Apuntes

Tres tópicos claves en Estadística

Contenidos

Definiciones

Ejercicios resueltos

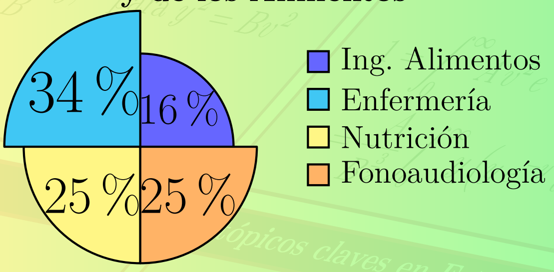
Ejercicios propuestos

Ejercicios de Autoevaluación

Respuestas a los Ejercicios

Facultad

Ciencias de la Salud y de los Alimentos



Autores

Francisco Novoa Muñoz
fnovoa@ubiobio.cl
Departamento de Enfermería

María Florencia Osorio Baeza
mariaflorenciaosorio@gmail.com

Contenidos

ÍNDICE GENERAL

Orientación del apuntes

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

Desde el año 2000 los autores han tenido la oportunidad de impartir docencia de Estadística en diferentes Carreras de la Universidad, distribuidas en ambas Sedes y en los distintos Campus, cubriendo las seis Facultades, tanto en programas diurnos como vespertinos. En este periodo han observado que independiente que el/la estudiante tenga mayor o menor formación matemática se le presentan tres dificultades que a continuación se abordarán:

a) clasificar adecuadamente si una variable es cualitativa o cuantitativa,

b) caracterizar correctamente los elementos de un conjunto,

c) aplicar apropiadamente las herramientas del cálculo diferencial e integral.

Entre ellas existe un efecto dominó pues clasificar erróneamente una variable repercute en el análisis exploratorio de los datos y caracterizar inadecuadamente los conjuntos incide en la construcción de los eventos (elemento base en probabilidad) y esto, a su vez, dificulta el cálculo de probabilidades.

El objetivo del presente apuntes es entregar definiciones rigurosas de los conceptos involucrados en las tres dificultades mencionadas, apoyado con una variedad significativa de ejemplos resueltos. Además, se entregan las herramientas precisas y esenciales para que el/la estudiante aborde con éxito la problemática estadística que esté estudiando.

Cada tópico tendrá ejercicios:

i) propuestos, y

ii) de autoevaluación

con sus respectivas respuestas.

Las ilustraciones empleadas fueron especialmente seleccionadas para mostrar técnicas que permiten clasificar adecuadamente la/s variable/s involucrada/s. Además, se exhiben estrategias para caracterizar correctamente los eventos y aplicar apropiadamente las herramientas del cálculo.

Una parte de los ejemplos y ejercicios presentada en este apuntes es creación de los autores y la otra parte, como también las definiciones y teoremas, fueron extraídos de diferentes libros clásicos de Estadística, los cuales están debidamente descritos en la bibliografía.

CAPÍTULO 2

CLASIFICACIÓN DE LAS VARIABLES

En cualquier disciplina (desde las ciencias y la ingeniería hasta las leyes y la medicina) se recibe información en forma de datos, de los cuales a menudo es necesario obtener alguna conclusión. El primer paso que se hace en estadística es asociar una variable que identifique a esos datos.

2.1. Definición de variable y sus clasificaciones

Variable

Es toda ***característica*** que posee la población y se representa con una letra mayúscula, por ejemplo, X, Y, Z. Generalmente se usan las últimas letras del alfabeto.

A su vez, los valores particulares de la variable se llaman ***datos***, corresponden a números o medidas recopiladas como resultado de las observaciones y se denotan con la misma letra que se asoció a la variable, pero en minúscula y subíndice, esto es, si la variable era X, entonces los datos de denotan por $x_1, x_2, \ldots, x_n$, siendo n el número total de datos recolectados.

Ejemplo 2.1.1: Identificación de una variable

Debido a la pandemia por COVID-19, los protocolos exigían que en cada centro comercial se midiera la temperatura a las personas que ingresaban.

Identificación T : Temperatura (°C) de las personas que ingresaban al centro comercial.

En síntesis, identificar una variable consiste en asociar una letra a lo que se desea estudiar, esto es, se escribe la letra mayúscula, luego ":" y enseguida se describe la situación en estudio.

La variable se escribe en singular y para detectarla basta con una palabra que resuma el estudio. Enseguida se le agregan más detalles para tener una descripción lo más ajustada posible a la realidad. Es útil registrar las unidades de medida, si las hay. En el Ejemplo 2.1.1, la palabra clave es "Temperatura" y la unidad de medida es °C, que se puede colocar entre comas o en paréntesis, como en el ejemplo.

¡Cuidado!

Comúnmente se confunde a la variable con su unidad de medida. Las unidades de medida (gramo, kilo, cc, litro, centímetro, metro, minuto, hora, etc.) no son variables.

Las variables se clasifican en ***cualitativas*** y ***cuantitativas***, definidas como sigue.

Variable cualitativa

Es aquella cuyas observaciones se refieren a atributos. Se dividen en ***nominales*** y ***ordinales***. Las nominales se emplean para distinguir nombres o códigos. Las ordinales se usan para diferenciar el orden de supremacía de acuerdo con cierto criterio jerárquico, sus categorías pueden ser nombres o números no cuantificables.

Ejemplo 2.1.2: Variable cualitativa: identificación y clasificación

Si el interés es estudiar el sexo de las personas del ejemplo anterior, entonces se tiene la siguiente <u>identificación</u> de la variable con su respectiva <u>clasificación</u>.

<u>Identificación</u> S : Sexo de las personas que ingresaban al centro comercial.

<u>Clasificación</u> Variable cualitativa nominal.

En la situación recién descrita, clasificar a la variable como nominal se debe a que la cualidad de ser, por ejemplo, hombre o mujer, no tiene un orden de supremacía de una sobre otra.

Variable cuantitativa

Es aquella cuyas observaciones se miden por medio de un instrumento, se dividen en ***discretas*** y ***continuas***. Las discretas corresponden, en general, a recuentos de unidades asociadas con la población en estudio, con valores en el conjunto $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$. Las continuas son las que teóricamente pueden tomar cualquier valor dentro de un cierto intervalo, esto es, entre dos mediciones cualesquiera, siempre se podrá obtener otra medición.

Ejemplo 2.1.3: Identifique y clasifique la variable en estudio

Una máquina automática llenó un lote de 50 latas de bebida, sus contenidos en cc se registraron en una tabla en que las primeras mediciones fueron: 347.2, 354.1, 352.3, 348.5

<u>Identificación</u> V : Volumen (cc) de bebida incorporado por una máquina en una lata.

<u>Clasificación</u> Variable cuantitativa continua.

Como existe el vaso de precipitado (Figura 2.1), que es uno de los instrumentos usados para medir "Volumen", entonces la variable se clasifica como cuantitativa.

Figura 2.1: Vaso de precipitado

Debido a que entre dos medidas cualesquiera del volumen de bebida en una lata siempre es posible encontrar otro valor, entonces la variable es continua. Esto se ve claramente si en el vaso de precipitado de la Figura 2.1 se marcan dos puntos; por ejemplo, 50.3 y 75.9, se observa que entre ellos hay infinitas posibilidades para el volumen de bebida, pues no hay espacio vacío entre dichos valores.

Puesto que la variable se denotó V, entonces los datos se escriben $v_1 \ldots, v_{50}$, siendo

$n = 50$ el total de mediciones. Así, $v_1 = 347.2$, $v_2 = 354.1$, $v_3 = 352.3$ y $v_4 = 348.5$.

A modo de resumen de este capítulo, la siguiente tabla ilustra las variables y sus divisiones:

Variables			
cualitativas		cuantitativas	
nominales	ordinales	discretas	continuas

Recordar que ...

si ***existe un instrumento de medición*** para la variable en estudio, entonces la variable es ***cuantitativa***, de lo contrario es cualitativa.

Tener presente que ...

si la decisión fue que la variable era cualitativa, entonces preguntarse si los datos siguen un ***orden de supremacía***. Si la respuesta es afirmativa, entonces la variable es ***cualitativa ordinal*** (proviene de **orden**), de lo contrario es cualitativa nominal.

No olvidar que ...

si la variable es cuantitativa, entonces averigüar si entre dos mediciones cualesquiera es posible encontrar infinitos valores. Si la respuesta es afirmativa, entonces la variable es ***cuantitativa continua*** (no hay vacíos), de lo contrario es cuantitativa discreta.

2.2. Ejercicios resueltos sobre identificar y clasificar variables

A continuación se desarrollan variados ejemplos con el objetivo de facilitar la identificación de la variable en estudio y su respectiva clasificación.

Ejemplo 2.2.1: Identifique y clasifique la variable en estudio

Una muestra de 46 consumidores probó una nueva hojuela de queso y 6 la clasificaron de excelente, 18 como buena, 15 optaron por regular y el resto la calificó de mala.

Identificación C : Calificación de una nueva hojuela de queso.

Clasificación Variable cualitativa ordinal.

En este caso, como es una degustación, entonces es una opinión personal, con lo cual, no hay un instrumento de medición que mida esto, por lo tanto, la variable pertenece al grupo cualitativo. Por otra parte, las respuestas de los consumidores tienen un orden de preferencia lo que permite clasificar a la variable como ordinal. Notar que $n = 46$, pero no se tienen las respuestas individuales de los consumidores.

Ejemplo 2.2.2: Identifique y clasifique la variable en estudio

Durante varios días consecutivos se midieron las temperaturas, en grados Fahrenheit, del fluido de descarga de una planta para el tratamiento de aguas negras, registrándose: 108.7, 96.8, 99.2, 100.3, 98.6, 97.9, 101.5, 99.7, 100.4, 99.0, 98.7, 100.9, 101.2, 100.0, 98.7

Identificación T : Temperatura (°F) del fluido de descarga de una planta de aguas negras.

Clasificación Variable cuantitativa continua.

Puesto que existe el termómetro (Figura 2.2) para medir la "Temperatura", entonces la variable se clasifica como cuantitativa.

Figura 2.2: Termómetro de mercurio

La variable se considera continua, pues entre dos medidas cualesquiera de la temperatura del fluido de descarga siempre es posible encontrar otro valor, esto se ve claramente si, por ejemplo, en el termómetro de la Figura 2.2 se marcan dos puntos, a saber, 101.5 y 108.7, se observa que entre ellos hay infinitas posibilidades para la temperatura, pues en el termómetro no existe vacío entre esos valores.

Ya que la variable se denotó T, entonces los datos se escriben $t_1, t_2, \ldots, t_{15}$, donde $n = 15$ es el total de mediciones. Del ejemplo se tiene que $t_1 = 108.7$, $t_2 = 96.8$ y $t_3 = 99.2$ que corresponden a las tres primeras temperaturas medidas.

Ejemplo 2.2.3: Identifique y clasifique la variable en estudio

En el periodo de pandemia, uno de los objetivos permanentes del Ministerio de Salud chileno era contabilizar los contagiados diarios por COVID-19.

Identificación N : Número de contagiados diarios por COVID-19 en Chile.

Clasificación Variable cuantitativa discreta.

Uno de los instrumentos que sirve para contar es el contador manual (Figura 2.3) permitiendo clasificar a la variable "Número de ..." como cuantitativa.

Figura 2.3: Contador manual

Puesto que entre dos medidas cualesquiera de la variable en estudio, por ejemplo, 100 y 101, no es posible encontrar otro número de contagiados diarios por COVID-19, entonces la variable se clasifica como discreta.

Elegir los valores 100 y 101 fue estratégico, pues forzó a quedar sin opciones para asignarle a la variable. Esta elección es totalmente lícita pues la definición establece que se pueden escoger dos mediciones cualesquiera.

Haber escogido otro par de valores, como 100 y 120, solo permite más holgura, pero no posibilita clasificar a la variable como continua.

Ejemplo 2.2.4: Identifique y clasifique la variable en estudio

La División de Economía Comercial (DEC) del Departamento del Trabajo, cada año monitorea las empresas que fracasan y clasifica el fracaso como: a) causas desconocidas, b) experiencia desequilibrada, c) falta de experiencia gerencial, d) falta de experiencia en línea, e) incompetencia y f) gastos excesivos.

Identificación C : Causa del fracaso de las empresas monitoreadas por la DEC.

Clasificación Variable cualitativa nominal.

Esta es otra situación en que no existe un instrumento de medición para medir la razón por la cual fracasa una empresa, luego la variable se clasifica como cualitativa.

Además, el hecho que una empresa tenga un tipo de fracaso no tiene un orden de supremacía sobre la causa de fracaso de otra empresa, por lo tanto, la variable se clasifica como nominal. Observar que se desconoce n, el número total de empresas consideradas en el estudio.

Ejemplo 2.2.5: Identifique y clasifique la variable en estudio

En un aeropuerto se discute la posibilidad de instalar un complicado dispositivo de ayuda para aterrizajes. El dispositivo reducirá en 25 % la cantidad de accidentes por año en el aeropuerto. El promedio de los últimos años ha sido de 20 accidentes anuales.

Identificación N : Número de accidentes anuales que ocurren en un aeropuerto.

Clasificación Variable cuantitativa discreta.

Para contabilizar los accidentes por año en el aeropuerto existe el ábaco (Figura 2.3) lo que permite clasificar a la variable "Número de ..." como cuantitativa.

Argumentando de manera similar al Ejemplo 2.2.3 se concluye que la variable se clasifica como discreta, pues entre dos medidas cualesquiera del número de accidentes **no siempre** será posible obtener otra medición.

Ejemplo 2.2.6: Identifique y clasifique la variable en estudio

Los pacientes quemados que llegan a un centro de salud son rápidamente atendidos para conocer el estado de su quemadura. En el último turno se atendieron 5 pacientes con quemaduras de primer grado y 2 pacientes con quemaduras de tercer grado.

Identificación G : Grado de la quemadura de los pacientes atendidos en el centro de salud.

Clasificación Variable cualitativa ordinal.

La evaluación del tipo de quemadura la hace un especialista, por lo que no existe un instrumento que mida esto, con lo cual se trata de una variable cualitativa.

A su vez, dependiendo qué tan profundo y con qué gravedad la quemadura penetra la superficie de la piel se distinguen cuatro niveles, a saber, de primer grado (superficiales) a cuarto grado (daño hasta el hueso), permitiendo clasificar la variable como ordinal. En este caso $n = 7$, pero no se tienen los datos individuales de cada paciente.

¡Cuidado!

Al momento de subclasificar una variable cualitativa es común confundir entre nominal y ordinal. Las variables cualitativas ordinales son aquellas que permiten pasar de una categoría a otra.

En el Ejemplo 2.2.6, dependiendo de la gravedad de la quemadura, el paciente pudo ser clasificado en primer o segundo grado, u otro. Existen niveles a los que se puede escalar.

