



Universidad del Bío-Bío
Facultad de Ingeniería
Departamento de Ingeniería en Maderas
Escuela Ingeniería Civil Química



**DETERMINACIÓN DE TIEMPOS DE COALESCENCIA DE
BURBUJAS EN UN SISTEMA DINÁMICO DE BURBUJEO
MEDIANTE TÉCNICAS COMPUTACIONALES DE
PROCESAMIENTO DE IMÁGENES**

Informe de Habilitación Profesional presentado en conformidad a los
requisitos para obtener el título de Ingeniero Civil Químico

CAMILO ALBERTO SOLAR CARRERA

Profesor Tutor: Dr. Jorge H. Saavedra M.

Profesor Cotutor: Dr. Pedro G. Toledo R.

Concepción, 3 de junio del 2022

RESUMEN

Los sistemas de burbujeo han sido estudiados durante los últimos cien años por investigadores de todo el mundo. En la flotación de minerales de cobre en Chile, se están utilizando recursos hídricos provenientes del mar o fuentes con mucha presencia de iones o elementos que perturban la pureza del agua, dichos elementos muestran efectos que alteran la estabilidad en el número de burbujas, entre otras características, en los sistemas de flotación. Estos efectos aún no se comprenden en su totalidad, como ocurre con la coalescencia de las burbujas, que afecta directamente el rendimiento de la extracción de cobre y otras especies valiosas mediante el proceso de flotación. Por esta razón es necesario comprender fenómenos asociados a las burbujas en medios líquidos con la presencia de sales y aditivos como los espumantes, que ayudan a evitar el proceso de coalescencia. Gracias a los avances computacionales, fenómenos como el comportamiento de poblaciones de burbujas pueden ser estudiados detalladamente mediante análisis de videos, a fin de determinar diferentes características, como sus formas, interacciones, velocidades, entre otras, que ayudan a comprender mejor su comportamiento en los sistemas de burbujeo. En el presente trabajo se desarrolla una novedosa metodología, capaz de detectar eventos de coalescencia y determinar tiempos de coalescencia, además de distintas características de una población de burbujas en movimiento, a partir de una serie de imágenes obtenidas desde videos filmados en cámara lenta desde una columna de burbujeo de aire, utilizando el espumante metil isobutil carbinol (MIBC). Para tal efecto se desarrollan algoritmos creados en el lenguaje y entorno de desarrollo MATLAB, capaces de identificar eventos de coalescencia, como también determinar los tiempos de coalescencia y de manera análoga, posiciones, velocidades, tamaños y número de burbujas. Los resultados muestran una notable disminución en los eventos de coalescencia en función del aumento en la concentración de MIBC. Observando para agua pura un total de 900 eventos de coalescencia y mostrando una disminución del 85% en los eventos para 100 ppm de MIBC. Se observa además un leve aumento en los tiempos de coalescencia, determinándose para agua pura un promedio de 10 ms e incrementando a 14 ms con 100 ppm de MIBC. Esta metodología aplicada a un experimento de laboratorio permite evaluar el comportamiento de un sistema dinámico de burbujeo en condiciones controladas de operación. Se espera que los métodos y resultados de este trabajo sean un aporte a la sostenibilidad hídrica de la industria minera.

AGRADECIMIENTOS Y/O DEDICATORIA.

Terminado este trabajo de gran importancia en mi carrera deseo agradecer a todos los que hicieron posible el logro de esta meta. Al profesor Jorge Saavedra por la confianza depositada en mí, por mostrarme nuevos caminos y fascinantes desafíos los cuales jamás habría conocido sin su visión. Al profesor Pedro Toledo por su orientación, ayuda y excelente disposición.

Agradezco a todos mis seres queridos, mi familia y mis amigos, por su comprensión y apoyo. Especialmente a mi madre Patricia quien me ha apoyado de una manera incondicional en todo momento a lo largo de mi vida.

Finalmente quiero agradecer profundamente al centro de Recursos Hídricos para la Agricultura y la Minería (CRHIAM) con el proyecto ANID/FONDAP/15130015 por haberme otorgado una Beca para realizar mi Habilitación Profesional, por toda la amabilidad y apoyo brindado por parte de todos en el centro de investigación. Agradecimientos también al proyecto ANID/FONDECYT/11171092 por el financiamiento otorgado para la completa construcción del sistema de burbujeo.

TABLA DE CONTENIDOS

RESUMEN	i
AGRADECIMIENTOS Y/O DEDICATORIA	ii
TABLA DE CONTENIDOS	iii
ÍNDICE DE FIGURAS	v
ÍNDICE DE TABLAS	viii
NOMENCLATURA	ix
1. INTRODUCCIÓN	1
2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	3
3. REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA	4
3.1. Flotación de Minerales.....	4
3.1.1. Reactivos de Flotación.....	5
3.2. Fenómeno de Coalescencia.....	5
3.3. Trabajos Previos.....	6
3.3.1. Estudios de Poblaciones de Burbujas.....	8
3.4. Procesamiento de Imágenes.....	11
3.4.1. Segmentación de Imágenes.....	11
3.4.2. Color.....	12
3.4.3. Operaciones Morfológicas.....	12
4. OBJETIVO GENERAL Y OBJETIVOS ESPECÍFICOS	13
4.1. Objetivo General.....	13
4.2. Objetivos Específicos.....	13
5. METODOLOGÍA	14
5.1. Recursos y Materiales.....	14
5.2. Procedimiento.....	15
5.2.1. Corrección de Color y Operaciones Morfológicas.....	17
5.3. Almacenamiento de Información.....	19
5.4. Algoritmo de Detección de Eventos de Coalescencia.....	21
5.5. Construcción de Trayectorias.....	24
5.5.1. Estructura de Datos para las Trayectorias.....	26
5.6. Determinación de Tiempos de Coalescencia.....	27
5.7. Transformación a Unidades Convencionales.....	29
6. RESULTADOS Y DISCUSIÓN	30
6.1. Registros Generales por Video.....	30

6.2. Área de Burbujas.....	32
6.3. Número de Eventos de Coalescencia	33
6.4. Área de Burbuja Generada.....	34
6.5. Tiempos de Coalescencia.....	36
6.6. Velocidades de Burbuja	37
6.6.1. Velocidad de Enfrentamiento.....	37
6.7. Zonas de Coalescencia	40
6.8. Superficie de Contacto	41
7. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES.....	43
7.1. Conclusiones	43
7.2. Recomendaciones.....	44
8. REFERENCIAS	45
9. ANEXOS.....	47

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1. Celda de flotación turbulenta clásica (Martins Vianna, 2004).	4
Figura 2. Principio de la separación por flotación selectiva (Elaboración Propia).	5
Figura 3. Burbuja y posicionamiento del tensoactivo en su interfase (Elaboración Propia).....	5
Figura 4. Fenómeno de Coalescencia registrado a 60mil fotogramas por segundo (Álvaro Moreno et al. 2016)	6
Figura 5. Simulación molecular de una fina película de agua y MIBC, simulando la interfase entre dos burbujas (elaboración propia).	7
Figura 6. Esquema de la técnica utilizada para medir tamaños de burbuja (Grau & Heiskanen, 2002).	9
Figura 7. Detección de contornos de burbujas por (Hosseini et al., 2015)	9
Figura 8. Imágenes de burbujas para los fotogramas 1 y 2, indicando la coincidencia más cercana para la detección de la misma burbuja (A), Trayectorias de las burbujas en un sistema con solo agua (B) (Acuña & Finch, 2010).	10
Figura 9. Ejemplo de segmentación por diferencia de color (The MathWorks, Inc., 2022).....	11
Figura 10. Ejemplo de segmentación y operación Morfológica simple, imagen en escala de grises (A), Corrección de color no uniforme con operaciones Morfológicas (B), Operación Morfológica de rellenado de contornos cerrados (C). (The MathWorks, Inc., 2003).	12
Figura 11. Esquema de posicionamiento del equipo.....	14
Figura 12. Columna de burbujeo con 100 ppm de MIBC.....	16
Figura 13. Proceso de corrección de color, función de corrección de color aplicado a cada fotograma.	17
Figura 14. Representación de una imagen en escala de grises y binaria, con un filtro de umbral de color aplicado, eliminando valores mayores a 100.	18
Figura 15. Ejemplo de Corrección de Color y Operaciones Morfológicas aplicadas a una sección del video, siendo los contornos externos de las burbujas (A) y los contornos internos de las burbujas (B).	18
Figura 16. Representación de 2 burbujas en matrices binarias, con contorno externo (A), contorno interno (B).....	20
Figura 17. Secuencia de coalescencia de una burbuja (rojo contorno interno y azul externo), 2 burbujas separadas (A), fotograma previo a la coalescencia (B) y burbuja producto de la coalescencia (C).	21
Figura 18. Representación de solapamiento entre burbujas (A), siendo fotograma f (verde) y fotograma $f+1$ (rojo) y su respectiva simplificación (B).	21
Figura 19. Contactos directos para un evento de coalescencia dados por dos burbujas en el fotograma f (verde) y una en el fotograma $f + 1$ (rojo) (A), doble contacto para una burbuja en el fotograma f (verde) con 2 en el fotograma $f+1$ (rojo) (B).	23

Figura 20. Posiciones más cercanas, representación de los contornos internos de las burbujas (A) y representación de centroides para las burbujas (B), siendo el fotograma f en verde y fotograma $f - 1$ en rojo.....	25
Figura 21. Algoritmo para construir la trayectoria de una burbuja consumidas en un evento de coalescencia, entregando la variable T como un vector que contiene los índices n de burbuja, comenzando desde f hasta $f-c$	25
Figura 25. Población de burbujas, promedio de la cantidad de burbujas que se registraron para cada fotograma, siendo un total de 1000 fotogramas por video.....	30
Figura 26. Promedios de las cantidades de burbujas y su respectiva desviación típica.	31
Figura 27. Eventos de coalescencia para cada video, registrando un video cada 2 minutos, para distintas concentraciones de MIBC.....	31
Figura 28. Comportamiento de las burbujas en la columna de burbujeo, sección completa (A) y sección inicial (B).	32
Figura 29. Recuento de Eventos de coalescencia registrados para diferentes concentraciones de MIBC, análisis de 10mil fotogramas para cada concentración.	33
Figura 30. Áreas de burbujas generadas en los eventos de coalescencia, registradas al momento previo a su coalescencia, análisis de 10mil fotogramas para cada concentración.	34
Figura 31. Diferencia de area entre los contornos externos (A) y contornos internos (B).....	34
Figura 32. Dos burbujas con sus contornos conectados y una burbuja aislada con su contorno cerrado.....	35
Figura 33. Gráfico de tiempos de coalescencia, tomando el promedio de los tiempos de coalescencia para 5 videos por cada concentración.	36
Figura 34. Promedio de tiempos de coalescencia para las componentes de la velocidad relativa entre las burbujas	38
Figura 35. Equipo experimental utilizado para medir las velocidades y los tiempos de coalescencia de pares de burbujas enfrentadas (A) y una representación de la burbuja enfrentada a un menisco de líquido en el cual es enfrentada la burbuja (B) (del Castillo et al., 2011).	38
Figura 36. Tiempos de coalescencia (promedios agrupados por velocidad) y velocidad de las burbujas que se consumen en los eventos de coalescencia (A) y tiempo de coalescencia vs velocidad de enfrentamiento entre 2 burbujas (del Castillo et al., 2011) (B).....	39
Figura 37. Coalescencias detectadas para el total de videos, para 0 ppm de MIBC (A), 20 ppm de MIBC (B), 50 ppm de MIBC (C), 100 ppm de MIBC (D).	40
Figura 38. Distancia de contacto entre dos burbujas que participan en un evento de coalescencia, al momento previo a su coalescencia (1 fotograma antes), para diferentes concentraciones de MIBC.	41
Figura 39. Tiempos de coalescencia (Promedios agrupados por Superficie de contacto) y Tiempo de coalescencia de las burbujas que se consumen en los eventos de coalescencia.....	42
Figura 40. Ejemplo de áreas rectangulares generadas a partir de los puntos máximos en el área de las burbujas.....	47
Figura 41. Histogramas de velocidades de burbujas totales. Agua (A), MIBC 20 ppm (B). MIBC 50 ppm (C), MIBC 100 ppm (D).	48

Figura 42. Histogramas de velocidades paralelas. Agua (A), MIBC 20 ppm (B). MIBC 50 ppm (C), MIBC 100 ppm (D).	49
Figura 43. Histogramas de velocidades de acercamiento. Agua (A), MIBC 20 ppm (B). MIBC 50 ppm (C), MIBC 100 ppm (D).	50
Figura 44. Metodología para calcular los puntos mínimos entre dos burbujas. Estructura de una burbuja, mediante el análisis de imagen, mostrando contorno interno y externo (A), contorno externo de una burbuja (B), parte inferior (C) y parte superior (D).....	51
Figura 45. Representación gráfica de los vectores utilizados en el cálculo de la velocidad de acercamiento.	52
Figura 46. Vector de posición r y vector de la velocidad relativa.....	52
Figura 47. Gráficos de Velocidad relativa en relación con el número de eventos y tiempos de coalescencia. Agua (A), MIBC 20 ppm (B). MIBC 50 ppm (C), MIBC 100 ppm (D).	53
Figura 48. Promedio de las velocidades que poseen dos burbujas consumidas en un evento de coalescencia en el momento anterior a su coalescencia (1 fotograma antes), para diferentes concentraciones de MIBC.	53
Figura 49. Gráficos de Velocidad paralela en relación con el número de eventos y tiempos de coalescencia. Agua (A), MIBC 20 ppm (B). MIBC 50 ppm (C), MIBC 100 ppm (D).	54
Figura 50. Velocidad de Acercamiento. Agua (A), MIBC 20 ppm (B). MIBC 50 ppm (C), MIBC 100 ppm (D).....	55
Figura 51. Variabilidad del tiempo de coalescencia respecto a la velocidad de acercamiento. Agua (A), MIBC 20 ppm (B). MIBC 50 ppm (C), MIBC 100 ppm (D).....	56
Figura 52. Variabilidad del tiempo de coalescencia respecto a la velocidad paralela. Agua (A), MIBC 20 ppm (B). MIBC 50 ppm (C), MIBC 100 ppm (D).....	57
Figura 53. Ejemplo de una matriz compuesta por celdas que contienen distintos tipos de información indexada (The MathWorks, 2022).....	58
Figura 54. Ejemplo de trayectorias de burbujas consumidas en eventos de coalescencia detectadas por el algoritmo (colores por parejas).....	59
Figura 55. Coalescencias detectadas para el total de videos, para 0 Ppm de MIBC (A), 20 ppm de MIBC (B), 50 ppm de MIBC (C), 100 ppm de MIBC (D) (escala no ajustada).	60
Figura 56. Variabilidad del tiempo de coalescencia respecto a la superficie de contacto. Agua (A), MIBC 20 ppm (B). MIBC 50 ppm (C), MIBC 100 ppm (D).	61
Figura 57. Variabilidad de la velocidad de acercamiento de las burbujas, respecto a la superficie de contacto.	61
Figura 58. Promedio de las velocidades de todas las burbujas presentes en los videos, calculadas como el promedio de la suma de las velocidades de las trayectorias de todas las burbujas para cada fotograma, para diferentes concentraciones de MIBC.	62
Figura 59. Ejemplo de Relación de Aspecto de la Columna de burbujeo.....	63

