Universidad del Bío-Bío. Red de Bibliotecas – Chile

UNIVERSIDAD DEL BÍO-BÍO
FACULTAD DE EDUCACIÓN Y HUMANIDADES
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
PEDAGOGÍA EN CIENCIAS NATURALES CON MENCIÓN EN BIOLOGÍA O FÍSICA O QUÍMICA

Estudios Astronómicos Presentes en el Desarrollo de la Teoría de la Relatividad

MEMORIA PARA OPTAR A TÍTULO DE PROFESOR EN CIENCIAS NATURALES CON MENCIÓN EN FÍSICA

AUTOR: MATÍAS IGNACIO SILVA BASTIDAS

PROFESOR GUÍA: DR.MARKOS MANIATIS

CHILLÁN, 2022

Universidad del Bío-Bío. Red de Bibliotecas – Chile

Agradecimiento

Durante el proceso de elaboración de esta tesis de grado se ha recibido el aporte de muchas personas que formaron parte logro académico, por consiguiente, es necesario mencionar su mérito dentro de este documento reconociendo el apoyo que han brindado.

Para comenzar, me gustaría agradecer a mi profesor guía Dr. Markos Maniatis, por poner a disposición tanto sus conocimientos científicos dentro del área de la física y la astronomía como su experiencia académica en la elaboración de proyectos de investigación, su aporte seguirá presente a futuro en los próximos trabajos investigativos que desempeñe como profesor de ciencias, al aportar en gran medida en este periodo a los aprendizajes adquiridos durante mi formación profesional.

También agradecer a mi circulo cercano, partiendo por mi madre Nancy Bastidas quien estuvo presente durante toda mi educación hasta este punto brindándome su soporte, a mi padre Manuel Silva quien me aporto todas las herramientas que he necesitado para lograr las metas que me he propuesto, sin su amor y presencia no estaría donde estoy en estos momentos. Agradecer a mis amigos Alan Garrido y Marcelo Mendoza por formar parte de los momentos de descanso y distracción necesarios para seguir trabajando durante este difícil periodo.

Para finalizar, agradecer a los compañeros que he tenido durante mi educación universitaria, Felipe Bustos, Fernanda Parra, Gabriela Parra, Manuel Parra y Hair Arévalo, siempre estaré agradecido de formar lazos de amistad con tan destacables amantes de la ciencia y la educación.

Universidad del Bío-Bío. Red de Bibliotecas – Chile

Resumen

Las condiciones que presenta el movimiento a la velocidad de la luz presentadas por el trabajo de Lorentz, los estudios de las orbitas de cuerpos celestes de Kepler y la fuerza de gravedad de Newton, crearon unas bases sólidas para la teoría de la relatividad especial y general de Einstein, teoría que permitiría el estudio de fenómenos astronómicos complejos que no tendrían forma de ser explicados con la teoría clásica sin requerir de explicaciones excesivamente complejas y rebuscadas. La teoría que explica el problema de la órbita de mercurio y la desviación de la luz en los lentes gravitacionales, fueron posibles gracias a todo el trabajo científico previo que desenvolvió nuevos misterios a ser resueltos al poner a prueba una teoría ya aceptada en aquel momento, el experimento de Michelson-Morley y los estudios de Maxwell en el campo electromagnético, evidenciaron características de la luz que entraban en contradicción con otras áreas de investigación como fue el caso de la relatividad de Galileo, haciendo evidente la necesidad de una corrección en la teoría a través de la elaboración de modelos experimentales y análisis matemáticos de fenómenos astronómicos involucrando más de 100 años de historia en estudios científicos.

Universidad del Bío-Bío. Red de Bibliotecas – Chile

Índice

1. Introduction **2**

2. La Ruptura de los Conceptos Clásicos **3**
2.1. Midiendo a través de una Constante 5
2.2. Masa y Energía del Movimiento 8

3. Cuerpos que Ejercen Fuerza sin Contacto **10**
3.1. Balanza de Torsión de Cavendish 12

4. Pruebas Astronómicas de la Relatividad **14**

5. Conclusión **23**

Universidad del Bío-Bío. Red de Bibliotecas – Chile

1. Introduction

Los resultados obtenidos en el experimento de Michelson-Morley están posicionados como una base dentro del camino que culmino en la teoría de la relatividad [1], hasta este punto se mantenía la aceptación de la teoría del éter ya que no entraba en conflicto con la relatividad galileana [2], pero una serie de experimentos y el propio trabajo de Maxwell [3] indicarían que la luz se regia por unas leyes distintas a las contempladas en esa época, este descubrimiento y las ecuaciones de Maxwell-Hertz serian las bases del trabajo publicado por Einstein sobre la relatividad especial [4], y posteriormente los estudios de Johann Kepler y Isaac Newton brindarían las herramientas teóricas necesarias para la postulación de la teoría de la relatividad general [5], teniendo como pilar fundamental al principio de equivalencia que permite explicar fenómenos como los lentes gravitacionales y la anomalía de la órbita de mercurio [6].

Tomando en cuenta lo anterior, se buscará aportar la memoria de estos científicos con un texto de valor pedagógico, al presentar de forma general los conceptos relativistas desde una perspectiva que muestre las características inherentes a la investigación científica; la formulación de teorías matemáticas, la verificación experimental de las mismas y la formulación de nuevos teoremas [7], formando un punto de referencia para estudios más focalizados de la teoría empleada en este trabajo.

Este trabajo estará organizado de la siguiente forma, en la sección 2 se abordará el desarrollo teórico que sentó las bases del trabajo de Albert Einstein para su teoría de la relatividad, bases que permitirán entender el comportamiento de la luz y el medio por el cual es emitida. En la sección 3, se procederá a exponer el trabajo y los postulados de Johann Kepler y Isaac Newton en el área de las orbitas planetarias y la gravitación, presentando los conceptos necesarios para comprender la relatividad general. En la sección 4 se describirán el problema de los dos cuerpos, el estudio de la anomalía de la órbita de mercurio y mecanismo detrás de los lentes gravitacionales, dichos estudios secuencialmente evidenciaron la valides de la relatividad general.

Universidad del Bío-Bío. Red de Bibliotecas – Chile

2. La Ruptura de los Conceptos Clásicos

Primero es necesario mencionar que la relatividad cimienta su historia a partir del trabajo de Galileo al postular leyes físicas, que representan un sistema de inercia que mantiene en sus sistemas de coordenadas las magnitudes que estos poseen, haciendo a uno indistinguible del otro en el mismo marco inercial [8]. El principio de relatividad postulado por Galileo en 1632 puede ser representado como lo muestra la figura 1, donde se muestran dos sistemas de coordenadas cartesianas: Uno con coordenadas t, x, y, z y otro con t', x', y', z' que se mueve en dirección x con velocidad v, coincidiendo ambas en el tiempo t=t'=0 [9], con esto se producen la relaciones (1) que nos permiten calcular las posiciones de cualquier fenómeno que posea un movimiento relativo al nuestro.

$$x' = x - vt \quad y' = y \quad z' = z \quad t' = t \tag{1}$$

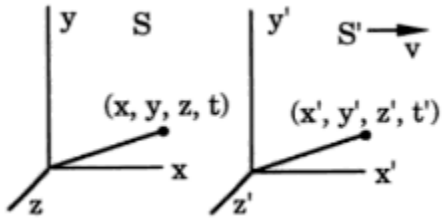

Figura 1: Representación galileana de dos sistemas de coordenadas en un contexto relativista. Extraído de R. A. Mould, Basic relativity. Springer Science & Business Media, 2001 pp 42.