Ejemplo 2.2.7: Variable cuantitativa: identificación y clasificación

En una estación metereológica se recolectaron los datos de lluvia caída (en milímetros) de las últimas 24 horas, registrándose: 0.0, 0.0, 0.0, 0.1, 0.0, 0.3, 0.8, 0.2, 0.3, 0.0, 0.0, 0.2, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.2, 0.2, 0.1, 0.1, 0.0, 0.0, 0.0.

Identificación P : Precipitación (mm) registrada durante las últimas 24 horas.

Clasificación Variable cuantitativa continua.

La decisión de clasificar a la varible "Precipitación" como cuantitativa es debido a que existe un instrumento de medición para medir el agua caída conocido como pluviómetro cuya imagen se muestra en la Figura 2.4.

Figura 2.4: Pluviómetro

La variable es continua pues entre dos mediciones cualesquiera de agua caída siempre es posible encontrar otro valor, esto se aprecia con más claridad si, por ejemplo, en la última hora el pluviómetro está lleno hasta 0.8 y al marcar dos puntos, a saber, 0.2 y 0.3, se observa que entre ellos hay infinitas posibilidades de agua caída, pues no hay vacío entre 0.2 y 0.3.

Como la variable se denotó con P, entonces los datos se expresan mediante $p_1, p_2, \ldots, p_{24}$. En particular, $p_4 = 0.1$, $p_6 = 0.3$ y $p_7 = 0.8$, por mencionar algunos datos, siendo $n = 24$ el número total de mediciones.

¡Cuidado!

Notar que $p_1 = p_2 = p_3 = p_5 = p_{10} = p_{11} = p_{13} = p_{14} = p_{15} = p_{16} = p_{17} = p_{22} = p_{23} = p_{24} = 0.0$, son mediciones del agua caída en diferentes horas y todas son parte del estudio, es decir, no se eliminan mediciones por estar repetidas.

2.3. Ejercicios propuestos sobre identificar y clasificar variables

En este apartado se formulan variados ejercicios para practicar lo aprendido en este capítulo que consiste en identificar la variable en estudio y clasificarla correctamente. Las respuestas a estos ejercicios propuestos están en el Anexo A ubicado en la página 43 de este apuntes.

Ejercicio 2.3.1: Identifique y clasifique la variable en estudio

Una línea naviera transporta fruta fresca en distintos barcos. El siguiente es el registro de los contenedores que lleva cada barco: 87, 103, 88, 98, 105, 96, 92, 100, 97, 95, 101, 94, 110, 91, 96, 103, 92, 89, 105, 93, 95.

Ejercicio 2.3.2: Identifique y clasifique la variable en estudio

Al completar un formulario para postular a un trabajo, una de las preguntas que aparece es el nivel educativo, el cual tiene las opciones: nivel básico, medio, técnico y superior.

Ejercicio 2.3.3: Identifique y clasifique la variable en estudio

La última semana una planta procesadora de alimentos ha recibido quejas de que hay una cantidad excesiva de líquido en las latas de conserva, la cantidad de quejas diarias son: 14, 8, 15, 12, 9, 16.

Ejercicio 2.3.4: Identifique y clasifique la variable en estudio

Una muestra de 350 enfermos con hemorragia digestiva alta en un hospital arrojó los diagnósticos: úlcera duodenal (180), úlcera gástrica (42), cirrosis hepática (60), gastritis erosiva (21), esofagitis erosiva (16), yeyunitis hemorrágica (11), el resto de los enfermos no registran diagnósticos.

Ejercicio 2.3.5: Identifique y clasifique la variable en estudio

De acuerdo a un reciente estudio solicitado por el MOP, sobre el estado de las carreteras se concluyó que de todas las carreteras del país las condiciones del pavimento fueron las siguientes: pobre 10 %, mala 32 %, adecuada 22 %, buena 21 % y excelente 15 %.

Ejercicio 2.3.6: Identifique y clasifique la variable en estudio

Al efectuar una prueba de impacto Izod sobre 20 muestras de tubería PVC, la resistencia media a dicho impacto fue de 1.25 ft-lb/in.

Ejercicio 2.3.7: Identifique y clasifique la variable en estudio

En una votación de 214 colaboradores de una industria pesquera para determinar si irían a la huelga, 95 respondieron a favor, 85 en contra y el resto votó blanco o nulo.

Ejercicio 2.3.8: Identifique y clasifique la variable en estudio

En una localidad cercana a una gran ciudad se midió la intensidad solar directa, en watts/m^2*, arrojando los siguientes datos: 562.3, 869.0, 708.4, 809.2, 856.4, 755.6, 806.5, 878.7, 709.2, 768.6, 839.1, 674.4, 702.3, 809.6, 708.9*

Ejercicio 2.3.9: Identifique y clasifique la variable en estudio

En una obra ingenieril en la que se usan máquinas de petróleo emplearon un espectómetro para medir la contaminación por plomo, en ppm, registrando: 99, 100, 103, 102, 106, 106, 100, 103, 105, 102, 105, 98, 103, 102.

Ejercicio 2.3.10: Identifique y clasifique la variable en estudio

Al estudiar el diámetro de un agujero taladrado, se encontró que el diámetro requerido era de 5 mm, pero las vibraciones, el desgaste de las herramientas y otros factores producían diámetros mayores.

Ejercicio 2.3.11: Identifique y clasifique las variables del siguiente estudio

En una determinada industria, los clientes se encargan de evaluar los diseños preliminares de varios productos. En el pasado, el 95 % de los productos con mayor éxito en el mercado recibieron buenas evaluaciones, el 60 % de los productos con éxito moderado recibieron buenas evaluaciones y el 10 % de productos de escaso éxito recibieron buenas evaluaciones.

Ejercicio 2.3.12: Identifique y clasifique la variable en estudio

A un grupo de 50 informáticos se le consultó por el tipo de lenguaje en el que preferían trabajar, obteniéndose: Pascal (6), C++ (14), Visual Basic (15) y el resto en Java.

2.4. Ejercicios de autoevaluación sobre identificar y clasificar variables

En esta sección se presentan los ejercicios que miden su nivel de conocimiento de este primer capítulo. Si responde con éxito al menos al 75 % de estos ejercicios (lo que equivale a contestar 6 o más ejercicios correctos), entonces usted está facultado para pasar al siguiente capítulo, de lo contrario se le invita a repasar el capítulo actual. Las respuestas de estos ejercicios de autoevaluación están en el Anexo A ubicado en la página 45 de este apuntes.

Autoevaluación 2.4.1: Identifique y clasifique la variable en estudio

En un experimento se investigó el tiempo de ruptura, en minutos, de un fluido aislante entre electrodos a 34 kV obteniendo: 4.5, 4.7, 4.7, 5.0, 3.8, 3.6, 3.8, 5.1, 3.3, 3.8, 4.8, 4.0, 5.2, 4.3, 2.8.

Autoevaluación 2.4.2: Identifique y clasifique las variables del siguiente estudio

En la operación de grabado de un disco duro, la probabilidad de que la grabación sea incorrecta es 0.001 cuando el proceso se realiza a baja velocidad. Cuando el proceso se efectúa a alta velocidad, la probabilidad de un grabado incorrecto es 0.01, mientras que si la velocidad es normal, la probabilidad de un grabado incorrecto es 0.005

Autoevaluación 2.4.3: Identifique y clasifique la variable en estudio

De 80 postulantes para un puesto de analista de sistemas en una empresa, diariamente se entrevista a un grupo de ellos, al cabo de una semana resultó: 15, 22, 18, 12, 13.

Autoevaluación 2.4.4: Identifique y clasifique la variable en estudio

Infringiendo las disposiciones aéreas, muchas aerolíneas aceptan reservas superiores al de los cupos disponibles porque saben que algunos pasajeros anularán su reserva en el último minuto.

Autoevaluación 2.4.5: Identifique y clasifique la variable en estudio

La planificación en Educación contempla estandarizar los cargos asignados a los funcionarios de los colegios públicos y subvencionados.

Autoevaluación 2.4.6: Identifique y clasifique la variable en estudio

Después del sismo ocurrido en una pequeña localidad se realizó un estudio sobre defectos estructurales en las construcciones, obteniéndose: grietas, 50; vidrios rotos, 60; escaleras defectuosas, 8; baños inutilizables, 15; cercos en mal estado, 12 y cañerías destruidas, 3.

Autoevaluación 2.4.7: Identifique y clasifique la variable en estudio

Se analiza una marca particular de margarina dietética para determinar el nivel de ácido graso poliinsaturado (en porcentaje).

Autoevaluación 2.4.8: Identifique y clasifique la variable en estudio

En una investigación realizada por demógrafos sobre las diferenes generaciones, se encontraron las siguientes categorías: Generación perdida, Generación grandiosa, Generación silenciosa, Baby boomer, Generación X, Generación Y, Zillenial, Generación Z, Generación Alfa.

CAPÍTULO 3

ESPACIO MUESTRAL Y EVENTOS

Al realizar un **experimento**, frecuentemente se desconoce el resultado que se obtendrá, es por ello que el experimento se dice **aleatorio**, también conocido como **no determinístico**. En caso contrario, el experimento es de tipo **determinístico**. Por lo tanto, se denomina ***experimento aleatorio*** a cualquier proceso, operación o procedimiento cuyo resultado no se sabe con certeza antes de realizarlo.

De lo anterior se desprende que un experimento tiene por lo menos un resultado, lo cual significa que tiene elementos u objetos, esto conduce al concepto de **conjunto**, que es crucial para abordar el tema de probabilidades. Aquí se presenta la segunda dificultad detectada, que consiste en caracterizar correctamente los elementos de un conjunto, que es el objetivo de este capítulo.

Se inicia este nuevo trayecto abordando dos conceptos fundamentales que se relacionan con los conjuntos: espacio muestral y evento (o suceso).

3.1. Definición de espacio muestral y evento

Espacio muestral

Es el **conjunto** de todos los resultados posibles de un experimento. Generalmente se denota con Ω, también es posible encontrarlo descrito por S.

Si Ω tiene un número finito de elementos, o bien, tiene un número *infinito numerable* (que tiene una biyección con los números naturales) de elementos, se dice que Ω es **discreto**. En cambio, si Ω contiene todos los puntos de algún intervalo de la recta real, entonces se dice que Ω es **continuo**.

Ejemplo 3.1.1: Caracterización (descripción) y clasificación del espacio muestral

Considere el experimento de analizar un cilindro de aire para detectar la presencia de una molécula contaminante.

Caracterización: $\Omega = \{\text{presencia}, \text{ausencia}\}$.

Clasificación: Ω es discreto.

El experimento involucrado en este ejemplo es aleatorio, pues, a priori, no se sabe si el cilindro contiene o no la molécula contaminante, solo se sabrá una vez que se realice el experimento. Por otro lado, como el espacio muestral tiene dos resultados posibles (un número finito), entonces se clasifica como discreto.

Evento o suceso

Es un subconjunto cualquiera del espacio muestral.

Como en teoría de conjuntos, todo conjunto es subconjunto de sí mismo y el conjunto vacío $\emptyset$ es un subconjunto de cualquier conjunto, entonces Ω es un evento (o suceso), denominado **suceso seguro**, pues al efectuar un experimento siempre "algo" ocurre. A su vez, el conjunto vacío también es un evento (o suceso), llamado **suceso imposible**, pues al realizar un experimento no es posible que "nada" ocurra. Por otro lado, en todo experimento aleatorio, el espacio muestral Ω juega el papel de conjunto universo.

Ejemplo 3.1.2: Caracterice (defina) el/los evento/s involucrado/s

Al analizar muestras de agua de mar para detectar la presencia de los metales pesados plomo y mercurio, se encuentra que el 38 % de las muestras tomadas en la desembocadura de un río en cuyas orillas se localizan plantas industriales tienen niveles tóxicos de plomo o de mercurio y que el 32 % tiene nivel tóxico de plomo. Además, el 10 % contiene un nivel alto de ambos metales.

$\Omega = \{x \;/\; x \text{ es una muestra de agua tomada en la desembocadura de un río}\}$.

$A = \{x \in \Omega \;/\; x \text{ tiene nivel tóxico de mercurio}\}$.

$B = \{x \in \Omega \;/\; x \text{ tiene nivel tóxico de plomo}\}$.

No olvidar que ...

- Ω es un evento (o suceso).
- De acuerdo a la teoría de conjuntos, el conjunto universo (Ω) es el único conjunto en que no se describe de dónde provienen los elementos, es por ello que simplemente se escribe $\Omega = \{x \;/\; x \ldots\}$. En cambio, en la caracterización de los otros eventos, se debe mencionar de dónde provienen los elementos, esto es, $A = \{x \in \Omega \;/\; x \ldots\}$.
- La forma como están definidos los eventos del Ejemplo 3.1.2 es por **comprensión**, pues se menciona una característica de los objetos. También se pueden caracterizar los eventos por **extensión**, que consiste en nombrar cada elemento por separado. Se debe elegir la forma más apropiada de acuerdo a la situación en estudio.

Recordar que ...

- Al momento de caracterizar un conjunto son fundamentales los conectores lógicos "o" e "y", que en simbología matemática se escriben $\vee$ (disyunción) y $\wedge$ (conjunción), respectivamente, una notación muy apropiada, pues su forma se relaciona con $\cup$ (unión) e $\cap$ (intersección). Esto ayuda a no definir más eventos de los que son indispensables. Caraterice sólo aquellos eventos que midan características diferentes.
- Otro conector lógico es la "negación", una forma de denotarlo es $\sim$, que se usa para describir conjuntos complementarios, en consecuencia daría otro subproducto y no habría que considerarlo como un nuevo evento.
- Se acostumbra empezar caracterizando el espacio muestral, que actúa como conjunto universo y es el evento principal. Enseguida, se definen los demás eventos.

¡Cuidado!

Comúnmente se describen más eventos de los necesarios solo por el hecho que en el enunciado aparecen cifras (en el caso del Ejemplo 3.1.2, hay porcentajes) y es tentador conectarlos con eventos.

En el Ejemplo 3.1.2, además de los eventos ya definidos, se tiende a considerar el conjunto $\{x \in \Omega \ / \ x$ contiene ambos metales$\}$. Sin embargo, una lectura más detallada, lleva a analizar la palabra "ambos", que en lenguaje matemático se relaciona con el conector lógico "y", por lo tanto, se desprende que es un subproducto de los eventos ya descritos y estaría demás incluirlo.

3.2. Ejercicios resueltos sobre caracterizar eventos

El propósito de esta sección es desarrollar diferentes tipos de ejemplos que ayuden a definir apropiadamente los eventos involucrados en los experimentos a estudiar.