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1. Procedimiento general para llevar a cabo cada objetivo.	15
Tabla 2. Ejemplo de la estructura principal de las propiedades de burbujas.....	19
Tabla 3. Ejemplo del almacenamiento de las propiedades de las burbujas para cada fotograma. (A) y Estructura de información dentro de cada Centroide de burbuja (B)	19
Tabla 4. Ejemplo del almacenamiento de los contornos de las burbujas para cada fotograma. Estructura del almacenamiento de los contornos identificados en cada fotograma (A) y estructura de información dentro de cada conjunto de puntos (B).....	20
Tabla 5. Estructura de datos para la simplificación de contorno hacia rectángulos.....	22
Tabla 6. Estructura de datos para la simplificación de contorno hacia rectángulos.....	22
Tabla 7. Ejemplo de la estructura final de burbujas consumidas (o generadas) donde burbujas consumidas contienen los índices n de las burbujas respecto al fotograma f	23

NOMENCLATURA

MIBC	Metil Isobutil Carbinol
RGB	Composición de color (Red-Green-Yellow)
<i>f</i>	Fotograma
<i>V</i>	Video
<i>n</i>	Índice de burbuja
<i>m</i>	Índice de contorno de burbuja

1. INTRODUCCIÓN

La necesidad de comprender fenómenos que afectan sistemas que involucran a las burbujas se ha visto incrementada, especialmente en procesos como la flotación de minerales, específicamente la flotación del cobre, en el cual la generación de grandes cantidades de burbujas que se mantengan de tamaño estable en el tiempo es de vital importancia para obtener buenos rendimientos.

La industria, para realizar estos procesos recurre al uso extensivo de agua, viéndose en la necesidad de utilizar distintas fuentes hídricas, como lo es el agua de mar. Lo que conlleva múltiples desafíos, debido a la presencia de iones cuyos efectos pueden afectar de múltiples maneras el proceso de flotación, desde modificar la eficiencia de recuperación de minerales en el proceso de flotación o modificar el desempeño de aditivos de flotación como los espumantes (Zhao & Peng, 2014). Es por estos efectos, que los fenómenos que giran en torno al comportamiento de las burbujas no han sido comprendidos en su totalidad, como ocurre con la coalescencia de las burbujas, que afecta directamente el rendimiento de la extracción de cobre en el proceso de flotación. Por esta razón es necesario comprender fenómenos asociados a las burbujas en medios líquidos con la presencia de sales y aditivos como los espumantes, que ayudan a evitar el proceso de coalescencia.

Existen diferentes métodos para el estudio de burbujas, entre ellos determinación de tamaño de burbujas, concentración crítica de coalescencia (CCC), índice de espumabilidad dinámico (DFI) y determinación de tiempos de coalescencia en presencia de electrolitos (Castro et al., 2013), estudios de enfrentamiento de burbujas en sistemas controlados (Bournival et al., 2017). Al mismo tiempo se realizan estudios de propiedades interfaciales aire-líquido tales como tensión superficial, elasticidad, adsorción superficial de surfactantes, las cuales ayudan a la comprensión del comportamiento de las burbujas. Aun cuando todos estos métodos han permitido una mejor comprensión del comportamiento de las burbujas en sistemas como el de flotación, no se conoce directamente el comportamiento de burbujas de manera colectiva e individual en sistemas dinámicos de burbujeo.

Actualmente, los estudios que buscan metodologías y modelos para analizar conjuntos de burbujas para así conocer su dinámica no son muchos. El presente trabajo busca encontrar una relación entre los fenómenos superficiales presentes en el proceso de burbujeo, además del comportamiento que tienen dichas burbujas, ya sea en sus geometrías, posiciones y población, entre otras características, que pueden obtenerse mediante un análisis de imagen. Un seguimiento en el tiempo, por medio de un algoritmo de reconocimiento de imagen, hace posible el análisis de la información y conocer velocidades, aceleraciones y su movimiento en general, como también conocer cómo estas propiedades se relacionan con los sistemas de flotación.

El presente trabajo cuenta con las Secciones 2 y 3 que detallan una revisión sobre la problemática actual de fenómenos que están presentes en sistemas de burbujeo, como lo es el tiempo de coalescencia, seguido por una revisión de los trabajos que se han realizado sobre el análisis de imagen en sistemas de burbujeo. Continuando con los objetivos en la sección 4, seguido por la sección 5 con el desarrollo de la metodología, que toma como base la capacidad computacional actual para generar y aplicar un código computacional, que es capaz de observar una columna de burbujeo e identificar y calcular el tiempo de coalescencia. Culminando con las Secciones 6 y 7, en las cuales se detallan los resultados obtenidos, relacionando los tiempos de coalescencia con las trayectorias, áreas y demás propiedades geométricas de las burbujas, detallando los algoritmos utilizados y las capacidades que estos tienen.

2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Una de las principales problemáticas en los procesos que utilizan burbujas, está en la dificultad para predecir los efectos que tienen las distintas configuraciones de los sistemas de burbujeo sobre las poblaciones de burbujas. En la flotación de minerales de cobre, predecir con precisión y/o comprender los efectos que tienen los surfactantes (como también iones o diversos elementos disueltos en las corrientes de agua) sobre las burbujas, es algo que aún no se ha logrado en su totalidad, siendo particularmente difícil predecir el tiempo de coalescencia de las burbujas. La coalescencia puede verse afectada por la cantidad de burbujas en el sistema de burbujeo, la concentración de surfactante, velocidad de las burbujas, tamaño de burbuja, entre otras características. Hasta el momento, según la literatura actual, no existe una metodología para determinar tiempos de coalescencia en un sistema dinámico de burbujeo, por lo que este trabajo tiene la intención de explorar y/o generar una metodología que permita analizar estos sistemas con mayor comodidad.

El tiempo de coalescencia afecta directamente el proceso de flotación de cobre, impidiendo que las burbujas puedan sostener una estructura estable, disminuyendo así el área superficial que abarcan dos o más burbujas, convirtiéndolas en una sola y con una superficie menor, provocando así que procesos como la flotación de minerales veas mermado su rendimiento, conduciendo así entre otros factores, a un uso extensivo de recursos hídricos para suplir las pérdidas.

Para comprender de mejor manera el fenómeno de la coalescencia y dar una respuesta a su comportamiento, es necesario observar poblaciones de burbujas y sus propiedades espaciales y temporales desde diferentes puntos de vista. Esta Habilitación Profesional tiene como objetivo, determinar el tiempo de coalescencia y las características de las burbujas en un sistema dinámico de burbujeo.

3. REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA

3.1. Flotación de Minerales

Los sistemas de flotación más clásicos están compuestos por una columna o recipiente, un sistema de agitación generalmente por turbinas para dispersar el sólido y un tubo concéntrico que permite que el aire entre y pueda generar las burbujas, en estos sistemas, la función de las burbujas es recolectar el mineral en su superficie en forma de espuma con el objetivo de extraer el mineral deseado (Figura 1).

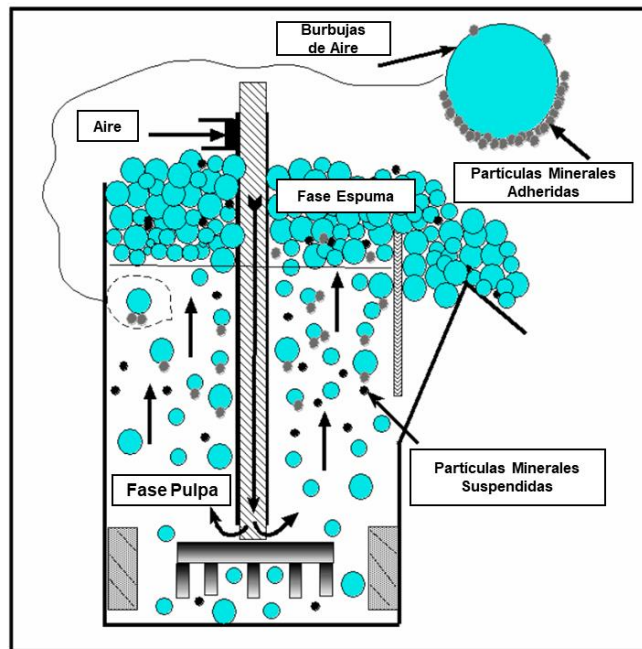


Figura 1. Celda de flotación turbulenta clásica (Martins Vianna, 2004).

Por lo general en dichos sistemas, se busca producir burbujas pequeñas, del orden de 0,5 a 2 mm, con flujos de aire de burbujeo que van desde los 0,5 a los 2 m/s (Finch & Dobby, 1991). Las burbujas cumplen un rol fundamental en la flotación de minerales, dicho proceso puede descomponerse en una fase gaseosa, constituida generalmente por aire el cual es introducido y dispersado en forma de pequeñas burbujas al sistema de flotación, cuenta además de una fase líquida, la cual está constituida normalmente por agua que puede contener diferentes tipos de iones (Cl^- , Na^+ , K^+ , Ca^{++} , SO_4^- , etc.), además de

impurezas y contaminantes naturales. Por último, cuenta también con una fase sólida, compuesta por las partículas del mineral molido (Figura 2).

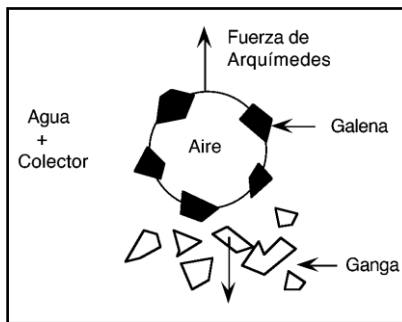


Figura 2. Principio de la separación por flotación selectiva (Elaboración Propia).

3.1.1. Reactivos de Flotación

En el proceso de flotación de minerales, Se utilizan reactivos tales como espumantes, colectores, modificadores de pH y depresantes. Los espumantes son tensoactivos que tienen la capacidad de adsorberse selectivamente en la interfase gas-líquido, lo cual ayuda a estabilizar las burbujas y la fase de espuma en la recuperación de minerales, ayudando también a generar burbujas pequeñas, las cuales son deseadas en este proceso (Figura 3).

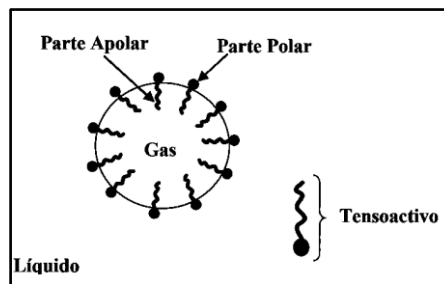


Figura 3. Burbuja y posicionamiento del tensoactivo en su interfase (Elaboración Propia).

3.2. Fenómeno de Coalescencia

La coalescencia afecta directamente la flotación de minerales, ya que el proceso requiere que las burbujas permanezcan estables en su ascenso para conseguir una buena recuperación del mineral en el concentrado. El fenómeno de coalescencia se define como el proceso en el que dos (o más) burbujas se fusionan en una sola, esto sucede cuando las

burbujas se aproximan unas con otras, y al momento en el que la fina película que se forma en sus puntos de contacto se adelgaza a tal punto que se vuelve lo suficientemente fina como para colapsar en una sola burbuja, esto puede depender del balance entre la tensión superficial, la hidrodinámica y las fuerzas superficiales aplicadas en la interfaz de las burbujas conectadas. Produciéndose así la coalescencia de las burbujas (Marrucci, 1969).

3.3. Trabajos Previos

Las burbujas tienen gran importancia en muchos procesos industriales como también ambientales y distintas aplicaciones biológicas. El comportamiento de las burbujas, frente a diversos cambios en el medio en el cual estas se generan es aún motivo de estudio, como lo es el fenómeno de la coalescencia. Actualmente dicho fenómeno no se comprende en su totalidad. Aun así, se han propuesto diferentes metodologías para estudiar este y otros fenómenos que implican a las burbujas, desde diferentes puntos de vista.

Una metodología ampliamente utilizada es observar parejas de burbujas, las cuales son enfrentadas de una manera controlada, generando dos burbujas por medio capilares dispuestos muy cerca del uno al otro, por los cuales ingresa un gas (generalmente aire), con el objetivo de presionar las burbujas entre sí, para así observar su geometría y tiempo de coalescencia (Figura 4). De este modo ha sido posible obtener información sobre los tiempos de coalescencia de las burbujas, en diferentes medios y bajo condiciones controladas.

