \frac{2}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^3} dz.$$

Como, ya hemos demostrado las siguientes derivadas:

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi$$

y

$$f''(z) = \frac{2}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^3} dz$$

Podemos demostrar por inducción matemática que la función $f(z)$ tiene derivadas de todos los órdenes y que

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} dz, \blacksquare$$

Cuando la función $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ es analítica en el punto $z = x + iy$, la analiticidad de f' nos asegura la continuidad de f' , luego, las derivadas parciales tanto de u como de v son continuas en ese punto, dado que

$$f'(z) = u_x + iv_x = -iu_y + v_y.$$

Al repetir estos cálculos a derivadas de órdenes mayores, se concluye que las derivadas parciales de u y v de todos los órdenes son continuas en cualquier punto en el que f es analítica.

Ejemplo 1: Calcular la siguiente integral suponiendo que C es un contorno simple cerrado con orientación positiva y z_0 interior a C .

$$\int_C \frac{1}{z - z_0} dz.$$

Solución: Al utilizar la fórmula de (5.7.1), que establece que si $f(z)$ es analítica en una región que contiene al contorno C y su interior, entonces para cualquier punto z_0 interior a C , tenemos:

$$\int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0).$$

Para nuestro caso, $f(z) = 1$, la cual es una función analítica en todo el plano complejo, a excepción de $z = z_0$, entonces,

$$\begin{aligned} \int_C \frac{1}{z - z_0} dz &= 2\pi i \cdot 1 \\ &= 2\pi i, \end{aligned}$$

$$\int_C \frac{1}{(z - z_0)^{n+1}} dz = 0.$$

Ejemplo 2: Si C es el círculo con centro en 0 y de radio 1, entonces

Solución: con $n = 0$

$$\begin{aligned} \int_C \frac{\cos(z)}{z} dz &= 2\pi i \cos(0) \\ &= 2\pi i. \end{aligned}$$

Para $n = 1$,

$$\begin{aligned} \int_C \frac{\cos(z)}{z^2} dz &= \frac{2\pi i}{1} \cos'(0) \\ &= \frac{2\pi i}{1} (-\sin(0)) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Para $n = 2$

$$\begin{aligned} \int_C \frac{\cos(z)}{z^3} dz &= \frac{2\pi i}{2} \cos''(0) \\ &= -\pi i. \end{aligned}$$

5.8. Teorema de Morera

Si f es una función continua en un dominio D , y si

$$\int_C f(z) dz = 0,$$

para todo contorno cerrado C contenido en D , entonces f es analítica en D .

Demostración. El teorema de Morera establece una relación importante entre la continuidad y la holomorfía de una función $f(z)$ en un dominio D simplemente conexo. Si $f(z)$ es continua en D y la integral de $f(z)$ a lo largo de cualquier contorno cerrado en D es igual a cero, entonces podemos concluir que $f(z)$ tiene una función primitiva $F(z)$ en D . Esto significa que existe una función $F(z)$ derivable en D y cuya derivada coincide con $f(z)$, es decir, $F'(z) = f(z)$ en D .

La existencia de $F(z)$ implica que $f(z)$ es una función holomorfa (analítica) en D , ya que puede ser representada como la derivada de $F(z)$. Además, como $F(z)$ es derivable, todas sus derivadas de orden n también existen y son holomorfas en D . En particular, la derivada primera $f(z)$ es una función holomorfa en D , lo que significa que tiene derivadas de todos los órdenes en el dominio D .

Entonces, resumiendo lo anterior, bajo las hipótesis del teorema de Morera, $f(z)$ es una función continua que tiene una función primitiva $F(z)$ derivable en el dominio D . Esto implica que $f(z)$ es holomorfa en D y que todas sus derivadas, incluyendo la derivada primera $f'(z)$, también son funciones holomorfas en D . ■

5.9. Desigualdades de Cauchy

Teorema. Sea f una función analítica dentro y sobre una circunferencia de radio r y centro en $z = z_0$ y si para algún $M > 0$, $|f(z)| \leq M$ para todo z sobre el contorno C y $|f(z)| < M$ para z en el interior de C , entonces

$$\left| f^{(n)}(z) \right| \leq \frac{n!M}{r^n}$$

para $n = 0, 1, 2, \dots$

Demostración. Como f es analítica sobre C , es continua y acotada sobre C . Entonces, existe un número M tal que $|f(z)| < M$ para todo z sobre C . Entonces, se tiene:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

para $n = 0, 1, 2, \dots$

Como $|z - z_0| = r$ para z sobre C , entonces

$$\begin{aligned} |f^{(n)}(z)| &\leq \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{|f(z)| |dz|}{|z - z_0|^{n+1}} \\ &\leq \frac{n!}{2\pi r^{n+1}} M \int_C |dz| \\ &\leq \frac{n!M}{2\pi r^{n+1}} 2\pi r \\ &\leq \frac{n!M}{r^n}, \end{aligned}$$

hemos demostrado que para todo $n = 0, 1, 2, \dots$ se cumple

$$|f^{(n)}(z)| \leq \frac{n!M}{r^n}. \blacksquare$$

5.10. Módulos Máximos de Funciones

Lema: Sea $f(z)$ analítica en un entorno $|z - z_0| < \varepsilon$ de un punto z_0 . Si $|f(z)| \leq |f(z_0)|$ para todo punto z de ese entorno, entonces $f(z)$ tiene valor constante $f(z_0)$ sobre ese entorno.

Demostración. Para probar este lema, decimos que f satisface las condiciones expuestas. Entonces, sea un punto cualquiera z_1 del entorno distinto del punto z_0 , y sea ρ la distancia entre estos puntos. Si C_ρ denota al círculo $|z - z_0| = \rho$, con sentido antihorario, con centro en z_0 y que pasa por el punto z_1 , la fórmula integral de Cauchy nos dice que

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho} \frac{f(z)}{z - z_0} dz,$$

con representación paramétrica

$$z = z_0 + \rho^{i\theta} \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi).$$

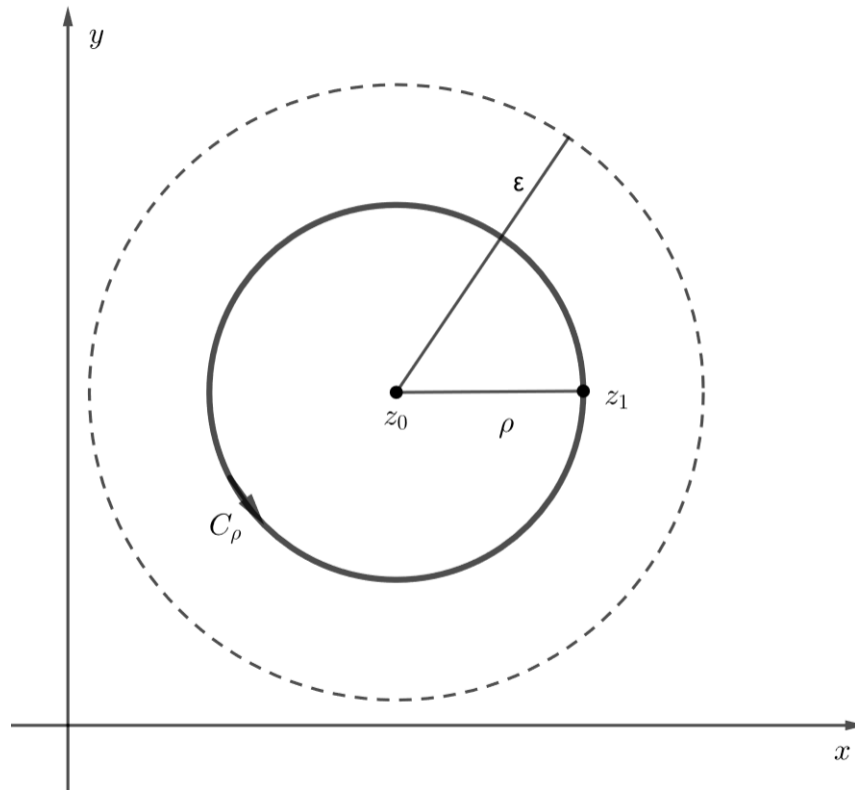


FIGURA 5.10.1. Ilustración para la demostración del Lema.

C_ρ nos permite escribir la ecuación como

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + \rho e^{i\theta}) d\theta.$$

Con esto podemos ver que cuando una función es analítica en el interior y en el contorno de un círculo dado, su valor en el centro es la media aritmética de sus valores sobre este círculo. Este resultado se le conoce a veces como el *teorema del valor medio de Gauss*.

De la ecuación anterior, se obtiene la siguiente desigualdad

$$(5.10.1) \quad |f(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + \rho e^{i\theta})| d\theta.$$

Análogamente

$$(5.10.2) \quad |f(z_0 + \rho e^{i\theta})| \leq |f(z_0)|$$

con $0 \leq \theta \leq 2\pi$, se observa que

$$\int_0^{2\pi} |f(z_0 + \rho e^{i\theta})| d\theta \leq \int_0^{2\pi} |f(z_0)| d\theta = 2\pi |f(z_0)|.$$

Luego,

$$(5.10.3) \quad |f(z_0)| \geq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + \rho e^{i\theta})| d\theta.$$

Con las desigualdades de (5.10.1) y (5.10.3) es evidente que

$$|f(z_0)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + \rho e^{i\theta})| d\theta,$$

es decir,

$$\int_0^{2\pi} [|f(z_0)| - |f(z_0 + \rho e^{i\theta})|] d\theta = 0.$$

La función f de la integral es continua en θ , y por la condición (5.10.2), es mayor o igual a cero sobre todo el intervalo $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Como la integral vale cero, la función f es nula. Esto es,

$$|f(z_0 + \rho e^{i\theta})| = |f(z_0)|$$

con $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Esto demuestra que $|f(z)| = |f(z_0)|$ para cualquier punto z del círculo C_ρ .

Finalmente, como z_1 es un punto arbitrario del entorno abierto $0 < |z - z_0| < \varepsilon$, entonces $f(z) = f(z_0)$ se satisface, en efecto, para todos los puntos z que están sobre cualquier círculo C_ρ , con $0 < \rho < \varepsilon$. Cuando el módulo de una función analítica es constante en un dominio, es decir que la función es constante en él. Luego $f(z) = f(z_0)$ en todo punto del entorno, por lo tanto, el lema queda demostrado. ■

Teorema. Si una función f es analítica y no constante en un dominio dado D , entonces $|f(z)|$ no alcanza un valor máximo en D . Es decir, no existe un punto z_0 en el dominio, tal que

$$|f(z)| \leq |f(z_0)|,$$

para todos los puntos z en él.

Demostración. Para demostrar el teorema, supongamos que $f(z)$ tiene un valor máximo en algún punto z_0 de D , y llegaremos a una contradicción.

Dado que D es un conjunto abierto y conexo, podemos encontrar una poligonal L formada por un número finito de segmentos rectos unidos entre sí, contenida en D , que va desde z_0 hasta cualquier otro punto P en D . Definimos d como la distancia mínima entre los puntos de L y la frontera de D , a menos que D sea todo el plano complejo, en cuyo caso d puede ser cualquier número positivo. Luego, construimos una sucesión finita de puntos $z_0, z_1, z_2, \dots, z_n$ a lo largo de L , donde z_n coincide con P , y cada punto está lo suficientemente cerca de los adyacentes, de modo que

$$|z_k - z_{k-1}| < d$$

para $k = 1, 2, \dots, n$.

A continuación, creamos una sucesión finita de discos abiertos $N_0, N_1, N_2, \dots, N_n$, donde cada N_k está centrado en z_k y tiene radio d . Estos discos están completamente contenidos en D , y el centro z_k de cada N_k está en el disco N_{k-1} .

Dado que $|f(z)|$ tiene un valor máximo en D , esto implica que también tiene un valor máximo en N_0 en el punto z_0 . Utilizando el lema previamente demostrado, podemos concluir que $f(z)$ es constante sobre N_0 , es decir, $f(z) = f(z_0)$ para todo z en N_0 .

En particular, $f(z_1) = f(z_0)$. Como z_2 está en N_1 , nuevamente aplicamos el lema para afirmar que $|f(z)| \leq |f(z_1)|$ para todo z en N_1 , lo que nos lleva a

$$f(z) = f(z_1) = f(z_0).$$

Cuando z está en N_1 . Repitiendo este razonamiento para cada N_k , llegamos a la conclusión de que

$$f(z) = f(z_0)$$

para todo punto z en D .

Sin embargo, esta conclusión contradice nuestra hipótesis inicial de que $f(z)$ no es constante en D , ya que hemos demostrado que $f(z)$ debe ser constante en todo dominio D . Por lo tanto, llegamos a una contradicción y podemos concluir que $|f(z)|$ no alcanza un valor máximo en D , por lo que, el teorema está probado. ■

Se puede reformular el teorema con un importante corolario del principio del módulo máximo.