Ejemplo 3.2.1: Caracterice (defina) el/los evento/s involucrado/s

Al inspeccionar una obra vial, el laboratorio de control de calidad cuenta con 15 muestras de hormigón de las cuales tres no cumplen los estándares de calidad. Suponga que elige una muestra al azar.

$\Omega = \{x \ / \ x$ es una de las muestras de hormigón inspeccionadas$\}$.

$N = \{x \in \Omega \ / \ x$ no cumple con los estándares de calidad$\}$.

Del enunciado se aprecia solo una característica a considerar "no cumplir los estándares de calidad", la cual da origen al evento descrito. Las muestras que "cumplen con los estándares de calidad" no se consideran como otro evento, pues se desprende del anterior.

Es necesario recalcar que se debe elegir solo una de las dos maneras de formular el evento, esto es, la forma como se describió o usando el complemento, la elección depende del número de preguntas asociadas con una u otra opción.

Ejemplo 3.2.2: Caracterice (defina) el/los evento/s involucrado/s

Al entrevistar un grupo de ingenieros para desarrollar un innovador proyecto, se encontró que el 10 % de ellos no sabían usar AutoCad ni Matlab y el 65 % sabía usar AutoCad. Además, el 10 % sabía usar ambos softwares. Suponga que se elige un entrevistado al azar.

$\Omega = \{x \;/\; x$ es uno de los ingenieros entrevistados$\}$.

$A = \{x \in \Omega \;/\; x$ sabía usar AutoCad$\}$.

$M = \{x \in \Omega \;/\; x$ sabía usar Matlab$\}$.

Se mencionan dos softwares por los cuales se les consulta a los entrevistados, a saber, "AutoCad" y "Matlab", posibilitando enunciar los dos eventos definidos. En forma análoga al Ejemplo 3.2.1, los eventos podrían haberse definido usando la negación, esto es, "no sabía usar AutoCad" y "no sabía usar Matlab", o bien, una combinación entre ellas, la elección a usar dependerá de cuál es la tendencia de las preguntas asociadas.

Ejemplo 3.2.3: Caracterice (defina) el/los evento/s involucrado/s

Falla el 1 % de los conectores eléctricos que se mantienen secos durante el periodo de garantía. Si el conector se humedece, entonces falla el 5 % de los conectores durante el periodo de garantía. A su vez, el 90 % de los conectores se mantienen secos.

$\Omega = \{x \;/\; x$ es uno de los conectores eléctricos durante su periodo de garantía$\}$.

$F = \{x \in \Omega \;/\; x$ falla$\}$.

$S = \{x \in \Omega \;/\; x$ se mantiene seco$\}$.

Hay dos características que se observan en los conectores eléctricos durante su periodo de garantía: "fallan" y "se mantienen secos", lo que permite caracterizar los eventos F y S, respectivamente.

También se presenta la posibilidad de conectores eléctricos húmedos, pero no se considera como otro evento, pues es el complemento del evento S, que se puede describir usando el conector lógico de negación. Además, se tienen conectores eléctricos que fallan estando secos o estando húmedos, dando la falsa idea de considerarlos como otros eventos, pero estos serían una mezcla de los dos eventos ya considerados.

Ejemplo 3.2.4: Caracterice (defina) el/los evento/s involucrado/s

En un estudio de aguas localizadas en las proximidades de centrales eléctricas y de otras plantas industriales que vierten sus desagües en el hidrosistema, se concluyó que el 5 % de las muestras presentaron signos de contaminación química y térmica, el 40 % de contaminación química y el 35 % de contaminación térmica.

$\Omega = \{x \;/\; x$ es una de las muestras de agua vertidas en el hidrosistema$\}$.

$Q = \{x \in \Omega \;/\; x$ mostró signos de contaminación química$\}$.

$T = \{x \in \Omega \;/\; x$ mostró signos de contaminación térmica$\}$.

En este estudio de muestras de agua se destacan dos características: "contaminación química" y “contaminación térmica”, que son las que originan los eventos descritos. No considerar como un nuevo evento a las muestras que “presentaron signos de contaminación química **y** térmica”, debido a que el conector lógico “y” está generando un subproducto de los eventos ya definidos.

Ejemplo 3.2.5: Caracterice (defina) el/los evento/s involucrado/s

Al entrevistar un grupo de inversionistas, se encontró que el 20 % de ellos no compraban acciones tipo A ni tipo B, el 45 % compraba tipo A y el 5 % compraba de ambos tipos. Suponga que se elige al azar uno de estos entrevistados.

$\Omega = \{x \ / \ x$ es uno de los inversionistas entrevistados$\}$.

$I_k = \{x \in \Omega \ / \ x$ compraba acciones tipo $k\}$, donde $k = A, B$.

En la situación planteada, son dos los tipos distintos de acciones por los cuales se consulta a los inversionistas, esto lleva a los eventos:

$$A = \{x \in \Omega \ / \ x \text{ compraba acciones tipo A}\} \quad \text{y} \quad B = \{x \in \Omega \ / \ x \text{ compraba acciones tipo B}\},$$

que comúnmente se caracterizan abusando del lenguaje, ya que las letras A y B se emplean tanto para definir al evento (que son los inversionistas) como para distinguir el tipo de acción comprada. En cambio, al describir los eventos como I_A e I_B, contempla por separado el tipo de acción comprada de los inversionistas, pues k toma los valores A o B que se refiere directamente al tipo de acción comprada y la letra I tiene relación con los Inversionistas, además, con una sola caracterización se tiene a los dos eventos.

Ejemplo 3.2.6: Caracterice (defina) el/los evento/s involucrado/s

Las ocho cavidades de una máquina de moldeo por inyección producen conectores plásticos que caen en una banda de transporte común. Suponga que se toma una muestra de cinco conectores.

Ω : “Quintetos de conectores plásticos, producidos por cualquiera de las 8 cavidades”.

C_{ij} : “Conector plástico i de la muestra, producido por la cavidad j”,
donde $i = 1, \ldots, 5$ y $j = 1, \ldots, 8$.

El experimento consiste en **tomar una muestra de cinco conectores** (quinteto), que es la parte principal a tener en cuenta para construir los eventos. También es necesario tener presente que cada uno de esos conectores puede provenir de cualquiera de las 8 cavidades de la máquina.

Aquí se presenta una situación más compleja que las anteriores, pues hay que enlazar las **cavidades** de la máquina de moldeo (que son 8) y los **conectores** con la posición que ocupan en la **muestra** (que son 5). Estas razones conducen a caracterizar los eventos de una manera distinta a la empleada hasta ahora y con ello ampliar la forma de definir los eventos, la cual es muy utilizada en probabilidades.

Otra forma de caracterizar el espacio muestral, usando la forma empleada anteriormente es:

$$\Omega = \{(x_1, \ldots, x_5) \ / \ x_i \text{ es un conector producido en cualquiera de las 8 cavidades}, \ i = 1, \ldots, 5\}.$$

3.3. Ejercicios propuestos sobre caracterizar eventos

Ahora se presentan varios experimentos para que practique lo aprendido en este capítulo. Las respuestas de estos ejercicios propuestos están en el Anexo B ubicado en la página 47 de este apuntes.

Ejercicio 3.3.1: Caracterice (defina) el/los evento/s involucrado/s

Un conjunto electrónico consta de dos subsistemas. A partir de una serie de pruebas previas se encontró que: el primer subsistema falla el 20 % de las veces, ambos fallan el 15 % de las veces y falla sólo el segundo subsistema un 15 % de las veces.

Ejercicio 3.3.2: Caracterice (defina) el/los evento/s involucrado/s

Durante una inspección, cuatro válvulas se eligen al azar y sin reemplazo desde una caja que contiene 15, de las cuales 5 son defectuosas.

Ejercicio 3.3.3: Caracterice (defina) el/los evento/s involucrado/s

Las máquinas M_1, M_2 y M_3 se emplean para fabricar en serie un determinado producto. Se tiene información que M_1 fabrica un 1 % de artículos defectuosos, M_2 el 2 % y M_3 un 3 %. De los artículos fabricados, el 20 % lo son por M_1, el 30 % por M_2 y el 50 % por M_3.

Ejercicio 3.3.4: Caracterice (defina) el/los evento/s involucrado/s

Si hay un aumento en las inversiones de capital el siguiente año, hay un 90 % de posibilidad que aumente el precio del acero estructural. Si no hay aumentos en esa clase de inversiones, la posibilidad de que aumente el precio del acero estructural es 40 %. En forma global, existe un 60 % de posibilidad que aumenten las inversiones de capital el siguiente año.

Ejercicio 3.3.5: Caracterice (defina) el/los evento/s involucrado/s

En cierto aeropuerto, los viajeros que usan aerolíneas importantes es el triple de los que usan aviones privados y los que viajan en aviones comerciales que no pertenecen a las aerolíneas importantes son el doble de los que emplean aviones privados. De las personas que usan aerolíneas importantes, el 50 % viaja por negocios, mientras que el 60 % de los pasajeros de los aviones privados y el 90 % de los que usan otras aeronaves comerciales, también viaja por negocios.

Ejercicio 3.3.6: Caracterice (defina) el/los evento/s involucrado/s

En un estudio de mercado, se aplicó una encuesta para conocer el endeudamiento de los habitantes de una determinada localidad. Los resultados arrojaron que el 5 % tenía deudas en bancos y financieras, el 40 % tenía deudas en bancos y el 35 % tenía deudas en financieras.

Ejercicio 3.3.7: Caracterice (defina) el/los evento/s involucrado/s

Un mecanismo puede ponerse en sólo una de 4 posiciones y un sistema tiene 8 de tales mecanismos.

Ejercicio 3.3.8: Caracterice (defina) el/los evento/s involucrado/s

Un sistema de propulsión está formado por un motor y dos calderas. El 75 % de las veces funciona el motor y al menos una caldera. El motor y la primera caldera funcionan el 40 % de las veces, en cambio el motor y la segunda caldera funcionan el 50 % de las veces.

Ejercicio 3.3.9: Caracterice (defina) el/los evento/s involucrado/s

Al entrevistar a 60 estudiantes de Ingeniería sobre sus preferencias por Álgebra, Cálculo y Química, se encontró que: a 8 no le agradaban esas materias, 20 optaron por Álgebra, 36 por Cálculo y 12 por Química. Además, 6 preferían Álgebra y Cálculo, 9 Cálculo y Química, y 5 Álgebra y Química.

Ejercicio 3.3.10: Caracterice (defina) el/los evento/s involucrado/s

En una planta procesadora de alimentos se realizó un control de calidad a las cerezas al jugo, de las latas muestreadas: 90 % cumplían las especificaciones, 4 % tenían exceso de azúcar, al 5 % les faltaba líquido, 7 % tenían magulladuras. Además, el 1 % tenían exceso de azúcar y falta de líquido, el 2 % tenían exceso de azúcar y magulladuras y 3 % tenían magulladuras y falta de líquido.

Ejercicio 3.3.11: Caracterice (defina) el/los evento/s involucrado/s

Se estima que en cierta población el 55 % padece de obesidad, el 20 % es hipertensa y el 60 % es obesa o hipertensa. También se sabe que en esta población el 20 % pertenece al grupo de sangre tipo A y el 60 % pertenece al grupo etario adulto.

Ejercicio 3.3.12: Caracterice (defina) el/los evento/s involucrado/s

Los compradores de volúmenes grandes de mercancías utilizan con frecuencia esquemas de muestreo de inspección para juzgar la calidad de las mercancías que llegan. Los lotes (abastecimientos) de mercancía son rechazados o aceptados sobre la base de los resultados obtenidos al inspeccionar algunos artículos seleccionados del lote. Suponga que un inspector ha aceptado el 98 % de los lotes que son de calidad “buena” y ha rechazado incorrectamente el 2 % de lotes que eran de calidad “buena”. Además, se sabe que el inspector acepta el 94 % de todos los lotes y que sólo el 5 % de los lotes son de calidad “mala”.

Ejercicio 3.3.13: Caracterice (defina) el/los evento/s involucrado/s

El ARN, modelo de la síntesis proteínica, es un código y está formado por una cadena de tres nucleótidos, elegidos entre: Adenina (A), Citosina (C), Guanina (G) y Uracilo (U), no necesariamente distintos. Suponga que están interesados en los códigos que tienen al menos dos nucleótidos idénticos. También se desea investigar los códigos que terminan en G y no se repiten.

Ejercicio 3.3.14: Caracterice (defina) el/los evento/s involucrado/s

Un circuito eléctrico opera con seis interruptores en serie. Suponga que existe un 2 % de posibilidad que falle uno cualquiera de los interruptores.

Ejercicio 3.3.15: Caracterice (defina) el/los evento/s involucrado/s

En un lote de 30 dados hay 4 defectuosos y se toma una muestra de 5 dados, sin reemplazo. Suponga que se estudia la posibilidad que en la muestra hayan al menos dos dados defectuosos.

Ejercicio 3.3.16: Caracterice (defina) el/los evento/s involucrado/s

En la prueba de la tarjeta de un circuito impreso en la que se utiliza un patrón de prueba aleatorio, un arreglo de 7 bits tiene la misma probabilidad de ser uno o cero.

3.4. Ejercicios de autoevaluación sobre caracterizar eventos

El objetivo de esta sección es medir su nivel de conocimiento de este segundo capítulo. Respondiendo con éxito al menos al 75 % de los ejercicios que siguen (contestar 6 o más ejercicios correctamente), estará facultado para enfrentar el próximo capítulo, en caso contrario es recomendable que repase este capítulo. Las respuestas de estos ejercicios las encuentra en el Anexo B que está en la página 49 de este apuntes.

Autoevaluación 3.4.1: Caracterice (defina) el/los evento/s involucrado/s

En un estudio sobre las moscas de la fruta (Drosophila Melanogaster) se encontró que el 75 % de la población tenían mutación de ala y el 60 % tenían mutación de ojo.

Autoevaluación 3.4.2: Caracterice (defina) el/los evento/s involucrado/s

De los 500 funcionarios que trabajan en una empresa, 250 participan en un plan de reparto de utilidades de la compañía, 300 tienen una cobertura de gastos médicos mayores y 200 funcionarios participan en ambos programas.

Autoevaluación 3.4.3: Caracterice (defina) el/los evento/s involucrado/s

Se estima que el departamento Productos Marinos posee un 30 % de posibilidades de tener margen de utilidad en este año fiscal, la posibilidad de que los departamentos Productos Marinos y Equipos de Oficina tengan margen de utilidad es 6 % y la posibilidad de que ninguno de estos departamentos tenga margen de utilidad es del 56 %.

Autoevaluación 3.4.4: Caracterice (defina) el/los evento/s involucrado/s

Una tarjeta de circuito en serie, tiene 12 posiciones en las que puede colocarse un chip y se colocan 4 chips distintos sobre la tarjeta. Considere el caso en que los chips se colocan consecutivos.