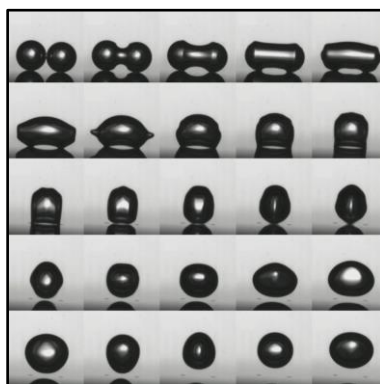


Figura 4. Fenómeno de Coalescencia registrado a 60mil fotogramas por segundo (Álvaro Moreno et al. 2016)

Se han realizado estudios aún más dinámicos para el análisis de dos burbujas, los cuales se enfocan en observar el ascenso que tiene una pareja de burbujas en una columna de burbujeo vertical, en el cual se determinaron los cambios en los tamaños de burbuja para su ascenso desde su nacimiento en los capilares de burbujeo, hasta la cima de la columna de burbujeo (G. Liu et al., 2009; Marrucci & Nicodemo, 1967).

Existen métodos que estudian el fenómeno de la coalescencia desde una perspectiva microscópica, observando la interfase acuosa que se produce en el contacto de dos burbujas, observando el fenómeno de adelgazamiento de la interfaz hasta su coalescencia (fenómeno el cual es parte fundamental de un evento coalescencia). El método generalmente consiste en observar el comportamiento de una fina película de agua, formada dentro de celdas capilares, succionando el líquido desde ella, formando un menisco bicóncavo que se mantiene en una celda. Simulando así la interfase líquida que se forma entre dos burbujas. (Craig, 2004; Henry & Craig, 2008).

Gracias a los avances computacionales, es posible ir incluso más allá en el análisis hacia la interfase líquido-gas presente entre dos burbujas, utilizando las herramientas que ofrece la simulación molecular, con la cual es posible recrear a escala nanométrica, la fina interfase entre dos burbujas, con la cual es posible estudiar su comportamiento con diferentes surfactantes y/o iones (Figura 5).

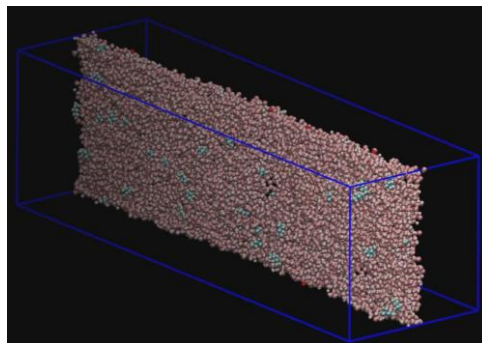


Figura 5. Simulación molecular de una fina película de agua y MIBC, simulando la interfase entre dos burbujas (elaboración propia).

3.3.1. Estudios de Poblaciones de Burbujas

Existen otras metodologías enfocadas en el estudio a poblaciones de burbujas, que, al ser más dinámicos buscan acercarse al comportamiento de sistemas reales de flotación. Utilizando fotografías y videos de burbujas, se han estudiado variaciones para el número de burbujas presentes en columnas de burbujeo, en las cuales se modifica el medio de flotación para observar y cuantificar los diferentes efectos que esto trae al número de burbujas en los sistemas.

Para realizar estudios en burbujas, se han desarrollado diferentes técnicas, de las cuales, existen algunas que basan su metodología en el análisis de imagen. En 1986 se introdujo por primera vez una técnica de imagen enfocada en caracterizar el movimiento de poblaciones de burbujas, determinándose la velocidad ascendente para cúmulos de burbujas generadas en una columna de burbujeo, realizando el seguimiento del límite superior del cumulo de burbujas formadas por la interrupción del gas inyectado. Calculando así la velocidad del cumulo de burbujas, sin considerar velocidades de burbujas particulares.

El movimiento individual de las burbujas en los sistemas de burbujeo fue estudiado años después, utilizando técnicas que resaltan los contornos translucidos de las burbujas, utilizando fondos iluminados con el objetivo de generar una sombra en el contorno de las burbujas, para así analizar formas y trayectorias de las burbujas de manera particular, dicha metodología es conocida en la actualidad como procesamiento de imagen por medio de visión computacional.

Los trabajos en torno a la visión por computadora se han visto incrementados, debido a los avances tecnológicos por los cuales se basan sus aplicaciones (cámaras de video y capacidad computacional). actualmente es posible lograr por vías fáciles y rápidas sistemas de monitoreo en sistemas de flotación, en los cuales se han realizado estudios que analizan sistemas de flotación y tamaños de burbuja.

Los primeros estudios a poblaciones de burbujas en cuanto a la visión computacional, fue realizado en 2002, desarrollándose una nueva técnica para medir los tamaños de burbujas en una columna de burbujeo (Figura 6), determinándose velocidades y tamaños de

burbujas de forma particular. Esto fue realizado, filmando una columna de burbujeo resaltando el contorno de las burbujas con un efecto de contraluz, almacenando los fotogramas que comprenden el movimiento de una población de burbujas, determinándose características como, número de burbuja, propiedades geométricas y comportamiento espacial de burbujas particulares. (Grau & Heiskanen, 2002).

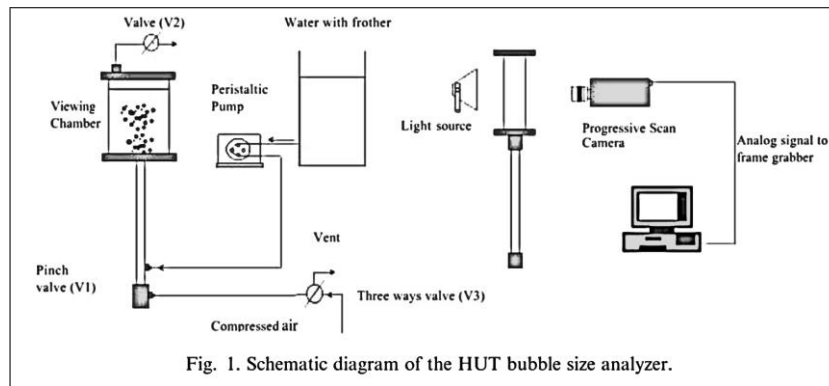


Figura 6. Esquema de la técnica utilizada para medir tamaños de burbuja (Grau & Heiskanen, 2002).

En el año 2015 se desarrolló un sistema de control y monitoreo de la fase de espuma para un sistema de flotación, analizando el tamaño de burbuja y la respuesta de dicha característica respecto a la velocidad de flujo de aire, concentración de espumante y nivel de pH en el medio. Encontrándose una fuerte relación entre las condiciones de operación para el proceso de flotación y los tamaños de burbujas (Figura 7).

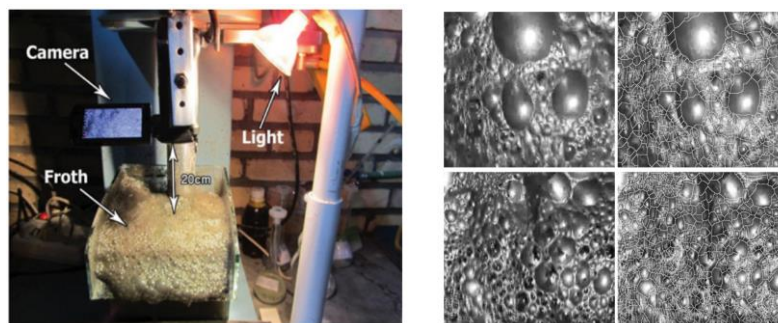


Figura 7. Detección de contornos de burbujas por (Hosseini et al., 2015)

Se han realizado estudios enfocados en realizar modelos de transferencia de materia y energía, con el objetivo de comprender procesos como la oxidación e hidrogenación catalítica heterogénea a partir de la información en la geometría de las burbujas (Zhong et al., 2016), en donde se fotografiaron burbujas dentro de una columna de burbujeo desde el cual se analizó su comportamiento utilizando diversos recursos computacionales que toman como base, el comportamiento geométrico y temporal de las burbujas a partir de secuencias de imágenes captadas por cámaras de video.

Aun así, existen métodos menos explorados como lo son el comportamiento espacial y temporal de poblaciones de burbujas, que aprovechan metodologías de análisis de imagen, extrayendo información de poblaciones de burbujas como, posiciones, cantidades y geometría de burbujas a partir de imágenes capturadas por cámaras digitales. En donde se han determinado trayectorias y velocidades de múltiples burbujas de forma individual (Figura 8) dentro de una población de burbujas (Acuña & Finch, 2010).

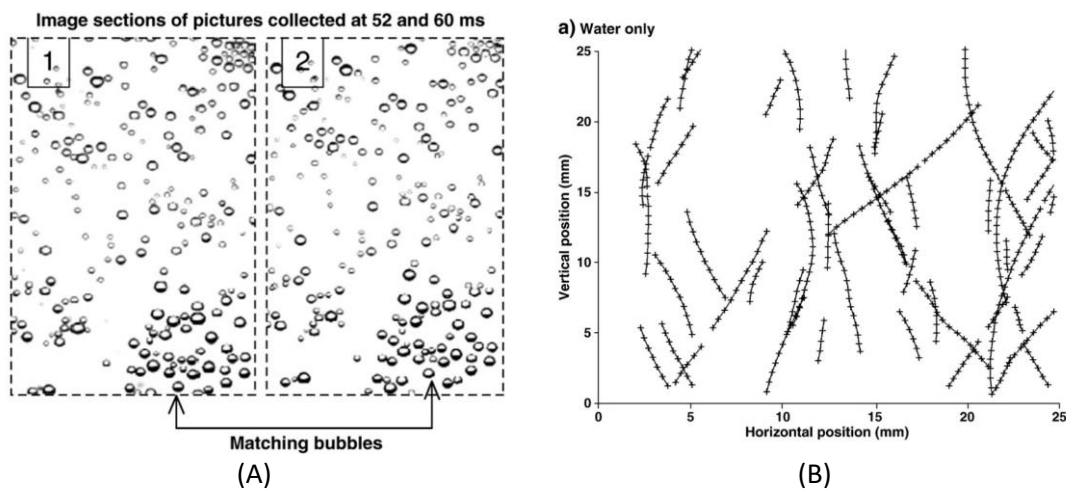


Figura 8. Imágenes de burbujas para los fotogramas 1 y 2, indicando la coincidencia más cercana para la detección de la misma burbuja (A), Trayectorias de las burbujas en un sistema con solo agua (B) (Acuña & Finch, 2010).

3.4. Procesamiento de Imágenes

El análisis de imagen involucra el proceso de convertir una imagen en sus componentes fundamentales con el objetivo de extraer toda la información posible. Los análisis de imagen ofrecen posibilidades como la detección de formas o figuras, contornos, remoción de ruido en las imágenes, conteo de objetos, entre otras operaciones. Con el objetivo de utilizar dicha información en conjuntos simplificados, para análisis posteriores en cuanto al comportamiento espacial y temporal.

3.4.1. Segmentación de Imágenes

Para llevar a cabo un análisis de objetos presentes en una imagen, es necesario utilizar las imágenes de una manera eficiente. Existen técnicas que ayudan a simplificar la información obtenida a partir de imágenes, con el objetivo de extraer las secciones más importantes de la imagen a analizar, la segmentación de imagen es una técnica ampliamente utilizada para procesar imágenes, se basan esencialmente en las características de los píxeles que componen las imágenes digitales, con la función de separar por capas, el fondo de una imagen, con los objetivos a analizar (Figura 9).



Figura 9. Ejemplo de segmentación por diferencia de color (The MathWorks, Inc., 2022).

3.4.2. Color

Las imágenes digitales están formadas por un conjunto de píxeles, ordenados normalmente como una matriz que compone la imagen en cuestión, indicando en cada celda de dicha matriz, el color correspondiente para formar la imagen, dicho color es representado normalmente por un número denominado RGB (*red*, *green* y *blue*), dicho número asignado representa la composición de tres colores que están presentes en cada píxel, encargado de representar en las imágenes, los contornos, fondos, objetos y básicamente toda la información en una imagen.

3.4.3. Operaciones Morfológicas

Las operaciones Morfológicas son un conjunto de operaciones que se pueden aplicar en el procesamiento de imágenes (Figura 10), utilizando como base el conjunto de píxeles que componen una imagen, dichas operaciones buscan utilizar las formas geométricas o patrones encontrados en una imagen, con el objetivo de transformar el tamaño de un objeto, figura, o forma encontrada, dilatando su aspecto, rellenando espacios vacíos, uniendo objetos cercanos entre sí, entre otras operaciones. (Soille 2013).

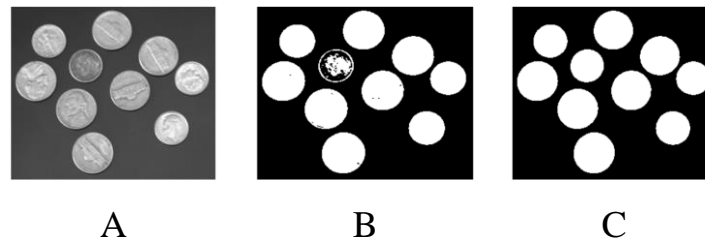


Figura 10. Ejemplo de segmentación y operación Morfológica simple, imagen en escala de grises (A), Corrección de color no uniforme con operaciones Morfológicas (B), Operación Morfológica de relleno de contornos cerrados (C). (The MathWorks, Inc., 2003).

4. OBJETIVO GENERAL Y OBJETIVOS ESPECÍFICOS

4.1. Objetivo General

Determinar el tiempo de coalescencia y características de burbujas en un sistema dinámico de burbujeo mediante técnicas computacionales de procesamiento de imágenes.

4.2. Objetivos Específicos

1. Implementar un código computacional en Matlab de reconocimiento de burbujas para determinar y almacenar las propiedades espaciales y temporales de los sistemas de burbujeo.
2. Implementar un código computacional en Matlab que determinar y almacenar los eventos y tiempos de coalescencia de las burbujas.
3. Analizar la relación entre tiempos de coalescencia y tamaño de burbuja, velocidades de burbuja, número de eventos de coalescencia, cantidades de burbujas, área total de burbujas, superficies de impacto al momento de la coalescencia.