Para esta época, dada las propiedades ondulatorias de la luz, se mantenía la aceptación del éter [2] concepto empleado en su momento para evitar la idea de un espacio vacío fuera de la atmosfera terrestre que, como veremos a continuación, sirvió como modelo teórico para explicar el movimiento de la luz en el espacio, a la vez que se evitaba entrar en conflicto con la relatividad galileana, pero en 1887 un experimento que buscaba explicar ciertas inconsistencias en la teoría de la emisión producto del fenómeno de la aberración de la luz [10], pondría en duda este concepto aristotélico apoyándose en la teoría aceptada.

Durante el contexto de la teoría de la emisión de la luz, Augustin Jean Fresnel entrego una observación de los experimentos de Arago [11] donde se esperaba que la luz emitida por estrellas presentara diferentes velocidades luego de sufrir una refracción al pasar por un prisma (lo cual no fue así), dicha observación concluyo que los resultados se debían a la influencia del éter, que poseía una densidad al igual que un prisma, otorgándole una característica propia de un medio, siendo capaz de producir una refracción previa a la que fue considerada por el experimento en cuestión, por lo tanto ambos se encontraban afectados por el movimiento de la tierra, concluyendo así que el éter se encuentra parcialmente retenido dentro de la atmósfera terrestre, como un material elástico con su propia constante de elasticidad que varía dependiendo del medio, aunque las diferentes longitudes de onda apreciadas a través de un fractal requerían un éter distinto, para cada

Universidad del Bío-Bío. Red de Bibliotecas – Chile

medida de longitud si se quería mantener esta explicación, esto planteo un problema que atrajo la atención de la comunidad científica a la discusión sobre las características del éter y su relación con la luz [12].

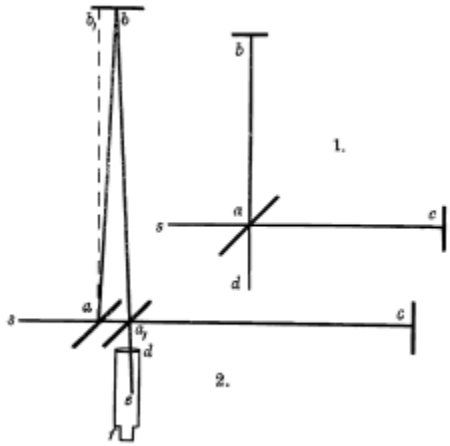

Figura 2: Esquema básico del interferómetro de Michelson-Morley. Extraído de. A. Michelson and E. W. Morley, "On the relative motion of the earth and the luminiferous ether," Am. J. Sci., vol. 34, pp. 333–345, 1887.

Considerando la observación anterior, en el experimento de Michelson-Morley de 1887 como lo muestra la figura 2, se dispusieron dos espejos (b) y (c) alineados con un espejo semi plateado (a), de tal forma que el haz de luz proveniente de la fuente (s) sufriera una refracción separándose hacia (b) y (c), volviendo a unirse en el receptor (d) formando una imagen, al disponer este sistema de tal modo que el camino (sc) estuviera alineado con el movimiento de la tierra, se esperaba que el éter interactuará con la luz que viaja por (ab) viajando por un camino más extenso que (ac). Al rotar todo el sistema 90 grados, se esperaba apreciar una distorsión en la imagen producto del movimiento relativo de la tierra y el éter, pero el resultado que obtuvieron no se pudo atribuir al actuar del éter como era conocido hasta el momento, se barajaron teorías en el trabajo de 1887 de Michelson-Morley [10], incluyendo que el éter se encontraba estático en la superficie del planeta a diferencia del espacio exterior mencionando el trabajo de Stokes y la existencia de un potencial que cuantifica dicho fenómeno teórico.

Si bien el éter no presentaba problemas para la relatividad galileana, los experimentos de Arago demostraron cualidades de la luz que solo complicaban el panorama para las explicaciones basadas en el éter, a partir de estos experimentos, la visión de la luz y sus propiedades comenzaron a necesitar explicaciones demasiado elaboradas, como los distintos éteres para cada color de luz que se obtenían con un prisma. La comunidad científica de la época poseía un punto de atención para la teoría aceptada y dicha atención solo desemboco en más experimentos, que traerían nuevas características para la luz y su propagación.

Universidad del Bío-Bío. Red de Bibliotecas – Chile

2.1. Midiendo a través de una Constante

Hasta el momento se ha hablado del movimiento de la luz respecto al medio sin mencionar valores específicos, mi intención con esto era presentar la incertidumbre de la época antes de tratar las certezas que se tenían, para este punto es necesario comprender la naturaleza del valor que se le atribuye a la luz en el vacío. Comenzando con la teoría electromagnética de la luz [3], se estableció la velocidad para una onda que se mueve en el plano del campo electromagnético, a través de la deducción de la ecuación mostrada en (2) presentando valores similares para V de velocidades de ondas electromagnéticas y rayos de luz en experimentos recientes para la época.

$$V = \pm\sqrt{\frac{k}{4\pi\mu}} \tag{2}$$

En esta fórmula el coeficiente k representa a la "elasticidad eléctrica" y μ corresponde al valor del coeficiente k según el medio de emisión

- Los valores de la velocidad de ondas electromagnéticas obtenida en el experimento de MM. Weber & Kohlrausch (310.740.000 m/s)
- Mediciones de la velocidad de la luz en experimentos ópticos realizados por M. Fizeau's (314858000 m/s) y M.Foucault (298000000 m/s)
- La velocidad de la luz en el espacio que rodea la tierra, al ser deducida a partir del coeficiente de aberración de la luz y en el aquel reciente valor del radio del planeta tierra (308000000 m/s)

Esto para Maxwell sugería que la luz y el magnetismo son fenómenos provenientes de un mismo medio, la luz se comporta como una onda que se propaga siguiendo las leyes del campo electromagnético, por lo tanto, solo a través del análisis de estos fenómenos se lograría obtener una medición más precisa según lo indicado en la sección 97 de su trabajo de 1865 [3].

El uso de los fenómenos eléctricos y magnéticos comenzaron a ser más adecuados para medir la velocidad de la luz, como los métodos que emplearon la dualidad entre la longitud de onda y la frecuencia de emisiones de laser, en los que se obtuvieron mediciones con un minúsculo margen de error en la anterior década de los 70's [13]: dependiendo del material que produzca la emisión del láser, se obtienen distintas ondas con frecuencias que, permiten trabajar con la relación que posee con la longitud de la onda emitida, para el caso del láser de metano estabilizado con una longitud de onda de $3{,}39 \times 10^{-9}$ m y una frecuencia de 88.37 THz, se obtiene una velocidad de luz de $c = 299\,792\,456{,}2$ m/s con un margen de error de $3{,}5 \times 10^{-9}$ m/s. Este valor es lo suficientemente preciso para estudiar las propiedades de la luz y, en términos prácticos para este trabajo nos referiremos a la velocidad de la luz como c, valor que se teoriza [14], posee muchos orígenes todos igualmente complicados de corroborar, pero es útil para identificar el valor en la estructura de los coeficientes relacionados a la constante del movimiento de la luz.

Universidad del Bío-Bío. Red de Bibliotecas – Chile

Una de las visiones que la comunidad científica mantenía sobre el experimento de Michelson-Morley desde inicios del ultimo siglo [1], posicionaba a los resultados obtenidos como una base dentro del largo camino de desarrollo teórico, que culmino en la teoría de la relatividad especial, al presentar una situación que podía ser explicada al plantear una hipótesis, sustentada en torno al movimiento de la luz compensada por una contracción que actúa en la dirección de la misma, esta hipótesis fue retomada de forma cuantitativa por Lorentz al postular su sistema de trasformaciones de movimiento relativo, donde fue necesario una especie de tiempo local para describir las propiedades del sistema de movimiento, hasta que finalmente en septiembre de 1905, Einstein publico su estudio donde desarrollo la teoría de la relatividad especial a partir de dos postulados.