Corolario. *Sea f una función continua en una región acotada cerrada R , y analítica y no constante en el interior de R . Entonces, el máximo valor de $|f(z)|$ en R que se alcanza siempre, y ocurre en algún lugar de la frontera de R , nunca en su interior.*

Demostración. Si f es analítica en todos los puntos interiores de R y, además, es continua en R , entonces $|f(z)|$ tiene un valor máximo en algún punto de R , es decir, existe una constante $M > 0$ tal que $|f(z)| \leq M$ para todo $z \in R$, y la desigualdad ocurre en al menos un punto. Si la función $f(z)$ es constante, entonces $|f(z)| = M$ para todo $z \in R$. Sin embargo, si $f(z)$ no es constante, entonces, según el principio del módulo máximo, $|f(z)| \neq M$ para cualquier punto en el interior de R . Por lo tanto, el valor máximo no puede encontrarse en el interior de R , sino que debe estar en su frontera. ■

Teorema del Principio del Módulo Mínimo. Si f es analítica en una región acotada D , continua y no nula en D . Entonces $|f(z)|$ alcanza su valor mínimo en la frontera de D .

Demostración. Sea $g(z) = \frac{1}{f(z)}$, donde g es analítica y continua en D cerrado. Según lo visto en el corolario anterior, $|g(z)|$ alcanzará su valor máximo en la frontera de D , es decir, para algún punto z_0 en la frontera de D , tendremos $|g(z)| \leq |g(z_0)|$ para todo z en D .

Ahora, $|g(z)| = \left| \frac{1}{f(z)} \right| = \frac{1}{|f(z)|}$, y como $|g(z_0)|$ es el máximo valor de $|g(z)|$ en D , entonces $\frac{1}{|f(z_0)|} = |g(z_0)|$ es el máximo valor de $\frac{1}{|f(z)|}$ en D . por lo tanto, $\frac{1}{|f(z)|}$ es el mínimo valor de $|f(z)|$ en D , y esto ocurre en algún punto z_0 de la frontera de D . ■

Lema de Schwartz. *Si una función f es analítica sobre y en el interior de un círculo C , entonces $|z| = r$, si $f(0) = 0$ y para algún $M > 0$, $|f(z)| \leq M$ para z sobre C , se tiene que*

$$|f(z)| \leq \frac{M|z|}{r}$$

con $z \leq r$.

Demostración. Se define la función $\frac{f(z)}{z}$ que es analítica sobre y en el interior de C , a excepción de $z = 0$. Puesto que f es analítica en $z = 0$, su derivada existe en $z = 0$. Por esto, existe un número positivo δ , tal que

$$\left| \frac{f(z) - 0}{z - 0} - f'(0) \right| = \left| \frac{f(z)}{z} - f'(0) \right| < 1$$

con $(0 < |z| < \delta)$. Así,

$$\left| \frac{f(z)}{z} \right| < 1 + |f'(0)|$$

para todo z que satisface $0 < |z| < \delta$. En consecuencia, $\frac{|f(z)|}{z}$ es acotado sobre y dentro de C .

Por lo que, $\frac{f(z)}{z}$ tiene una singularidad que es removible en $z = 0$, y existe una función g definida

de la siguiente manera

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{z} & , \text{ para } z \neq 0 \\ f'(0) & , \text{ para } z = 0 \end{cases}$$

que es analítica sobre y en el interior de C . Entonces, sobre C , se tiene

$$|g(z)| = \left| \frac{f(z)}{z} \right| \leq \frac{M}{r}.$$

Por el teorema del módulo máximo, se tiene que $|g(z)| \leq \frac{M}{r}$ para todo z que satisface $|z| \leq r$.

Por tanto, $|f(z)| \leq \frac{M|z|}{r}$ con z que satisface $0 < |z| \leq r$, es claro que la desigualdad es válida también para $z = 0$, $|f(z)| \leq \frac{M|z|}{r}$ con z tal que $|z| \leq r$. ■

5.11. Teorema de Liouville y el Teorema Fundamental del Álgebra

Antes de ver el Teorema de Liouville, tenemos que precisar lo siguiente:

Cuando f es analítica dentro y sobre un círculo C , $|z - z_0| = R$, con orientación positiva, entonces

$$f^n(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz.$$

Se denomina M_R al máximo de $|f(z)|$ en el círculo C , se sigue la **desigualdad de Cauchy**

$$|f^n(z_0)| \leq \frac{n!M_R}{R^n}$$

con $n = 1, 2, \dots$

A partir de esto, se puede demostrar que no existen funciones enteras, excepto las constantes, que sean acotadas para todo z , como dice el siguiente teorema.

Teorema de Liouville. Si f es entera y acotada en todo el plano complejo, $f(z)$ es constante en el plano.

Demostración.

Notemos que, al ser f entera, la desigualdad $|f'(z_0)| \leq \frac{n!M_R}{R}$ (con $n = 1$), es válida para cualquier z_0 y de R . La hipótesis de que f acotada nos dice que existe una constante positiva M , tal que $|f(z)| \leq M$ para todo z , y debido a que la constante $M_R \leq M$, se deduce que

$$|f'(z_0)| \leq \frac{M}{R},$$

donde z_0 es cualquier punto fijo del plano y R es arbitrariamente grande. Ahora, el número M en la desigualdad anterior es independiente del valor de R escogido. Por lo tanto, la desigualdad se mantiene para valores arbitrariamente grandes de R , sólo si $f'(z_0) = 0$. Esto es cierto para cada punto z_0 del plano, esto se debe a que $f'(z) = 0$ en todo el plano complejo, entonces, la función f no tiene términos que dependan de z en su expansión en serie de Taylor. Por lo tanto, $f(z)$ es una función constante. ■

OBSERVACIÓN. Si bien en este apartado es utilizado la serie de Taylor, esta se encuentra definida en la sección 6.2.

El teorema de Liouville se desprende fácilmente para el siguiente teorema.

Teorema Fundamental del Álgebra. Todo polinomio

$$P(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_nz^n$$

con $a_n \neq 0$, de grado n ($n \geq 1$) tiene al menos un cero. Esto es, existe al menos un punto z_0 tal que $P(z_0) = 0$.

Demostración. En la siguiente demostración se utilizará reducción al absurdo. Supongamos que $P(z)$ no se anula en ningún z . Entonces, la función

$$f(z) = \frac{1}{P(z)},$$

es entera, y también es acotada en el plano complejo.

Para observar que es acotada, tenemos

$$w = \frac{a_0}{z^n} + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \frac{a_2}{z^{n-2}} + \dots + \frac{a_{n-1}}{z},$$

por esto,

$$P(z) = (a_n + w)z^n.$$

Se puede encontrar un número positivo R lo suficientemente grande como para que el módulo de cada uno de los cocientes de w sea menor que el número $\frac{|a_n|}{2n}$ cuando $z > R$. La desigualdad triangular generalizada, que se aplica a n números complejos, muestra que $|w| < \frac{|a_n|}{2}$ para ciertos valores de z . Por consiguiente, cuando $|z| > R$,

$$|a_n + w| \geq ||a_n| - |w|| > \frac{|a_n|}{2},$$

y por esto, nos permite escribir

$$|f(z)| = \frac{1}{|P(z)|} = \frac{1}{|a_n + w||z|^n} < \frac{2}{|a_n|R^n}$$

con ($|z| > R$). Luego, f es acotada en la región exterior al disco $|z| \leq R$. Sin embargo, f es continua en ese disco cerrado, esto quiere decir que f allí es acotada igualmente. Luego, f es acotada en todo el plano complejo.

Ahora, es por el teorema de Liouville que $f(z)$, y por lo tanto $P(z)$, es constante. Pero P no era constante, por lo que llegamos a una contradicción. Como consecuencia queda demostrado que un polinomio de grado n ($n \geq 1$) tiene exactamente n ceros distintos en el plano complejo, contados con multiplicidad. ■

CAPÍTULO 6

Series

6.1. Convergencia de sucesiones y series

Una sucesión infinita

$$z_1, z_2, \dots, z_n, \dots,$$

de números complejos tiene *límite* z si, para cada número positivo ε , existe un número positivo n_0 tal que

$$|z_n - z| < \varepsilon \text{ si } n > n_0$$

Lo anterior significa que para valores suficientemente grandes de n . Dado $\varepsilon > 0$, todos los puntos z_n están a una distancia de $z < \varepsilon$, como se puede ver en la imagen.

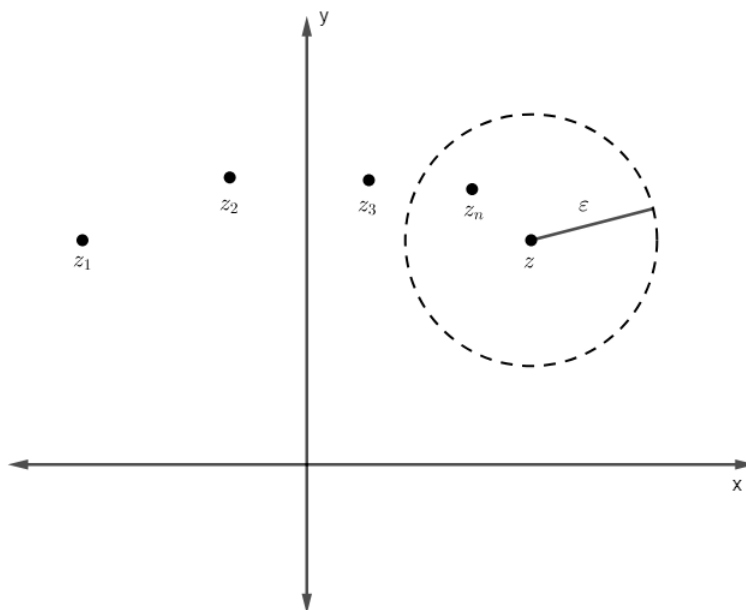


FIGURA 6.1.1. Representación geométrica de la sucesión

Dado que podemos hacer que ε sea tan pequeño como queramos, se deduce que los puntos z_n se aproximan arbitrariamente a z a medida que aumenta sus subíndices. Tenga en cuenta que el valor requerido de n_0 generalmente dependerá del valor de ε .

La sucesión anterior puede tener a lo más un límite. Esto significa que el límite z es único, si existe. Cuando existe el límite, se dice que la serie converge a z , por lo que se escribe

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z.$$

Si la sucesión no tiene límite, ésta diverge.

TEOREMA. Supongamos que $z_n = x_n + iy_n (n = 1, 2, 3, \dots)$ y $z = z + iy$. Entonces,

$$(6.1.1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z,$$

si y solo si

$$(6.1.2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \text{ y } \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y.$$

Demostración. Para probar el teorema, asumimos que la condición (6.1.1) es verdadera y obtendremos de ella las condiciones (6.1.2). Según (6.1.1), para todo número positivo ε existe un entero positivo n_0 tal que

$$|(x_n - x) + i(y_n - y)| < \varepsilon \text{ siempre que } n > n_0.$$

Luego,

$$|x_n - x| \leq |(x_n - x) + i(y_n - y)| \text{ y } |y_n - y| \leq |(x_n - x) + i(y_n - y)|,$$

por lo tanto

$$|x_n - x| < \varepsilon \text{ y } |y_n - y| < \varepsilon \text{ si } n > n_0,$$

es decir, las condiciones (6.1.2) se satisfacen.

De manera análoga, si partimos de (6.1.2), sabemos que para cada número positivo ε existen enteros positivos n_1 y n_2 , tales que

$$|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ si } n > n_1,$$

y

$$|y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ si } n > n_1.$$

Por lo tanto, si n_0 es el mayor de los dos enteros n_1 y n_2 , entonces

$$|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ y } |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ si } n > n_0.$$

Pero,

$$|(x_n - x) + i(y_n - y)| \leq |(x_n - x)| + |(y_n - y)|,$$

luego tenemos,

$$|z_n - z| < \varepsilon \text{ si } n > n_0.$$

Finalmente, la condición (6.1.1) es válida y el teorema quedará demostrado. ■

En consecuencia, una serie

$$(6.1.3) \quad \sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 + z_2 + \dots + z_n + \dots,$$

de números complejos converge con suma S si la sucesión

$$S_N = \sum_{n=1}^N z_n = z_1 + z_2 + \dots + z_N, \quad (N = 1, 2, \dots)$$

de sumas parciales converge a S . Lo que se denota por

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = S.$$

OBSERVACIÓN. Notar que como una sucesión puede tener a lo más un límite, una serie puede tener a lo más una suma. Cuando una serie no converge se dice que es *divergente*.

TEOREMA. Supongamos que $z_n = x_n + iy_n$, ($n = 1, 2, 3, \dots$) y $S = X + iY$. En tal caso,

$$(6.1.4) \quad \sum_{n=1}^{\infty} z_n = S,$$

si y solo si

$$(6.1.5) \quad \sum_{n=1}^{\infty} x_n = X \text{ y } \sum_{n=1}^{\infty} y_n = Y.$$

Demostración. Sea S_n la suma parcial de los N primeros términos de la serie (6.1.4), observamos que

$$(6.1.6) \quad S_N = X_N + iY_N,$$

donde

$$X_N = \sum_{n=1}^N x_n \text{ e } Y_N = \sum_{n=1}^N y_n.$$

Ahora (6.1.4) se cumple, si y solo si

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N = S,$$

y debido a la relación de (6.1.6) y del primer Teorema visto, esta condición es verdadera si y solo si,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} X_N = X \text{ y } \lim_{N \rightarrow \infty} Y_N = Y.$$

Así que (6.1.4) implica (6.1.5) y viceversa. Como X_N e Y_N son las sumas parciales de las series en (6.1.5), el teorema queda demostrado. ■

Recordando el cálculo, donde el n -ésimo término de una serie convergente de números reales tiende a cero cuando n tiende a infinito, vemos de los dos teoremas vistos que lo mismo es válido para una serie convergente de números complejos. Esto significa que la condición necesaria para la convergencia de la una serie infinita es

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0.$$

Los términos de una serie convergente de números complejos son, por lo tanto, acotados. Más precisamente, existe una constante positiva M tal que $|z_n| \leq M$, para todo entero positivo n .