5. METODOLOGÍA

En el presente capítulo se presenta una serie de pasos que abarcan un análisis de imagen completo, el preprocesamiento de imagen hacia un análisis de la información mediante diferentes algoritmos para llevar a cabo un procesamiento de imagen, haciendo uso de diferentes recursos computacionales con el objetivo de analizar una columna de burbujeo y obtener de ella, los tiempos de coalescencia, además de otras propiedades de las burbujas.

5.1. Recursos y Materiales

- Recursos físicos
 - Columna de burbujeo
 - Caudalímetro
 - Panel de luz LED
 - Matraz aforado 100 mL
 - Micropipeta 20-200 μ L
 - Metil-Isobutil-Carbinol (MIBC)
 - Compresor de aire portátil 2hp con capacidad de 25 Litros
 - Cámara Sony RX100M5
- Recursos Computacionales Relevantes
 - Procesador Intel i5 9600k
 - MATLAB R2021a
 - Image Processing Toolbox™
 - Statistics and Machine Learning Toolbox

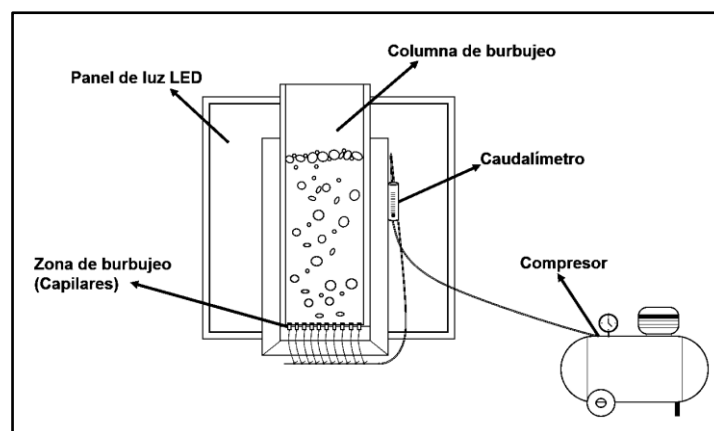


Figura 11. Esquema de posicionamiento del equipo.

5.2. Procedimiento

En la Tabla 1 se indican las actividades realizadas con tal de cumplir con los objetivos, tanto general como específicos.

Tabla 1. Procedimiento general para llevar a cabo cada objetivo.

Procedimiento	Objetivo
Identificar burbujas por medio de algoritmos de visión artificial, mediante corrección de color y operaciones Morfológicas. Además, identificar y almacenar las propiedades geométricas de las burbujas para cada fotograma.	Para cumplir con Objetivo Especifico 1
Generar una serie de algoritmos computacionales en Matlab, capaces de reconocer eventos de coalescencia y calcular sus tiempos de coalescencia.	Para cumplir con Objetivo Especifico 2
Analizar los resultados entregados por los algoritmos, relacionando las distintas variables obtenidas.	Para cumplir con Objetivo Especifico 3

Para comenzar el análisis de imagen se tomaron videos de la columna de burbujeo (Figura 12). Para lo cual se utilizaron volúmenes de 100 mL con concentraciones de 20, 50 y 100 ppm de MIBC y agua desmineralizada (desde ahora 0 ppm).

Utilizando una cámara Sony RX100M5 se captaron videos a una frecuencia de 480 fotogramas por segundo, en un tiempo de 3 segundos (tiempo de exposición), con un ajuste del ISO en 480. La información fue comprimida por la misma cámara a una relación de 24 fotogramas por segundo, entregando así videos de cámara lenta con una duración de 1 minuto y 14 segundos, que equivalen a 1776 fotogramas por video.



Figura 12. Columna de burbujeo con 100 ppm de MIBC.

Una vez obtenido los videos se procedió a utilizar el programa MATLAB. Donde, utilizando un algoritmo simple de extracción de información y funciones proporcionadas por la extensión de análisis de imagen de Matlab (*Image Processing Toolbox™*), se realizó una metodología que se repite para cada video con el siguiente orden.

- Corrección de color del video y transformación de la información en formato de video hacia un sistema de arreglos matriciales binario.
- Almacenamiento de variables del video como fotogramas, tiempo, espacio, dimensiones del video.
- Confección de una estructura de datos acorde a la capacidad de información del video para almacenar la información que se va a generar.
- Detección de eventos de coalescencia, trayectorias y tiempos de coalescencia mediante algoritmos basados en la estructura de datos principal.

5.2.1. Corrección de Color y Operaciones Morfológicas.

La corrección de color fue llevada a cabo una vez obtenida la estructura de datos inicial. Para cada video, se seleccionó un área a analizar, eliminando partes externas del sistema de burbujeo captado por la cámara, utilizándose áreas de 1200×600 píxeles² aproximadamente. Una vez seleccionada el área de recorte para cada video, se pasa al procedimiento de corrección de color y así sucesivamente, hasta conseguir, para cada fotograma de cada video, una imagen en la cual se identifiquen las burbujas (Figura 13).



Figura 13. Proceso de corrección de color, función de corrección de color aplicado a cada fotograma.

Utilizando el área de recorte para cada video (V desde ahora) se comienza por analizar cada fotograma (f desde ahora). Se posee una matriz que almacena los colores de la imagen que comprende el fotograma.

Para cada f de cada V , se realizó un corte en el área seleccionada previamente (Recorte Objetivo de la imagen), obteniéndose así una matriz para cada f que contiene los colores que componen cada imagen (colores RGB) los cuales son transformados hacia una escala de grises, en donde los colores de cada píxel en la imagen original son reemplazados por un solo valor que representa dicha escala.

La matriz que representa ahora f en escala de grises es procesada por un filtro (Figura 14), en el cual, dependiendo de un umbral establecido arbitrariamente, convierte el valor de cada celda de la matriz f en 0 o 1 (píxel negro o blanco).

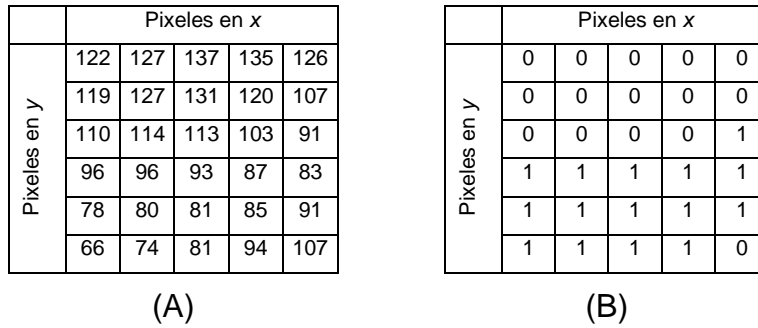


Figura 14. Representación de una imagen en escala de grises y binaria, con un filtro de umbral de color aplicado, eliminando valores mayores a 100.

Dicho filtro es aplicado a cada celda de la matriz en escala de grises hasta obtener una imagen binaria (Figura 15). Obteniéndose de este modo una imagen para cada fotograma que contiene la siguiente información.

1. Posición de Centroides (x, y)
2. Área
3. Número de Partículas
4. Contornos Internos (A)
5. Contornos Externos (B)

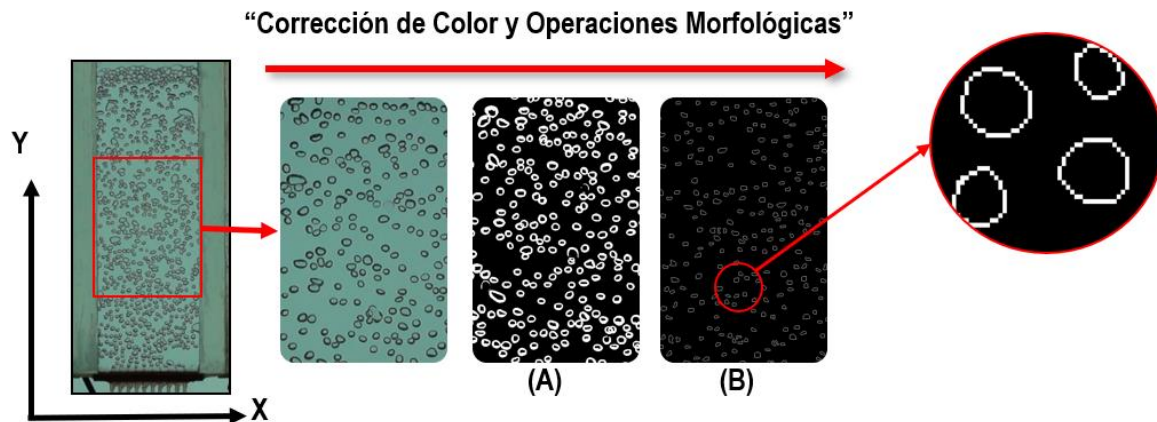


Figura 15. Ejemplo de Corrección de Color y Operaciones Morfológicas aplicadas a una sección del video, siendo los contornos externos de las burbujas (A) y los contornos internos de las burbujas (B).

5.3. Almacenamiento de Información

Una vez realizado el procesamiento de imágenes en cada fotograma para cada video, se almacenaron las propiedades de las burbujas en un sistema de matrices que contienen en su interior la información de la geometría de cada burbuja (centroide y área) (Tablas 2 y 3).

Tabla 2. Ejemplo de la estructura principal de las propiedades de burbujas.

Propiedades de Burbujas		
Fotograma	Área	Centroide
1	Grupo de burbujas (1)	Grupo de burbujas (1)
2	Grupo de burbujas (2)	Grupo de burbujas (2)
3	Grupo de burbujas (3)	Grupo de burbujas (3)
<i>f...</i>	Grupo de burbujas (<i>f</i>)	Grupo de burbujas (<i>f</i>)

Tabla 3. Ejemplo del almacenamiento de las propiedades de las burbujas para cada fotograma. (A) y Estructura de información dentro de cada Centroide de burbuja (B)

Grupo de burbuja en Fotograma (<i>f</i>)	
Burbuja	Centroide
1	Centroide de burbuja (1)
2	Centroide de burbuja (2)
3	Centroide de burbuja (3)
<i>n...</i>	Centroide de burbuja (<i>n</i>)

(A)

Centroide	
Posición X	Posición Y
56	70
58	70
49	68
...	...

(B)

Donde el índice *n* de burbuja es único para cada fotograma *f*, de este modo se tiene que cada propiedad depende del atributo deseado para cada *f* y *n*. Teniendo así un índice único que identifica el atributo deseado de cada burbuja *n* para cada fotograma *f* de cada video *V*. Por lo que, para el análisis de un video, $P(V, f, n)$ es la propiedad deseada, para la burbuja *n* del fotograma *f* para cada video *V*.

Además, se registró cada burbuja como un conjunto de puntos en un plano cartesiano de dos dimensiones, donde se clasificaron y almacenaron todos aquellos conjuntos de puntos conectados y no conectados entre sí, utilizando las imágenes binarias, donde las celdas que contienen una unidad equivalen a píxeles blancos y los que contienen un cero son píxeles negros (Figura 16).

Dicha información fue almacenada para todos los conjuntos conectados de cada fotograma. Generando dos series de datos que contienen los contornos internos y externos de las burbujas. Almacenándose los conjuntos de puntos que componen dichos contornos (Tabla 4).



Figura 16. Representación de 2 burbujas en matrices binarias, con contorno externo (A), contorno interno (B).

Tabla 4. Ejemplo del almacenamiento de los contornos de las burbujas para cada fotograma. Estructura del almacenamiento de los contornos identificados en cada fotograma (A) y estructura de información dentro de cada conjunto de puntos (B).

Contornos en (f)	
Contorno	Conjunto de Puntos
1	Conjunto de Puntos (1)
2	Conjunto de Puntos (2)
3	Conjunto de Puntos (3)
$m...$	Conjunto de Puntos (m)

(A)

Conjunto de Puntos (m)	
Posición X	Posición Y
56	70
58	70
49	68
...	...

(B)

5.4. Algoritmo de Detección de Eventos de Coalescencia

Para detectar los eventos de coalescencia se utilizaron algoritmos específicamente diseñados, que utilizan la información de las posiciones de cada burbuja (centroide) y sus respectivos contornos internos almacenados previamente (Figura 17).

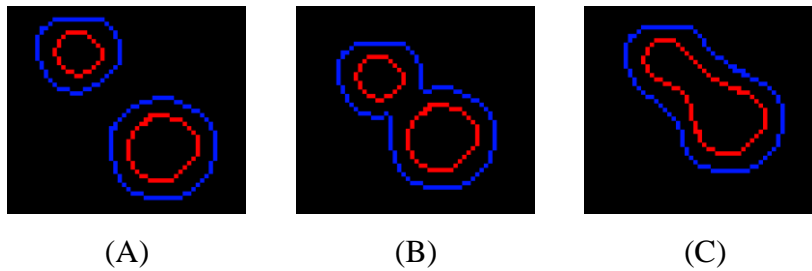


Figura 17. Secuencia de coalescencia de una burbuja (rojo contorno interno y azul externo), 2 burbujas separadas (A), fotograma previo a la coalescencia (B) y burbuja producto de la coalescencia (C).

Se definen 2 variables que almacenan las posibles burbujas consumidas y la posible burbuja generada, considerando cada fotograma f como el fotograma previo a la formación de una burbuja producto de una coalescencia (Figura 17, B), conocidas como burbujas consumidas, y para cada fotograma $f+1$ la burbuja generada (Figura 17, C).

$$\text{Burbuja consumida } (V, f, n) = \text{Contorno interno } (V, f, n)$$

$$\text{Burbuja generada } (V, f, n) = \text{Contorno interno } (V, f + 1, n)$$

Se utilizó el contorno transformado en rectángulos equivalentes, generados a partir de los puntos máximos y mínimos, basados en las posiciones de los contornos de las burbujas, esto con el fin de encontrar posibles solapamientos de una manera eficiente (Figura 18, Tabla 5 y 6).