1. "Todas las leyes físicas son iguales en todos los sistemas inerciales de coordenadas"
2. "La velocidad de la luz en el vacío es constante para todos los sistemas inerciales de referencia"

Estos postulados [15], fueron necesarios para resolver las incongruencias que presentaba la teoría de la época: las leyes de Maxwell ampliamente probadas, eran inconsistentes dentro del plano de las trasformaciones de Galileo y por lo tanto, incongruentes con la física clásica que aceptaba y empleaba al éter como un sistema de referencia universal para los movimientos uniformes, esto significó un cambio en la visión del espacio y el tiempo ya sustentada por las experiencias cotidianas, donde los conceptos como la longitud dentro de esta nueva visión ya no son absolutos, debido a que la medida empleada para determinarlos es capaz de variar dependiendo de la velocidad relativa entre el observador y el objeto medido, esta teoría al ser postulada no considero a la gravitación hasta 1915, cuando se separan las dos teorías de la relatividad de Einstein en relatividad Especial y relatividad General. Las trasformaciones de Lorentz [16] vuelven a conectar dos puntos de inercia S y S' al igual que la teoría clásica (figura 1), tomando una orientación en los ejes espaciales con t = 0 como punto de partida en común, sustentándose [17] en la invariabilidad de la velocidad de la luz de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - vt) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \gamma(t - \frac{vx}{c^2}) \end{aligned} \tag{3}$$

Sistema de coordenadas de las trasformaciones de Lorentz extraído de R. A. Serway and J. W. Jewett, Física para ciencias e ingeniería con física moderna. Cengage Learning Editores, 2009.

Donde:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{4}$$

Es el factor de contracción de Lorentz (4) que nos permite convertir las medidas entre ambos puntos de referencia [18], este factor en situaciones cotidianas no produce cambios

Universidad del Bío-Bío. Red de Bibliotecas – Chile

significativos dado que, cuando $v^2/c^2 \to 0$ debido a la gran diferencia entre los valores de v y c, siendo c mucho mayor, el factor de contracción puede ser considerado con valor 1 que, en términos prácticos es una conversión despreciable por su baja influencia en el movimiento relativo. Por lo tanto, el actuar de este factor solo puede ser apreciado bajo extremas condiciones, donde la velocidad del cuerpo pueda ser medida en fracciones de la velocidad de la luz, es decir, cuando γ cumpla la condición $1 > v^2/c^2 \gg 0$. En la figura 3 se muestra el comportamiento del factor explicado anteriormente de una forma más visible, para todos los movimientos cotidianos el factor expresa valores extremadamente cercanos a 1, aumentando de forma explosiva para movimientos de velocidades cercanas a la velocidad luz hasta que deja de ser aplicable debido a la indeterminación del mismo factor.

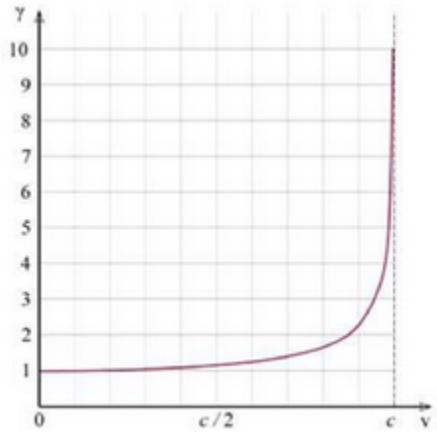

Figura 3: Valores expresados por el factor de contracción de Lorentz en función de la velocidad del cuerpo en movimiento (nótese como poco antes de llegar a la mitad de la velocidad de la luz el factor de contracción de Lorentz comienza a tener valores considerables), extraído de A. Palazzi, Relativity from Lorentz to Einstein: A Guide for Beginners, Perplexed and Experimental Scientists. GogLiB, 2018.

Ubicando a la luz como un fenómeno electromagnético, la realidad como era percibida por la comunidad científica cambio irremediablemente, algunos fenómenos que podían ser fácilmente atribuidos a la acción del éter comenzaron a regirse por otros mecanismos que requerían conceptos poco cotidianos donde el tiempo y las distancia no significaban lo mismo para dos puntos inerciales de referencia distintos. Las trasformaciones de Lorentz presentaban un universo más dinámico, pero ¿Cómo era afectado el movimiento en este nuevo paradigma?, ¿Cómo un cuerpo afectado por una contracción puede experimentar distancias y tiempos distintos sin modificar la energía de un sistema?, los estudios astronómicos de Einstein y demás científicos presentarían la respuesta a estas preguntas, siendo necesario cambiar aún más la física aceptada.

Universidad del Bío-Bío. Red de Bibliotecas – Chile

2.2. Masa y Energía del Movimiento

Einstein dedujo en 1905, basándose en las ecuaciones de Maxwell-Hertz para el espacio vacío, junto con las ecuaciones de Maxwell de la energía electromagnética [4] que, la masa de un cuerpo es una medida de la energía que posee y estas dos mediciones son transformables entre sí, por un fenómeno que fue referido como una emisión y absorción de radiación, aun cuando masa (m) y energía (E) poseen unidades de medidas fundamentales distintas entre sí. Actualmente sabemos que este fenómeno puede ser expresado con la ecuación (5) definida como energía en reposo [19], definición que ha sido revisada y debatida demostrando que esta trasformación debe respetar las reglas de la conservación de energía, y por lo tanto la conservación del momento al involucrar un movimiento que posea una respectiva energía cinética.

$$E = mc^2 \tag{5}$$

Definición de Einstein para la Energía en reposo de un cuerpo (E) siendo esta igual a la masa del cuerpo (m) multiplicado el cuadrado de la velocidad de la luz (c^2). Extraído de M. J. Feigenbaum and N. D. Mermin, "E=mc2," American Journal of Physics, vol. 56, no. 1, pp. 18–21, 1988.

Para una partícula que describa un movimiento lineal en un plano relativista [20] surge el concepto de momento relativista, extraído de la mecánica clásica adicionando el actuar del factor de Lorentz mostrado en la ecuación (6), cuando $\gamma \to 1$ esta energía se mantiene al no existir influencia externa que afecte a este sistema aislado de movimiento, como es el caso de partículas en el vacío, se presenta un nuevo fenómeno que afecta la masa de dicho sistema provocando que esta aumente junto con la velocidad, siendo denominada como masa relativista de una partícula que puede ser convertida a energía relativista empleando la definición (5) y el factor de Lorentz. Al trabajar con estas definiciones, se deriva la ecuación (7) movimiento que involucra un trabajo a considera al momento de expresar la energía neta de una partícula en estas condiciones, manteniendo la imposibilidad de una partícula con masa de viajar a la velocidad de la luz, debido a su alto costo energético cuando $v = c$.

$$\overrightarrow{p} = \frac{m\overrightarrow{u}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \gamma m \overrightarrow{u} \tag{6}$$

$$E^2 = p^2c^2 + \left(mc^2\right)^2 \tag{7}$$

Ecuación (6): momento lineal relativista $\overrightarrow{p}$ para una partícula con masa que se mueve a una velocidad $\vec{u}$, Ecuación (7): Energía total de una partícula en relación a la cantidad de movimiento lineal relativista. Extraído de R. A. Serway and J. W. Jewett, Física para ciencias e ingeniería con física moderna. Cengage Learning Editores, 2009.

Universidad del Bío-Bío. Red de Bibliotecas – Chile

Sabemos que la constancia de la velocidad de la luz no ha tenido contradicciones hasta el momento. En el caso de los fotones [21] es especialmente extraño que todos posean la misma velocidad, siendo que su energía medida en función de la frecuencia, varia en gran magnitud entre los distintos espectros de la luz visible, la respuesta para este problema posee la misma característica que las demás explicaciones dadas hasta este punto, la velocidad de la onda al ser calculada a partir de distintas frecuencias que difieren en su energía en rangos de 10^{15}, solo se obtienen resultados que varían (con cierto margen de error) en un 1 %, esto habla de la importancia del aumento en la velocidad y la energía que poseen partículas como los electrones que, son capaces de alcanzar una velocidad de una fracción de c, requiriendo de enormes cantidades de energía solo para aumentar una minúscula cantidad su velocidad, por lo tanto existe una expresion de la ecuación (7) que caracteriza la energía de los fotones, en función de su momento p debido a su inexistente masa.

$$E = pc \tag{8}$$

Ecuación (8): Expresión de la Energía total de una partícula sin masa como los fotones. Extraído de R. A. Serway and J. W. Jewett, Física para ciencias e ingeniería con física moderna. Cengage Learning Editores, 2009.