Autoevaluación 3.4.5: Caracterice (defina) el/los evento/s involucrado/s

Una caja de fusibles contiene 20 unidades, de los cuales 5 son defectuosos. Suponga que tres de estos fusibles son tomados al azar, en sucesión y sin reemplazo.

Autoevaluación 3.4.6: Caracterice (defina) el/los evento/s involucrado/s

Se usa un interruptor para cortar el flujo cuando éste alcanza un cierto nivel de profundidad en un estanque. La confiabilidad del interruptor (que trabaje cuando debe) es del 90 %. Un segundo tipo de interruptor es puesto en paralelo y su confiabilidad es del 70 %.

Autoevaluación 3.4.7: Caracterice (defina) el/los evento/s involucrado/s

Considerando la posibilidad de descubrir petróleo, una compañía ha clasificado las formaciones geológicas en dos tipos. Existe un 20 % de posibilidad de que sea tipo I, un 60 % de que se descubra petróleo y un 70 % de descubrir petróleo si es una formación geológica tipo II.

Autoevaluación 3.4.8: Caracterice (defina) el/los evento/s involucrado/s

Suponga que dos refrigeradores defectuosos han sido incluidos en un embarque de seis refrigeradores. El comprador comienza a probar los refrigeradores de uno a la vez. Considere la situación en que el último refrigerador defectuoso se encuentre en la cuarta prueba.

CAPÍTULO 4

VARIABLES ALEATORIAS

En la actualidad, las ramas de la ciencia, casi en su totalidad, están relacionadas con mediciones numéricas cuyos resultados, de alguna forma, están afectados por situaciones aleatorias. De hecho el método científico se basa en la evidencia observable, empírica y medible, describiendo (resumiendo, traduciendo) los resultados de un experimento en números.

Así, cada resultado de un experimento se puede asociar (conectar) con un número que se puede describir por una regla de asociación. Por ejemplo, en la pandemia por COVID-19, una preocupación diaria era conocer el número de personas que se contagiaban en una determinada localidad. Es sabido que una persona cualquiera se puede contagiar o no (eventos), pero se desconoce cuál de los dos eventos ocurrirá. Éstas son las razones por lo que a tal regla de asociación se le conozca como **variable aleatoria**, específicamente, se llama variable, pues el valor no es fijo y se denomina aleatoria ya que se desconoce si una determinada persona se contagiará o no. Una definición formal se presenta en la siguiente sección.

4.1. El concepto de variable aleatoria

Variable aleatoria

Es una función real X que asigna un número a cada resultado del espacio muestral generado por un experimento aleatorio, es decir, $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, \omega \mapsto X(\omega) = x$.

La notación es la misma usada en el capítulo 2, las variables aleatorias se denotan con letras mayúsculas $X, Y, Z, \ldots$ y con letras minúsculas $x, y, z, \ldots$ sus respectivos valores.

Vinculado a cada variable aleatoria X está el conjunto de sus posibles valores, que recibe el nombre de **recorrido** de X, descrito y denotado por $R_X = \{x \in \mathbb{R} \ / \ \exists \ \omega \in \Omega : x = X(\omega)\}$.

Sobre un espacio muestral se puede definir más de una variable aleatoria, la cual será **discreta** si su recorrido es un conjunto finito o infinito numerable, o **continua** si su recorrido es un intervalo de $\mathbb{R}$.

Tener presente que ...

en este capítulo sólo se trabajará con variables cuantitativas, que son medibles, es por ello que se omitirá la palabra "cuantitativa". En el capítulo 2, que se trabajaba con variables cualitativas y cuantitativas era necesario explicitar la distinción.

A continuación se presentan dos ejemplos para afianzar los conceptos recién definidos.

Ejemplo 4.1.1: Variable aleatoria: identificación, recorrido y clasificación

Un operador cuenta los artículos recibidos que no cumplen con la norma ISO exigida.

Identificación X : Número de artículos que no cumplen con la norma ISO exigida.

Recorrido $R_X = \{0, 1, \ldots, n\}$, donde n es el número total de artículos recibidos.

Clasificación Variable aleatoria discreta.

Ejemplo 4.1.2: Variable aleatoria: identificación, recorrido y clasificación

Un laboratorista mide el contenido de humedad (en %) de cada muestra de asfalto.

Identificación X : Contenido de humedad (en %) de una muestra de asfalto.

Recorrido $R_X = \{x \in \mathbb{R} \ / \ 0 < x < 100\}$.

Clasificación Variable aleatoria continua.

Para utilizar la potencialidad que tienen las variables aleatorias es necesario estudiar el concepto de probabilidad, que se detalla en la siguiente sección.

4.2. Probabilidades

Al efectuar un experimento es necesario "medir" (en algún sentido) los eventos que ocurren, para ello se define la estructura que tiene esa colección de conjuntos (eventos) que se miden.

$\sigma-$álgebra

Es una colección no vacía $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{P}(\Omega)$ que verifica:

a) $\Omega \in \mathscr{A}$.

b) Si $A \in \mathscr{A}$, entonces $A^c \in \mathscr{A}$.

c) Si $A_1, A_2, A_3, \ldots \in \mathcal{A}$, entonces $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{A}$.

Donde $\mathscr{P}(\Omega)$ es el **conjunto de las partes de** Ω, esto es, es el conjunto que contiene a Ω, a $\emptyset$ y a todos los subconjuntos que se desprendan de Ω.

Para "medir" los eventos se usa la **función probabilidad**, definida a continuación.

Probabilidad

Es una función real $P : \mathscr{A} \longrightarrow \mathbb{R}, A \mapsto P(A)$, que satisface los siguientes Axiomas de Kolmogorov:

Axioma 1. $P(\Omega) = 1$.

Axioma 2. $P(A) \geq 0, \forall A \in \mathscr{A}$.

Axioma 3. $P(\cup_k A_k) = \sum_k P(A_k), \forall A_i, A_j \in \mathscr{A}$ tales que $A_i \cap A_j = \emptyset$, para $i \neq j$.

Donde $\mathscr{A}$ es la menor clase de subconjuntos de Ω que constituye una $\sigma-$álgebra. Así, la terna ordenada $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ genera un **espacio de probabilidad** asociado a un experimento aleatorio.

Como el espacio muestral Ω juega el papel de conjunto universo, entonces todos los complementos son tomados con respecto a Ω, deduciéndose los siguientes resultados:

Teorema 1.

Si A y B son eventos arbitrarios de Ω, entonces

1.1 $P(\emptyset) = 0$.

1.2 $P(A^c) = 1 - P(A)$.

1.3 Si $A \subseteq B$, entonces $P(A) \leq P(B)$ y $P(B - A) = P(B) - P(A)$.

1.4 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Observaciones

- De acuerdo al Axioma 2 y Teorema 1.3, se obtiene que $0 \leq P(A) \leq 1$, pues $A \subseteq \Omega$.
- El Teorema 1.4 se puede extender a una cantidad finita de eventos, en particular, si A, B y C son eventos arbitrarios de Ω, entonces

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C).$$

Ejemplo 4.2.1: Cálculo de probabilidades

Refiérase al Ejemplo 3.1.2 y suponga que se elige una muestra al azar, ¿cuál es la probabilidad de que la muestra contenga: *a*) un alto nivel de mercurio? *b*) sólo plomo?

Considerando los eventos ya definidos en el Ejemplo 3.1.2 y los datos entregados, resulta

$P(A \cup B) = 0.38$, $P(B) = 0.32$ y $P(A \cap B) = 0.10$

Para *a*): del Teorema 1.4 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.38 \implies P(A) = 0.16$

Para *b*): del Teorema 1.3 $P(B - A \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = 0.22$

Notar que "sólo plomo" excluye todas las demás opciones, lo cual significa considerar plomo y no mercurio, lo que en notación de conjuntos se escribe $B \cap A^c$, o bien, $B - A \cap B$. Además, observar que se usa el Teorema 1.3 debido a que $A \cap B \subseteq B$.

¡Cuidado!

No confundir 5 % con 0.05, recordar que % es un símbolo matemático que **representa** una cantidad dada como fracción en 100 partes iguales.

Las probabilidades son números en el intervalo $[0, 1]$, por lo tanto, si el evento A tiene una posibilidad de ocurrencia del 5 %, entonces se debe escribir $P(A) = 0.05$

Al trabajar con espacios muestrales finitos, es muy útil el resultado siguiente.

Regla de Laplace

En el caso de que todos los resultados de un experimento aleatorio sean **equiprobables** (que cada evento elemental tenga la misma probabilidad de ocurrir), Laplace definió la probabilidad de un evento A como el cociente entre el número de resultados favorables a que ocurra el evento A en el experimento y el número de resultados posibles del experimento. $P(A) = \frac{\text{número de elementos de } A}{\text{número de elementos de } \Omega}$.

4.2.1. Probabilidad condicional

En varias ocasiones se requiere averiguar la probabilidad de ocurrencia de un evento en base a que ya ocurrió otro evento. Es decir, se satisface una **condición**, dando origen al siguiente concepto.

Probabilidad condicional

Es la posibilidad de que ocurra un evento A como consecuencia de que haya tenido lugar el evento B y si $P(B) > 0$, entonces la probabilidad condicional de A dado B es

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \qquad \text{o bien} \qquad P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Observaciones

- Para identificar la condición es clave el conector lógico “si . . . , entonces . . . ”.
- La **condición** es lo que se escribe después de “$|$”, o bien, después de “$/$”.
- Notar que las probabilidades condicionales satisfacen los axiomas de probabilidad.

Ejemplo 4.2.2: Cálculo de probabilidades

Considere el Ejemplo 3.2.4 y calcule la probabilidad de que un arroyo que muestra:

a) contaminación térmica presente también signos de contaminación química,

b) contaminación química no presente signos de contaminación térmica.

En base a los datos entregados y eventos ya definidos en el Ejemplo 3.2.4, se logra

$P(Q \cap T) = 0.05$, $P(Q) = 0.40$ y $P(T) = 0.35$

Para *a*): $P(Q|T) = \frac{P(Q \cap T)}{P(T)} = \frac{1}{7}$

Para *b*): $P(T^c|Q) = 1 - P(T|Q) = 1 - \frac{P(Q \cap T)}{P(Q)} = 0.875$

Es recomendable que al calcular una probabilidad se deje expresada en su número exacto.

¡Evitar aproximar! Es por ello que en respuesta a la pregunta del ítem a) se escribió $\frac{1}{7}$, de lo contrario se debería haber escrito con sus 15 decimales ya que una cantidad menor de decimales obligaría a un redondeo.

El mismo tratamiento se aplica al ítem b), dejar la respuesta como número exacto, esta vez en decimales, pues tiene simplemente tres decimales. En otras situaciones emplear la forma más conveniente.

¡Cuidado!

No confundir probabilidad condicional con probabilidad de intersección de eventos, como ocurre en el Ejemplo 4.2.2, pues al responder el ítem a), se tiende a calcular $P(T \cap Q)$, confundiendo la palabra "también" con el conector lógico "y". Tener siempre presente que los conectores son clave.

Además de lo anterior, observar que la frase "un arroyo que muestra contaminación térmica" es un hecho que está ocurriendo o que ocurrió, lo que da origen a la condición.

Regla del producto o Ley multiplicativa de probabilidades

Sean $A_1, \ldots, A_k$ eventos, donde A_i describe el resultado de la $i-$ésima etapa, $i = 1, \ldots, k$, entonces

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdots P(A_k|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{k-1}).$$

Observación

En la práctica es más común que pregunten por la probabilidad de la intersección de algunos eventos puesto que la probabilidad condicional aparece como dato.

4.2.2. Independencia de eventos

Independencia

Dos eventos son independientes si la ocurrencia o no ocurrencia de uno de ellos no tiene efecto alguno sobre la ocurrencia o no ocurrencia del otro. Formalmente, dos eventos, A y B son ***estadísticamentre independientes*** si

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Observaciones

- En numerosos casos se puede determinar, sobre una base puramente intuitiva o de conocimiento en el área, si dos eventos son independientes. Por ejemplo, la forma de una fruta no tiene efecto alguno sobre la concentración de azúcar o sobre la acidez que posee dicha fruta.
- Una colección de eventos $A_1, \ldots, A_n$ son ***mutuamente independientes*** si para cualquier subcolección $A_{k_1}, \ldots, A_{k_j}$, se tiene $P(\cap_{i=1}^{j} A_{k_i}) = \prod_{i=1}^{j} A_{k_i}$.

Teorema 2.

Si A y B son eventos independientes, entonces

2.1 A y B^c son independientes, es decir, $P(A \cap B^c) = P(A)P(B^c)$.

2.2 A^c y B son independientes, es decir, $P(A^c \cap B) = P(A^c)P(B)$.

2.3 A^c y B^c son independientes, es decir, $P(A^c \cap B^c) = P(A^c)P(B^c)$.

Ejemplo 4.2.3: Cálculo de probabilidades

Para el Ejemplo 3.2.4, averigüe si los eventos "mostrar contaminación térmica" y "mostrar contaminación química" son independientes.

Como $P(Q)P(T) = 0.14 \neq 0.05 = P(Q \cap T)$, entonces los eventos no son independientes.

Ejemplo 4.2.4: Cálculo de probabilidades

Remítase al Ejercicio 3.3.14 y calcule la probabilidad de falla del circuito.

De acuerdo a los datos y eventos ya descritos, resulta $P(I_k^c) = 0.98$, $k = 1, \ldots, 6$.
Sea F : "Funciona el circuito", luego $P(F) = P(\cap_{k=1}^{6} I_k^c) = \prod_{k=1}^{6} P(I_k^c) = 0.98^6$.
Por lo tanto, $P(F^c) = 1 - P(F) = 1 - 0.98^6$.

La clave en este ejemplo fue la independencia entre los interruptores, pues el hecho que un interruptor falle no implica que otro interruptor también falle o funcione.

Por otro lado, un circuito en serie falla si uno cualquiera de los interruptores falla, lo que conduce a trabajar con muchas uniones, a saber, se deberían considerar los eventos:

a) "falla un interruptor y los otros no", aquí se tienen 6 eventos, uno por cada interruptor.

b) "fallan dos interruptores y los otros no", que suman $\binom{6}{2} = 15$ eventos.

c) "fallan tres interruptores y los otros no", resultando $\binom{6}{3} = 20$ eventos.

d) "fallan cuatro interruptores y los otros no", que contabilizan $\binom{6}{4} = 15$ eventos.

e) "fallan cinco interruptores y los otros no", obteniendo $\binom{6}{5} = 6$ eventos.

f) "fallan todos los interruptores", que es 1 evento.