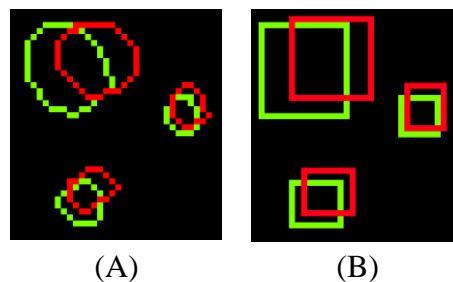


Figura 18. Representación de solapamiento entre burbujas (A), siendo fotograma f (verde) y fotograma $f+1$ (rojo) y su respectiva simplificación (B).

Tabla 5. Estructura de datos para la simplificación de contorno hacia rectángulos.

Grupo de burbujas(f)	
Burbuja	Área de Rectángulo
1	Área de Rectángulo (1)
2	Área de Rectángulo (2)
3	Área de Rectángulo (3)
$n\dots$	Área de Rectángulo (n)

Tabla 6. Estructura de datos para la simplificación de contorno hacia rectángulos.

Área de Rectángulo (n)		
Ancho	Largo	Coordenadas del punto inferior izquierdo del rectángulo

De este modo se detectó el solapamiento entre 2 o más burbujas del fotograma f y solo una del fotograma $f+1$, siendo f los fotogramas contando desde el primer fotograma de cada video hasta el penúltimo del set de datos.

La detección de solapamiento fue llevada a cabo mediante el cálculo de la intersección entre las coordenadas de los rectángulos de las burbujas en los fotogramas f y $f+1$. (Ver Anexo 1).

Una vez detectado un solapamiento como posible evento de coalescencia, se comprobó si dicho conjunto de burbujas entre f y $f+1$, tienen puntos de contacto reales, de ser ese el caso, dicho conjunto continua hacia una serie de algoritmos que comprueban si las burbujas en el fotograma f poseen otro contacto con otra burbuja del fotograma $f+1$ que no sea la considerada como candidato a burbuja generada, debido a que las burbujas consumidas en f solo pueden tener un solo contacto con una burbuja “posiblemente generada” en $f+1$. (Figura 19).

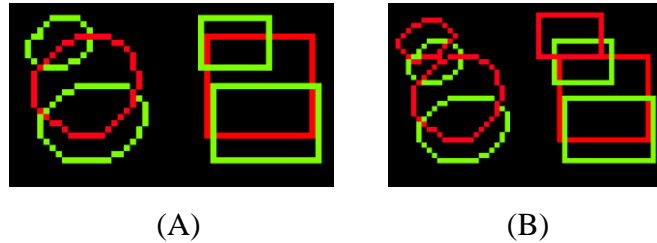


Figura 19. Contactos directos para un evento de coalescencia dados por dos burbujas en el fotograma f (verde) y una en el fotograma $f + 1$ (rojo) (A), doble contacto para una burbuja en el fotograma f (verde) con 2 en el fotograma $f+1$ (rojo) (B).

Comprobando así cada punto del contorno de las burbujas en f (burbuja consumida) si estas posiciones son iguales o cercanas a las posiciones del contorno de la burbuja $f + 1$ (burbuja generada). Esto quiere decir que, solo puede haber una conexión real entre 2 (o más) burbujas en el fotograma f y una burbuja en el fotograma $f + 1$.

Una vez obtenidas las burbujas consumidas y generadas, la información se almacenó en dos matrices, utilizando un índice n para cada burbuja (consumida o generada) y f para cada fotograma (Tabla 7).

Tabla 7. Ejemplo de la estructura final de burbujas consumidas (o generadas) donde burbujas consumidas contienen los índices n de las burbujas respecto al fotograma f .

Fotograma	Conjunto de burbujas Consumidas
1	Burbujas Consumidas (1)
2	Burbujas Consumidas (2)
3	Burbujas Consumidas (3)
f	Burbujas Consumidas (f)

5.5. Construcción de Trayectorias

Las trayectorias de las burbujas fueron calculadas en función de la información entregada por el algoritmo de detección de eventos de coalescencia, utilizando las burbujas consumidas en eventos de coalescencia, con el fin de obtener los tiempos de coalescencia más adelante.

Para realizar esto, se utilizó un algoritmo de búsqueda por punto más cercano, en el cual se calcularon las distancias de los puntos más cercanos al centroide de la burbuja en el fotograma f y el fotograma $f - c$, donde c se incrementa desde 1 hasta que la búsqueda de vecinos no encuentre un valor dentro de un rango máximo (igual a f), dicho valor máximo fue determinado arbitrariamente, es decir se escogió un rango de distancia máxima como límite de movimiento, dicho rango fue seleccionado tras observar el movimiento de los centroides de las burbujas, utilizado con el fin de no confundir trayectorias con otras burbujas en el caso de que la burbuja desaparezca del foco de la cámara, su contorno no esté bien definido debido a la iluminación, entre otros factores. Dicho límite sirve para diferenciar la posición de las burbujas, lo que hace imposible confundir una trayectoria de otra.

Para la construcción de las trayectorias particulares de las burbujas se tomaron como bases las componentes x e y de los centroides de cada burbuja consumida (ver Anexo 13).

Comenzando por la posición inicial en f como el fotograma previo al momento de la coalescencia.

Posición X de burbuja $(V, f, n) = \text{Centroide } (V, f, n)$ (posición en X)

Posición Y de burbuja $(V, f, n) = \text{Centroide } (V, f, n)$ (posición en Y)

Comprobando para el centroide en el fotograma f de la burbuja consumida, la posición más cercana que corresponda en $f - c$ (Figura 20).

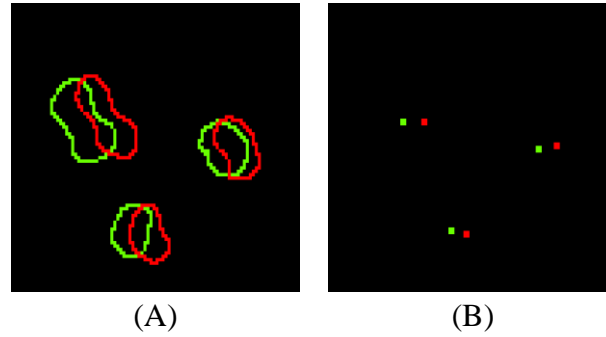


Figura 20. Posiciones más cercanas, representación de los contornos internos de las burbujas (A) y representación de centroides para las burbujas (B), siendo el fotograma f en verde y fotograma $f-1$ en rojo.

Por lo tanto, la búsqueda de sus trayectorias se realizó desde el fotograma f para cada coalescencia, hacia el fotograma $f-c$, donde c es el número de fotogramas hasta que el algoritmo no encuentre más coincidencias de vecinos más cercanos, dentro de la distancia límite o hasta llegar al primer fotograma (Figura 21).

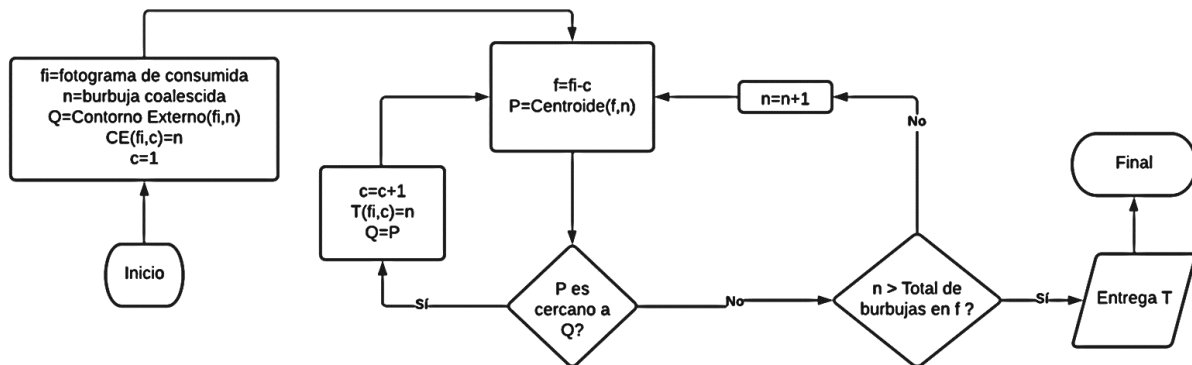


Figura 21. Algoritmo para construir la trayectoria de una burbuja consumidas en un evento de coalescencia, entregando la variable T como un vector que contiene los índices n de burbuja, comenzando desde f hasta $f-c$.

5.5.1. Estructura de Datos para las Trayectorias

Las trayectorias de las burbujas que participan en eventos de coalescencia fueron almacenadas en un conjunto de celdas que almacenan los índices de las burbujas que componen las trayectorias de las burbujas llamado T , el cual está en función del fotograma de coalescencia, su número de evento correspondiente en dicho fotograma y las burbujas participantes en dicho evento.

$$T \{f, 1\} \{1, e\} (i, j)$$

Siendo $\{f, 1\}$ y $\{1, e\}$ celdas (ver Anexo 10) que contienen vectores almacenados por índices, almacenando el valor del fotograma del evento de coalescencia, en el caso de que existan eventos en dicho fotograma, hasta el fotograma final.

Fotograma 1
Fotograma 2
...
Fotograma final

Para el cual $\{1, e\}$ enumera todos los eventos de coalescencia generados en dicho fotograma.

Evento 1	Evento 2	...	Evento final
----------	----------	-----	--------------

Y la matriz (i, j) almacena los índices n de las burbujas, donde las filas (i) indican todas las burbujas que participaron en la coalescencia y las columnas (j) indican la longitud de la trayectoria.

Burbuja 100	Burbuja 102	Burbuja 106	...	n burbuja
Burbuja 105	Burbuja 104	Burbuja 108	...	n burbuja

Indicando así que el fotograma $f - j$ es el fotograma en el cual la burbuja (i, j) tiene su centroide almacenado (en el caso de Matlab, $f - j + 1$ ya que los vectores comienzan a contar desde el 1).

5.6. Determinación de Tiempos de Coalescencia

Una vez determinados los eventos de coalescencia y las trayectorias de todas las burbujas que se consumen en los eventos de coalescencia. Se procedió a determinar el tiempo de coalescencia para cada caso. Para realizar esto se analizaron las burbujas en (i, j) implicadas para cada evento dentro de cada fotograma de coalescencia, utilizando la estructura de datos que componen las trayectorias de las burbujas consumidas.

De este modo se generó una estructura de datos análoga a las trayectorias de las burbujas, con la diferencia de que, en esta ocasión, se almacena el índice de contorno externo que pertenece a cada centroide de cada burbuja en (i, j) (Figura 22).

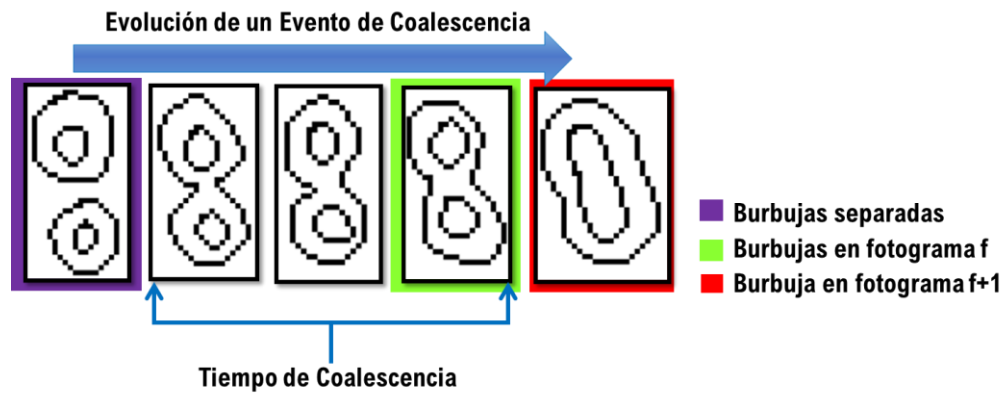


Figura 22. Ejemplo visual del proceso de determinación de tiempo de coalescencia por contorno externo.

Para almacenar dicha información, se comprobó si la posición del centroide de cada burbuja (i, j) estaba dentro de un mismo contorno externo, para el cual se almacena el índice de dicho contorno externo en un arreglo de vectores y matrices, definido de forma análoga a “T” por $TC \{f, 1\} \{1, e\} (i, j)$, donde para este caso (i, j) equivalen al índice que representa el contorno externo.

Una vez obtenidos los índices de los contornos exteriores, los cuales contienen en su interior los centroides que componen las trayectorias de las burbujas consumidas en eventos de coalescencia. Se procedió a calcular el tiempo de coalescencia generando un algoritmo enfocado en detectar el cambio entre los índices de los contornos externos para cada índice único de burbuja.

Ejemplo:

Para un fotograma f , siendo el único evento de coalescencia se tienen las trayectorias (columnas) de los centroides para 2 burbujas (filas) (Figura 23).

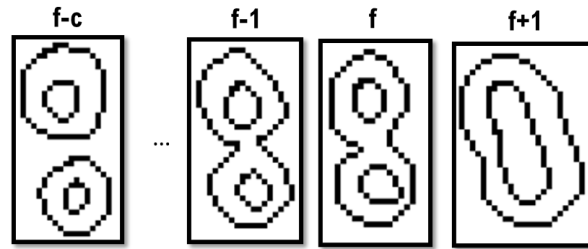


Figura 23. Ejemplo visual de coalescencia mediante contornos externos y trayectorias de centroides, desde el fotograma f hacia $f-c$.

Para las trayectorias se tienen los siguientes índices de burbuja:

f	$f-1$...	$f-c$
100	102		106
105	104		108

Desde “TC”, Estructura la cual almacenó el índice de cada contorno externo para cada burbuja consumida desde f hacia $f-c$ (Figura 24).