Para finalizar esta sección, es necesario destacar que el cambio de la perspectiva que tenemos de nuestro mundo, ha cambiado gracias a los estudios que se han llevado a cabo sobre los misterios que este posee, en términos prácticos para el estudio científico: los antiguos conceptos tienden a ser modificados y profundizados al emplear modelos que sean capaces de medir nuestra realidad empleando constantes que brindan un punto de referencia para cada fenómeno de estudio, trayendo consigo nuevas interpretaciones que se sustentan en el trabajo de previos autores, generando herramientas teóricas útiles para una comunidad que constantemente busca lograr una mayor comprensión de lo que nos rodea.

Universidad del Bío-Bío. Red de Bibliotecas – Chile

3. Cuerpos que Ejercen Fuerza sin Contacto

La relatividad de Einstein previamente descrita establece relaciones entre planos referenciales de inercia, para profundizar en la teoría de la relatividad general es necesario comprender la teoría de gravitación previa al trabajo de Einstein en esta área, comenzando con el trabajo de Johann Kepler que, si bien no es el punto de partida para la astronomía, formulo las leyes que explican el movimiento de los cuerpos celestes cuyo estudio fue continuado por Newton al explicar la fuerza responsable detrás de dicho movimiento.

Johann Kepler luego de una larga carrera, se convirtió en el Matemático imperial de la corte del Emperador Rudolf II en Praga en el año 1601 [5] , en ese periodo de tiempo, el aristócrata Tycho Brahe murió dejando una valiosa colección de datos observacionales precisos, los cuales fueron empleados por Kepler, a pesar del nulo interés del emperador por estos estudios, este le ofreció financiamiento al entregarle los medios necesarios para satisfacer su interés en la excentricidad de la órbita del planeta Marte que, era más larga en comparación con la de otros planetas. Estos estudios llevaron a la publicación de su libro Astronomia Nova (Nueva Astronomía) en el año 1609, donde publico sus dos primeras leyes para el movimiento de los planetas, en un manuscrito posterior, dejó entrever su punto de vista teológico junto con su tercera ley, describiéndola como un trabajo armonioso orquestado por Dios debido al valor preciso de los exponentes en los factores.

A pesar de la importancia que tienen las leyes de Kepler, la tercera recibe una mayor atención en la literatura:

1. La órbita de cada planeta es una elipse, con el Sol en uno de los focos
2. La línea que une a los planetas con el Sol forma áreas idénticas en intervalos idénticos de tiempo
3. El cuadrado del periodo del movimiento de un planeta es proporcional al cubo de la mitad de su distancia al Sol

Kepler vio sus esfuerzos con mucha modestia, agradeciendo a Dios por permitirle entender una pequeña porción de su infinito trabajo, otorgándole las condiciones y habilidades para llegar a ese logro. Esto se diferencia mucho de la percepción que se tiene actualmente de su trabajo, estas leyes marcaron el comienzo de un notable periodo en la historia de las matemáticas, al sentar los precedentes necesarios para el trabajo de Isaac Newton [5].

Hasta este punto el trabajo de Kepler permitía describir el movimiento de los cuerpos celestes, basándose en observaciones y datos obtenidos de estudios anteriores, aun así, el movimiento de los planetas tenía un misterio más grande que descubrir, ¿Cómo es posible dicho movimiento? ¿Qué fuerza es capaz de mover objetos tan grandes?, estas preguntas son imposibles de respondes quedándonos solamente con Kepler, hace falta exponer el trabajo de Isaac Newton para tener una respuesta a estas preguntas, trabajo que tiene sus orígenes en una época muy difícil.

Universidad del Bío-Bío. Red de Bibliotecas – Chile

El brote de la peste bubónica le dio al en aquel entonces estudiante de la Universidad de Cambridge Isaac Newton, unas vacaciones de 18 meses a partir de 1665 donde dedico su tiempo libre al estudio de fenómenos cotidianos [5], la caída de una manzana inspiro a Newton a preguntarse qué fuerza causaba este movimiento, extendiendo este pensamiento a la propia Luna, utilizo un valor aproximado para la desconocida fuerza de gravedad del famoso experimento de Galileo en la Torre de Pisa. Sus cálculos empleando ese valor estuvieron erróneos, frustrándolo y alejando su interés de ese problema llevándolo a trabajar en el desarrollo del teorema del Binomio, la composición de la luz blanca, entre otros cálculos, esto le hizo merecedor de un puesto como profesor en 1667, trabajando para misma universidad donde estudio.

Este problema hubiera quedado en el olvido para Newton, pero el descubrimiento del Cometa Halley en 1684 y los estudios que este descubrimiento provocó, llevo a Edmond Halley a preguntar casualmente a Newton durante una visita a Cambridge, sobre el mecanismo responsable del movimiento elíptico de los cuerpos celestes, llevando a este profesor de vuelta a sus estudios realizados durante sus vacaciones sorpresa de 18 meses, dando una respuesta inmediata sobre el problema [5].

El trabajo fue publicado en 1687, donde Newton introdujo sus tres leyes del movimiento:

1. Cada cuerpo continúa en su estado de reposo, o en un movimiento uniforme en línea recta, hasta que sea forzado a cambiar su estado por fuerzas que actúen sobre él

2. El cambio de movimiento es proporcional a la fuerza que actúa sobre un cuerpo y se realiza en línea recta a la dirección en la que dicha fuerza es aplicada

3. Para cada acción siempre habrá una reacción opuesta de igual magnitud o, las acciones mutuas de dos cuerpos sobre cada uno de ellos siempre serán iguales y opuestas

El concepto de masa como tal, fue introducido por Newton al referirse a la cantidad de materia de un cuerpo, y desde entonces ha sido una unidad de medida fundamental para la física que, junto con el concepto de fuerza, son los dos pilares fundamentales de la Física Newtoniana en el contexto de la dinámica, manteniendo aspectos clásicos de la geometría al construir su trabajo en base a explicaciones matemáticas que comprueban la validad de sus conclusiones, formuladas a partir de la evidencia y observaciones críticas del movimiento, en entornos libres de la resistencia que proveen los fluidos, siendo capas de calcular el movimiento de cuerpos celestes, demostrando que estos siguen secciones cónicas trazando elipses en algunos casos [22].

Edmond Halley manifestó de primera mano el genio que era Newton, luego de llevar años trabajando en el fenómeno que presenta la trayectoria de los planetas mas alejados del Sol, que se trasladan periodos más extensos no porque su trayectoria fuera mas larga, sino porque su velocidad es menor y, al momento de leer el trabajo de Newton "On the Motion of Bodies in Orbit", se dio cuenta que el trabajo de ambos convergía a una misma conclusión [23], entrando en concordancia con las leyes de Kepler que ya describían un movimiento elíptico en los planetas, sin llegar a estipular que esto se debía a una fuerza,

Universidad del Bío-Bío. Red de Bibliotecas – Chile

la fuerza de gravedad, la cual dependía de la masa de los cuerpos m y m', dividida entre el cuadrado de la distancia entre ellas r^2, relación mediada por la constante universal de Newton G.

$$F = G\frac{mm'}{r^2} \tag{9}$$

Fuerza de Gravedad de Newton. Extraído de R. A. Serway and J. W. Jewett, Física para ciencias e ingeniería con física moderna. Cengage Learning Editores, 2009.