Existe otra propiedad importante de las series de números complejos. Suponemos que la serie (6.1.3) es *absolutamente convergente*. Es decir, si $z_n = x_n + iy_n$, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{x_n^2 + y_n^2},$$

de los números reales $\sqrt{x_n^2 + y_n^2}$ converge. Como

$$|x_n| \leq \sqrt{x_n^2 + y_n^2} \text{ y } |y_n| \leq \sqrt{x_n^2 + y_n^2},$$

sabemos por el criterio de comparación real que las dos series

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| \text{ y } \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|,$$

convergen. Además, dado que la convergencia absoluta de una serie de números reales implica la convergencia de la misma serie, entonces existen números reales X e Y donde se comprueba (6.1.5). Según el segundo Teorema visto, la serie (6.1.3) converge, por lo que la convergencia absoluta de una serie de números complejos implica la convergencia de esa serie.

Asumiendo que una serie tiene como sumas un número S , es conveniente definir el resto ρ_N tras N términos como,

$$\rho_N = S - S_N.$$

Luego, $S = S_N + \rho_N$, y ya que $|S_N - S| = |\rho_N - 0|$, vemos que una serie converge a un número S si y solo si la sucesión de restos tiende a cero. En tales serie expresaremos por las sumas, sumas parciales y restos por $S(z), S_N(z)$ y $\rho_N(z)$, respectivamente.

6.2. Series de Taylor

A continuación, se enunciará el teorema de Taylor:

TEOREMA. *Sea f una función analítica en un disco abierto $|z - z_0| < R_0$, centrado en z_0 y de radio R_0 . Entonces en todo punto de z de ese disco, $f(z)$ admite la representación en serie de potencias,*

$$(6.2.1) \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad (|z - z_0| < R_0),$$

donde,

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

la serie de potencias converge a $f(z)$ cuando $|z - z_0| < R_0$.

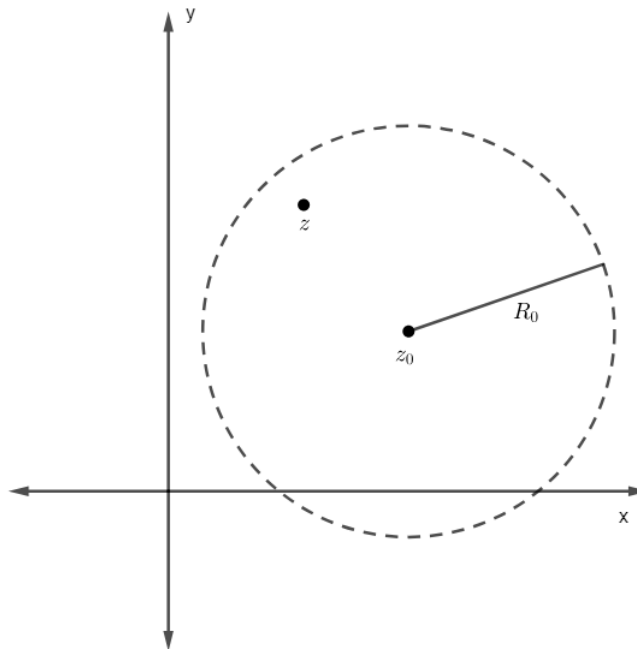


FIGURA 6.2.1. Disco Abierto $|z - z_0| < R_0$

Esto es el desarrollo de $f(z)$ en serie de Taylor en torno al punto z_0 . Es importante destacar que gracias al convenio $f^{(0)}(z_0) = f(z_0)$ y $0! = 1$, de esta manera la serie en su desarrollo se puede escribirse

$$f(z) = f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1!} (z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!} (z - z_0)^2 + \dots \quad (|z - z_0| < R_0).$$

OBSERVACIÓN. Además, si f es entera, el radio R_0 del disco puede tomarse arbitrariamente grande. De esta manera, la serie converge a $f(z)$ en todo punto z del plano infinito y la condición de validez se convierte en $|z - z_0| < \infty$.

Demostración. Primero demostraremos el teorema con $z_0 = 0$, lo cual para un z_0 arbitrario será una consecuencia inmediata. Primero, sea C_0 cualquier círculo positivamente orientado $|z| = r_0$ contenido en el disco $|z| < R_0$, pero lo bastante grande como para que el punto z este dentro de él.

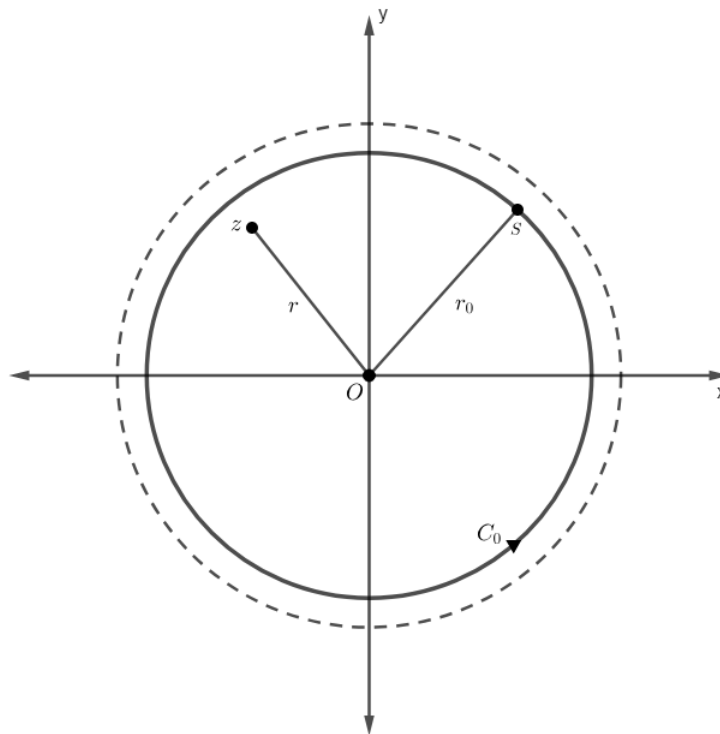


FIGURA 6.2.2

la fórmula integral de Cauchy se aplica, entonces

$$(6.2.2) \quad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(s)ds}{s - z}.$$

Ahora bien,

$$\frac{1}{s - z} = \frac{1}{s} \left[\frac{1}{1 - (z/s)} \right],$$

y

$$\frac{1}{1 - c} = 1 + c + c^2 + \dots + c^{N-1} + \frac{c^N}{1 - c} \quad (N = 1, 2, \dots),$$

cuando c es cualquier número complejo distinto de la unidad. Por lo tanto,

$$\frac{1}{s - z} = \frac{1}{s} \left[1 + \left(\frac{z}{s}\right) + \left(\frac{z}{s}\right)^2 + \dots + \left(\frac{z}{s}\right)^{N-1} + \frac{(z/s)^N}{1 - (z/s)} \right],$$

en consecuencia,

$$\frac{1}{s - z} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2}z + \frac{1}{s^3}z^2 + \dots + \frac{1}{s^N}z^{N-1} + z^N \frac{1}{(s - z)s^N}.$$

A continuación, multiplicamos por $\frac{f(s)}{2\pi i}$ e integramos cada uno de sus miembros a lo largo de C_0 respecto de s . Considerando (6.2.2) y de que

$$\frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(s)ds}{s^{n+1}} = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

podemos escribir el resultado como sigue,

$$(6.2.3) \quad f(z) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}z + \frac{f''(0)}{2!}z^2 + \dots + \frac{f^{(N-1)}(0)}{(N-1)!}z^{N-1} + \rho_N(z),$$

donde

$$\rho_N(z) = \frac{z^N}{2\pi i} \int_{C_0} \frac{f(s)ds}{(s-z)s^N}.$$

Ahora supongamos que $|z| = r$. Entonces si s es un punto de C_0 ,

$$|s - z| \geq ||s| - |z|| = r_0 - r.$$

Así, si M denota el valor máximo de $|f(s)|$ sobre C_0 ,

$$|\rho_N(z)| \leq \frac{r^N}{2\pi} \frac{M}{(r_0 - r)r_0^N} 2\pi r_0 = \frac{Mr_0}{r_0 - r} \left(\frac{r}{r_0}\right)^N.$$

Pero $\left(\frac{r}{r_0}\right) < 1$ ya que z es interior a C_0 , por lo tanto

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \rho_N(z) = 0.$$

Podemos observar que la ecuación (6.2.3) que

$$f(z) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}z + \frac{f''(0)}{2!}z^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n + \dots,$$

en el disco abierto $|z| < R_0$. Esto significa,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n \quad (|z| < R_0).$$

En este caso particular de las serie (6.2.1) donde $z_0 = 0$ se llama una serie de Maclaurin. Ahora, supongamos que f es como en el enunciado del teorema, donde el disco de radio R_0 , está centrado en un punto arbitrario z_0 . Como f es analítica cuando $|z - z_0| < R_0$, la función compuesta $f(z + z_0)$ es analítica cuando $|(z + z_0) - z_0| < R_0$ si $|z| < R_0$. Ahora, si llamamos $g(z) = f(z + z_0)$, la analiticidad de g en el disco $|z| < R_0$ asegura la existencia de una representación en serie de Maclaurin,

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{n!} z^n,$$

es decir,

$$f(z + z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n.$$

Finalmente sustituyendo z por $z - z_0$ en esta ecuación llegamos a la representación en serie de Taylor para $f(z)$ en torno al punto z_0 . ■

6.3. Series de Laurent

Si una función f no es analítica en un punto z_0 , no podemos aplicar el teorema de Taylor en ese punto. De manera similar es posible encontrar una representación en serie para $f(z)$ que contenga tanto potencias positivas como negativas de $z - z_0$. Así, se presenta la teoría de tal representaciones, comenzando con el teorema de Laurent.

TEOREMA. *Sea f una función analítica en un dominio anular $R_1 < |z - z_0| < R_2$ y sea C cualquier contorno cerrado simple en torno de z_0 orientado positivamente, contenido en ese dominio. Entonces en todo punto z de ese dominio, $f(z)$ admite la representación en serie*

$$(6.3.1) \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n} \quad (R_1 < |z - z_0| < R_2),$$

donde

$$(6.3.2) \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{n+1}} \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

y

$$(6.3.3) \quad b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{-n+1}} \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

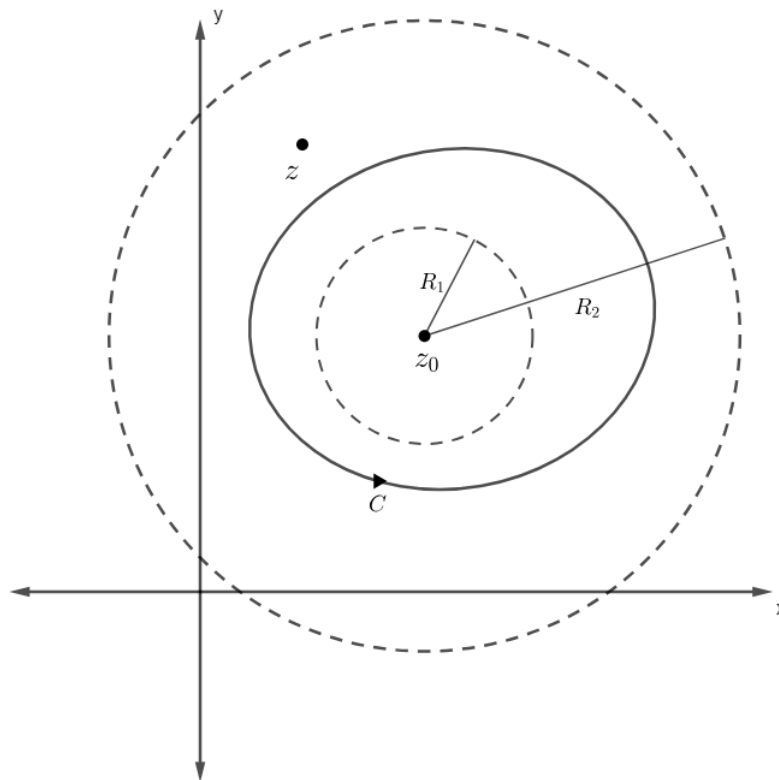


FIGURA 6.3.1. Representación del *teorema de Laurent*.

El desarrollo de (6.3.1) se suele escribir como

$$(6.3.4) \quad f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \quad (R_1 < |z - z_0| < R_2),$$

donde

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^{n+1}} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Cualquiera de las dos formas, ya sea (6.3.1) o (6.3.4) se llama serie de Laurent.

Demostración. Demostremos primero el teorema para $z_0 = 0$, cuyo caso el anillo está centrado en el origen. La comprobación del teorema para z_0 arbitrario se deducirá fácilmente.

Comenzamos formando una región anular cerrada $r_1 \leq |z| \leq r_2$, contenida en el dominio $R_1 < |z| < R_2$, cuyo interior contiene al punto z y al contorno C . Sean C_1 y C_2 los círculos de radios r_1 y r_2 , respectivamente, centrados en el origen y orientados positivamente. Notar que f es analítica en C_1 y C_2 , así como en el dominio anular situado entre ellos.