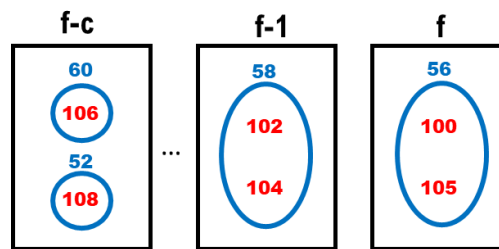


Figura 24. Ejemplo de cambio entre índices de contornos externos (azul) para cada índice único de burbuja n (rojo), desde el fotograma f hacia $f-c$.

Se tienen los siguientes índices de contorno externo:

f	$f-1$...	$f-c$
56	58		<u>60</u>
56	58		<u>52</u>

Dando como resultado un tiempo de coalescencia de 2 fotogramas, que equivalen a su respectivo tiempo en segundos dependiendo de la velocidad de filmado de la cámara.

Se tomaron los momentos cuyos índices de contornos exteriores, fueran diferentes entre sí, de este modo se puede observar el fotograma en el cual 2 burbujas dejan de ser parte de un mismo contorno externo y por ende dichas burbujas dejan de tener un contacto. Obteniéndose así los tiempos de coalescencia para cada trayectoria.

5.7. Transformación a Unidades Convencionales.

Una vez obtenido el valor de tiempo de coalescencia, se procedió a transformar en tiempo real las unidades utilizadas, utilizando la siguiente ecuación.

$$TFR = \frac{\textit{Tiempo real de video}}{\textit{cantidad de fotogramas totales}}$$

$$TCR(\textit{evento}) = TCF(\textit{evento}) * TFR$$

Siendo TFR el tiempo que equivale un fotograma a tiempo real, TCF el tiempo de coalescencia en fotogramas entregado por el algoritmo y TCR el tiempo de coalescencia en tiempo real. (Tiempo real hace referencia a la duración del video sin ralentización, donde 3 segundos en tiempo real, equivalen a 1 minuto y 14 segundos de cámara lenta).

Análogamente para las áreas y posiciones en el sistema se tiene que, desde una relación real, en donde el ancho interno de la columna de burbujeo (Anexo 17) tiene una medida conocida de 10 centímetros, que equivalen a 660 pixeles aproximadamente (La relación fue extraída utilizando la imagen en su tamaño completo de 1920x1080p).

$$DR = \frac{\textit{Distancia Real}}{\textit{Pixeles}}$$

6. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Una vez implementado el código computacional, capaz de identificar burbujas, detectar eventos de coalescencia y determinar los tiempos de coalescencia, se llevaron a cabo una serie de análisis que permiten, por una parte, realizar pruebas para verificar la correcta implementación del código y conocer los órdenes de magnitud de las variables, temporales y espaciales del sistema dinámico de burbujeo. En este caso los Resultados fueron obtenidos utilizando agua pura y 3 concentraciones diferentes de MIBC (20, 50 y 100 ppm respectivamente), tomando 5 videos para cada caso, de los cuales se analizaron un total de 25mil fotogramas, con un tiempo de procesamiento de 40 minutos por video aproximadamente.

6.1. Registros Generales por Video.

Las muestras de cada concentración que comprenden un total de 25 videos, 5 para cada concentración, los videos fueron tomados entre espacios de 4 minutos aproximadamente. Dentro de los cuales se almacenó la información del promedio del número de burbujas que se observan para cada fotograma, dentro de cada video (Figura 25 y 26). Demostrando una leve variación en la cantidad de burbujas entre cada video tomado para cada concentración.

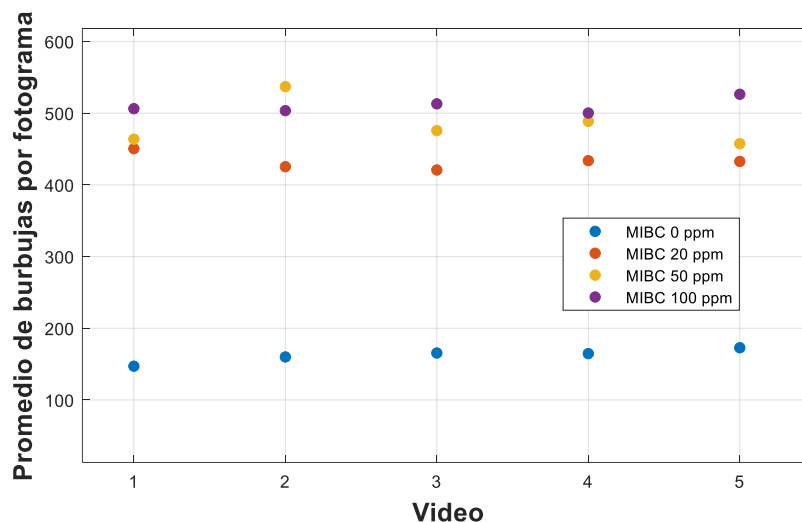


Figura 25. Población de burbujas, promedio de la cantidad de burbujas que se registraron para cada fotograma, siendo un total de 1000 fotogramas por video.

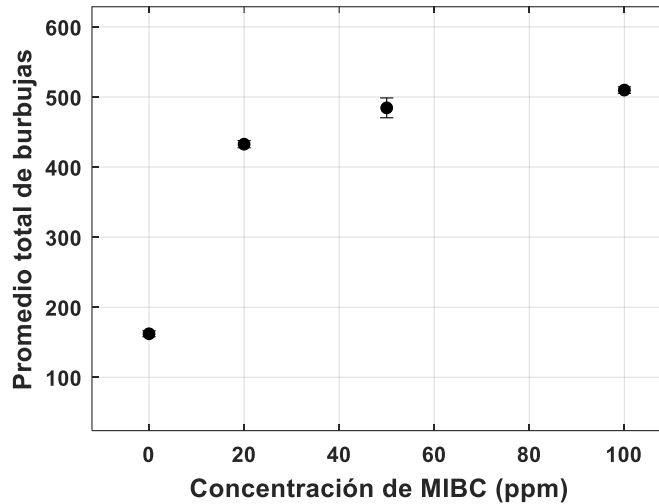


Figura 26. Promedios de las cantidades de burbujas y su respectiva desviación típica.

Además se registraron los eventos que ocurren por video (Figura 27), en el cual, la muestra de agua es la única que demuestra un aumento en el número de eventos de coalescencia por video, en general esto puede deberse simplemente al azar, puesto que los videos son grabados en momentos completamente arbitrarios, por lo que al momento de grabar el agua, se pudieron registrar más eventos en un video que en otro.

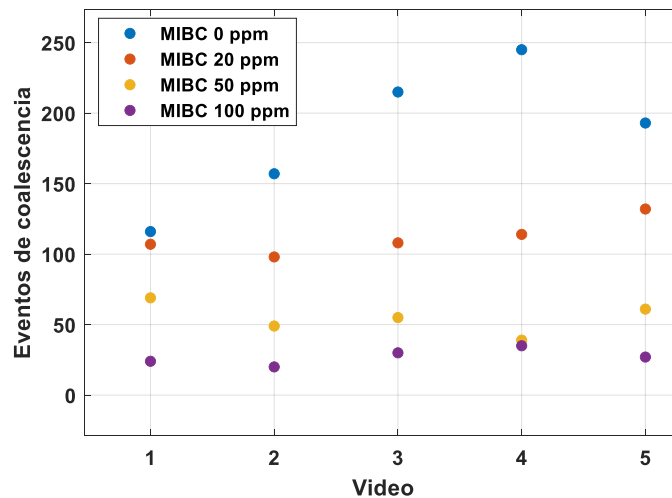


Figura 27. Eventos de coalescencia para cada video, registrando un video cada 2 minutos, para distintas concentraciones de MIBC.

6.2. Área de Burbujas.

Para comparar el comportamiento global de las distintas concentraciones de MIBC en la columna de burbujeo, se registraron las áreas de todas las burbujas en el sistema, mostrando su comportamiento a lo largo de la columna de burbujeo (de manera ascendente), dichas áreas fueron calculadas, como el promedio para las áreas de burbujas posicionadas entre espacios de 0,5 cm a través de la columna de burbujeo (Figura 28).

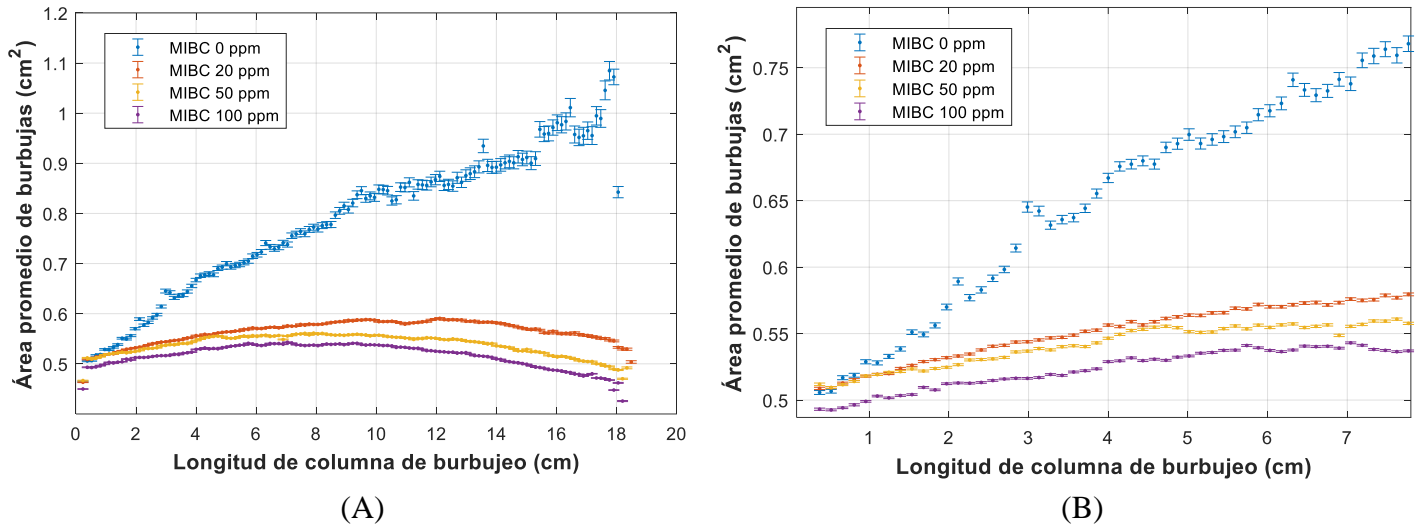


Figura 28. Comportamiento de las burbujas en la columna de burbujeo, sección completa (A) y sección inicial (B).

Se puede observar que los sistemas comienzan con áreas levemente diferentes al inicio, esto se debe a que el sistema fue analizado a partir de unos pocos centímetros a partir del nacimiento de las burbujas, lo que permite que estas se puedan desarrollar un poco antes de analizarlas, permitiendo así diferenciar de mejor manera cada muestra.

Demostrando que en sistemas con agua pura (0 ppm de MIBC) las burbujas en promedio duplican su tamaño a medida que avanzan en la columna de burbujeo, siendo para 20, 50 y 100 ppm un comportamiento más estable a lo largo de la columna de burbujeo, en el cual cada concentración se separa levemente en cuanto a sus tamaños de burbuja, descendiendo el área de las burbujas a medida que aumenta la concentración de MIBC.

6.3. Número de Eventos de Coalescencia

El número de eventos de coalescencia entregado por el código muestra una disminución a medida que aumenta la concentración de MIBC (Figura 29).

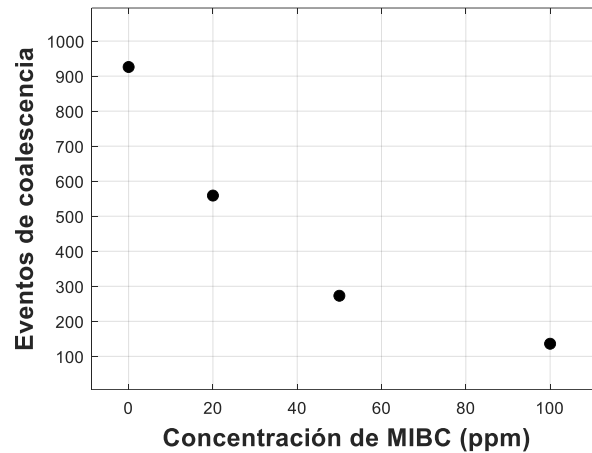


Figura 29. Recuento de Eventos de coalescencia registrados para diferentes concentraciones de MIBC, análisis de 10mil fotogramas para cada concentración.

Dicho número de eventos, representan el total de ocurrencias en las cuales solo dos burbujas en el fotograma f solapan a una en el fotograma $f + 1$. Aun así, se debe de mencionar que se detectaron coalescencias múltiples, en donde para el análisis de cada video, se detectaron para el agua, un total de 75 eventos múltiples (mayor a 2), seguido por 20 ppm de MIBC con 7 eventos múltiples y para 50 ppm de MIBC se registró solo 1 evento, no encontrándose ninguno para los 100 ppm de MIBC.

Estos valores no se reportan oficialmente, debido a que no se calcularon sus tiempos de coalescencia, esto se debe a que los algoritmos fueron diseñados para analizar pares de burbujas. Si bien es posible generar algoritmos que abarquen estas posibilidades, se decidió no extender las capacidades del código actual, debido a que los eventos múltiples demostraron tener mayores probabilidades a ser falsos eventos de coalescencia, generados por los gradientes en la iluminación de la columna de burbujeo. Además de que su cantidad es mucho menor a la de las coalescencias en parejas.

6.4. Área de Burbuja Generada

Se registraron las áreas de las burbujas que se generaron producto de los eventos de coalescencia, calculando el promedio de dichas áreas para agua pura y cada concentración de MIBC, se logró observar que, para cada concentración, el área generada disminuye a medida que aumenta la concentración de MIBC. Siendo valores de las áreas generadas producto de una coalescencia, entre un rango de 1 y 1,3 centímetros cuadrados. (Figura 30).