La ecuación (9) [24] emplea una constante universal $G = 6,67 \times 10^{-11} \frac{Nm^2}{Kg^2}$, cuyo valor fue calculado experimentalmente por Cavendish empleando una balanza de torsión como lo muestra la figura 4.

3.1. Balanza de Torsión de Cavendish

Teniendo identificada la fuerza responsable del movimiento de los planetas, su estudio estaría restringido a observaciones de sistemas naturales, entornos que no están libres de influencias externas. Se necesitaba experimentar con esta fuerza para obtener datos a escalas prácticas para ser trabajadas en laboratorios, permitiendo aislar la acción de la fuerza de gravedad como fue el caso del experimento de torsión de bolas de plomo ideado por Cavendish.

Este experimento abre las puertas para hablar de la gravedad y como estudiarla experimentalmente [25], primero, el experimento de Cavendish fue creado con el fin de evidenciar el actuar de un fenómeno, en un sistema lo suficientemente aislado para calcular la influencia de la fuerza a estudiar, la balanza de torsión de Cavendish mostrada en la figura 4, requería estar cubierta completamente para evitar la influencia de brisas de viento sobre las bolas de plomo, que al ser afectadas por la fuerza de gravedad, se movían ejerciendo torsión sobre el cable del cual se sostenían, esto genero la herramienta matemática apropiada para calcular la masa de la tierra, obteniendo una explicación lo suficientemente elaborada, para describir como se mueve la tierra alrededor del Sol, pero no que provoca este movimiento, no se ha encontrado mecanismos que expliquen la gravedad en función de otros fenómenos ya conocidos, se pueden hacer algunos paralelismos con la atracción eléctrica, pero unificar ambos fenómenos en una misma propuesta genera más problemas que los que soluciona.

Segundo, la definición de la gravedad de Newton considera un efecto instantáneo [25], implicando un efecto gravitacional que supera la velocidad de la luz, y como se habló anteriormente, la velocidad de la luz es la velocidad limite que se puede alcanzar, por lo tanto, el trabajo de Eintein sobre la ley de gravitación de Newton, permitió entender otros fenómenos gravitacionales empleando la relatividad, al considerar a la masa y la energía como dos aspectos de un cuerpo convertibles entre sí, de esta forma surge una explicación que puede ser empleada para describir fenómenos como el objeto de estudio de este trabajo.

Universidad del Bío-Bío. Red de Bibliotecas – Chile

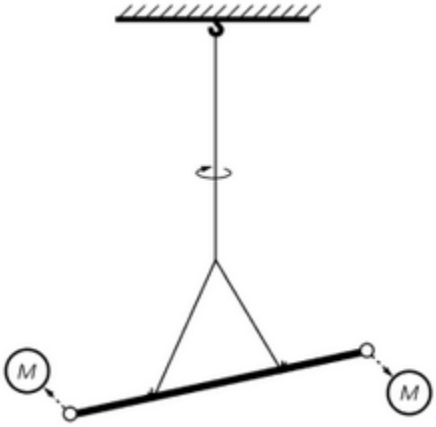

Figura 4: Diagrama simplificado de la balanza de torsión empleada por Cavendish para calcular la Constante Gravitacional empleando dos masas M. Extraido de R. Feynman, R. Leighton, M. Sands, E. L, H. D, C. Heras, J. Marfil, and R. GómezLecciones de fisica de Feynman, I: Mecanica, radiación y calor. Ediciones Científicas Universitarias, FCE - Fondo de Cultura Económica,2019.

Este experimento logro aislar la fuerza de gravedad, pero esta por sí sola no es suficiente para llegar a entender cómo funciona en la naturaleza, ¿Cómo actúa esta fuerza en un entorno sin puntos de anclaje? Como lo es el espacio exterior, en este punto era necesario involucrar a la matemática a un nivel más profundo dentro de este estudio. Un punto de inicio para esto, es el problema de los dos cuerpos que, permitió estudiar los sistemas planetarios al plantear un sistema idéntico al de los cuerpos celestes, con restricciones similares.

Universidad del Bío-Bío. Red de Bibliotecas – Chile

4. Pruebas Astronómicas de la Relatividad

El problema de los dos cuerpos involucra una serie de estudios en torno a la interacción gravitatoria en un sistema aislado [26]. Este problema ha sido ampliamente estudiado debido a su simplicidad y por tener una solución analítica, sirviendo como modelo para resolver otros problemas de mecánica celeste y de carácter cuántico como lo fue la solución de los átomos hidrogenoides. El trabajo Newton dio la solución para este problema, con su teoría fuertemente cuestionada en su época, por basar su modelo en una interacción que no requiere un contacto directo, pero el posterior cálculo de la trayectoria de Urano por los matemáticos Le Verrier y Couch en 1845, puso en evidencia la eficacia de la teoría de Newton al predecir la existencia del planeta Neptuno.

Para comenzar con este problema se debe hacer la consideración que dos cuerpos interactúan gravitacionalmente sin ser sometidos a ninguna fuerza externa, siendo considerados como masas puntuales, generando así las condiciones para trabajar el problema sobre la Tercera Ley de Newton donde la fuerza que ejerce la masa A es inversa a la fuerza que ejerce la masa B [26].

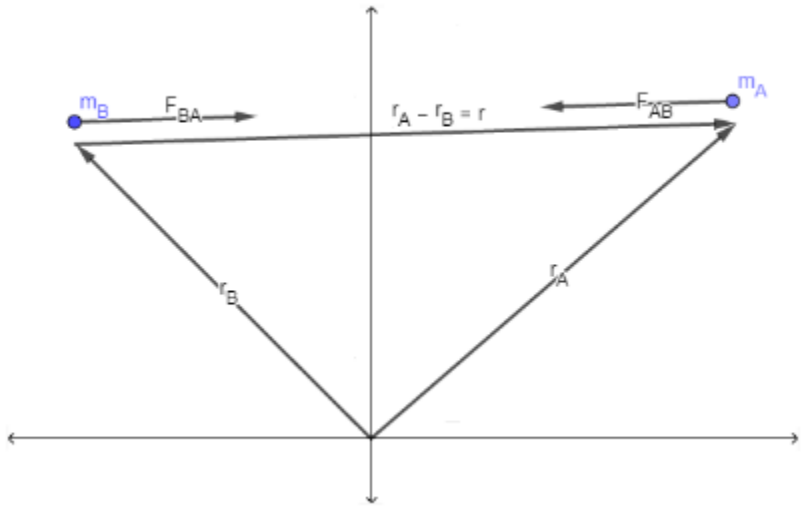

Figura 5: Diagrama de cuerpo libre del sistema planteado para el problema de los dos cuerpos

En la figura 5 se ubican las masas puntuales m_A y m_B en un marco de referencia inercial cuyo origen es distinto a la posición de las masas, pudiendo así analizar los radios vectoriales r_A y r_B que se dirigen desde dicho marco hasta cada uno de los cuerpos, donde F_{AB} es la fuerza gravitacional que ejerce la masa A sobre la masa B y F_{BA} que corresponde a la fuerza gravitacional que ejerce la masa B sobre la masa A con una distancia central expresada por r [26]. Como ya sabemos, la fuerza de atracción entre los cuerpos

Universidad del Bío-Bío. Red de Bibliotecas – Chile

únicamente depende de las posiciones relativas entre ellos, en este caso se puede emplear la ecuación (9) como formula general del sistema, para llegar a la solución del problema se puede simplificar considerablemente, describiendo el movimiento del sistema en base al movimiento de su centro de inercia y el de sus puntos con respecto a esto.