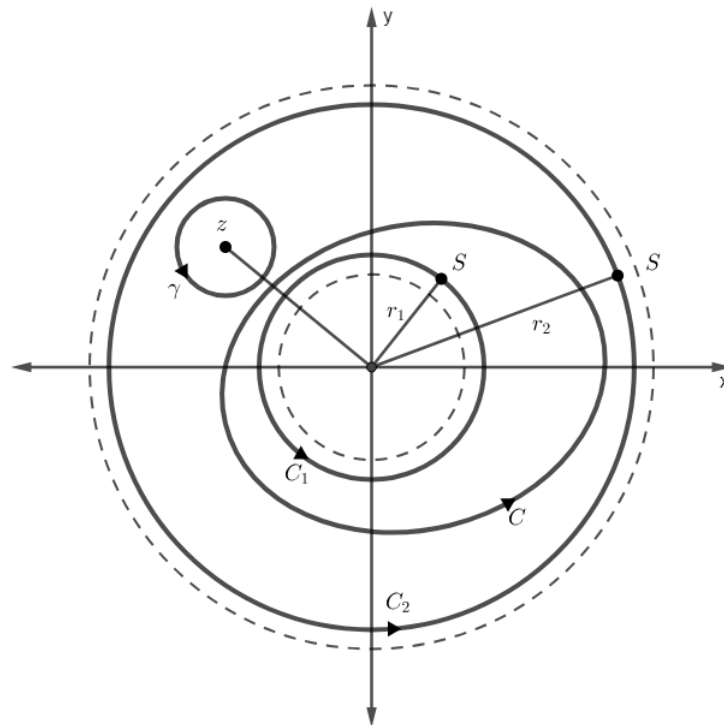


FIGURA 6.3.2

A continuación, construimos un círculo γ orientado positivamente con centro en z y suficientemente pequeño como para que esté contenido en el interior del anillo $r_1 \leq |z| \leq r_2$. En tal caso se prosigue con la extensión del teorema de Cauchy-Goursat a integrales de funciones analíticas a lo largo de los contornos orientados de regiones múltiple conexas, de tal manera que

$$\int_{c_2} \frac{f(s)ds}{s - z} - \int_{c_1} \frac{f(s)ds}{s - z} - \int_{\gamma} \frac{f(s)ds}{s - z} = 0.$$

Ahora, de acuerdo con la fórmula integral de Cauchy, el valor de la tercera integral es $2\pi i f(z)$. Por lo tanto,

$$(6.3.5) \quad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c_2} \frac{f(s)ds}{s - z} - \frac{1}{2\pi i} \int_{c_1} \frac{f(s)ds}{s - z}.$$

En la primera integral escribimos como lo hicimos en la demostración del teorema de Taylor,

$$(6.3.6) \quad \frac{1}{s-z} = \frac{1}{z} + \frac{1}{s^1} \frac{1}{z^2} + \dots + \frac{1}{s^{-N+1}} \frac{1}{z^N} + \frac{1}{s^N} \left(\frac{s^N}{z-s} \right),$$

notamos que respecto a la segunda integral

$$-\frac{1}{s-z} = \frac{1}{z-s}.$$

En consecuencia, por simple intercambio de z y s en la ecuación (6.3.6), escribimos

$$-\frac{1}{s-z} = \frac{1}{z} + \frac{1}{s^1} \frac{1}{z^2} + \dots + \frac{1}{s^{-N+1}} \frac{1}{z^N} + \frac{1}{s^N} \left(\frac{s^N}{z-s} \right),$$

luego, concluimos que de (6.3.5) que

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_{N-1} z^{N-1} + \rho_N(z) + \frac{b_1}{z} + \frac{b_2}{z^2} + \dots + \frac{b_N}{z^N} + \sigma_N(z),$$

donde los números $a_n (n = 1, 2, \dots, N-1)$ y $b_n (n = 1, 2, \dots, N)$ vienen dados por las ecuaciones

$$(6.3.7) \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{f(s) ds}{S^{n+1}}, \quad b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(s) ds}{S^{-n+1}},$$

y donde

$$\rho_N(z) = \frac{z^N}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{f(s) ds}{(s-z) S^N}, \quad \sigma_N(z) = \frac{1}{2\pi i z^N} \int_{C_1} \frac{S^N f(s) ds}{z-s}.$$

Ahora tomamos $|z| = r$, de modo que $r_1 < r < r_2$ y denotamos por M el valor máximo de $|f(s)|$ sobre C_1 y C_2 . Para probar que los restos $\rho_N(z)$ y $\sigma_N(z)$ tienden a cero cuando N tiende a infinito, usamos un método ya aplicado en la demostración del teorema de Taylor. Notemos que si s es un punto en C_2 , entonces $|s-z| \geq r_2 - r$ y si s está en C_1 , $|z-s| \geq r - r_1$. Así podemos escribir,

$$|\rho_N(z)| \leq \frac{Mr_2}{r_2 - r} \left(\frac{r}{r_2} \right)^N \quad \text{y} \quad |\sigma_N(z)| \leq \frac{Mr_1}{r - r_1} \left(\frac{r_1}{r} \right)^N,$$

y como $\left(\frac{r}{r_2} \right) < 1$ y $\left(\frac{r_1}{r} \right) < 1$ ambos restos tienden a cero cuando N tiende a infinito.

Finalmente dado que C_1 es interior a C y éste interior a C_2 , las integrales de (6.3.7) se pueden reemplazar por el contorno C . Esto completa la demostración del teorema de Laurent cuando $z_0 = 0$. Para la demostración para z_0 arbitrario se realiza lo siguiente, sea una función que satisface las condiciones del teorema y hacemos $g(z) = f(z + z_0)$. Dado que f es analítica en el anillo $R_1 < |z - z_0| < R_2$, la función $f(z + z_0)$ es analítica cuando $R_1 < |(z + z_0) - z_0| < R_2$. Entonces g es analítica en el anillo $R_1 < |z| < R_2$, centrado en el origen. Ahora bien, en el contorno cerrado simple C tiene la representación paramétrica $z = z(t) (a \leq t \leq b)$, donde

$$(6.3.8) \quad R_1 < |z(t) - z_0| < R_2,$$

para todo t en el intervalo $a \leq t \leq b$. Luego Γ denota el camino $z = z(t) - z_0 (a \leq t \leq b)$, Γ es no solo un contorno cerrado simple, sino que, a la vista de (6.3.8), está en el dominio $R_1 < |z| < R_2$. Por consiguiente $g(z)$ admite la representación en la serie de Laurent,

$$(6.3.9) \quad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{z^n} \quad (R_1 < |z| < R_2),$$

donde,

$$(6.3.10) \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{g(z) dz}{z^{n+1}} \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

$$(6.3.11) \quad b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{g(z)dz}{z^{-n+1}} \quad (n = 1, 2, \dots),$$

la representación (6.3.1) se obtiene si escribimos $f(z+z_0)$ en vez de $g(z)$ en la ecuación resultante, así como en la condición de validez $R_1 < |z| < R_2$. La expresión (6.3.10) para los coeficientes a_n es idéntica a la (6.3.2), ya que

$$\int_{\Gamma} \frac{g(z)dz}{z^{n+1}} = \int_a^b \frac{f[z(t)z'(t)]}{[z(t) - z_0]^{n+1}} dt = \int_C \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^{n+1}}.$$

De forma análoga, los coeficientes b_n en la expresión (6.3.11) son los mismo que los de la expresión (6.3.3).■

6.4. Convergencia absoluta y uniforme de las series de potencias

En este apartado se verán las diversas propiedades de las series de potencias del tipo

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

se presentaran series solo en el caso especial $z_0 = 0$, y sus demostraciones en el caso general son usualmente las mismas y muchos resultados se generalizan sustituyendo z por $z - z_0$.

Recordaremos que una serie de números complejos converge *absolutamente* si la serie de valores absolutos de esos números es convergente. El siguiente teorema se refiere a la convergencia absoluta de las series de potencias.

TEOREMA. *Si una serie de potencias*

$$(6.4.1) \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

converge cuando $z = z_1$ ($z_1 \neq 0$), entonces es absolutamente convergente en todo punto z del disco abierto $|z| < z_1$.

Demostración. Supongamos que la serie converge

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad (z_1 \neq 0),$$

por lo tanto, los términos $a_n z^n$ están acotados, es decir,

$$|a_n z^n| \leq M \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

para alguna contante positiva M . si $|z| < z_1$ y denotamos por ρ el módulo $\left| \frac{z}{z_1} \right|$, vemos que

$$|a_n z^n| = |a_n z_1^n| \left| \frac{z}{z_1} \right|^n \leq M \rho^n,$$

donde $\rho < 1$. Ahora bien, la serie cuyos términos son los números reales $M\rho^n$ es una serie geométrica convergente siempre que $\rho < 1$. Luego por el criterio de comparación de series reales, la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n|,$$

converge para $|z| < |z_1|$ y el teorema queda demostrado.■

Así, el conjunto de puntos interiores a algún círculo alrededor del origen, es por lo tanto, una región de convergencia para la serie de potencia (6.4.1). El mayor círculo centrado en el origen en el que la serie converge en todos los puntos interiores se llama el círculo de convergencia de

la serie de potencia. La serie no puede converger en ningún punto z_2 fuera de esta circunferencia, de acuerdo con el teorema anterior, si lo fuera sería convergente dentro del círculo centrado en el origen que pasa por z_2 , por lo que el primer círculo no sería el círculo de convergencia.

El próximo teorema exige definir una terminología previa. Sea $|z| < R$ el círculo de convergencia de una serie de potencias centrada en el origen y sean $S(z)$ y $S_N(z)$ la suma y la suma parcial, respectivamente, de esa serie:

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad S_N(z) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n z^n \quad (|z| < R).$$

Entonces escribimos la función resto,

$$(6.4.2) \quad \rho_N(z) = S(z) - S_N(z) \quad (|z| < R).$$

Como la serie de potencias converge para todo z tal que $|z| < R$, sabemos que el resto $\rho_N(z)$ tiende a cero en z , al tender N hacia el infinito. Por la definición de (6.4.1) del límite de una sucesión infinita vista al comienzo del capítulo, eso significa que para cada número positivo ε existe un entero positivo N_ε , tal que

$$|\rho_N(z)| < \varepsilon \text{ siempre que } N > N_\varepsilon.$$

OBSERVACIÓN. La elección de N_ε depende solo del valor de ε y es independiente del punto z que se tome en una región prefijada, se dice que la convergencia es uniforme en esa región.

TEOREMA. *si z_1 es un punto interior al círculo de convergencia $|z| = R$ de una serie de potencias*

$$(6.4.3) \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

entonces esa serie es uniformemente convergente en el disco cerrado $|z| \leq |z_1|$,

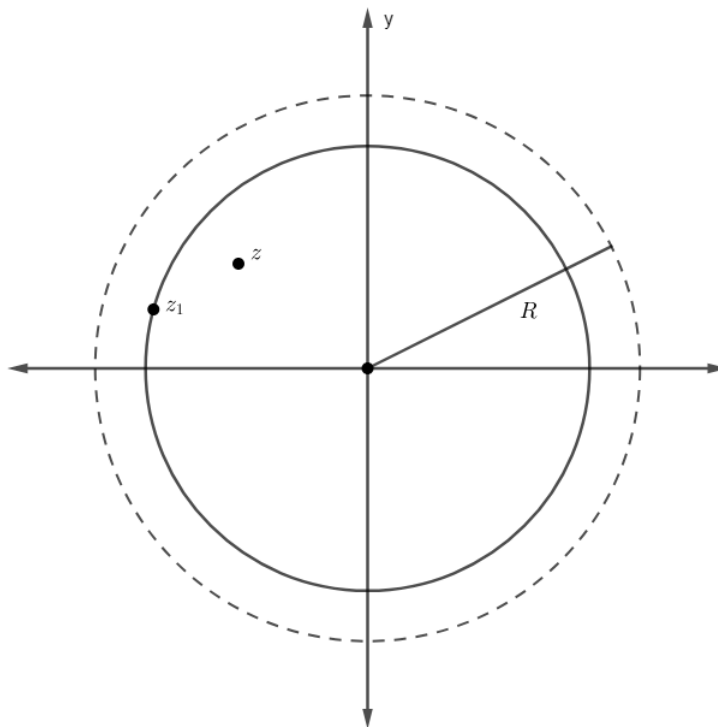


FIGURA 6.4.1

Demostración. Sean m y N cualquier entero positivo, con $m > N$ y el resto escrito en la forma

$$\rho_N(z) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=N}^m a_n z^n.$$

Como hay puntos con módulo mayor que $|z_1|$, donde la serie (6.4.3) converge y además, sabemos por el primer teorema visto que la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n z_1^n|,$$

es convergente. El resto de esa serie, tras N términos, es el número real no negativo

$$\sigma_N = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=N}^m |a_n z_1^n|.$$