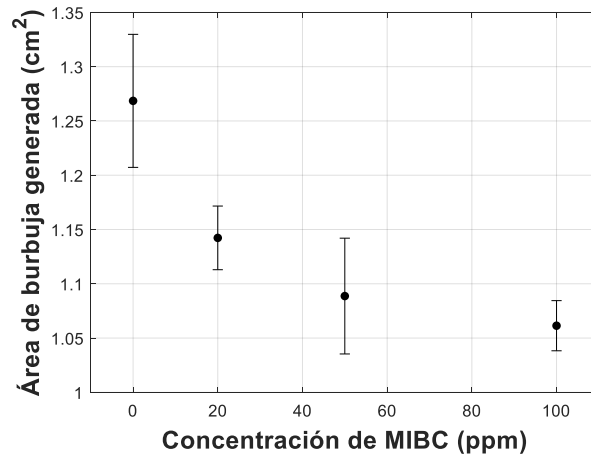


Figura 30. Áreas de burbujas generadas en los eventos de coalescencia, registradas al momento previo a su coalescencia, análisis de 10mil fotogramas para cada concentración.

Se debe de destacar que el valor del área fue calculado a partir de los contornos internos de las burbujas, se debe de destacar que el área real es mayor que el obtenido por medio del código (contorno interno), este efecto es mayor para las burbujas más pequeñas, ya que el contorno de las burbujas producido por el umbral de color que ayuda a reconocer las burbujas es mayor en burbujas de menor tamaño, pudiendo llegar el caso en el que burbujas muy pequeñas no puedan formar un contorno interno (Figura 31).

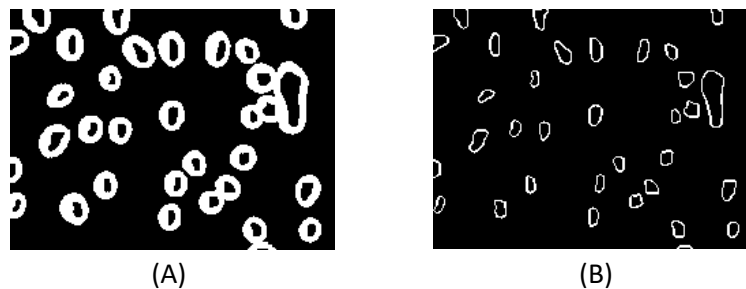


Figura 31. Diferencia de área entre los contornos externos (A) y contornos internos (B).

Las áreas no se calcularon de otra manera es debido a la complejidad en la variabilidad de los contornos externos, ya que la metodología utilizada para realizar el análisis de imagen no abarca una detección de contornos, ya que esto requeriría un proceso que sea capaz de detectar contornos y bordes de burbujas de una manera variable e inteligente, lo cual sería posible aplicando técnicas enfocadas en entrenamiento de redes neuronales, que sean capaces de reconocer y diferenciar dos burbujas, mediante los patrones de los contornos externos conectados de las burbujas (Figura 32).



Figura 32. Dos burbujas con sus contornos conectados y una burbuja aislada con su contorno cerrado.

6.5. Tiempos de Coalescencia

Como resultado principal se obtuvieron los tiempos de coalescencia, para los cuales se determinaron los promedios del total de eventos de coalescencia para el agua pura y cada concentración de MIBC, observándose valores que van desde los 10 hacia los 14 milisegundos, demostrando un incremento en los tiempos de coalescencia a medida que se aumenta la concentración de MIBC (Figura 33).

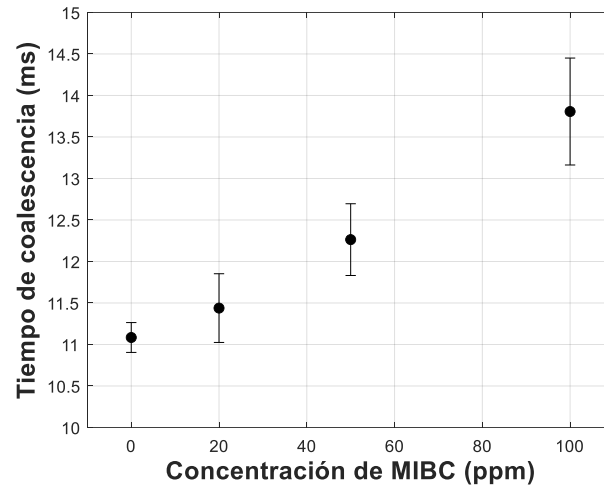


Figura 33. Gráfico de tiempos de coalescencia, tomando el promedio de los tiempos de coalescencia para 5 videos por cada concentración.

Se debe de destacar que, para las diferentes concentraciones, se muestran valores con leves diferencias en cuanto a tiempo de coalescencia. Esto se debe principalmente al corto recorrido que las burbujas presentan en los videos, producto del limitado espacio físico disponible que se posee para observar el comportamiento de las burbujas (largo de la columna de burbujeo). ya que las burbujas culminan su recorrido en pocas milésimas de segundos desde su nacimiento en los capilares hasta la interfase líquido-gas presente en el tope de la columna.

Además, el reconocimiento de imagen puede ser afectado de múltiples maneras dependiendo de cómo sean grabadas las burbujas, perturbando directamente los resultados finales. Cambios en la iluminación podrían provocar que burbujas desaparezcan del enfoque y por ende generen tiempos de coalescencia cortos.

Aun así, se realizaron correcciones para que el algoritmo no considere muchos “posibles eventos” y almacene las burbujas mejor definidas. Los errores fueron minimizados por medio de correcciones Morfológicas y algoritmos que permiten reconocer los falsos eventos, eliminándolos del análisis a tiempo.

Para probar la eficiencia del algoritmo, se eligieron 100 eventos de coalescencia detectados entre los 25 videos, y se comprobaron mediante una inspección minuciosa, fotograma por fotograma, y se encontró que 94 de ellos eran efectivamente coalescencias, y los demás eran eventos que pertenecían a errores producto de la iluminación.

6.6. Velocidades de Burbuja

Para calcular las velocidades de las burbujas, se tomaron los datos de las posiciones que componen las trayectorias de las burbujas, calculando la diferencia de posición que existe entre cada fotograma para todas las trayectorias, este paso se realizó para todas las burbujas (Anexo 16) y para las burbujas que se consumieron en eventos de coalescencia. Para conocer la velocidad relativa que poseen las burbujas que se consumen en eventos de coalescencia, se procedió a calcular la velocidad en función de la dirección que estas poseen en el sistema al momento de la coalescencia (Anexo 6). Calculando la velocidad relativa para todos los eventos de coalescencia, en cada concentración, se obtuvieron velocidades que varían entre los 10 y 40 cm/s.

6.6.1. Velocidad de Enfrentamiento

La velocidad con la que se enfrentan las burbujas que se consumen en eventos de coalescencia, se determinó como la componente de la velocidad relativa que se encuentra de manera paralela hacia el vector de distancia entre los 2 centroides de las burbujas (Anexo 6). Encontrándose valores de tiempos de coalescencia para las distintas concentraciones de MIBC, mostrando una tendencia a disminuir los tiempos de coalescencia a medida que aumenta la velocidad las burbujas (Figura 34).

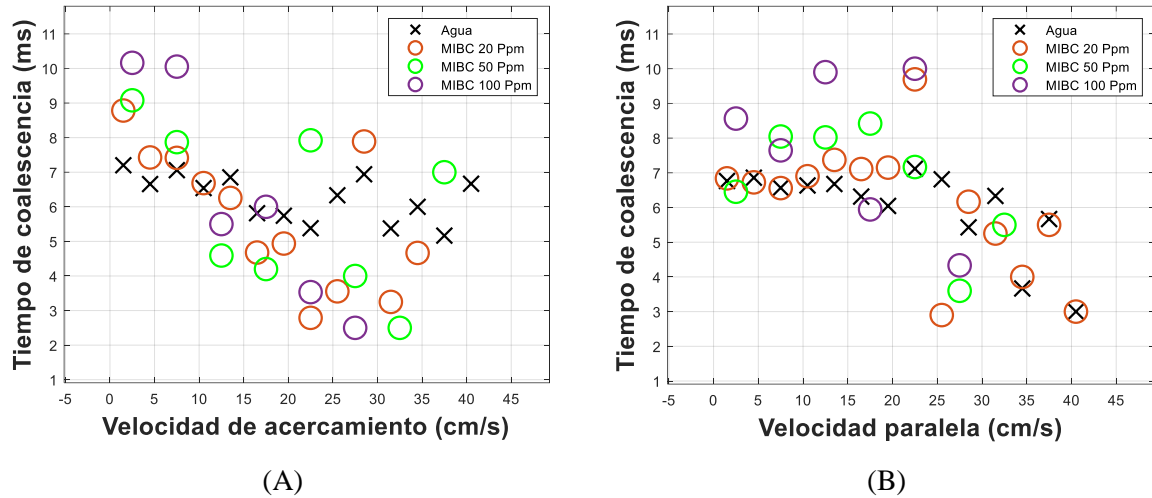


Figura 34. Promedio de tiempos de coalescencia para las componentes de la velocidad relativa entre las burbujas

La dispersión en los datos se puede explicar debido a que dichos valores equivalen a los promedios de los tiempos de coalescencia, correspondientes a conjuntos cercanos de velocidades de acercamiento (para observar la variabilidad de dichos datos por concentración y demás características, ver Anexo 2, 3, 4, 7, 8, 9, 10 y 11). Con el objetivo de comprobar los datos de velocidad, estos fueron comparados con la literatura, en el cual se midieron velocidades y tiempos de coalescencia de una burbuja, de una manera controlada y aislada (Figura 35), observándose para los valores de agua (“X”) a velocidades de entre 10 y 100 mm/s, las cuales poseen tiempos de coalescencia similares (Figura 36).

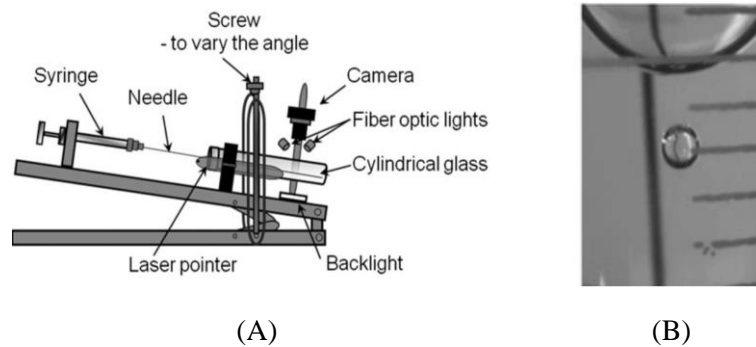
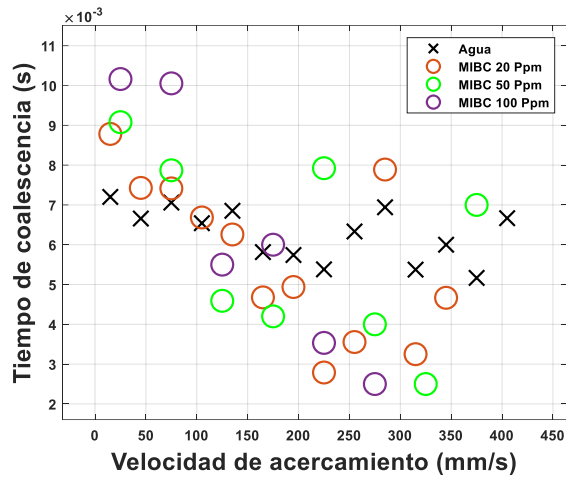
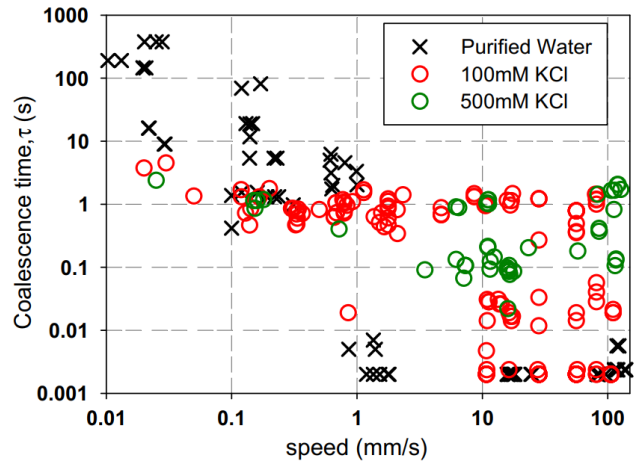


Figura 35. Equipo experimental utilizado para medir las velocidades y los tiempos de coalescencia de pares de burbujas enfrentadas (A) y una representación de la burbuja enfrentada a un menisco de líquido en el cual es enfrentada la burbuja (B) (del Castillo et al., 2011).



(A)



(B)

Figura 36. Tiempos de coalescencia (promedios agrupados por velocidad) y velocidad de las burbujas que se consumen en los eventos de coalescencia (A) y tiempo de coalescencia vs velocidad de enfrentamiento entre 2 burbujas (del Castillo et al., 2011) (B).

6.7. Zonas de Coalescencia

Para observar el comportamiento de los eventos de coalescencia dentro de los sistemas de burbujeo, se visualizaron las posiciones de todas las burbujas generadas por un evento de coalescencia, logrando ver, para cada conjunto de 5 videos por concentración, las zonas en las cuales ocurrieron los eventos de coalescencia (Figura 37).