Lo que implica calcular la unión de todos estos eventos y por la extensión del Teorema 1.4, habría que calcular demasiadas probabilidades, por ello se debe buscar otro procedimiento. Una alternativa es trabajar con los complementos, esto es, calcular la probabilidad que el circuito funcione, lo que se consigue cuando funcionan todos los interruptores, para lo cual se debe calcular la probabilidad de una intersección de eventos y como hay independencia, entonces se utiliza el Teorema 2.

Además, no se aproximó el resultado y se dejó expresado en su valor exacto. También, se destaca el hecho que se usó una **técnica de conteo** llamada **combinatoria**, definida a continuación junto a otras.

Métodos de enumeración o técnicas de conteo

Son mecanismos que ayudan a contar, de forma rápida, el número de elementos que tiene un evento finito.

a) **Permutación** es un arreglo o selección ***ordenada*** con todos o con una parte de un conjunto de objetos. Al tomar r objetos de entre n **objetos distinguibles**, resulta $P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$, $r \leq n$.

b) **Permutación con objetos indistinguibles**. Si se consta de n objetos, de los cuales n_i son idénticos y del tipo i, para $i = 1, 2, \ldots, k$, entonces $P_{n_1,\ldots,n_k}^n = \frac{n!}{n_1!\ldots n_k!}$, $n = n_1 + \cdots + n_k$.

c) **Combinación** es un arreglo o selección con todos o con una parte de un conjunto de objetos, donde **el orden no es importante**. Al tomar r objetos de entre n, se obtiene $C_r^n = \binom{n}{r}$, $r \leq n$.

Observación

Se dice que dos objetos son **distinguibles** si al cambiarlos de lugar se aprecia claramente el cambio, por ejemplo, las letras A y B, o bien, los números 3 y 7.
Si no es posible detectar el cambio, entonces los objetos se dicen **indistinguibles**, como sucede con las letras A y A, o bien, con los objetos ♣ y ♣.

4.2.3. Teorema de Bayes

El concepto de partición, dado enseguida, es la base en que se sustentan dos resultados muy utilizados en probabilidades, los cuales se presentan a continuación.

Partición

Una colección $A_1, A_2, \ldots, A_k$ de subconjuntos no vacíos de un conjunto B es una **partición** de B sí y sólo si el conjunto $\{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$ satisface las siguientes condiciones:

a) $A_i \neq \emptyset$, $\forall i \in \{1, \ldots, k\}$, *b*) $A_i \cap A_j = \emptyset$, $\forall i \neq j$, $i, j \in \{1, \ldots, k\}$, *c*) $\bigcup_{i=1}^{k} A_i = B$.

Teorema 3.

Si los eventos $A_1, A_2, \ldots, A_k$ forman una partición de Ω, entonces $\forall E \subseteq \Omega$, se tiene:

3.1 **Teorema de la probabilidad total**

$$P(E) = \sum_{i=1}^{k} P(A_i)P(E|A_i).$$

3.2 **Teorema de Bayes**

$$P(A_j|E) = \frac{P(A_j)P(E|A_j)}{\sum_{i=1}^{k} P(A_i)P(E|A_i)}, \quad j = 1, \ldots, k.$$

Ejemplo 4.2.5: Cálculo de probabilidades

Basado en el Ejemplo 3.2.3 ¿qué proporción de conectores fallará durante el periodo de garantía?

Considerando los datos y eventos descritos en el Ejemplo 3.2.3, se tiene:

$P(S) = 0.90$, $P(S^c) = 0.10$, $P(F|S) = 0.01$, $P(F|S^c) = 0.05$.

Por lo tanto, $P(F) = P(S)P(F|S) + P(S^c)P(F|S^c) = 0.014$.

La respuesta es que 14 de cada 1000 conectores fallará durante el periodo de garantía.

El conector lógico condicional "Si ..., entonces ...", presente aquí, fue clave para identificar la condición, que es el evento "el conector se humedece", ubicado entre las palabras "si" y "entonces". Dicho evento está conectado con su complemento "el conector se mantiene seco", que fue el evento base que se usó.

Ejemplo 4.2.6: Cálculo de probabilidades

Considere el Ejercicio 3.3.3 y suponga que se examina una pieza.

a) Calcule la probabilidad que la pieza sea defectuosa.

b) Si la pieza es defectuosa, calcule la probabilidad que haya sido fabricada por la máquina M_1.

De acuerdo a los datos y eventos ya definidos, resulta:

$P(A_1) = 0.20$, $P(A_2) = 0.30$, $P(A_3) = 0.50$, $P(D|A_1) = 0.01$, $P(D|A_2) = 0.02$, $P(D|A_3) = 0.03$.

Para *a*): $P(D) = \sum_{i=1}^{k} P(A_i)P(D|A_i) = 0.023$.

Para *b*): $P(A_1|D) = \frac{P(A_1)P(D|A_1)}{P(D)} = \frac{2}{23}$.

La dificultad de este ejemplo estaba en identificar las probabilidades condicionales dadas en el enunciado. La frase "Se tiene información que la máquina M_1 fabrica un 1 % de artículos defectuosos", establece que el artículo fue fabricado por la máquina M_1, es decir, ocurrió dicho evento, por lo tanto es la condición.

Notar que la respuesta del literal *b*) se expresó en su valor exacto.

4.3. Variables aleatorias discretas y continuas

Al definir una variable aleatoria X, también se ha definido su recorrido, R_X, que actúa como un "nuevo espacio muestral", pues la función probabilidad actúa sobre él. A continuación se muestra que la función probabilidad, definida sobre Ω, también se puede usar para X.

Suponer que se tiene el espacio muestral $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ con una función probabilidad P y la variable aleatoria X con recorrido $R_X = \{x_1, \ldots, x_m\}$. Se puede definir una función probabilidad P_X sobre R_X como sigue. Primero observar que $X = x_i$ sí y sólo si el resultado del experimento aleatorio es un $\omega_j \in \Omega$, tal que $X(\omega_j) = x_i$. Así,

$$P_X(X = x_i) = P(\{\omega_j \in \Omega \ / \ X(\omega_j) = x_i\}). \tag{4.1}$$

Notar que el lado izquierdo de la ecuación (4.1), la función P_X es una función probabilidad ***inducida*** sobre R_X, definida en términos de la función P original. Además, P_X satisface los Axiomas de Kolmogorov y por tanto es una función probabilidad.

Ejemplo 4.3.1: Conexión entre función probabilidad P y variable aleatoria

Considere el experimento de lanzar una moneda tres veces y observar su resultado.

$\Omega = \{(x_1, x_2, x_3) \ / \ x_i = C \ \text{ o } \ x_i = S, \ i = 1, 2, 3\}$, donde C = cara, S = sello.

Una posible variable aleatoria es X : Número de caras obtenidas en los tres lanzamientos.

La tabla siguiente muestra la enumeración completa del valor de X para cada punto del espacio muestral.

ω	(C,C,C)	(C,C,S)	(C,S,C)	(S,C,C)	(C,S,S)	(S,C,S)	(S,S,C)	(S,S,S)
$X(\omega)$	3	2	2	2	1	1	1	0

El recorrido de X es $R_X = \{0, 1, 2, 3\}$ y suponiendo que cada uno de los ocho puntos en Ω tiene probabilidad $\frac{1}{8}$ (equiprobabilidad) se obtiene que al contar los resultados desplegados en la tabla anterior se ve que la función probabilidad inducida sobre R_X es

x	0	1	2	3
$P_X(X = x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Así, por ejemplo, se tiene que $P_X(X = 2) = P(\{(C,C,S), (C,S,C), (S,C,C)\}) = \frac{3}{8}$.

En la ilustración anterior, tanto Ω como R_X eran finitos y la definición de P_X fue directa. Lo mismo sucede cuando R_X es numerable. Si R_X es infinito no numerable, la función probabilidad inducida, P_X, se define como sigue. Para cualquier conjunto $A \subseteq R_X$, se tiene que

$$P_X(X \in A) = P(\{\omega \in \Omega \ / \ X(\omega) \in A\}).$$

A su vez, debido a la equivalencia en la ecuación (4.1), simplemente se escribirá $P(X = x_i)$ en lugar de $P_X(X = x_i)$.

Asociada con una variable aleatoria X hay otra función, llamada **función masa de probabilidad** (fmp) para los casos en que X es discreta, o bien, **función densidad de probabilidad** (fdp) cuando X es continua, obteniéndose el siguiente resultado.

Teorema 4.

La función $f_X(x) = P(X = x)$ es una fdp (o fmp) de una variable aleatoria X sí y sólo si

4.1 $f_X(x) \geq 0$, para toda x.

4.2 $\sum_x f_X(x) = 1$ (para fmp) o $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$ (para fdp).

Observaciones

- Si X es una variable aleatoria discreta y $A \subseteq R_X$, entonces $P(A) = \sum_{x \in A} f_X(x)$.
- Si $a \leq b$ y X es una variable aleatoria continua, entonces

$$P(a < X < b) = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x)dx.$$

Ejemplo 4.3.2: Función probabilidad

Considere el número de perforaciones que se deben hacer hasta detectar un yacimiento productivo. Existe un 0.1 % de posibilidad que en una perforación se detecte un yacimiento productivo.

a) Determine la función probabilidad asociada con el experimento.

b) Calcule la probabilidad que se deban hacer más de 50 perforaciones para detectar un yacimiento productivo.

Sea X : Número de perforaciones hechas hasta detectar un yacimiento productivo.

Luego $R_X = \{1, 2, 3, \ldots\} = \mathbb{N}$. Por lo tanto, X es una variable aleatoria discreta.

Para *a*): Para las primeras probabilidades se tiene:

$$\begin{aligned} f_X(1) &= P(X = 1) = 0.001, \\ f_X(2) &= P(X = 2) = 0.999(0.001), \\ f_X(3) &= P(X = 3) = 0.999^2(0.001), \\ &\vdots \end{aligned}$$

Así, $f_X(x) = (0.001)0.999^{x-1}$, $x \in \mathbb{N}$ es función masa de probabilidad (fmp), pues:

i) $f_X(x) \geq 0$, ya que es una función exponencial.

ii) $\displaystyle\sum_{x=1}^{\infty} (0.001)0.999^{x-1} = \frac{0.001}{1 - 0.999} = 1.$

Para *b*): $P(X > 50) = 1 - P(X \leq 50)$.

$P(X \leq 50) = 0.001(1 + 0.999 + 0.999^2 + \cdots + 0.999^{49})$

$(0.999)P(X \leq 50) = 0.001(0.999 + 0.999^2 + \cdots + 0.999^{50})$

Restando las dos últimas ecuaciones se obtiene que $P(X > 50) = 0.999^{50}$.

Para desarrollar el literal *a*) se usó independencia, puesto que se detecte o no un yacimiento productivo en una perforación no implica que en la siguiente perforación suceda lo mismo. Así, por ejemplo, $P(X = 3)$ significa que en la tercera perforación se detectó un yacimiento productivo y en las primeras dos perforaciones no.

Además, en la parte *a*) *ii*) se empleó la información que la serie era geométrica.

En *b*) se ocupó la probabilidad del complemento (Teorema 1.2) junto con el hecho que se tiene una progresión geométrica. Finalmente el resultado se dejó expresado en su valor exacto.

¡Cuidado!

No confundir variable aleatoria discreta con variable aleatoria continua. Para evitar esto, una vez identificada la variable aleatoria (se debe hacer una lectura comprensiva del enunciado), construir el recorrido R_X (con mucha precaución), pues es el que decidirá si la variable aleatoria es discreta o continua.

Recordar que . . .

- si una variable se inicia con "Número de . . . ", se trata de un caso discreto.
- se emplean **sumas finitas** o **series** para calcular probabilidades en casos discretos.

Ejemplo 4.3.3: Función probabilidad

En una empresa de procesos, el tiempo, medido en meses, que un ingeniero tarda en diseñar un algoritmo está dado por $f(x) = 10e^{-10x+C}$, para $x > 6$.

a) Determine el valor de C de modo que f sea una función probabilidad.

b) Calcule la probabilidad que un ingeniero tarde más de 189 días en diseñar un algoritmo.

Sea X : Tiempo (en meses) que un ingeniero tarda en diseñar un algoritmo.

Luego $R_X = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x > 6\}$. Por lo tanto, X es una variable aleatoria continua.

Para *a*): Puesto que f es una función exponencial natural, entonces $f(x) \geq 0$.

Para que f sea función probabilidad falta que $\int_6^\infty f(x)dx = 1$, esto es,

$$1 = \int_6^\infty 10e^{-10x+C}dx = \lim_{d\to\infty}\int_6^d 10e^{-10x+C}dx = e^{C-60}, \text{ de donde } C = 60.$$

Así, $f_X(x) = 10e^{-10(x-6)}$, $x > 6$ es función densidad de probabilidad (fdp).

Para *b*): Considerando que 1 mes tiene 30 días, entonces $P(X > 6.3) = 1 - P(X \leq 6.3)$.

Como $P(X \leq 6.3) = \int_6^{6.3} 10e^{-10(x-6)}dx = 1 - e^{-3}$, entonces $P(X > 6.3) = e^{-3}$.

Lo crucial del ejemplo fue detectar que la variable aleatoria es continua, que se desprende debido a que entre dos lecturas cualesquiera del tiempo, siempre habrán más mediciones intermedias.

Recordar que ...

se emplean **integrales** (impropias, como en Ejemplo 4.3.3) para calcular probabilidades en los casos continuos.

Ejemplo 4.3.4: Función probabilidad

Considere que la demanda semanal de autos eléctricos está dada por $f(x) = \frac{7-x}{28}$. A partir de ella construya una función probabilidad y calcule la probabilidad de solicitar más de 4 autos eléctricos.

Sea X : Número de autos eléctricos solicitados durante una semana.

Luego $R_X = \{0, 1, \ldots, 6\}$. Por lo tanto, X es una variable aleatoria discreta.

Así, $f_X(x) = \frac{7-x}{28}$, donde $x = 0, 1, \ldots, 6$ es una función masa de probabilidad, pues

i)

x	0	1	2	3	4	5	6
$f_X(x)$	$\frac{7}{28}$	$\frac{6}{28}$	$\frac{5}{28}$	$\frac{4}{28}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{2}{28}$	$\frac{1}{28}$

Por tanto, $f_X(x) \geq 0$, para $x = 0, 1, \ldots, 6$.

ii) Además, $\sum_{x=0}^{6} f_X(x) = 1$.

Concluyendo que $P(X > 4) = \frac{3}{28}$.

Se debe enfatizar que este ejercicio es un estudio de un caso discreto, pues la variable aleatoria es un conteo, se inicia con "Número de ...".

Por otra parte, es necesario precisar que considerar más de 7 autos produciría que $f_X(x) < 0$ impidiendo que la función sea una probabilidad. A su vez, la demanda semanal podría ser de 7 autos, pero $f_X(7) = 0$, no sería un aporte.