Como la fuerza es conservativa, se expresa el sistema a través de la formulación de Lagrange o el Langrangiano del sistema, que se sustenta en el grado de libertad del movimiento de los cuerpos que interactúan, permitiendo deducir nuevas formas de interacción entre partículas [27], en este caso permite definir el movimiento de un cuerpo con masa a lo largo de un campo exterior con relación a un punto de origen fijo, permitiendo así dar una solución al problema de los dos cuerpos desde el punto de vista clásico, generando las herramientas necesarias para trazar las trayectorias de orbitas según su velocidad angular en relación al punto de origen a través de la siguiente expresión.

$$\varphi = \sqrt{\frac{2\left(E + \frac{Gm_A m_B}{r}\right)}{m_B r^2}} \tag{10}$$

Donde E corresponde a la energía del sistema y φ corresponde al ángulo del área expresada en la segunda ley de Kepler el cual es utilizado para derivar la velocidad angular de la órbita, y m_B la masa en movimiento a través del campo exterior. Los valores del radio r varían dependiendo del tipo de orbita [26], siendo necesario explicar tres casos notables:

Universidad del Bío-Bío. Red de Bibliotecas – Chile

Caso 1:

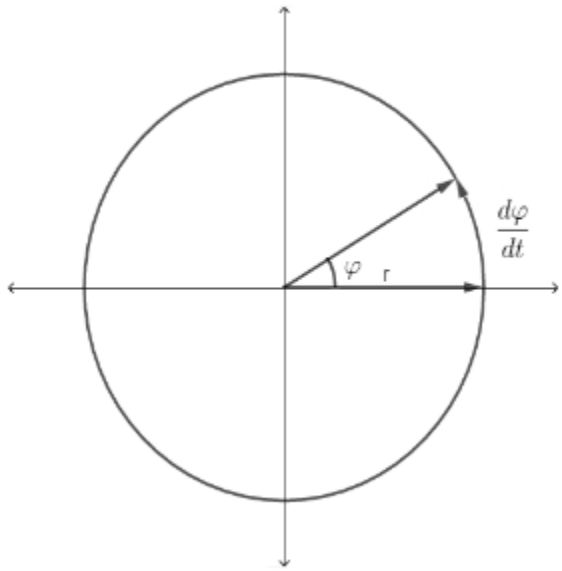

Figura 6: En este caso tanto el radio o distancia entre los dos cuerpos, como la velocidad angular son constantes, dando origen a una órbita completamente circular.

Universidad del Bío-Bío. Red de Bibliotecas – Chile

Caso 2:

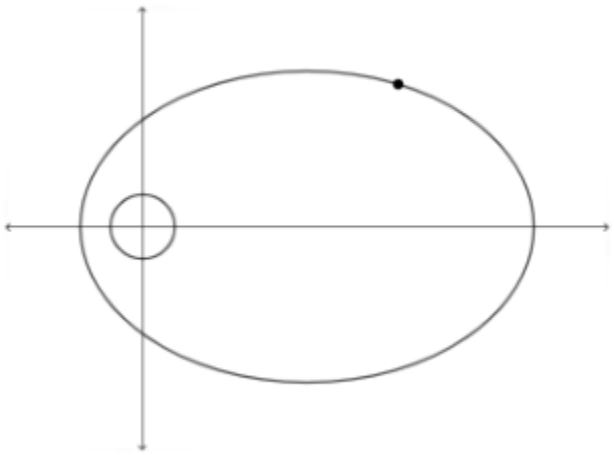

Figura 7: En este caso el radio r varia a lo largo de dos puntos teniendo un radio mínimo $rmin$ y un radio máximo $rmax$ lo que indica que la órbita ya no es circular, a pesar del aumento en el radio máximo, el cuerpo orbitante no puede salir de la órbita que traza en la elipse.

Universidad del Bío-Bío. Red de Bibliotecas – Chile

Caso 3:

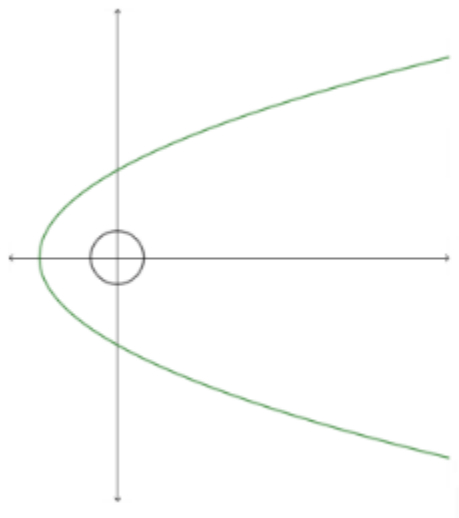

Figura 8: En este caso la diferencia entre $rmin$ y $rmax$ es extremadamente alta, llegando a algunos casos a no poseer radio maximo, en este tipo de orbitas se dan las condiciones para que el cuerpo orbital abandone la órbita sobre todo si esta presenta la forma de una hipérbole.

Si bien estos modelos poseen aplicaciones para trazar orbitas, se basan en un modelo idealizado, el problema previamente presentado necesitaba asumir que la masa del cuerpo orbitante es insignificante, que ambos cuerpos son esféricos y de densidad uniforme para tratarlos como una masa puntual y por último que ninguna otra fuerza actúa sobre el sistema [5]. Con estas consideraciones, se trabajo en un marco simplificado que, si bien permite generar los primeros teoremas para hilar los fenómenos a unas escalas mas complejas, genera otros problemas que significan otro obstáculo a romper cuando se desarrolla nueva teoría.

Con estos modelos las interacciones son de carácter instantáneo, lo cual va en contra de los postulados de la relatividad, y solo se consideran orbitas fijas en donde no existe una precesión como lo muestra la figura 9. El problema que presento la trayectoria de mercurio es un fenómeno interesante para profundizar en el trabajo de Einstein sobre la Gravitación de Newton, considerado uno de los problemas que otorgaron pruebas empíricas de la teoría de la relatividad general, el movimiento de mercurio sigue una órbita elíptica que, a diferencia de otros planetas, cambia el punto donde pasa más cerca del Sol como si la órbita también siguiera otra mayor, así fue en aquel entonces un problema que no pudo ser solucionado con la ley de gravitación clásica de Newton [28].

Universidad del Bío-Bío. Red de Bibliotecas – Chile

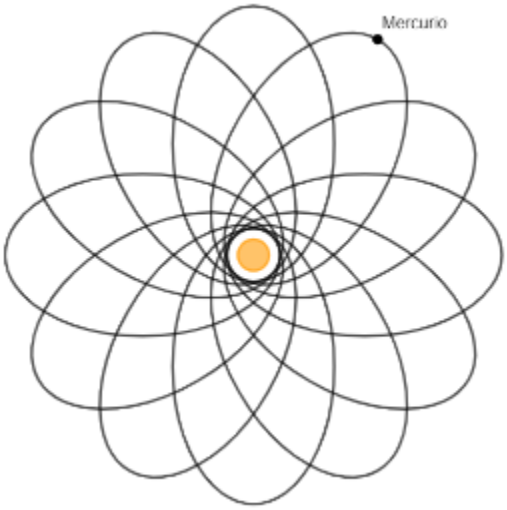

Figura 9: Precesión de la órbita de Mercurio (exagerada). Extraído de Luis Yesid Cortés Maldonado. Aproximación al problema de los dos cuerpos. En: Universidad Pedagógica Nacional, (2021).

Se manejaron numerosas explicaciones dentro de este marco; la existencia de un nuevo planeta anterior a mercurio, avalado por el físico francés Leverrier recibiendo el nombre de Vulcano, un aumento en el exponencial de la distancia en la ecuación (9), permitiendo adecuar el problema a la teoria, pero dejaba de funcionar para el resto de cuerpos celestes, la nueva visión de Einstein sobre la dinámica de los cuerpos difirió de la teoria clásica, al presentar su principio de equivalencia que, presentaba resultados con un margen de error menor a la definición matemática de un espacio tiempo plano [28], la imagen que se mantenía sobre el espacio, fue uno de los pilares a destruir si se buscaba solucionar este problema [29], dado que el camino que sigue este planeta no es una elipse en el espacio Newtoniano (plano) sino, un recorrido dentro de un espacio con una curvatura mas pronunciada por la sercania al Sol, cabe mencionar que calcular la curvatura de este espacio no es tarea fácil y hasta el momento han surgido distintos resultados.