Luego,

$$|\rho_N(z)| = \lim_{m \rightarrow \infty} \left| \sum_{n=N}^m a_n z^n \right|,$$

y para $|z| \leq |z_1|$,

$$\left| \sum_{n=N}^m a_n z^n \right| \leq \sum_{n=N}^m |a_n| |z|^n \leq \sum_{n=N}^m |a_n| |z_1|^n = \sum_{n=N}^m |a_n z_1^n|,$$

por lo tanto,

$$|\rho_N(z)| \leq \sigma_N \text{ cuando } |z| \leq |z_1|.$$

Como σ_N son los restos de una serie convergente, tienden a cero al tender N a infinito. Es decir, para cada ε positivo existe un entero N_ε tal que,

$$\sigma_N < \varepsilon \text{ si } N > N_\varepsilon,$$

debido a las condiciones anteriores,

$$|\rho_N(z)| \sigma_N < \varepsilon \text{ si } N > N_\varepsilon.$$

Es válida para todos los puntos del disco $|z| \leq |z_1|$ y el valor de N_ε es independiente de la elección de z . Por lo tanto la convergencia de la serie (6.4.3) es uniforme en ese disco. ■

Una consecuencia importante del segundo teorema es el hecho de que la serie de potencia (6.4.3) representa una función continua $S(z)$ en todo punto interior a su círculo de convergencia. Lo que significa que z_1 es un punto interior al círculo de convergencia $|z| = R$. Donde para cada ε positivo existe un δ positivo, tal que

$$(6.4.4) \quad |S(z) - S(z_1)| < \varepsilon \text{ si } |z - z_1| < \delta,$$

siendo δ suficientemente pequeño para que z esté en el dominio de definición $|z| < R$ de $S(z)$. Para demostrarlo, denotaremos $S_N(z)$ la suma de los primeros N primeros términos de la serie (6.4.3). Sabemos que,

$$S(z) = S_N(z) + \rho_N(z),$$

donde $\rho_N(z)$ es la función resto (6.4.2). Entonces,

$$|S(z) - S(z_1)| = |S_N(z) - S_N(z_1) + \rho_N(z) - \rho_N(z_1)|,$$

o sea

$$(6.4.5) \quad |S(z) - S(z_1)| \leq |S_N(z) - S_N(z_1)| + |\rho_N(z)| + |\rho_N(z_1)|.$$

Para la convergencia uniforme enunciada en el segundo teorema, existe un entero positivo N_ε tal que

$$(6.4.6) \quad |\rho_N(z)| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ siempre que } N > N_\varepsilon,$$

y donde z es cualquier punto que esté en algún disco cerrado y centrado en el origen de radio mayor que $|z_1|$, pero menor que el radio R del círculo de convergencia. Para ser más específico, la afirmación anterior se satisface para todo z en un entorno $|z - z_1| < \delta$ de z_1 que sea lo bastante pequeño como para estar contenido en ese disco cerrado. Ahora, la suma parcial $S_N(z)$ es un polinomio y por lo tanto, continua en z_1 para cada valor de N . En particular cuando $N = N_\varepsilon + 1$, podemos escoger nuestro δ tan pequeño que

$$(6.4.7) \quad |S_N(z) - S_N(z_1)| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ si } |z - z_1| < \delta.$$

Haciendo $N = N_\varepsilon + 1$ en la desigualdad (6.4.5), además, usando (6.4.6) y (6.4.7) son verdaderas cuando $N = N_\varepsilon + 1$. Luego encontramos que

$$|S(z) - S(z_1)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \text{ para } |z - z_1| < \delta,$$

la cual es la afirmación (6.4.4).

6.5. Integración y Derivación de series de potencias

Hemos visto anteriormente que una serie de potencias

$$(6.5.1) \quad S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

es continua en todo punto interior a su círculo de convergencia. Por lo que probaremos que la suma $S(z)$ es analítica dentro del círculo. Esta demostración depende del siguiente teorema.

TEOREMA. Sea cualquier contorno interior al círculo de convergencia de la serie de potencias (6.5.1) y sea $g(z)$ cualquier función continua sobre C . La serie formada multiplicando cada término de la serie de potencias por $g(z)$ puede ser integrada término a término sobre C ; esto es,

$$(6.5.2) \quad \int_C g(z)S(z)dz = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_C g(z)z^n dz.$$

Demostración. Observemos que $g(z)$ y la suma de la serie de potencias $S(z)$ son continuas sobre C . La integral sobre C del producto

$$g(z)S(z) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n g(z)z^n + g(z)\rho_N(z),$$

existe, siendo $\rho_N(z)$ el resto de la serie tras N términos. Los términos de la suma finita también son continuos sobre el contorno C , luego sus integrales sobre C existen. Como consecuencia de lo anterior,

$$(6.5.3) \quad \int_C g(z)S(z) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n \int_C g(z)z^n dz + \int_C g(z)\rho_N(z)dz.$$

Sea M el valor máximo de $g(z)$ sobre C y sea L la longitud de C . En vista de la convergencia uniforme de la serie de potencias, sabemos que para cada ε positivo existe un entero positivo N , tal que, para todo punto z sobre C ,

$$|\rho_N(z)| < \varepsilon \text{ siempre que } N > N_\varepsilon,$$

como N_ε es independiente de z , encontramos que

$$\left| \int_C g(z)S(z)dz \right| < M\varepsilon L \text{ siempre que } N > N_\varepsilon,$$

así,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_C g(z)S(z)dz = 0.$$

De (6.5.3) tenemos que

$$\int_C g(z)S(z)dz = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{N-1} a_n \int_C g(z)z^n dz.$$

Esto es lo mismo que la ecuación (6.5.2), con lo que queda probado el teorema. ■

Si $g(z) = 1$ para cada valor de z en el disco abierto limitado por el círculo de convergencia de la serie de potencia (6.5.1), entonces

$$\int_C g(z)z^n dz = \int_C z^n dz = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

para todo contorno cerrado C contenido en ese dominio. Según (6.5.3), tenemos que

$$\int_C S(z)dz = 0,$$

para todos los contornos de esa clase y por el teorema de Morera, la función $S(z)$ es analítica en ese dominio. Así, la serie de potencias representa a una función que es analítica en todo punto interior a su círculo de convergencia.

TEOREMA. *La serie de potencias (6.5.1) puede ser derivada término a término. Esto es en todo punto z interior al círculo de convergencia de esa serie,*

$$(6.5.4) \quad S'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}.$$

PRUEBA. Sea z cualquier punto interior al círculo de convergencia y sea C algún contorno cerrado simple, orientado positivamente, que rodee a z y sea interior a dicho círculo. Además, se define la función

$$(6.5.5) \quad g(s) = \frac{1}{2\pi i (s-z)^2},$$

en todo punto s de C . Como la función

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

es analítica dentro de y sobre C , entonces

$$\int_C g(s) S(s) ds = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{S(s) ds}{(s-z)^2} = S'(z).$$

Además,

$$\int_C g(s) s^n ds = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{s^n ds}{(s-z)^2} = \frac{d}{dz} z^n \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Así, cuando la variable de integración z en la ecuación (6.5.2) se sustituye por la variable s y $g(s)$ es la función (6.5.5) a lo largo del contorno cerrado C . La ecuación (6.5.2) se convierte en

$$S'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{d}{dz} z^n,$$

que coincide con (6.5.4), lo que demuestra el teorema. □

6.6. Unicidad de las representaciones por series

La unicidad de las representaciones por series de Taylor y Laurent, se desprende de los teoremas de la sección anterior. Consideramos en primer lugar las de series de Taylor.

TEOREMA. *Si una serie*

$$(6.6.1) \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

converge a $f(z)$ en todo punto interior a algún círculo $z - z_0 = R$, entonces la serie de Taylor de f en potencias de $z - z_0$.

Demostración. Es importante recordar que

$$S'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1},$$

en todo punto interior al círculo de convergencia de la serie

$$S(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n.$$

Por lo tanto la serie de $S'(z)$ puede ser derivada término a término,

$$S''(z) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n z^{n-2},$$

en todo punto z interior a ese círculo. Notar que la derivada de $S(z)$ de cualquier orden se puede hallar derivando su representación en serie término a término, ya que

$$S(0) = a_0, S'(0) = 1!a_1, S''(0) = 2!a_2, \dots, S^{(n)}(0) = n!a_n, \dots,$$

y los coeficientes a_n son los del desarrollo en serie de Maclaurin de $S(z)$,

$$a_n = \frac{S^{(n)}(0)}{n!} \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

La generalización a series de potencia de $z - z_0$ es inmediata y el teorema queda demostrado. ■

OBSERVACIÓN. Notar que del teorema se deduce que, si la serie (6.6.1) converge a cero en un entorno z_0 , los coeficientes a_n deben ser todos cero.

El siguiente teorema es referido a la unicidad de la representación en serie de Laurent.

TEOREMA. *Si una serie*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b}{(z - z_0)^n},$$

converge a $f(z)$ en todos los puntos de algún dominio anular centrado en z_0 , entonces es la serie de Laurent para f en potencias de $z - z_0$ en ese dominio.

Demostración. El teorema será demostrado con ayuda del primer teorema de la sección 6.5 adaptado a serie en potencias positivas y negativas de $z - z_0$. Usando el índice de suma m en la serie dada, escribimos

$$(6.6.2) \quad \int_C g(z) f(z) dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int_C g(z) (z - z_0)^m dz,$$

donde $g(z)$ es cualquiera de las

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i (z - z_0)^{n+1}} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

y C es un círculo del anillo dado, centrado en z_0 y orientado en sentido positivo,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{dz}{(z - z_0)^{n-m+1}} = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ 1 & \text{si } m = n, \end{cases}$$

la ecuación (6.6.2) se reduce a

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{n+1}} = c_n,$$

que es una expresión de la vista en la sección 6.3 para coeficientes de la serie de Laurent para f en el anillo. ■

6.7. Multiplicación y División de series de potencias

Supongamos que cada una de las series de potencias,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ y } \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n,$$

converge dentro de un círculo $|z| = R$. Las sumas $f(z)$ y $g(z)$ son funciones analíticas en el disco $|z| < R$ vista en la sección 6.5 y el producto de esas sumas tienen un desarrollo en serie de Maclaurin válido,

$$(6.7.1) \quad f(z)g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \quad (|z| = R).$$

Como las series (6.6) son las series de Maclaurin de f y g , los tres primeros coeficientes del desarrollo (6.7.1) vienen dados por,

$$c_0 = f(0)g(0) = a_0 b_0,$$

$$c_1 = \frac{f(0)g'(0) + f'(0)g(0)}{1!} = a_0 b_1 + a_1 b_0,$$

y

$$c_2 = \frac{f(0)g''(0) + 2f'(0)g'(0) + f''(0)g(0)}{2!}.$$

La expresión general de c_n se obtiene gracias a la fórmula,

$$[f(z)g(z)]^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(z)g^{(n-k)}(z),$$

donde,

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

para la derivada n -ésima del producto de dos funciones. Como es habitual, $f^{(0)}(z) = f(z)$ y $0! = 1$. Entonces,

$$c_n = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \frac{g^{(n-k)}(0)}{(n-k)!} = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k},$$

y así se puede escribir (6.7.1) en la forma

(6.7.2)

$$f(z)g(z) = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) z + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) z^2 + \dots + \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) z^n + \dots \quad (|z| = R).$$

OBSERVACIÓN. La serie (6.7.2) es la misma que se obtiene multiplicando formalmente las dos series (6.7.1) término a término y reuniendo los términos resultantes por potencias de z , esto se conoce como el producto de Cauchy de las dos series dadas.

CAPÍTULO 7

Residuos y Polos

El teorema de Cauchy-Goursat afirma que si una función es analítica en todo punto interior a un contorno cerrado simple C y uno de los puntos propios C , el valor de la integral de la función a lo largo de ese contorno es cero. Sin embargo, si la función no es analítica en un número finito de puntos interiores a C , existe un número específico, llamado residuo, con que cada uno de esos puntos contribuye a la integral.

En este capítulo se explicara lo dicho anteriormente, desarrollando la teoría de los residuos, comenzando con algunas propiedades preliminares sobre singularidades de funciones.

7.1. Residuos

Recordando lo visto en la sección 5.7 en funciones analíticas, donde un punto z_0 se llama punto singular de la función f si f no es analítica en z_0 , pero es analítica en algún punto de todo entorno de z_0 . Además, diremos si un punto singular se dice que es aislado, esto quiere decir que existe un entorno punteado $0 < |z - z_0| < \varepsilon$ de z_0 en el que f es analítica.

Por ejemplo la función,

$$\frac{1}{z},$$

es analítica en todo punto excepto en $z = 0$, por lo tanto el origen es un punto singular aislado de esta función.

Otro ejemplo es la función,

$$\frac{z + 4}{z(z^2 + 4)},$$

la cual tiene 3 puntos singulares aislados, $z = 0$ y $z = \pm i$.

Si z_0 es un punto aislado de una función f , existe un número positivo R tal que $f(z)$ es analítica en todo z que cumpla $0 < |z - z_0| < R$. De esta manera, la función viene presentada por una serie de Laurent,

$$(7.1.1) \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \frac{b_1}{z - z_0} + \frac{b_2}{(z - z_0)^2} + \dots + \frac{b_n}{(z - z_0)^n} + \dots \quad (0 < |z - z_0| < R),$$

donde los coeficientes a_n y b_n tiene representaciones integrales vistas en la sección 6.3. De manera más específica

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{-n+1}} \quad (n = 1, 2, \dots),$$

donde C es cualquier contorno cerrado simple positivamente orientado en torno a z_0 y contenido en el dominio $0 < |z - z_0| < R$. Cuando $n = 1$, esta expresión para b_n puede escribirse

$$(7.1.2) \quad \int_C f(z) dz = 2\pi i b_1.$$

El número complejo b_1 , que es el coeficiente de $\frac{1}{(z - z_0)}$ en el desarrollo (7.1.1), se llama residuo de f en el punto singular aislado z_0 . Lo anterior será denotado como,

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z),$$

en la ecuación (7.1.2) entrega un método útil para evaluar ciertas integrales sobre contornos cerrados simples.