4.4. Ejercicios resueltos sobre variables aleatorias y función probabilidad

La meta de este apartado es conseguir que sea capaz de aplicar apropiadamente las herramientas del cálculo diferencial e integral, para ello se desarrollan variados ejemplos ilustrativos.

Ejemplo 4.4.1: Cálculo de probabilidades

Remítase el Ejemplo 3.2.2 y calcule la probabilidad que el entrevistado:
a) sabía usar por lo menos uno de los dos softwares, *b*) sólo sabía usar Matlab.

De acuerdo a los eventos y datos entregados en el Ejemplo 3.2.2, se tiene
$P(A^c \cap M^c) = 0.10$, $P(A) = 0.65$ y $P(A \cap M) = 0.10$
Para *a*): $P(A \cup M) = 1 - P((A \cup M)^c) = 0.90$
Para *b*): $P(M - A \cap M) = P(M) - P(A \cap M) = 0.25$

En el literal *a*) se usó una Ley de DeMorgan para estabecer que $P((A \cup M)^c) = P(A^c \cap M^c)$.

En el literal *b*) se empleó el Teorema 1.3, pues $A \cap M \subseteq M$ y también se ocupó el Teorema 1.4 junto con el literal *a*) para obtener $P(A \cup M) - P(A) = P(M) - P(A \cap M) = 0.25$.

Ejemplo 4.4.2: Cálculo de probabilidades

Basándose en el Ejercicio 3.3.2, calcule la probabilidad que:
a) las cuatro válvulas sean defectuosas,
b) la cuarta válvula extraída sea defectuosa si las tres primeras estaban buenas.

Apoyándose en los eventos ya definidos, se obtiene que:
Para *a*): $P(\cap_{j=1}^{4} V_j) = P(V_1)P(V_2|V_1)P(V_3|V_1 \cap V_2)P(V_4|V_1 \cap V_2 \cap V_3) = \frac{5}{15}(\frac{4}{14})(\frac{3}{13})(\frac{2}{12}) = \frac{1}{273}$.
Para *b*): $P(V_4|V_1^c \cap V_2^c \cap V_3^c) = \frac{5}{12}$.

Para resolver este ejercicio se usó la "regla del producto". Tener en cuenta que hay cuatro etapas y en cada etapa se va extrayendo una válvula. Por lo tanto, van quedando menos válvulas y es muy importante saber qué tipo de válvula se ha extraído, lo que se exhibe en la condición.

¡Cuidado!

En el Ejemplo 4.4.2 no se puede usar independencia, pues si ya se sacó una válvula defectuosa, entonces extraer otra válvula defectuosa tiene una menor probabilidad, es decir, **depende** de lo que pasó.

Ejemplo 4.4.3: Cálculo de probabilidades

Refiérase al Ejercicio 3.3.16, calcule la probabilidad que los bits sean:

a) solamente unos, *b*) más unos que ceros.

De acuerdo a la información entregada, se logra:

Para *a*): $P(\cap_{i=1}^{7} B_i) = \frac{1}{2^7}$.

Para *b*): Sea B : "los bits son más unos que ceros", luego $P(B) = \frac{1}{2^7}\sum_{k=4}^{7} P_{k,7-k}^{7} = \frac{1}{2}$.

En *a*) se usó independencia, pues, que un bit sea uno o cero no obliga a que el siguiente lo sea.

En *b*) se ocuparon permutaciones con objetos indistinguibles, pues los unos (o ceros) no se distinguen entre sí. Además, se declaró un evento más práctico de de manipular en notación conjuntista En *a*) y *b*) se usó la Regla de Laplace.

Ejemplo 4.4.4: Cálculo de probabilidades

Remítase al Ejercicio 3.3.15 y calcule la probabilidad que la muestra extraída contenga:

a) exactamente dos dados defectuosos, *b*) al menos dos dados defectuosos.

Considerando el evento ya definido, usando combinaciones y la Regla de Laplace, resulta:

Para *a*): Sea B : "Muestra extraída contiene exactamente dos dados defectuosos", luego

$$P(B) = \frac{\binom{4}{2}\binom{26}{3}}{\binom{30}{5}} = \frac{200}{1827}.$$

Para *b*): $P(C) = 1 - P(C^c) = 1 - \frac{\binom{4}{0}\binom{26}{5}+\binom{4}{1}\binom{26}{4}}{\binom{30}{5}} = \frac{31}{261}$.

Si se saca una cantidad de dados defectuosos, entonces los restantes deben ser no defectuosos.

Ejemplo 4.4.5: Cálculo de probabilidades

Para el Ejercicio 3.3.5, suponga que se selecciona al azar una persona que llega a ese aeropuerto, calcule la probabilidad de que la persona viaje:

a) por negocios, *b*) en avión privado, dado que lo hace por negocios.

De acuerdo a los datos y eventos definidos, se tiene que:

$P(V_I) = 3P(V_P)$, $P(V_C) = 2P(V_P)$, lo que lleva a $P(V_I) = \frac{3}{6}$, $P(V_C) = \frac{2}{6}$, $P(V_P) = \frac{1}{6}$.

Además, $P(N|V_I) = 0.5$, $P(N|V_P) = 0.6$, $P(N|V_C) = 0.9$

Para *a*): del Teorema 3.1 $P(N) = P(V_I)P(N|V_I) + P(V_C)P(N|V_C) + P(V_P)P(N|V_P) = \frac{13}{20}$.

Para *b*): del Teorema 3.2 $P(V_P|N) = \frac{P(V_P)P(N|V_P)}{P(N)} = \frac{2}{13}$.

Para no recargar la notación se empleó una nueva notación, más reducida que la original, donde C = Comercial, I = Importante y P = Privado.

Ejemplo 4.4.6: Cálculo de probabilidades

En base al Ejercicio 3.3.13, calcule la probabilidad que los códigos:

a) tengan al menos dos nucleótidos idénticos, b) terminen en G y no se repitan.

De acuerdo a los eventos ya caracterizados y usando la Regla de Laplace, resulta:

Para a): $P(D) = 1-P(D^c) = 1-\frac{4(3)(2)}{4^3} = 0.625$, D^c :"menos de dos nucleótidos idénticos".

Para b): $P(C) = 0.09375$.

Ejemplo 4.4.7: Cálculo de probabilidades

Considere el Ejercicio 3.3.4, calcule la probabilidad que:

a) no aumenten los precios del acero estructural aun cuando haya un aumento en las inversiones de capital,

b) haya un aumento en el precio del acero para el siguiente año.

Con los datos y eventos definidos, resulta: $P(A|I) = 0.9$, $P(A|I^c) = 0.4$, $P(I) = 0.6$

Para a): del Teorema 1.2 $P(A^c|I) = 0.1$.

Para b): del Teorema 3.1 $P(A) = P(I)P(A|I) + P(I^c)P(A|I^c) = 0.7$.

Ejemplo 4.4.8: Cálculo de probabilidades

Refiérase al Ejercicio 3.2.6 y calcule la probabilidad que:

a) los cinco conectores hayan sido producidos en la misma cavidad del molde,

b) cuatro de los cinco conectores hayan sido producidos en la cavidad uno del molde.

Con los datos y eventos ya descritos, resulta: $P(C_{ij}) = \frac{1}{8}$. En base al Axioma 3, se obtiene:

Para a): $P(\cup_{j=1}^{8}[\cap_{i=1}^{5} C_{ij}]) = \sum_{j=1}^{8} P(\cap_{i=1}^{5} C_{ij}) = \sum_{j=1}^{8}(\prod_{i=1}^{5} P(C_{ij})) = \frac{1}{8^4}$.

Para b): $P(\cup_{k=1}^{5} C_{k1}^c \cap_{\{i=1,i\neq k\}}^{5} C_{i1}) = \sum_{k=1}^{5}[P(C_{k1}^c)\prod_{\{i=1,i\neq k\}}^{5} P(C_{i1})] = \frac{35}{8^5}$.

Ejemplo 4.4.9: Función probabilidad

En una industria química, la producción mensual de cierto producto, en miles de litros, está dada por $f(x) = 0.25x$, para $0 \leq x < 2$ y $f(x) = 1 - 0.25x$, cuando $2 \leq x \leq 4$.

a) Demuestre que f es una función probabilidad.

b) Si se sabe que la producción en un mes dado no alcanza a 3000 litros, ¿cuál es la probabilidad que se haya tenido una producción de a lo menos 1500 litros?

Sea X : Producción mensual (en miles de litros) de cierto producto químico.

Luego $R_X = \{x \in \mathbb{R} \ / \ 0 \leq x \leq 4\}$. Por lo tanto, X es una variable aleatoria continua.

Para a): Notar que $f(x) \geq 0$, pues: (i) si $0 \leq x < 2$, entonces $0 \leq 0.25x < 0.5$,

(ii) si $2 \leq x \leq 4$, entonces $0 \leq 1 - 0.25x \leq 0.5$

$$\text{Además, } \int_0^4 f(x)dx = \int_0^2 0.25x \ dx + \int_2^4 (1 - 0.25x)dx = 1.$$

Para b): $P(X \geq 1.5 \mid X < 3) = \frac{P(1.5 \leq X < 3)}{P(X<3)} = \frac{10}{7}$.

Ejemplo 4.4.10: Función probabilidad

En determinada industria los accidentes ocurren a una tasa de 1 cada dos meses y están regidos por la función $f(x) = \frac{e^{-\mu}\ \mu^x}{x!}$, $\mu > 0$, $x = 0, 1, 2, \ldots$, donde μ es la tasa.

a) Verifique que la función dada es de probabilidad. La variable aleatoria X asociada se dice que tiene **Distribución Poisson**, lo cual se denota $\boldsymbol{X \sim Poisson(\mu)}$.

b) Calcule la probabilidad que ocurran accidentes en un mes dado.

Sea X : Número de accidentes que ocurren en 1 mes.

Luego $R_X = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x = 0, 1, 2, \ldots\}$. Por lo tanto, X es una variable aleatoria discreta.

Para *a*): $f(x) \geq 0$, pues es el cuociente entre funciones positivas: exponencial y factorial.

Para que f sea función probabilidad solo falta que $\sum_{x=0}^{\infty} f(x) = 1$.

Por serie de Taylor, si g es continua, entonces $g(y) = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{g^{(x)}(y_0)(y-y_0)^x}{x!}$.

Como $g(y) = e^y$ es continua y $g^{(x)}(0) = 1, x = 0, 1, 2, \ldots$, con $y_0 = 0$, entonces

$e^y = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{y^x}{x!} \implies \sum_{x=0}^{\infty} f(x) = e^{-\mu} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\mu^x}{x!} = 1$, es función probabilidad (fmp).

Para *b*): Puesto que $\mu = 0.5$, entonces $P(X > 0) = 1 - f(0) = 1 - e^{-0.5}$.

Ejemplo 4.4.11: Función probabilidad

Las fallas en determinado tipo de montacargas ocurren según una distribución Poisson a una tasa de 1 cada 24 horas de operación. Determine la probabilidad que en:

a) 48 horas de operación no ocurran fallas.

b) 72 horas de operación ocurran por lo menos dos fallas.

Sea X_t : Número de fallas que ocurren en un montacargas cada t horas de operación.

Luego $R_{X_t} = \{0, 1, 2, \ldots\}$, $X_t \sim Poisson(\frac{t}{24})$ y $f_{X_t}(x) = \frac{e^{-\frac{t}{24}}(\frac{t}{24})^x}{x!}$, $x = 0, 1, 2, \ldots$

Para *a*): $P(X_{48} = 0) = e^{-2}$. Para *b*): $P(X_{72} \geq 2) = 1 - P(X_{72} < 2) = 1 - 4e^{-3}$.

Ejemplo 4.4.12: Función probabilidad

La duración, en años, de un tubo electrónico está dada por $f(x) = Ax^2$, $1 \leq x \leq 6$.

a) Determine el valor de A de modo que f sea una función probabilidad.

b) ¿Qué probabilidad existe que el tubo dure más de cinco años?

Sea X : Duración (en años) de un tubo electrónico.

Luego $R_X = \{x \in \mathbb{R} \ / \ 1 \leq x \leq 6\}$. Por lo tanto, X es una variable aleatoria continua.

Para *a*): Como f es una función cuadrática, entonces $f(x) \geq 0$ siempre que $A > 0$.

Además, para que f sea función probabilidad falta que $\displaystyle\int_1^6 f(x)dx = 1$, esto es,

$1 = \displaystyle\int_1^6 Ax^2 dx = \frac{A}{3}x^3\Big|_1^6 = \frac{215}{3}A$, de donde $A = \frac{3}{215}$.

Así, $f_X(x) = \frac{3}{215}x^2$, $1 \leq x \leq 6$ es función densidad de probabilidad (fdp).

Para *b*): $P(X > 5) = \displaystyle\int_5^6 \frac{3}{215}x^2 dx = \frac{1}{215}x^3\Big|_5^6 = \frac{91}{215}$.

Ejemplo 4.4.13: Función probabilidad

El tiempo, en días, de operación sin falla de cierta componente es $f(x) = B\ e^{-\frac{x}{120}}, x > 0$.

a) Obtenga el valor de B de modo que f sea una función probabilidad.

b) ¿Qué proporción de estas componentes duran a lo más 100 días?

Sea X : Tiempo (en días) de operación sin falla de cierta componente.

Luego $R_X = \{x \in \mathbb{R}\ /\ x > 0\}$. Por lo tanto, X es una variable aleatoria continua.

Para *a*): Como f es una función exponencial natural, entonces $f(x) \geq 0$, con $B > 0$.

Para que f sea función probabilidad es necesario que $\int_0^\infty f(x)dx = 1$, esto es,

$$1 = \int_0^\infty B\ e^{-\frac{x}{120}}dx = \lim_{d\to\infty}\int_0^d B\ e^{-\frac{x}{120}}dx = 120B, \text{ de donde } B = \tfrac{1}{120}.$$

Así, $f_X(x) = \frac{1}{120}e^{-\frac{x}{120}},\ x > 0$ es función densidad de probabilidad (fdp).

Para *b*): $P(X \leq 100) = \displaystyle\int_0^{100} \frac{1}{120}e^{-\frac{x}{120}}dx = 1 - e^{-\frac{5}{6}}$.

Por lo tanto, alrededor del 57 % de las componentes duran a lo más 100 días.

Ejemplo 4.4.14: Función probabilidad

Un satélite, después de colocarlo en órbita, funciona de manera adecuada de acuerdo a $f(x) = \binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}$, $x = 0, 1, \ldots, n$, donde n es el número de lanzamientos y p su probabilidad de éxito. Suponga que con 90 % de éxito se colocan cinco satélites en órbita.

a) Verifique que la función dada es de probabilidad. La variable aleatoria X asociada se dice que tiene **Distribución binomial**, lo cual se denota $\boldsymbol{X \sim binomial(n, p)}$.

b) ¿Qué probabilidad hay que el 80 % o más de los lanzamientos funcionen bien?