El principio de equivalencia de Einstein [30], se sustenta en trasformaciones de coordenadas que no siguen un plano lineal, estas son conocidas como coordenadas geodésicas, que siguen reglas matemáticas, crean un sistema construido en torno a un evento que podemos denominar como E, dando puntos de coordenadas que trazan figuras curvilíneas, cruzándose en un sistema de ejes, este plano curvilíneo permite evidenciar al principio de equivalencia, incorporando en la relatividad general ecuaciones de escritura tensorial que se encontraban en la relatividad especial, donde a través de estas trasformaciones de coordenadas, un cuerpo en caída libre puede cumplir la misma ecuación de movimiento que un cuerpo libre de gravitación o libre de la influencia de la gravedad, es decir, ambos

Universidad del Bío-Bío. Red de Bibliotecas – Chile

eventos cumplen las mismas leyes de la física. Actualmente la curvatura del espacio según Eintein esta definida de la siguiente forma:

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \left(\frac{8\pi G}{c^4}\right) T_{\mu\nu} \tag{11}$$

La ecuación (11) comienza [31] con $G_{\mu\nu}$ el Tensor de Curvatura de Einstein formado por diez coeficientes métricos y describe la curvatura del espacio-tiempo, seguida de $g_{\mu\nu}$ el Tensor Métrico que describe los intervalos del espacio tiempo a través de sus propios coeficientes algunos no descubiertos hasta la fecha, multiplicando a Λ la constante cosmológica de Einstein, todo esto forma parte del producto de un coeficiente con $T_{\mu\nu}$ [32] el Tensor Momento-Energía, dicho coeficiente esta formado por la constante universal de Newton G presente en la ecuacion (9) y la velocidad de la luz en el vacío c, al incorporar ambos elementos nos podemos referir a esta ecuación, como una generalización relativista de la ley de Gravitación de Newton, que se separa del concepto de fuerza de gravedad y describe este fenómeno como el libre movimiento de cuerpos a través de coordenadas geodésicas en un espacio-tiempo curvo.

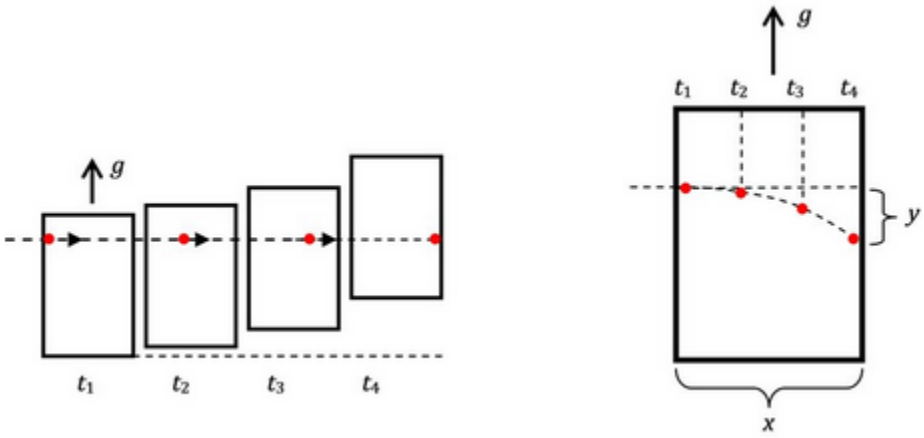

Figura 10: ilustración de los dos planos referenciales del principio de equivalencia

La figura 10 representa el principio de equivalencia, el cual fue considerado por Einstein cómo la base para su teoría de la relatividad general [6], este principio establece que un campo gravitacional uniforme es completamente equivalente a un marco de referencia qué es acelerado uniformemente, es decir cualquier experimento mostrará los mismos resultados en cualquiera de estos dos planos. un ejemplo simple para entender la mecánica detrás del principio de equivalencia es imaginar una nave espacial acelerando constantemente en una región del espacio libre de cualquier influencia gravitacional externa un objeto con masa m dentro de esta nave al estar sobre una balanza ejercerá una fuerza peso de la misma magnitud qué tendría si estuviera sobre la superficie de un planeta cuya aceleración de gravedad sea la misma qué la aceleración de movimiento de dicha nave.

Universidad del Bío-Bío. Red de Bibliotecas – Chile

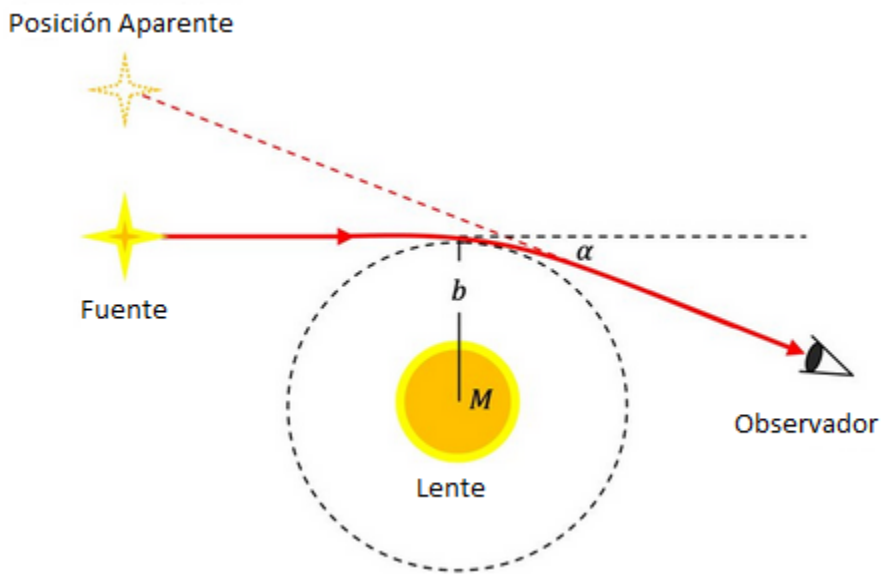

Figura 11: Desviación en la posición aparente de una fuente de luz a través de un lente gravitacional.

A partir de este principio Einstein predijo que un rayo de luz dentro de un campo gravitacional sufriría una desviación en su trayectoria cómo lo muestra la figura 10 dónde se muestran estos dos casos equivalentes, a la izquierda tenemos una perspectiva externa del sistema donde se aprecia el marco de referencia acelerando de forma constante mientras que el haz de luz se mueve a lo largo deben en línea recta, y a la derecha tenemos una perspectiva interna del marco de referencia en dónde producto de la aceleración es posible apreciar un cambio en la trayectoria del haz de luz a escalas muy grandes de distancia en un periodo de tiempo pequeño debido a la alta velocidad de las de luz en el vacío, así la desviación en la trayectoria y dependerá del factor de aceleración o de atracción de gravedad del campo gravitacional [6].

$$\alpha = \frac{4GM}{c^2 b} \tag{12}$$

Angulo de desviación α, donde G es la constante gravitacional de Newton, M corresponde a la masa del cuerpo celeste, c la velocidad de la luz en el vacío y b el radio del lente gravitacional.