7.2. El Teorema de los Residuos

Si una función f tiene solo un número finito de puntos singulares interiores a un contorno cerrado simple dado C , estos serán aislados. El teorema que se presenta a continuación, presenta el hecho de que si además f es analítica sobre C_1 y C se recorre en sentido positivo, el valor de la integral de f a lo largo de C es $2\pi i$ veces la suma de los residuos en esos puntos singulares.

TEOREMA. Si C es un contorno cerrado simple positivamente orientado, dentro del cual y sobre el cual una función f es analítica a excepción de un número finito de puntos singulares z_k ($k = 1, 2, \dots, n$) interior a C , entonces

$$(7.2.1) \quad \int_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{z=z_k} f(z).$$

Demostración. Si tomamos los puntos singulares z_k ($k = 1, 2, \dots, n$) como centros de círculos C_k positivamente orientado y que se encuentran al interior de C y tan pequeños que cualquiera de dos de ellos son disjuntos. Los círculos C_k junto con el contorno cerrado simple C forman la frontera de una región cerrada sobre la que f es analítica y donde su interior es un dominio múltiplemente conexo. Por consiguiente, de acuerdo con la extensión del teorema de Cauchy-Goursat para tales regiones

$$\int_C f(z) dz - \sum_{k=1}^n \int_{C_k} f(z) dz = 0.$$

Esto se puede reducir a la ecuación (7.2.1), debido a que

$$\int_{C_k} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=z_k} f(z) \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

de esta manera queda demostrado. ■

Si la función f en el enunciado del teorema de los residuos es, además, analítica en todo punto finito exterior a C , resulta en ciertas ocasiones más eficiente calcular la integral de f sobre C encontrando un solo residuo de una cierta función relacionada. Podemos sustituir (7.2.1) por la ecuación

$$(7.2.2) \quad \int_C f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=0} \frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right).$$

OBSERVACIÓN. El resultado anterior aparece en teoría de residuos en el infinito, la cual no será tratada acá debido a que se escapa del objetivo de la investigación.

Para deducir la expresión (7.2.2) construimos un círculo $|z| = R$ lo bastante grande como para que el contorno C se encuentre interior a él. Entonces, si C_0 denota un círculo positivamente orientado $|z| = R_0$, con $R_0 > R$, sabemos por el teorema de Laurent, que

$$(7.2.3) \quad f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n \quad (R < |z| < \infty),$$

donde,

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_0} \frac{f(z)dz}{z^{n+1}} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Ya que la validez de la representación (7.2.3) no es del tipo $0 < |z| < R_2$, el coeficiente c_{-1} no es el residuo de f en el punto $z = 0$, que puede incluso no ser punto singular f . Pero si sustituimos z por $\frac{1}{z}$ en (7.2.3) y en su condición de validez, tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n \\ &= \frac{1}{z^2} \left(\dots c_{-2} \frac{1}{z^{-2}} + c_{-1} \frac{1}{z^{-1}} + c_0 \frac{1}{z^0} + c_1 \frac{1}{z} + c_2 \frac{1}{z^2} + \dots \right) \\ &= \dots + c_{-2} \frac{1}{z^0} + c_{-1} \frac{1}{z} + c_0 \frac{1}{z^2} + c_1 \frac{1}{z^3} + c_2 \frac{1}{z^4} + \dots \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{c_{n-2}}{z^n} \quad \left(0 < |z| < \frac{1}{R}\right). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$(7.2.4) \quad c_{-1} = \operatorname{Res}_{z=0} \frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right).$$

Así, escribimos $n = -1$ en la ecuación (7.2) y usamos entonces (7.2.4), para sustituir c_{-1} , encontramos que

$$\int_{C_0} f(z)dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=0} \frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right).$$

Finalmente, como f es analítica en la región cerrada acotada por C y C_0 , lo que resulta en lo esperado (7.2.2).

7.3. Parte principal de una función

Hemos visto que si una función f tienen un punto singular aislado z_0 , puede representarse por una serie de Laurent

$$(7.3.1) \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \frac{b_1}{z - z_0} + \frac{b_2}{(z - z_0)^2} + \dots + \frac{b_n}{(z - z_0)^n} + \dots,$$

en un dominio $0 < |z| < R$ centrado en ese punto. Una parte de la serie que contiene potencias negativas de $z - z_0$ es denominada como la principal de f en z_0 . Usaremos la parte principal para distinguir entre tres tipos de puntos singular aislado. El comportamiento de f cerca de z_0 es fundamentalmente diferente en cada caso. Si la parte principal de f en z_0 contiene al menos un término no nulo, pero si de esos términos el número es infinito, existe un entero positivo m tal que

$$b_m \neq 0 \text{ y } b_{m+1} = b_{m+2} = \dots = 0.$$

Lo anterior es, el desarrollo de (7.3.1) cuya forma admite

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \frac{b_1}{(z - z_0)} + \frac{b_2}{(z - z_0)^2} + \dots + \frac{b_m}{(z - z_0)^m} \quad (0 < |z - z_0| < R),$$

donde $b_m \neq 0$. De manera específica el punto singular aislado z_0 es denominado un polo de orden m . Por lo cual si tenemos un polo de orden $m = 1$ este tomará el nombre de un polo simple.

EJEMPLO. La función

$$\frac{z^2 - 2z + 3}{z - 2} = z + \frac{3}{z - 2} = 2 + (z - 2) + \frac{3}{z - 2} \quad (0 < |z - 2| < \infty),$$

tiene un polo simple en $z = 2$, con residuo 3.

EJEMPLO. La función

$$\frac{\sinh z}{z^4} = \frac{1}{z^4} \left(z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^7}{7!} + \dots \right) = \frac{1}{z^3} + \frac{1}{3!} \frac{1}{z} + \frac{1}{5!} z + \frac{1}{7!} z^3 + \dots \quad (0 < |z| < \infty),$$

tiene en $z = 0$ un polo de orden 3, con residuo $\frac{1}{6}$.

OBSERVACIÓN. Cuando la parte principal f en un punto singular aislado z_0 posee infinitos términos no nulos, será denominado como punto singular esencial. Si todos los coeficientes b_n de la parte principal de f en un punto en un punto singular aislado z_0 son soluciones, el punto z_0 será denominado como punto singular evitable de f . La anterior situación, la serie de Laurent (7.3.1) contiene solo potencias no negativas de $z - z_0$ y el residuo es siempre cero. Si definimos $f(z)$ en z_0 como a_0 , la función pasa a ser analítica en z_0 . Así, una función f con un punto singular evitable puede solo con asignar un valor adecuado puede hacerse analítica en ese punto.

7.4. Residuos en los polos

El método básico para hallar el residuo de una función en un punto singular aislado z_0 consiste en mirar el coeficiente de $\frac{1}{(z - z_0)}$ en la serie de Laurent. Una observación importante es que cuando z_0 es un punto singular esencial no es posible entregar otro método. Pero, en lo que respecta de los polos, se dispone de algunas fórmulas útiles que serán desarrolladas.

Supongamos que una función $f(z)$ se puede escribir en la forma

$$(7.4.1) \quad f(z) = \frac{\phi}{z - z_0},$$

donde $\phi(z)$ es analítica en z_0 y $\phi(z) \neq 0$. Del desarrollo en serie de Taylor

$$(7.4.2) \quad \phi(z) = \phi(z_0) + \frac{\phi'(z_0)}{1!} (z - z_0) + \frac{\phi''(z_0)}{2!} (z - z_0)^2 + \frac{\phi'''(z_0)}{3!} (z - z_0)^3 + \dots,$$

verdadero en un disco abierto $|z - z_0| < R_2$, por consiguiente

$$f(z) = \frac{\phi(z_0)}{z - z_0} + \frac{\phi'(z_0)}{1!} + \frac{\phi''(z_0)}{2!} (z - z_0) + \frac{\phi'''(z_0)}{3!} (z - z_0)^2 + \dots \quad (0 < |z - z_0| < R_2).$$

Debido a que ésta es la única representación en serie de Laurent para f en el dominio $0 < |z - z_0| < R_2$ y por lo que $\phi(z) \neq 0$, es claro que f tiene un polo simple en z_0 , con residuo $b = \phi(z_0)$.

EJEMPLO. La función $f(z) = \frac{(z + 1)}{(z^2 + 9)}$ tiene un punto singular aislado en $z = 3i$ y puede escribirse como

$$f(z) = \frac{\phi(z)}{z - 3i} \text{ donde } \phi(z) = \frac{z + 1}{z + 3i}.$$

Como $\phi(z)$ es analítica en $z = 3i$ y $\frac{(3 - i)}{6} \neq 0$, ese punto es un polo simple de f y el residuo es calculado como $\frac{(3 - i)}{6}$. De esta manera punto $z = -3i$ es también un polo simple de f , con residuo $\frac{(3 + i)}{6}$.

De esta manera es posible desarrollar lo anterior a este tipo de funciones

$$(7.4.3) \quad f(z) = \frac{\phi(z)}{(z - z_0)^m} \quad (m = 2, 3, \dots),$$

donde $\phi(z)$ es analítica en z_0 y $\phi(z) \neq 0$. Porque la serie (7.4.2) puede ser escrita como

$$f(z) = \frac{\phi(z_0)}{(z - z_0)^m} + \frac{\phi'(z_0)}{1!} \frac{1}{(z - z_0)^{m-1}} + \frac{\phi''(z_0)}{2!} \frac{1}{(z - z_0)^{m-2}} + \dots + \frac{\phi^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!} \frac{1}{(z - z_0)} + \sum_{n=m}^{\infty} \frac{\phi^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^{n-m} \quad (0 < |z - z_0| < R_2),$$

esto demuestra que f tiene un polo de orden m en z_0 , con residuo

$$b_1 = \frac{\phi^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}.$$

Veamos otro ejemplo:

EJEMPLO. Si $f(z) = \frac{z^3 + 2z}{(z - i)^3}$, entonces

$$f(z) = \frac{\phi(z)}{(z - i)^3} \text{ donde } \phi(z) = z^3 + 2z.$$

La función $\phi(z)$ es entera y $\phi(i) = i \neq 0$. Por lo tanto, f tiene en $z = i$ un polo de orden 3. El residuo es

$$b_i = \frac{\phi''(i)}{2!} = 3i.$$

OBSERVACIÓN. podemos probar que si una función f tiene un polo en un punto $z = z_0$, entonces $f(z)$ siempre se puede expresar de la forma (7.4.1) o (7.4.3). Además de lo anterior, un punto singular aislado es posible identificarlo como polo de cierto orden de manera más eficiente recurriendo directamente a la serie de Laurent.

7.5. Ceros y Polos de orden m

Sea una función f analítica en z_0 , entonces es analítica en algún entorno $|z - z_0| < R_0$ de z_0 , y sabemos por el teorema de Taylor (Sec.6.2) que

$$f(z) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

con ($|z - z_0| < R_0$), donde $a_0 = f(z_0)$ y $\frac{a_n f^{(n)}(z_0)}{n!}$ con ($n = 1, 2, \dots$). Si, además, $f(z_0) = 0$ pero existe un entero positivo m , tal que $f^{(m)}(z_0) \neq 0$ y todas las derivadas de órdenes inferiores se anulan en el punto z_0 , se dice que f tiene en z_0 un cero de orden m . En este caso, se tiene

$$f(z) = (z - z_0)^m \sum_{n=0}^{\infty} a_{m+n} (z - z_0)^n$$

con ($|z - z_0| < R_0$), donde $a_m \neq 0$.

Como vimos que las series de potencias convergentes siempre representan funciones analíticas, se deduce que

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z),$$

donde g es analítica en z_0 y $g(z_0) \neq 0$.

Supongamos que existe un entero positivo m , tal que dada una función f se puede escribir en la forma $f(z) = (z - z_0)^m g(z)$, donde g es analítica y no nula en z_0 . Entonces, existe un entorno $|z - z_0| < R_0$ de z_0 , donde

$$f(z) = g(z_0)(z - z_0)^m + \frac{g'(z_0)}{1!}(z - z_0)^{m+1} + \frac{g''(z_0)}{2!}(z - z_0)^{m+2} + \dots,$$

como es la representación en serie de Taylor de f , sigue que $\frac{g^{(m)}(z_0)}{m!} = g(z_0) \neq 0$ y que $f(z)$ y todas sus derivadas de orden menor que m se anulan en z_0 . Con esto se demuestra que la ecuación $f(z) = (z - z_0)^m g(z)$, donde $g(z)$ es analítica y no nula en z_0 , puede utilizarse como caracterización alternativa de los de orden m .

Probaremos que cuando dos funciones p y q son analíticas en un punto z_0 , y $p(z_0) \neq 0$, el coeficiente $\frac{p(z)}{q(z)}$ tiene un polo de orden m en z_0 si y sólo si q tiene un cero de orden m allí.