Sea X : Número de satétiles puestos adecuadamente en órbita.

Luego $R_X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Por lo tanto, X es una variable aleatoria discreta.

Para *a*): $f(x) \geq 0$, pues es producto de funciones positivas: exponencial y combinatoria.

Por el Teorema del Binomio de Newton $\sum_{x=0}^n \binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x} = (p+1-p)^n = 1$.

Para *b*): Como $p = 0.9$ y $n = 5$, entonces $P(X \geq 4) = f(4) + f(5) = 0.91854$.

Ejemplo 4.4.15: Función probabilidad

La probabilidad de que un componente de una máquina se averíe antes de 100 horas es 0.015. La máquina tiene 30 componentes. Calcule la probabilidad de avería de la máquina antes de 100 horas si:

a) la máquina se avería cuando se averían uno o más componentes.

b) la máquina solo se avería cuando todos los componentes se averían.

Sea X : Número de componentes de la máquina que se averían antes de 100 horas.

Luego $X \sim binomial(30, 0.015)$ es discreta y $f(x) = \binom{30}{x}0.015^x 0.985^{30-x}$, $x = 0, \ldots, 30$.

Para *a*): $P(X \geq 1) = 1 - f(0) = 1 - 0.985^{30}$. Para *b*): $f(30) = 0.015^{30}$.

Ejemplo 4.4.16: Función probabilidad

La velocidad de una molécula en un gas uniforme en equilibrio es una variable aleatoria con función de densidad $f(v) = Av^2\, e^{-Bv^2}$, $v > 0$, donde k, T y m denotan la constante de Boltzman, la temperatura absoluta y la masa de la molécula, respectivamente. Además, $A = \frac{m}{2kT}$.

Determine el valor de A (en términos de B). Utilice el hecho de que $\displaystyle\int_0^\infty e^{-y^2}dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Sea V : Velocidad de una molécula en un gas uniforme en equilibrio.

Luego $R_X =]0, \infty[$. Por lo tanto, X es una variable aleatoria continua.

Como f es el producto de funciones no negativas: cuadrática y exponencial, entonces $f(v) \geq 0$, siempre que $A > 0$.

Para que f sea función probabilidad solo falta que $\displaystyle\int_0^\infty f(v)dv = 1$, esto es,

$$\begin{aligned} 1 &= \int_0^\infty A\, v^2\, e^{-Bv^2} dv = A \int_0^\infty \frac{y^2}{B}\, e^{-y^2} \frac{1}{\sqrt{B}} dy, \quad \text{para } y^2 = Bv^2 \\ &= \frac{A}{B^{\frac{3}{2}}} \int_0^\infty y \left(y\, e^{-y^2} dy \right). \qquad\qquad (*) \end{aligned}$$

Integrando por partes y usando la indicación, se obtiene que $A = \frac{4}{\sqrt{\pi}} B^{\frac{3}{2}}$.

La indicación fue fundamental para calcular el valor de A. Además, escribir la integral en la forma $(*)$ fue clave para usar integración por partes.

4.5. Ejercicios propuestos sobre variables aleatorias y función probabilidad

Para que practique lo visto en este capítulo se presenta a continuación una variedad de ejercicios. En el Anexo C ubicado en la página 51 de este apuntes encontrará las respuestas.

Ejercicio 4.5.1: Cálculo de probabilidades

Refiérase al Ejercicio de Autoevaluación 3.4.8 y calcule la probabilidad de que:

a) *el último refrigerador defectuoso se encuentre en la cuarta prueba,*

b) *no más de cuatro refrigeradores sea necesario probar para localizar los dos defectuosos,*

c) *el segundo refrigerador defectuoso sea encontrado en la tercera o cuarta prueba, si el primer refrigerador defectuoso fue localizado en las dos primeras pruebas.*

Ejercicio 4.5.2: Cálculo de probabilidades

Considere el Ejemplo 3.2.5 y calcule la probabilidad de que un inversionista que:

a) *no compra acciones tipo A, compre acciones tipo B,*

b) *no compra acciones tipo B, tampoco compre acciones tipo A.*

Ejercicio 4.5.3: Cálculo de probabilidades

Refiérase al Ejercicio 3.3.1 y calcule la probabilidad de que:

a) *falle solo uno de los subsistemas,*

b) *funcione el primer subsistema dado que falla el segundo.*

Ejercicio 4.5.4: Cálculo de probabilidades

Remítase al Ejercicio 3.3.6 y calcule la probabilidad de que una persona que tiene deuda en:

a) *financieras presente también deuda bancaria,*

b) *bancos no presente deuda en financieras.*

Ejercicio 4.5.5: Cálculo de probabilidades

Con base en el Ejercicio 3.3.7 calcule la probabilidad de que:

a) *todos los mecanismos estén en la misma posición,*

b) *dos mecanismos adyacentes no estén en la misma posición,*

c) *solo se usen dos posiciones y con la misma frecuencia.*

Ejercicio 4.5.6: Cálculo de probabilidades

Considerando el Ejercicio 3.3.8 calcule la probabilidad de que el sistema funcione con el motor y ambas calderas.

Ejercicio 4.5.7: Cálculo de probabilidades

Refiérase al Ejercicio 3.3.9 y calcule la probabilidad de que un estudiante prefiera:

a) *las tres asignaturas,*

b) *otras asignaturas,*

c) *Álgebra y Química,*

d) *solo una de dichas asignaturas,*

e) *solo Cálculo,*

f) *al menos dos de tales asignaturas.*

Ejercicio 4.5.8: Función probabilidad

El tiempo, en minutos, que tarda una reacción química se puede modelar mediante la función $f(x) = Cx(2-x),\ 0 \leq x \leq 2$.

a) *Calcule el valor de* C *de modo que* f *sea una función probabilidad.*

b) *¿Qué probabilidad existe que una reacción química dure más 30 segundos?*

c) *¿Cuánto tiempo necesitarán las reacciones químicas del* $10\,\%$ *más prolongadas?*

Ejercicio 4.5.9: Función probabilidad

La concentración diaria, en mg/10^3lt, de cierto contaminante en un arroyo se rige por la función $f(x) = De^{-\frac{x}{2}},\ x > 0$.

a) *Determine el valor de D de modo que f sea una función probabilidad.*

b) *Se tiene información que habrá un problema de contaminación si la concentración excede los 6 mg/10^3lt. ¿Qué probabilidad hay que ocurra un problema de polución en un día cualquiera?*

Ejercicio 4.5.10: Función probabilidad

El número de muestras de aire que es necesario analizar hasta detectar una molécula rara está dado por $f(x) = \frac{E}{x!},\ x = 0, 1, 2, \ldots$.

a) *Obtenga el valor de E de modo que f sea una función probabilidad.*

b) *¿Qué probabilidad hay que se deba analizar más de 1 muestra de aire para detectar una molécula rara?*

Ejercicio 4.5.11: Función probabilidad

La duración, en miles de horas, de un motor eléctrico ha sido modelado por la función $f(x) = Fx(1-x),\ 0 \leq x \leq 1$. Suponga que el costo de reparación por cada unidad que falla es de: \$5000 si el motor dura menos de 300 horas; \$15000 si dura más de 550 horas y \$10000 en otro caso.

a) *Determine el valor de F de modo que f sea una función probabilidad.*

b) *Si se eligen al azar cuatro motores que han fallado, calcule la probabilidad que al menos tres de ellos tengan un costo de reparación de \$15000.*

Ejercicio 4.5.12: Función probabilidad

En una zona rural, de forma empírica se ha detectado que el número de cortes de energía eléctrica se puede modelar por $f(x) = \frac{G}{2^x},\ x = 0, 1, 2, \ldots$.

a) *Obtenga el valor de G de modo que f sea una función probabilidad.*

b) *Calcule la probabilidad que haya más de un corte de energía eléctrica.*

Ejercicio 4.5.13: Función probabilidad

En un determinado lugar, el número de metales que hay por kilómetro cuadrado está dado por $f(x) = H\left(\frac{\theta}{1+\theta}\right)^x,\ x = 0, 1, 2, \ldots,\ \theta > 0$.

a) *Determine el valor de H de modo que f sea una función probabilidad.*

b) *Calcule la probabilidad que hayan por lo menos 5 metales por kilómetro cuadrado.*

Ejercicio 4.5.14: Función probabilidad

Suponga que la duración, en años, de un equipo eléctrico se ajusta al modelo dado por la ley $f(x) = 4xe^{-Jx},\ x > 0$.

a) *Calcule el valor de* J *de modo que* f *sea una función probabilidad.*

b) *Calcule la probabilidad que el equipo eléctrico no tenga que ser reemplazado durante los dos primeros meses de servicio.*

4.6. Ejercicios de autoevaluación sobre variables aleatorias y función probabilidad

Para medir su nivel de conocimiento de este tercer capítulo dispone de un set de ejercicios. Al responder correctamente al menos al 75 % de los ejercicios que siguen (contestar 6 o más ejercicios correctamente), habrá culminado con éxito este apuntes, de no ser así se sugiere repasar este capítulo. En el Anexo C, que está en la página 52 de este apuntes, encuentra las respuestas de estos ejercicios de autoevaluación.

Autoevaluación 4.6.1: Cálculo de probabilidades

Remítase al Ejercicio 3.3.12 y calcule la probabilidad de que un pedido:

a) *se rechace,*

b) *sea bueno,*

c) *aceptado sea de buena calidad,*

d) *malo se acepte,*

e) *se rechace si es de mala calidad,*

f) *sea malo si es rechazado.*

Autoevaluación 4.6.2: Cálculo de probabilidades

Con base en el Ejercicio 3.3.10 calcule la probabilidad de que una lata elegida al azar

a) *tenga solo exceso de azúcar,*

b) *tenga magulladuras si presentaba falta de líquido,*

c) *no tenga exceso de azúcar dado que presenta magulladuras.*

Autoevaluación 4.6.3: Cálculo de probabilidades

Basándose en el Ejemplo 3.2.1 y suponiendo que se extraen cinco muestras de hormigón, calcule la probabilidad de que:

a) *por lo menos una muestra no cumpla con los estándares de calidad,*

b) *la última muestra no cumpla con los estándares de calidad dado que las anteriores cumplían.*

Autoevaluación 4.6.4: Cálculo de probabilidades

Considere que S *es la suma del número* N *de dados lanzados, donde* $P(N = n) = \frac{1}{2^n}$. *Calcule* $P(N = 2 \mid S = 3)$.

Autoevaluación 4.6.5: Función probabilidad

Cierta aleación se forma al combinar la mezcla fundida de dos metales. La aleación que resulta contiene cierto porcentaje de plomo que se puede modelar mediante la función $f(x) = \alpha x(100 - x)$, *para* $0 \leq x \leq 100$, *siendo 0 en otro caso.*

a) *Determine el valor de* α *de modo que* f *sea una función probabilidad.*

b) *Calcule la probabilidad de que la mezcla tenga menos del 25 % de plomo o más del 75 %.*

Autoevaluación 4.6.6: Función probabilidad

La demanda diaria de cierto produto se puede modelar por $f(x) = \beta \frac{2^x}{x!}, \ x = 0, 1, 2, 3, \ldots$

a) *Determine el valor de* β *de modo que* f *sea una función probabilidad.*

b) *Calcule la probabilidad de que la demanda diaria sea positiva.*

Autoevaluación 4.6.7: Función probabilidad

Suponga que un experimento se continúa hasta que un suceso particular A *ocurre por* $r-$*ésima vez, donde, en cada repetición* $P(A) = p$. *Si* X *representa el número de repeticiones necesarias a fin de que* A *ocurra* r *veces, entonces la probabilidad que el suceso* A *ocurra en la* $x-$*ésima repetición está dada por* $f(x) = \binom{x-1}{r-1} p^r (1-p)^{x-r}, \ x = r, r+1, \ldots$. *Si el 80 % de los lanzamientos de un basquebolista son exitosos y ensaya hasta lograr acertar 3 veces.*

a) *¿Cuál es la probabilidad de que sean necesarios por lo menos 6 intentos?,*

b) *¿Cuántos intentos, como mínimo, debe hacer para que su probabilidad supere el 99.9 %?*

Autoevaluación 4.6.8: Función probabilidad

La distribución de la altura de una onda está dada por $f(x) = 4xe^{-\frac{1}{2}(\frac{x}{\beta})^2}, \ x \geq 0$.

a) *Calcule el valor de* β *de modo que* f *sea una función probabilidad.*

b) *¿Cuánta altura tendrán las ondas del 10 % más altas?*

CAPÍTULO 5

ANEXO A

5.1. Respuestas a los ejercicios propuestos en el capítulo 2

Identificación y clasificación de la variable del Ejercicio 2.3.1

Identificación

N : Número de contenedores con fruta fresca que transportan los barcos.

Clasificación: Variable cuantitativa discreta.

Identificación y clasificación de la variable del Ejercicio 2.3.2

Identificación

E : Nivel educativo de las personas que postulan a un trabajo.

Clasificación: Variable cualitativa ordinal.

Identificación y clasificación de la variable del Ejercicio 2.3.3

Identificación

N : Número de quejas diarias recibidas por el exceso de líquido en las latas de conserva.

Clasificación: Variable cuantitativa discreta.

Identificación y clasificación de la variable del Ejercicio 2.3.4

Identificación

D : Diagnóstico de los enfermos con hemorragia digestiva alta atendidos en un hospital.

Clasificación: Variable cualitativa nominal.

Identificación y clasificación de la variable del Ejercicio 2.3.5

Identificación

C : Condición del pavimento de las carreteras del país en estudio solicitado por el MOP.

Clasificación: Variable cualitativa ordinal.

Identificación y clasificación de la variable del Ejercicio 2.3.6

Identificación

R : Resistencia (en ft-lb/in) al impacto Izod sobre las muestras de tubería PVC.

Clasificación: Variable cuantitativa continua.

Identificación y clasificación de la variable del Ejercicio 2.3.7

Identificación

P : Preferencia sobre ir a huelga votado por los colaboradores de una industria pesquera.

Clasificación: Variable cualitativa nominal.

Identificación y clasificación de la variable del Ejercicio 2.3.8

Identificación

I : Intensidad solar directa (en watts/m^2) medida en una localidad cercana a una gran ciudad.

Clasificación: Variable cuantitativa continua.

Identificación y clasificación de la variable del Ejercicio 2.3.9

Identificación

C : Contaminación por plomo (en ppm) realizadas por máquinas de petróleo en una obra ingenieril.