Este principio permitió confirmar la primera prueba empírica de la relatividad general apreciada durante el eclipse total de sol en 1919 observado en una expedición en las costas de África, dónde las estrellas que se encontraban detrás de nuestro sol mostraban una posición distinta a la que deberían tener, este fenómeno se produce debido a que los

Universidad del Bío-Bío. Red de Bibliotecas – Chile

cuerpos celestes masivos con una distribución de masa esféricamente simétrica cómo es el caso de una estrella son considerados lentes gravitacionales ya que el campo gravitacional que los rodea desvía los rayos de Luz que pasan cerca de dicho objeto en la figura 11 se ilustra cómo la luz emitida presenta un ángulo de desviación α, el cuál puede ser expresado en función de la masa del objeto M y la distancia mínima entre el rayo de luz y el lente b, cómo lo muestra la ecuación (12) empleada por Einstein anteriormente para predecir está desviación [6].

Universidad del Bío-Bío. Red de Bibliotecas – Chile

5. Conclusión

El problema de la órbita de mercurio y la desviación de la luz en los lentes gravitacionales, como pruebas de la teoría de la relatividad general de Einstein, fueron posibles de entender gracias a todo el trabajo previo que realizaron los científicos mencionados en este trabajo. Los conceptos que fueron destruidos desde el experimento de Michelson-Morley desenvolvieron nuevos misterios a ser resueltos, misterios que fueron descubiertos al poner a prueba una teoría ya aceptada en aquel momento, entrando en contradicción con otras áreas de investigación como fue el caso de las ecuaciones de Maxwell y la relatividad de Galileo, haciendo evidente la necesidad de una corrección en la teoría. El trabajo de Lorentz con las condiciones que presenta el movimiento a la velocidad de la luz, los estudios de Kepler de las orbitas de cuerpos celestes y la fuerza de gravedad acuñada por Newton, crearon unas bases sólidas para la teoría de la relatividad de Einstein, teoría que permitiría el estudio de fenómenos astronómicos complejos que no tendrían forma de ser explicados con la teoría clásica sin requerir de explicaciones excesivamente complejas y rebuscadas.

Todos los avances teóricos mencionados en este trabajo desde la maestría de teoremas previamente desarrollados, poniéndolos a prueba al enfrentar nuevos fenómenos que entraban en discordia con lo aceptado hasta ese momento, creando la necesidad de reformular la teoría hasta llegar a una comprensión más profunda del mundo que nos rodea. Como persona que se dedica a la pedagogía, la forma en la que estos logros fueron obtenidos evidencian el camino que deben tomar los estudiantes de ciencias, la importancia de poner a prueba sus preconcepciones sobre un fenómeno en especifico descubriendo así los puntos débiles de su conocimiento a través del estudio de la naturaleza, como este nuevo aprendizaje funciona en otros casos y problemas teniendo como punto de partida un contexto cotidiano que terminara eventualmente desembocando en áreas más específicas y complejas hasta alcanzar la especialización de un área de trabajo.

Universidad del Bío-Bío. Red de Bibliotecas – Chile

Referencias

[1] Robert S Shankland. "Michelson-Morley experiment". En: *American Journal of Physics* 32.1 (1964), págs. 16-35.

[2] Carl S Helrich. *The classical theory of fields: electromagnetism.* Springer Science & Business Media, 2012, págs. 15-16.

[3] J. Clerk Maxwell. "A dynamical theory of the electromagnetic field". En: *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond.* 155 (1865), págs. 459-512.

[4] Albert Einstein. "Does the inertia of a body depend upon its energy-content". En: *Annalen der Physik* 18.13 (1905), págs. 639-641.

[5] W.D. McClain y D.A. Vallado. *Fundamentals of Astrodynamics and Applications.* Space Technology Library. Springer Netherlands, 2001, págs. 9-11.

[6] Jorge Pinochet y Michael Van Sint Jan. "Einstein ring: weighing a star with light". En: *Physics Education* 53.5 (2018).

[7] J.C. Sánchez. *Metodología de la investigación científica y técnológica.* Editorial Díaz de Santos, S.A., 2011, págs. 46-50.

[8] Hernando Durán Castro. *Proporción, relatividad, simetrıa en hombros de Fibonacci, Einstein y Galois.* Ediciones Uniandes-Universidad de los Andes, 2014, págs. 37-46.

[9] Richard A Mould. *Basic relativity.* Springer Science & Business Media, 2001, págs. 42-44.

[10] Albert Abraham Michelson y Edward Williams Morley. "On the Relative Motion of the Earth and the Luminiferous Ether". En: *Am. J. Sci.* 34 (1887), págs. 333-345.

[11] Kenneth F Schaffner. *Nineteenth-Century Aether Theories: The Commonwealth and International Library: Selected Readings in Physics.* Elsevier, 2016, págs. 125-135.

[12] Rafael Ferraro y Daniel M Sforza. "Arago (1810): the first experimental result against the ether". En: *European Journal of Physics* 26.1 (2004), págs. 195-204.

[13] KM Evenson y col. "Speed of light from direct frequency and wavelength measurements of the methane-stabilized laser". En: *Physical Review Letters* 29.19 (1972), pág. 1346.

[14] Kenneth S Mendelson. "The story of c". En: *American journal of physics* 74.11 (2006), págs. 995-997.

[15] S. Burbano. *Fisica General.* Editorial Tébar, S. L., 2003, pág. 658.

[16] K.N.S. Rao y col. *The Rotation and Lorentz Groups and Their Representations for Physicists.* Wiley, 1988, pág. 210.

[17] Vittorio Berzi y Vittorio Gorini. "Reciprocity principle and the Lorentz transformations". En: *Journal of Mathematical Physics* 10.8 (1969), págs. 1518-1524.

[18] A. Palazzi. *Relativity from Lorentz to Einstein.: A Guide for Beginners, Perplexed and Experimental Scientists.* GogLiB, 2018, sec 2.6.

[19] Mitchell J. Feigenbaum y N. David Mermin. "E=mc2". En: *American Journal of Physics* 56.1 (1988), págs. 18-21.

[20] P.A. Tipler. *Fısica para la ciencia y la tecnologıa: Fısica Moderna (Mecánica cuántica, relatividad y estructura de la materia).* Reverte, 2020, págs. 1342-1344.

Universidad del Bío-Bío. Red de Bibliotecas – Chile

[21] A.P. French, J.A. Peris y J.D. Rico. *Relatividad especial*. Reverte, 2012, págs. 12-14.

[22] R. Iliffe y G.E. Smith. *The Cambridge Companion to Newton*. Cambridge Companions to Philosophy. Cambridge University Press, 2016, págs. 61-62.

[23] C. Sagan y A. Druyan. *Comet*. Random House Publishing Group, 2011, págs. 52-56.

[24] J.L.G. Garcia. *Sistemas de unidades fisicas*. Reverté, 1987, pág. 70.

[25] R.P. Feynman y col. *Lecciones de fiÌsica de Feynman, I: Mecánica, radiación y calor*. Ediciones Cientıficas Universitarias. FCE - Fondo de Cultura Económica, 2019, págs. 7.9-7.12.

[26] Luis Yesid Cortés Maldonado. *Aproximación al problema de los dos cuerpos*. En: Universidad Pedagógica Nacional, (2021).

[27] N. Doughty. *Lagrangian Interaction: An Introduction To Relativistic Symmetry In Electrodynamics And Gravitation*. CRC Press, 2018. ISBN: 9780429973161.

[28] NT Roseveare. "Leverrier to Einstein: A review of the Mercury problem". En: *Vistas in Astronomy* 23 (1979), págs. 165-171.

[29] Gerald Maurice Clemence. "The relativity effect in planetary motions". En: *Reviews of Modern Physics* 19.4 (1947), pág. 361.

[30] L. de la Torre. *Elementos de relatividad*. Colección Ciencia y Tecnologıa. Editorial Universidad de Antioquia, 2008, págs. 205-295.

[31] B. Schutz. *Gravity from the Ground Up: An Introductory Guide to Gravity and General Relativity*. Cambridge University Press, 2003, pág. 258.

[32] Ø. Grøn y S. Hervik. *Einstein's General Theory of Relativity: With Modern Applications in Cosmology*. Springer New York, 2007, págs. 179-180.