Demostración. Se tienen dos funciones $\phi(z)$ y $g(z)$, con las siguientes propiedades a determinar:

- (1) Supongamos que $\frac{p(z)}{q(z)}$ tiene un polo de orden m en z_0 . Entonces $\frac{p(z)}{q(z)} = \frac{\phi(z)}{(z - z_0)^m}$, para alguna función $\phi(z)$ analítica y no nula en z_0 . Esto implica que $q(z) = (z - z_0)^m \frac{p(z)}{\phi(z)}$, y como $\phi(z)$ es analítica y no nula en z_0 , se cumple que $q(z)$ tiene un cero de orden m en z_0 .
- (2) Por otro lado, si $q(z)$ tiene un cero de orden m en z_0 , entonces $q(z) = (z - z_0)^m g(z)$, para alguna función $g(z)$ analítica y no nula en z_0 . En este caso, $\frac{p(z)}{q(z)} = \frac{p(z)/g(z)}{(z - z_0)^m}$ y como $g(z)$ es analítica y no nula en z_0 se cumple que $\frac{p(z)}{q(z)}$ tiene un polo de orden m en z_0 .

Con esto, hemos demostrado que $\frac{p(z)}{q(z)}$ tiene un polo de orden m en z_0 si y solo si $q(z)$ tiene un cero de orden m en z_0 . ■

Ejemplo. Consideremos las funciones $p(z) = z^2 + 1$ y $q(z) = z^3 - 1$.

Vamos a verificar si $p(z)$ tiene un polo de orden m en $z_0 = 1$, entonces, para esto necesitamos que $p(z_0) = p(1) \neq 0$ y que todas las derivadas de órdenes inferiores a m se anulen en $z_0 = 1$.

$$p(1) = 1^2 + 1 = 2 \neq 0,$$

por lo tanto, $p(z)$ tiene un polo de orden m en $z_0 = 1$.

Ahora, vamos a verificar si $q(z)$ tenga un cero de orden m en $z_0 = 1$, necesitamos que $q(z_0) = q(1) = 0$, y que todas las derivadas de órdenes inferiores a m se anulen en $z_0 = 1$.

$$q(1) = 1^3 - 1 = 0,$$

por lo tanto, $q(z)$ tiene un cero de orden m en $z_0 = 1$.

Veamos el coeficiente

$$\frac{p(z)}{q(z)} = \frac{z^2 + 1}{z^3 - 1},$$

en este caso, $z_0 = 1$ es un polo de orden $m = 2$ de $\frac{p(z)}{q(z)}$, ya que el cero de $q(z)$ en $z_0 = 1$ tiene orden $m = 1$.

7.6. Cálculo de Integrales Reales Impropias

Unas de las importantes aplicaciones de la teoría de los residuos es la evaluación de ciertos tipos de integrales definidas e impropias que aparecen en el análisis real.

En análisis real, la integral impropia de una función continua $f(x)$ sobre el intervalo semi-infinito $x \geq 0$ se define como

$$\int_0^{\infty} f(x)dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R f(x)dx,$$

usando existe el límite de la derecha, se dice que la integral impropia converge y su valor es el valor de dicho límite.

Si $f(x)$ es continua para todo x , la integral impropia,

$$(7.6.1) \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx,$$

se define como,

$$(7.6.2) \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{R_1 \rightarrow \infty} \int_{R_1}^0 f(x)dx + \lim_{R_2 \rightarrow \infty} \int_0^{R_2} f(x)dx.$$

Otro valor asignado a la integral (7.6.1) se trata del valor principal de Cauchy (P.V.), que es el valor

$$P.V. \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x)dx,$$

si la integral converge, el valor obtenido es el valor principal de Cauchy. Luego, por ejemplo si $f(x) = x$, el valor principal de Cauchy de (7.6.1) es 0, mientras que la integral no converge según la definición (7.6.2). Pero, supongamos que f es una función par, es decir, $f(-x) = f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Entonces, si el valor principal de Cauchy de la integral (7.6.1) existe, la integral (7.6.1) converge.

OBSERVACIÓN. Notar que entonces cuando f es par y algunas de las integrales (7.6.1) o (7.6.2) converge, también converge la otra. Lo que podemos expresar como

$$\int_0^{\infty} f(x)dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx.$$

Luego, supongamos que el integrando en la integral (7.6.1) se puede escribir,

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)},$$

con p y q polinomios reales con factores distinto entre sí y donde $q(x)$ no tiene soluciones reales. Cuando la integral converge, su valor se puede calcular determinando su valor principal de Cauchy con ayuda de los residuos.

EJEMPLO. Probemos que la integral suele lograrse

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^2} = \frac{\pi}{2}.$$

Notemos que

$$(7.6.3) \quad \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)},$$

ahora, esta integral representa la integral de la función,

$$f(z) = \frac{1}{(z^2 + 1)} = \frac{1}{(z + i)(z - i)},$$

sobre el eje real en el plano complejo. Donde, sus singularidades aisladas son los puntos $z = \pm i$ y es analítica en el resto del plano. Los puntos singulares de la función están en el interior de la región semicircular acotada por el segmento $z = x$ ($-R \leq x \leq R$) del eje real y la mitad superior del círculo $|z| = R$. Para $R > 2$ integramos en forma positiva el contorno de esa región. Luego tenemos que

$$\int_{-R}^R f(x)dx + \int_{C_R} f(z)dz = 2\pi i(B_1),$$

donde B_1 es el residuo de f en el punto $z = i$. Entonces calculando el residuo,

$$f(z) = \frac{\phi(z)}{z - i} \text{ donde } \phi(z) = \frac{1}{z + i},$$

como $\phi(i) = \frac{1}{2i}$, el residuo $B_1 = \frac{1}{2i}$. Por lo tanto $2\pi i(B_1) = \frac{2\pi i}{2i} = \pi$ y la ecuación se puede poner en la forma

$$(7.6.4) \quad \int_{-R}^R f(x)dx = \pi - \int_{C_R} f(z)dz,$$

verdadera para todo valor de $R > 2$.

Ahora solo falta asegurar que la integral de la derecha de la igualdad tiende a cero cuando R tiende a infinito. Observamos que para $|z| = R$,

$$\begin{aligned} |z^2 - 1| &= |z + i||z - i| \\ &\geq ||z| + i||z| - i| \\ &\geq |R + i||R - i| \\ &= (R + i)(R - i), \end{aligned}$$

así que si z es cualquier punto de C_R

$$|f(z)| \leq M_R \text{ donde } M_R = \frac{1}{(R + i)(R - i)},$$

lo que significa que

$$\left| \int_{C_R} f(z)dz \right| \leq M_R \pi R,$$

siendo πR la longitud del semicírculo C_R . Luego, como el número

$$\begin{aligned} M_R \pi R &= \frac{\pi R}{(R + i)(R - i)} \\ &= \frac{\pi R}{R \left(1 + \frac{i}{R}\right) \left(1 - \frac{i}{R}\right)} \\ &= \frac{\pi}{\left(1 + \frac{i}{R}\right) \left(1 - \frac{i}{R}\right)}, \end{aligned}$$

es evidente que $M_R \pi R$ tiende a cero cuando R tiende a infinito. En consecuencia

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z)dz = 0.$$

Por lo tanto de la ecuación (7.6.4) tenemos que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{1}{x^2 + 1} = \pi,$$

o sea

$$\text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + 1} = \pi,$$

y como el integrando aquí es par, sabemos por lo visto al inicio de esta sección que la integral converge a su valor principal de Cauchy y de acuerdo con la ecuación (7.6.3)

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + i)} &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + i)}. \\ &= \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

7.7. Integrales Impropias en las que aparecen senos y cosenos

La teoría de residuos resulta útil a la hora de calcular integrales impropias convergentes del tipo

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin(ax) dx \text{ o } \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos(ax) dx,$$

donde a es una constante positiva. Supongamos que $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, donde p y q son polinomios reales sin factores comunes y que no tiene soluciones reales. El método descrito en la sección anterior 7.6 no es aplicable, por lo menos ahora, pues $\sin z$ y $\cos z$ crecen como $\sinh(y)$ o e^{ay} , al tender y hacia infinito. El cambio que será desarrollado más adelante es causa de que,

$$\int_{-R}^R f(x) \cos(ax) dx + i \int_{-R}^R f(x) \sin(ax) dx = \int_{-R}^R f(x) e^{iax} dx,$$

junto con la observación de que el módulo e^{-ay} de e^{iaz} es acotado en el semiplano superior $y \geq 0$.

EJERCICIO. Vamos a demostrar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(3x)}{(x^2 + 1)^2} dx = \frac{2\pi}{e^3}.$$

Debido que el integrando es par, solo basta probar que el valor principal de Cauchy de la integral existe y hallar su valor. Introducimos la función

$$f(z) = \frac{1}{(x^2 + 1)^2},$$

podemos notar que el producto $f(z)e^{i3z}$ es analítico en todos los puntos del eje real y en el semiplano superior, excepto en el punto $z = i$. La singularidad $z = i$ está en el interior de la región semicircular cuyo contorno se encuentra en el segmento $-R \leq x \leq R$ del eje real y la mitad superior C_R del círculo $|z| = R$ ($R > 1$) desde $z = R$, hasta $z = -R$. Integrando $f(z)e^{i3z}$ a lo largo de ese contorno se obtiene

$$(7.7.1) \quad \int_{-R}^R \frac{e^{i3x}}{(x^2 + 1)^2} dx = 2\pi i B_1 - \int_{C_R} f(z) e^{i3z} dz,$$

donde,

$$B_1 = \text{Res}_{z=i} [f(z) e^{i3z}].$$

Como

$$f(z) e^{i3z} = \frac{\phi(z)}{(z - i)^2} \text{ donde } \phi(z) = \frac{e^{i3z}}{(z + i)^2},$$

el punto $z = i$ es obviamente un polo del orden 2 de $f(z) e^{i3z}$ y

$$B_1 = \phi'(z) = \frac{1}{ie^3}.$$

Igualando las partes reales de cada lado de la ecuación (7.7.1), encontramos que

$$\int_{-R}^R \frac{\cos(3x)}{(x^2 + 1)} dx = \frac{2\pi}{e^3} - \operatorname{Re} \int_{C_R} f(z)e^{i3z} dz.$$

Finalmente, observemos que cuando z es un punto de C_R ,

$$|f(z)| \leq M_R \text{ donde } M_R = \frac{1}{(R^2 - 1)^2},$$

y que $|e^{i3z}| = e^{-3y} \leq 1$, para ese punto. En consecuencia,

$$\begin{aligned} \left| \operatorname{Re} \int_{C_R} f(z)e^{i3z} dz \right| &\leq \left| \int_{C_R} f(z)e^{i3z} dz \right| \\ &\leq M_R \pi R, \end{aligned}$$

como,

$$M_R \pi R = \frac{\pi R}{(R^2 - 1)^2},$$

tiende a cero cuando R tiende a infinito y a causa de las desigualdades, basta hacer tender R hacia infinito en la ecuación para llegar al resultado deseado. Donde

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(3x)}{(x^2 + 1)^2} dx = \frac{2\pi}{e^3}.$$

7.8. Integrales definidas en las que aparecen senos y cosenos

El métodos de los residuos es útil para calcular ciertas integrales definidas del tipo

$$(7.8.1) \quad \int_0^{2\pi} F(\sin \theta, \cos \theta) d\theta.$$

Observando que θ varía desde 0 hasta 2π , podemos considerar θ como el argumento de un punto z sobre el disco unidad C centrado en el origen; así escribiremos $z = e^{i\theta}$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$). Al hacer esta sustitución utilizando las ecuaciones

$$(7.8.2) \quad \sin \theta = \frac{z - z^{-1}}{2i}, \quad \cos \theta = \frac{z + z^{-1}}{2}, \quad d\theta = \frac{dz}{iz},$$

la integral anterior se convierte en la integral de contorno

$$(7.8.3) \quad \int_C F\left(\frac{z - z^{-1}}{2i}, \frac{z + z^{-1}}{2}\right) \frac{dz}{iz}$$

de una función de z a lo largo del círculo C con orientación positiva. La integral original es, claramente, simplemente una forma paramétrica de la integral (7.8.1), de acuerdo con la expresiones (7.8.2). Cuando el integrando de (7.8.3) es una función racional de z , podemos calcular esa integral mediante el teorema de los residuos una vez que se han localizado los ceros del denominador, asumiendo que ninguno de ellos está en C .

7.9. Integración a lo largo de un corte de ramificación

El teorema de los residuos se utiliza con frecuencia para calcular integrales reales en las que la función $f(z)$ del integrando tiene un corte de ramificación.

Ejemplo. Calcular por integración a lo largo de un corte de ramificación

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5 + 4 \sin \theta} = \frac{2\pi}{3}.$$

Parametrizamos el contorno C como el círculo unitario $|z| = 1$ en el plano complejo. $z = e^{i\theta}$, donde $0 < \theta < 2\pi$.

Se expresa la función en términos de z utilizando las ecuaciones:

$$\sin \theta = \frac{z - z^{-1}}{2i} \quad y \quad \cos \theta = \frac{z + z^{-1}}{2}$$

y se obtiene

$$\frac{1}{5 + 4 \sin \theta} = \frac{1}{5 + 4 \left(\frac{z - z^{-1}}{2i} \right)}.$$

El denominador se anula cuando $z - z^{-1} = -\frac{5}{2i}$, es decir, cuando $z^2 + \frac{5}{2i}z - 1 = 0$, así encontramos los dos ceros z_1 y z_2 .