Clasificación: Variable cuantitativa discreta.

Identificación y clasificación de la variable del Ejercicio 2.3.10

Identificación

D : Diámetro (en mm) del agujero taladrado por una herramienta.

Clasificación: Variable cuantitativa continua.

Identificación y clasificación de las variables del Ejercicio 2.3.11

Identificación

E : Evaluación de los diseños preliminares de los productos de una determinada industria.

Clasificación: Variable cualitativa nominal.

Identificación

G : Grado de éxito logrado por los productos de una determinada industria.

Clasificación: Variable cualitativa ordinal.

Identificación y clasificación de la variable del Ejercicio 2.3.12

Identificación

T : Tipo de lenguaje en el que preferían trabajar los informáticos encuestados.

Clasificación: Variable cualitativa nominal.

5.2. Respuestas a los ejercicios de autoevaluación del capítulo 2

Identificación y clasificación de la variable del ejercicio de Autoevaluación 2.4.1

Identificación

T : Tiempo de ruptura (en minutos) de un fluido aislante entre electrodos a 34 kV.

Clasificación: Variable cuantitativa continua.

Identificación y clasificación de las variables del ejercicio de Autoevaluación 2.4.2

Identificación

C : Calificación de la grabación del disco duro.

Clasificación: Variable cualitativa nominal.

Identificación

N : Nivel de la velocidad a la que se graba un disco duro.

Clasificación: Variable cualitativa ordinal.

Identificación y clasificación de la variable del ejercicio de Autoevaluación 2.4.3

Identificación

N : Número de postulantes entrevistados diariamente para un puesto de analista de sistemas.

Clasificación: Variable cuantitativa discreta.

Identificación y clasificación de la variable del ejercicio de Autoevaluación 2.4.4

Identificación

N : Número de reservas realizadas en alguna aerolínea.

Clasificación: Variable cualitativa nominal.

Identificación y clasificación de la variable del ejercicio de Autoevaluación 2.4.5

Identificación

C : Cargo asignado a los funcionarios de los colegios públicos y subvencionados.

Clasificación: Variable cualitativa ordinal.

Identificación y clasificación de la variable del ejercicio de Autoevaluación 2.4.6

Identificación

T : Tipo de defectos estructurales en las construcciones tras el sismo ocurrido.

Clasificación: Variable cualitativa nominal.

Identificación y clasificación de la variable del ejercicio de Autoevaluación 2.4.7

Identificación

N : Nivel de ácido graso poliinsaturado (en porcentaje) de un tipo de margarina dietética.

Clasificación: Variable cuantitativa continua.

Identificación y clasificación de la variable del ejercicio de Autoevaluación 2.4.8

Identificación

T : Tipo de generación encontrada por la investigación realizada por demógrafos.

Clasificación: Variable cualitativa ordinal.

CAPÍTULO 6

ANEXO B

6.1. Respuestas a los ejercicios propuestos en el capítulo 3

Caracterización de los eventos involucrados en el Ejercicio 3.3.1

Ω : "Ambos subsistemas funcionan o al menos falla uno de los dos subsistemas".

F_i : "Falla el subsistema i", $i = 1, 2$.

Caracterización de los eventos involucrados en el Ejercicio 3.3.2

Ω : "Cuaternas de válvulas elegidas en que cada una puede o no ser defectuosa".

V_j : "$j-$ésima válvula elegida es defectuosa", $k = 1, 2, 3, 4$.

Caracterización de los eventos involucrados en el Ejercicio 3.3.3

$\Omega = \{x \ / \ x$ es un artículo fabricado por una de las tres máquinas$\}$.

$A_i = \{x \in \Omega \ / \ x$ es fabricado por la máquina $M_i\}$, donde $i = 1, 2, 3$.

$D = \{x \in \Omega \ / \ x$ es un artículo defectuoso$\}$.

Caracterización de los eventos involucrados en el Ejercicio 3.3.4

Ω : "Aumentan o no las inversiones de capital el siguiente año".

A : "Aumenta el precio del acero estructural el siguiente año".

I : "Aumentan las inversiones de capital el siguiente año"

Caracterización de los eventos involucrados en el Ejercicio 3.3.5

$\Omega = \{x \;/\; x$ es un pasajero que usa uno de los tres tipos de aerolíneas$\}$.
$V_a = \{x \in \Omega \;/\; x$ usa aviones del tipo $a\}$, donde $a =$ Comercial, Importante, Privado.
$N = \{x \in \Omega \;/\; x$ viaja por negocios$\}$.

Caracterización de los eventos involucrados en el Ejercicio 3.3.6

$\Omega = \{x \;/\; x$ es una de las personas consultadas por su endeudamiento$\}$.
$D_e = \{x \in \Omega \;/\; x$ tenía deudas en la entidad $e\}$, donde $e =$ Banco, Financiera.

Caracterización de los eventos involucrados en el Ejercicio 3.3.7

Ω : "Octetos de mecanismos donde cada uno puede ponerse sólo en una de 4 posiciones".
M_{ij} : "Mecanismo i está puesto en la posición j", donde $i = 1, \ldots, 8$, $j = 1, \ldots, 4$.

Caracterización de los eventos involucrados en el Ejercicio 3.3.8

Ω : "Funciona o no el sistema de propulsión formado por un motor y dos calderas".
M : "Funciona el motor", C_i : "Funciona la caldera i", $i = 1, 2$.

Caracterización de los eventos involucrados en el Ejercicio 3.3.9

$\Omega = \{x \;/\; x$ es un estudiante de Ingeniería consultado por sus preferencias de asignaturas$\}$.
$A_a = \{x \in \Omega \;/\; x$ prefería la asignatura $a\}$, donde $a =$ Álgebra, Cálculo, Química.

Caracterización de los eventos involucrados en el Ejercicio 3.3.10

$\Omega = \{x \;/\; x$ es una lata de cerezas al jugo a la que se le realizó control de calidad$\}$.
$L_c = \{x \in \Omega \;/\; x$ tenía la característica $c\}$,
donde $c =$ Exceso de azúcar, Falta líquido, Magulladuras.

Caracterización de los eventos involucrados en el Ejercicio 3.3.11

$\Omega = \{x \;/\; x$ es un habitante de la población que presenta ciertas características$\}$.
$A_c = \{x \in \Omega \;/\; x$ presenta la característica $c\}$,
donde $c =$ Obesa, Hipertensa, Sangre tipo A, Adulto.

Caracterización de los eventos involucrados en el Ejercicio 3.3.12

$\Omega = \{x \;/\; x$ es un lote de mercancía que llega$\}$.
$A = \{x \in \Omega \;/\; x$ es aceptado$\}$,
$L_c = \{x \in \Omega \;/\; x$ es de la calidad $c\}$, donde $c =$ buena, mala.

Caracterización de los eventos involucrados en el Ejercicio 3.3.13

$\Omega = \{(x_1, x_2, x_3) \ / \ x_i = \text{ Adenina, Citosina, Guanina, Uracilo}, i = 1, 2, 3\}$.

D : "Ternas de nucleótidos que tienen al menos dos nucleótidos idénticos".

C : "Ternas de nucleótidos que terminan en Guanina y no se repiten".

Caracterización de los eventos involucrados en el Ejercicio 3.3.14

Ω : "Falla o funciona uno cualquiera de los 6 interruptores en serie".

I_k : "$k-$ésimo interruptor falla", $k = 1, \ldots, 6$.

Caracterización de los eventos involucrados en el Ejercicio 3.3.15

Ω : "Quintetos de dados en que al menos uno de los dados no está defectuoso".

C : "Al menos dos dados extraídos están defectuosos".

Caracterización de los eventos involucrados en el Ejercicio 3.3.16

Ω : "Septetos de bits donde cada bit puede ser cero o uno".

B_i : "$i-$ésimo bit es uno", $i = 1, \ldots, 7$.

6.2. Respuestas a los ejercicios de autoevaluación del capítulo 3

Caracterización de los eventos del ejercicio de Autoevaluación 3.4.1

$\Omega = \{x \ / \ x$ es una mosca de la fruta de la población estudiada$\}$.

$M_m = \{x \in \Omega \ / \ x$ tenía mutación de $m\}$, donde $m =$ Ala, Ojo.

Caracterización de los eventos del ejercicio de Autoevaluación 3.4.2

$\Omega = \{x \ / \ x$ es uno de los funcionarios que trabaja en la empresa$\}$.

$R = \{x \in \Omega \ / \ x$ participa en un plan de reparto de utilidades de la compañía$\}$.

$M = \{x \in \Omega \ / \ x$ tiene una cobertura de gastos médicos mayores$\}$.

Caracterización de los eventos del ejercicio de Autoevaluación 3.4.3

Ω : "Departamentos Productos Marinos y Equipos de Oficina tienen o no margen de utilidad en este año fiscal".

D_d : "Departamento d tiene margen de utilidad en este año fiscal",
donde $d =$ Productos Marinos, Equipos de Oficina.

Caracterización de los eventos del ejercicio de Autoevaluación 3.4.4

Ω : "Docenas de posiciones en serie en las que se colocan cuatro chips distintos".

C_{ij} : "El $i-$ésimo chip está puesto en la $j-$ésima posición", $i = 1, \ldots, 4$, $j = 1, \ldots, 12$.

A : "Los cuatro chips están puestos consecutivamente".

Caracterización de los eventos del ejercicio de Autoevaluación 3.4.5

Ω : "Ternas de fusibles elegidos donde cada uno de los fusibles puede o no ser defectuoso".

F_i : "$i-$ésimo fusible elegido es defectuoso", $i = 1, 2, 3$.

Caracterización de los eventos del ejercicio de Autoevaluación 3.4.6

Ω : "Los interruptores cortan o no el flujo cuando deben".

I_j : "El interruptor i trabaja cuando debe", $i = 1, 2$.

Caracterización de los eventos del ejercicio de Autoevaluación 3.4.7

Ω : "La formación geológica es de tipo I o tipo II".

D : "Descubrir petróleo", F_k : "La formación geológica es de tipo k", $k = I, II$.

Caracterización de los eventos del ejercicio de Autoevaluación 3.4.8

Ω : "Cuaternas de refrigeradores probados en que a lo más dos pueden estar defectuosos".

D : "El segundo refrigerador defectuoso se encuentra en la cuarta prueba".

CAPÍTULO 7

ANEXO C

7.1. Respuestas a los ejercicios propuestos en el capítulo 4

Cálculo de las probabilidades asociadas al Ejercicio 4.5.1

a) $\frac{1}{5}$, *b*) $\frac{2}{5}$, *c*) $\frac{4}{9}$.

Cálculo de las probabilidades asociadas al Ejercicio 4.5.2

a) $\frac{7}{11}$, *b*) $\frac{1}{3}$.

Cálculo de las probabilidades asociadas al Ejercicio 4.5.3

a) 0.2, *b*) 0.5.

Cálculo de las probabilidades asociadas al Ejercicio 4.5.4

a) $\frac{1}{7}$, *b*) $\frac{7}{8}$.

Cálculo de las probabilidades asociadas al Ejercicio 4.5.5

a) $(\frac{1}{4})^7$, *b*) $(\frac{3}{4})^7$, *c*) $\frac{105}{2^{14}}$.

Cálculo de la probabilidad asociada al Ejercicio 4.5.6

0.15

Cálculo de las probabilidades asociadas al Ejercicio 4.5.7

a) $\frac{1}{15}$, *b*) $\frac{2}{15}$, *c*) $\frac{1}{12}$,
d) $\frac{2}{3}$, *e*) $\frac{5}{12}$, *f*) $\frac{1}{15}$.

Cálculo de las probabilidades asociadas al Ejercicio 4.5.8

a) $\frac{3}{4}$, *b*) $\frac{27}{32}$, *c*) 1.6084

Cálculo de las probabilidades asociadas al Ejercicio 4.5.9

a) $\frac{1}{2}$, *b*) e^{-3}.

Cálculo de las probabilidades asociadas al Ejercicio 4.5.10

a) e^{-1}, *b*) $1 - 2e^{-1}$.

Función probabilidad asociada al Ejercicio 4.5.11

a) 6, *b*) $\frac{1701^3(10897)}{4000^4}$.

Función probabilidad asociada al Ejercicio 4.5.12

a) $\frac{1}{2}$, *b*) $\frac{1}{4}$.

Función probabilidad asociada al Ejercicio 4.5.13

a) $\frac{1}{1+\theta}$, *b*) $(\frac{\theta}{1+\theta})^5$.

Función probabilidad asociada al Ejercicio 4.5.14

a) 2, *b*) $\frac{4}{3}e^{-\frac{1}{3}}$.

7.2. Respuestas a los ejercicios de autoevaluación del capítulo 4

Cálculo de las probabilidades del ejercicio de Autoevaluación 4.6.1

a) 0.06, *b*) 0.95, *c*) $\frac{931}{940}$,
d) 0.18, *e*) 0.82, *f*) $\frac{41}{60}$.

Cálculo de las probabilidades del ejercicio de Autoevaluación 4.6.2

a) 0.01, *b*) $\frac{3}{5}$, *b*) $\frac{5}{7}$.

Cálculo de las probabilidades del ejercicio de Autoevaluación 4.6.3

a) $\frac{737}{1001}$, *b*) $\frac{3}{11}$.

Cálculo de probabilidad del ejercicio de Autoevaluación 4.6.4

$\frac{24}{169}$

Función probabilidad del ejercicio de Autoevaluación 4.6.5

a) $\frac{3}{500000}$, *b*) $\frac{5}{16}$.

Función probabilidad del ejercicio de Autoevaluación 4.6.6

a) e^{-2}, *b*) $1 - e^{-2}$.

Función probabilidad del ejercicio de Autoevaluación 4.6.7

a) 0.05792, *b*) 9.

Función probabilidad del ejercicio de Autoevaluación 4.6.8

a) $\frac{1}{2}$, *b*) $\sqrt{0.5\, ln(10)}$.

CAPÍTULO 8

BIBLIOGRAFÍA

1 Canavos, G. C. (1995). *Probabilidad y Estadística. Aplicaciones y Métodos.* Mc Graw-Hill.

2 Levine, D. M., Krehbiel, T. C. y Berenson, M. L. (2006). *Estadística para Administración.* México: Pearson Educación.

3 Meyer, P. (1992). *Probabilidad y aplicaciones estadísticas.* Argentina: Addison-Wesley Iberoamericana.

4 Montgomery, D.C. (2012). *Probabilidad y Estadística Aplicadas a la Ingeniería.* México: Limusa Wiley.

5 Mason, R. D. y Lind, D. A. (1995). *Estadística para Administración y Economía.* México: Alfaomega, S. A. de C. V.

6 Walpole, R. (2012). *Probabilidad y estadística para ingeniería y ciencias.* México: Pearson Educación.