Ahora elegimos uno de los ceros, por ejemplo, z_1 , y trazamos un corte de ramificación desde $z = z_1$ hasta $z = \infty$.

Finalmente, aplicamos el Teorema de los Residuos y sumamos las contribuciones de los residuos en el interior del contorno. Dado que tenemos un residuo en $z = z_1$, la integral se reduce a $2\pi i$ multiplicado por el valor del residuo en ese punto. Con el valor del residuo, obtenemos

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5 + 4 \sin \theta} &= 2\pi \cdot \text{Res}(z_1) \\ &= \frac{2\pi}{3}. \end{aligned}$$

7.10. Transformadas Inversas de Laplace

Sea f una función compleja de la variable s que es analítica en el plano finito s salvo en un número finito de polos. Consideremos un segmento de recta vertical L_R dado por $s = \gamma + it$ con $(-R \leq t \leq R)$, donde γ es una constante positiva lo suficientemente grande para que el segmento esté a la derecha de todos los polos de F . Definimos una nueva función f de la variable real t , para valores positivos de t , mediante la ecuación:

$$(7.10.1) \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{L_R} e^{st} F(s) ds$$

con $(t > 0)$, suponiendo que el límite existe. La expresión anterior también se suele escribir como:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} P.V. \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{st} F(s) ds$$

con $(t > 0)$.

Puede demostrarse que, bajo ciertas condiciones generales sobre las funciones involucradas, $f(t)$ es la transformada inversa de Laplace de $F(s)$. Es decir, si $F(s)$ es la transformada de Laplace

de $f(t)$, definida por la ecuación:

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt,$$

entonces $f(t)$ se recupera mediante la ecuación (7.10.1), donde la elección del número positivo γ es irrelevante, siempre y cuando L_R esté a la derecha de todos los polos de F . Las transformadas de Laplace y sus inversas son importantes en la resolución de ecuaciones diferenciales, ya sean estas ordinarias o en derivadas parciales.

Para calcular el límite en la expresión (7.10.1), una vez especificada la función $F(s)$, se utilizan los residuos. Utilizando la variable z en lugar de s , sean z_1, z_2, \dots, z_n los polos de $F(z)$. Denotemos por R_0 el mayor de sus módulos, y consideremos un semicírculo C_R con representación paramétrica

$$z = \gamma + Re^{i\theta}$$

con $\left(\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}\right)$, donde $R > R_0 + \gamma$. Es importante notar que para cada polo z_k ,

$$|z_k - \gamma| \leq |z_k| + \gamma \leq R_0 + \gamma < R.$$

Por tanto, todos los polos están en el interior de la región semicircular limitada por C_R y L_R , y el teorema de los residuos nos dice que:

$$(7.10.2) \quad \int_{L_R} e^{zt} F(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}[e^{zt} F(z)] - \int_{C_R} e^{zt} F(z) dz.$$

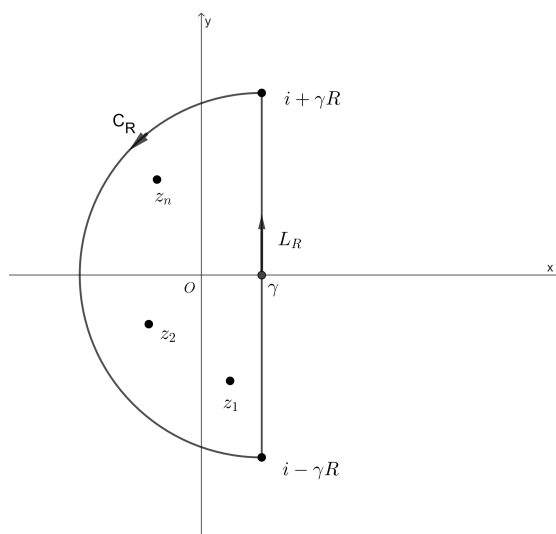


FIGURA 7.10.1. Representación del semicírculo C_R

Supongamos ahora que, para todos los puntos z de C_R , existe una constante positiva M_R tal que $|F(z)| \leq M_R$, donde M_R tiende a cero cuando R tiende a infinito. Podemos usar la representación paramétrica $z = \gamma + Re^{i\theta}$ de C_R para escribir:

$$\int_{L_R} e^{zt} F(z) dz = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} e^{(\gamma + Rte^{i\theta})} F(\gamma + Rte^{i\theta}) Ri e^{i\theta} d\theta.$$

Luego, utilizando las propiedades de los módulos, hallamos que:

$$(7.10.3) \quad \left| \int_{C_R} e^{zt} F(z) dz \right| \leq e^{\gamma t} M_R R \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} e^{Rt \cos \theta} d\theta.$$

Finalmente, la sustitución $\phi = \theta - \frac{\pi}{2}$, junto con la desigualdad de Jordan, revelan que

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} e^{Rt \cos \theta} d\theta = \int_0^\pi e^{-Rt \sin \phi} d\phi < \frac{\pi}{Rt}.$$

Por lo tanto, la desigualdad

$$\left| \int_{C_R} e^{zt} F(z) dz \right| < \frac{e^{\gamma t} M_R \pi}{t},$$

nos permite concluir que el valor de la integral tiende a cero al hacer R a infinito. Haciendo esto en (7.10.2), vemos que la función $f(t)$, definida por la ecuación (7.10.1), existe y puede escribirse como

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \text{Res}[e^{zt} F(z)]$$

con ($t > 0$).

Ejemplo. Para encontrar la función $f(t)$ correspondiente a $F(s) = \frac{12}{s^3 + 8}$. Consideraremos las singularidades de la función

$$e^{zt} F(z) = \frac{12}{z^3 + 8}$$

para ($t > 0$). Estas singularidades son las tres raíces cúbicas de -8 , es decir,

$$z_k = 2 \exp \left[i \left(\frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3} \right) \right]$$

para ($k = 0, 1, 2$), lo que nos da

$$(7.10.4) \quad z_0 = 1 + \sqrt{3}i, \quad z_1 = -2, \quad z_2 = 1 - \sqrt{3}i.$$

Los correspondientes residuos B_k se calculan fácilmente para identificar polos simples y hallar sus residuos:

$$(7.10.5) \quad B_k = \frac{12e^{z_k t}}{3z_k^2} \cdot \frac{z_k}{2} e^{z_k t}$$

con ($k = 0, 1, 2$).

Sea ahora z cualquier punto del semicírculo $z = \gamma + Re^{i\theta}$, donde $\gamma > 1$ y $R > 2 + \gamma$.

Puesto que

$$|z| = |\gamma + Re^{i\theta}| \geq |\gamma + R| = R - \gamma > 2$$

y

$$|z^3 + 8| \geq (R - \gamma)^3 - 8 > 0,$$

se deduce que

$$|F(z)| \leq M_R \quad \text{con} \quad M_R = \frac{12}{(R - \gamma)^3 - 8}.$$

De esta manera, $F(z)$ tiene la propiedad de acotación requerida.

Por lo tanto,

$$f(t) = B_0 + B_1 + B_2,$$

y si sustituimos (7.10.4) y (7.10.5) llegamos al resultado

$$f(t) = e^{-2t} - e^t \left(\cos \sqrt{3}t - \sqrt{3} \sin \sqrt{3}t \right)$$

con $(t > 0)$.

7.11. Residuos Logarítmicos y Teorema de Rouché

En este último capítulo será desarrollada una aplicación del teorema de los residuos de una manera distinta a la vista anteriormente. Sea f una función analítica dentro y sobre un contorno cerrado simple C , positivamente orientado, tal que f no tenga soluciones sobre este. Además, solo puede haber un número finito de soluciones interiores a C y si z_0 es una de las soluciones, esto indica que z_0 es un punto singular aislado del coeficiente $\frac{f'}{f}$, el cual el residuo de este coeficiente en z_0 se llama *residuo logarítmico de f en z_0* , esto por lo siguiente

$$\frac{d}{dz} \log f(x) = \frac{f'(z)}{f(z)},$$

para cualquier rama de la función logaritmo.

Supongamos ahora que la solución z_0 f es de orden m_0 . Entonces, en algún entorno de z_0 se puede escribir,

$$f(z) = (z - z_0)^{m_0} g(z),$$

donde g es una función analítica en dicho entorno y $g(z_0) \neq 0$. Luego,

$$f'(z) = m_0 (z - z_0)^{m_0-1} g(z) + (z - z_0)^{m_0} g'(z),$$

luego nos queda que,

$$\begin{aligned} \frac{f'(z)}{f(z)} &= \frac{m_0 (z - z_0)^{m_0-1} g(z) + (z - z_0)^{m_0} g'(z)}{(z - z_0)^{m_0} g(z)} \\ &= \frac{m_0 (z - z_0)^{m_0-1} g(z)}{(z - z_0)^{m_0} g(z)} + \frac{(z - z_0)^{m_0} g'(z)}{(z - z_0)^{m_0} g(z)} \\ &= \frac{m_0}{z - z_0} + \frac{g'(z)}{g(z)}. \end{aligned}$$

Como $\frac{g'(z)}{g(z)}$ es analítica en z_0 , la función $\frac{f'}{f}$ tiene un polo simple en z_0 , con residuo en m_0 . Es decir, el residuo logarítmico en f en la solución z_0 es de orden m_0 de esa solución. Luego, si N_f es el número de soluciones de f incluyendo sus multiplicidades, que están dentro del contorno C , el teorema de los residuos dice que,

$$(7.11.1) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N_f.$$

TEOREMA. Sean f y g dos funciones analíticas en el interior y sobre un contorno cerrado simple C . Si $|f(z)| > |g(z)|$ en todo punto de C , entonces las funciones $f + g$ tienen el mismo número de ceros, contados con sus multiplicidades, dentro de C .

Demostración. La orientación del contorno C en el enunciado del teorema es irrelevante por lo que supondremos que está positivamente orientado. Comenzamos tomando las funciones f y g y definimos una nueva función,

$$\Phi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z) + tg'(z)}{f(z) + tg(z)} dz, \quad (0 \leq t \leq 1).$$

Notar que el denominador del integrando no se anula sobre C . De esta manera, si z es un punto de C , la condición $|f(z)| > |g(z)|$ nos dice que,

$$|f(z) + tg(z)| \geq ||f(z)| - t|g(z)|| \geq |f(z)| - t|g(z)| > 0.$$

Así, queda asegurada la existencia de la integral en la función $\Phi(t)$. Además, la función $\Phi(t)$ es continua en $(0 \leq t \leq 1)$. Ahora, por la ecuación (7.11.1), el valor de la función $\Phi(t)$ en cada punto $t(0 \leq t \leq 1)$ debe ser un entero. Para concluir, como $\Phi(t)$ es continua, debe ser constante sobre el intervalo, por lo que podemos concluir que $\Phi(0) = \Phi(1)$, por lo tanto $\Phi(0) = N_f$ y $\Phi(1) = N_{f+g}$ y el teorema queda demostrado. ■

EJEMPLO. Determinar el número de soluciones de la ecuación $z^7 - 4z^3 + z - 1 = 0$, al interior del círculo $|z| = 1$.

Definimos a $f(z) = -4z^3$ y $g(z) = z^7 + z - 1$.

Luego vemos que

$$|f(z)| = |-4z^3| = 4|z|^3 = 4,$$

$$|g(z)| = |z^7 + z - 1| \leq |z^7| + |z| + |-1| = |z|^7 + |z| + 1 = 3.$$

Entonces como $|f(z)| = 4$ y $|g(z)| \leq 3$, cuando $|z| = 1$, se satisface el teorema de Rouché. Por lo tanto, como f tiene 3 soluciones, contando sus multiplicidades al interior al círculo $|z| = 1$, otras soluciones tiene $f + g$. Por lo que la ecuación $z^7 - 4z^3 + z - 1 = 0$ tiene tres soluciones interiores al círculo $|z| = 1$.

Bibliografía

- [1] Arredondo, C. (2016). El sentido del número complejo desde sus raíces imaginarias (Tesis de maestría). Universidad tecnológica de Pereira, Colombia.
- [2] Bravo, M. Olate, C. Vásquez, P. (2010). Elementos iniciales sobre variable compleja. (Tesis de pregrado). Universidad del bio bio, Chillán.
- [3] Churchill, R. Ward, J. (1992) Variable compleja y aplicaciones. Madrid, España. Mcgraw-Hill/Interamericana.
- [4] Espinoza, C. Rivero, F. (2001). Una introducción a los números complejos. Venezuela: Departamento de Matemáticas Facultad de Ciencias Universidad de los Andes.
- [5] Guerrero, D. (2015). Capítulo 20: Números complejos (I). Perú: Repositorio institucional PIRHUA – Universidad de Piura
- [6] Pérez, F. (2004). Curso de análisis complejo. Granada, España. Universidad de Granada.
- [7] Ramirez, C. (2019). Una breve historia imaginaria. Pasquín Matemático 1(2), 1-9.
- [8] Sánchez, R. Heber, J. (2016). Números Complejos. Recuperado de <https://acmfiles.s3.amazonaws.com/Temas/Complejos3.pdf>