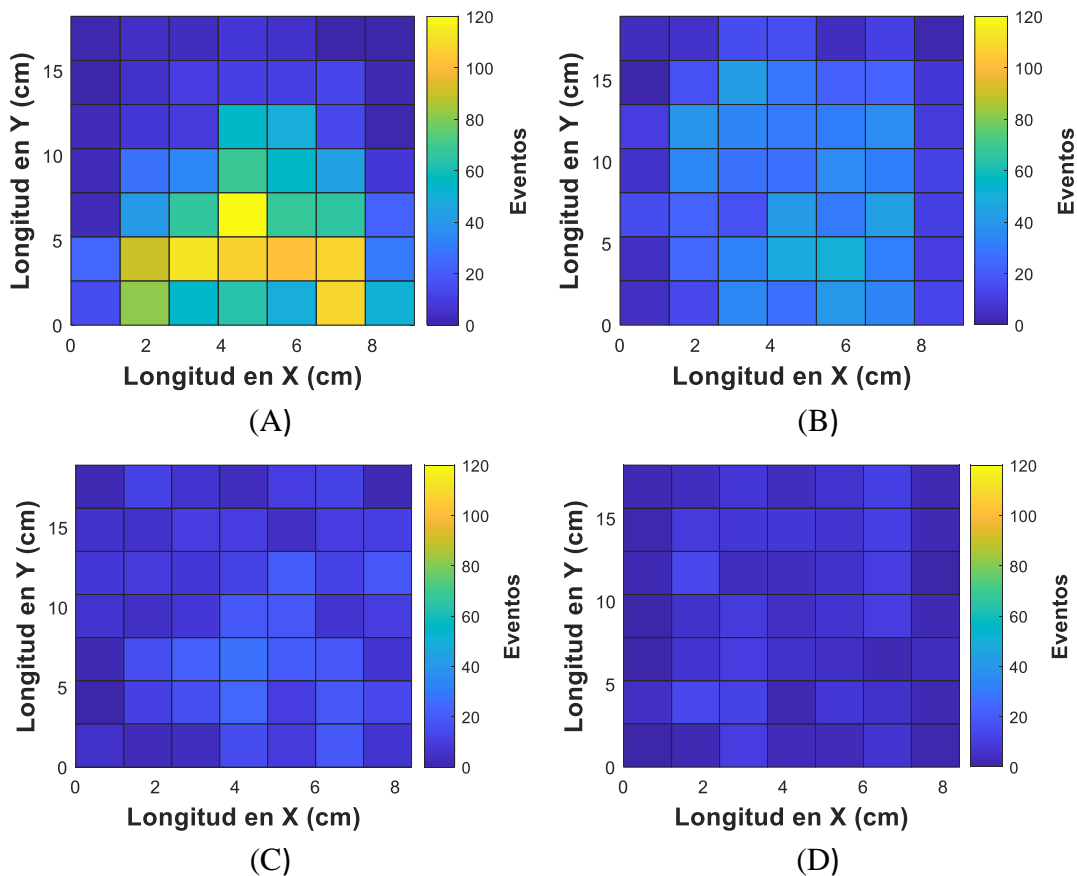


Figura 37. Coalescencias detectadas para el total de videos, para 0 ppm de MIBC (A), 20 ppm de MIBC (B), 50 ppm de MIBC (C), 100 ppm de MIBC (D).

Siendo la longitud en Y la dirección del ascenso de las burbujas desde su nacimiento en los capilares de burbujeo hacia la cima de la columna (largo de la columna), y longitud en X el ancho de la columna de burbujeo. Observándose claramente para el agua (0 ppm de MIBC) que la mayor cantidad de eventos de coalescencia, ocurren al inicio de su ascenso en la columna de burbujeo, para 20 ppm de MIBC, se observa una concentración

al inicio con una leve dispersión, llegando a un máximo de 60 eventos en determinadas zonas, por último para 50 y 100 ppm de MIBC un máximo de 25 y 15 eventos en determinadas zonas, demostrando una mayor dispersión, lo que se debe a la notable disminución de eventos de coalescencia observados en la sección 6.3.

6.8. Superficie de Contacto

A continuación, se presenta un promedio de las distancias superficiales con las cuales las parejas de burbujas consumidas entran en contacto al momento previo a su coalescencia (Figura 38). La información fue calculada por medio de un algoritmo automático, el cual determina la distancia mínima de contacto entre las burbujas consumidas (ver Anexo 5).

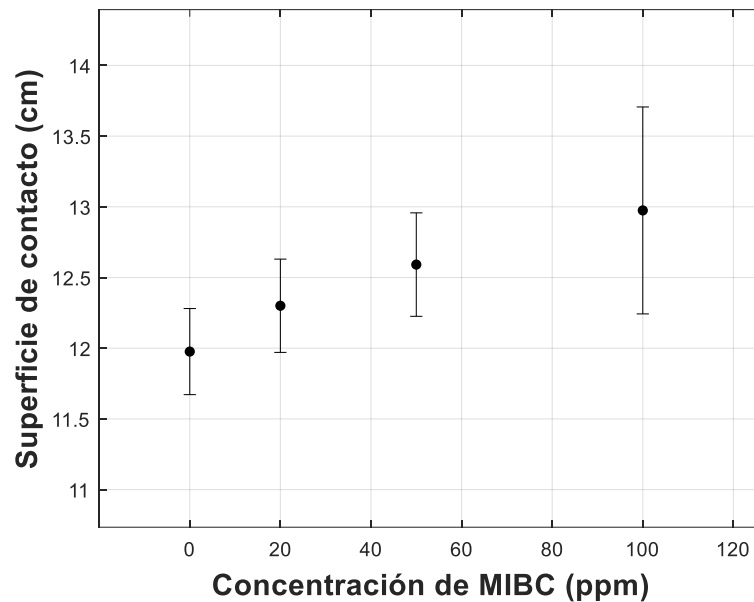


Figura 38. Distancia de contacto entre dos burbujas que participan en un evento de coalescencia, al momento previo a su coalescencia (1 fotograma antes), para diferentes concentraciones de MIBC.

Se denominó distancia de contacto, ya que, para calcular el área superficial de contacto de las burbujas, es necesario conocer la geometría tridimensional de las burbujas, aunque es posible asumir el espesor de las burbujas, debido a que el espesor de la columna de burbujeo es pequeño (0,5 cm aproximadamente), no se consideró dicho valor ya que no todas las burbujas se extienden por este espesor. Por lo que solo se consideró el contacto de las

burbujas de una manera bidimensional. La similitud entre los datos se debe en gran parte a que la distancia de contacto es liderada por la burbuja más pequeña.

Para observar el comportamiento respecto al tiempo de coalescencia, se promediaron los tiempos para cada superficie de contacto, realizando esto para cada evento de coalescencia, se puede observar una leve disminución en los tiempos de coalescencia a medida que la superficie de contacto aumenta (Figura 39). Mostrándose para el agua un comportamiento descendente (ver Anexo 15 para observar variabilidad en los datos).

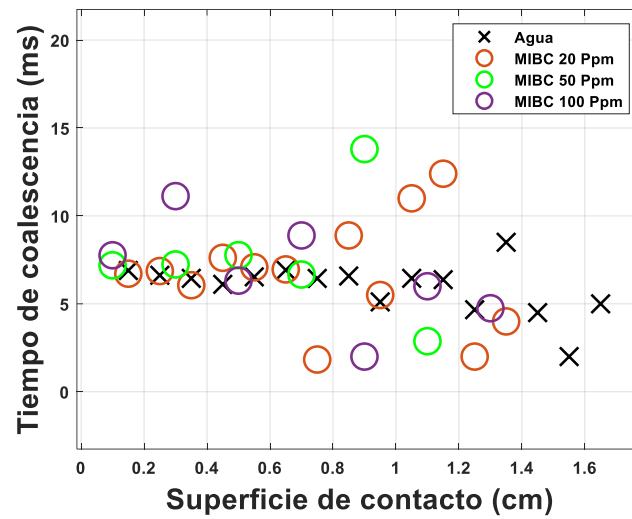


Figura 39. Tiempos de coalescencia (Promedios agrupados por Superficie de contacto) y Tiempo de coalescencia de las burbujas que se consumen en los eventos de coalescencia.

7. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES.

7.1. Conclusiones

A partir del desarrollo de esta Habilitación Profesional se puede concluir lo siguiente:

Se logró implementar con éxito un código computacional, capaz de reconocer múltiples burbujas en un sistema dinámico de burbujeo, identificando automáticamente, eventos de coalescencia y determinando los tiempos de coalescencia.

El uso de las herramientas de análisis de imagen, que van desde la corrección de color hasta el análisis de datos obtenidos por medio de las imágenes, permite el acceso a detalles en los sistemas de burbujeo, que son inalcanzables por medio de otros métodos.

Se logró generar información que proporciona facilidades para realizar análisis a la coalescencia de burbujas en sistemas dinámicos, para agua pura y diferentes concentraciones de MIBC.

Las formas gráficas del comportamiento de las diferentes características de las burbujas son una valiosa herramienta para la comprensión de fenómenos que ocurren en las burbujas y en los sistemas dinámicos de burbujeo, lo que permite comprender los fenómenos con mayor detalle.

Los valores determinados en la relación entre tiempo de coalescencia y velocidades de acercamiento para las burbujas muestran concordancia con los valores reportados en literatura (del Castillo et al., 2011).

7.2. Recomendaciones

Una recomendación para mejorar el programa computacional es la implementación de tecnologías avanzadas de análisis de imagen, como lo es el reconocimiento de objetos por medio de “*Deep Learning*” y el entrenamiento de redes neuronales para reconocer burbujas, lo cual potenciaría el reconocimiento de los contornos de las burbujas en grupos y/o individuales, eliminando problemas posteriores producto de la iluminación o corrección de color de las imágenes.

Debido a que existe una alta variabilidad en los sistemas de burbujeo, se recomienda efectuar las tomas de video de una manera estable al momento de filmar, procurando tener completa oscuridad, iluminando la columna de burbujeo con una fuente de luz (panel led), a una distancia que permita un buen contraste y una buena definición para los contornos de las burbujas (contornos externos de las burbujas bien definidos). Teniendo la precaución de no mover la cámara de video de su posición, hasta que todas las muestras sean realizadas. Procurando mantener un flujo de aire constante en todo momento.

Para realizar estudios a tiempos de coalescencia, es de vital importancia conocer el recorrido completo que realizan las burbujas desde su nacimiento en capilares hasta su coalescencia. Esta información se verá limitada por el medio en el cual las poblaciones de burbujas sean generadas, y en especial el espacio que se disponga para observar el recorrido de las burbujas. Para conseguir un estudio más detallado, se recomienda contar con una columna de burbujeo lo suficientemente larga, para poder observar estos fenómenos con mayor detenimiento. Además de múltiples cámaras que puedan captar el recorrido completo de burbujas que participen en eventos de coalescencia.

8. REFERENCIAS

- Acuña, C. A., & Finch, J. A. (2010). Tracking velocity of multiple bubbles in a swarm. *International Journal of Mineral Processing*, 94(3–4), 147–158.
<https://doi.org/10.1016/j.minpro.2010.02.001>
- Angarska, J. K., Dimitrova, B. S., Danov, K. D., Kralchevsky, P. A., Ananthapadmanabhan, K. P., & Lips, A. (2004). Detection of the hydrophobic surface force in foam films by measurements of the critical thickness of the film rupture. *Langmuir*, 20(5), 1799–1806.
<https://doi.org/10.1021/la0357514>
- Bournival, G., Ata, S., & Jameson, G. J. (2017). Bubble and Froth Stabilizing Agents in Froth Flotation. In *Mineral Processing and Extractive Metallurgy Review* (Vol. 38, Issue 6, pp. 366–387). Taylor and Francis Inc. <https://doi.org/10.1080/08827508.2017.1323747>
- Castro, S., Miranda, C., Toledo, P., & Laskowski, J. S. (2013). Effect of frothers on bubble coalescence and foaming in electrolyte solutions and seawater. *International Journal of Mineral Processing*, 124, 8–14. <https://doi.org/10.1016/j.minpro.2013.07.002>
- Citir, C., Aktas, Z., & Berber, R. (2004). Off-line image analysis for froth flotation of coal. *Computers and Chemical Engineering*, 28(5), 625–632.
<https://doi.org/10.1016/j.compchemeng.2004.02.007>
- Craig, V. S. J. (2004). Bubble coalescence and specific-ion effects. *Current Opinion in Colloid and Interface Science*, 9(1–2), 178–184. <https://doi.org/10.1016/j.cocis.2004.06.002>
- del Castillo, L. A., Ohnishi, S., & Horn, R. G. (2011). Inhibition of bubble coalescence: Effects of salt concentration and speed of approach. *Journal of Colloid and Interface Science*, 356(1), 316–324. <https://doi.org/10.1016/j.jcis.2010.12.057>
- Finch, J. A., & Dobby, G. S. (1991). Flotation of Sulphide Minerals 1990. In *International Journal of Mineral Processing* (Vol. 33).
- Grau, R. A., & Heiskanen, K. (n.d.-a). *Visual technique for measuring bubble size in flotation machines*. www.elsevier.com/locate/mineng
- Henry, C. L., & Craig, V. S. J. (2008). Ion-specific influence of electrolytes on bubble coalescence in nonaqueous solvents. *Langmuir*, 24(15), 7979–7985.
<https://doi.org/10.1021/la8008738>
- Hibiki, T., & Ishii, M. (2002). Interfacial area concentration of bubbly yow systems. In *Chemical Engineering Science* (Vol. 57). www.elsevier.com/locate/ces
- Hosseini, M. R., Shirazi, H. H. A., Massinaei, M., & Mehrshad, N. (2015). Modeling the Relationship between Froth Bubble Size and Flotation Performance Using Image Analysis and Neural Networks. *Chemical Engineering Communications*, 202(7), 911–919.
<https://doi.org/10.1080/00986445.2014.886201>

- Jahedsaravani, A., Marhaban, M. H., & Massinaei, M. (2014). Prediction of the metallurgical performances of a batch flotation system by image analysis and neural networks. *Minerals Engineering*, *69*, 137–145. <https://doi.org/10.1016/j.mineng.2014.08.003>
- Karakashev, S. I., Tsekov, R., & Ivanova, D. S. (2010). Dynamic effects in thin liquid films containing ionic surfactants. *Colloids and Surfaces A: Physicochemical and Engineering Aspects*, *356*(1–3), 40–45. <https://doi.org/10.1016/j.colsurfa.2009.12.025>
- Kracht, W., & Finch, J. A. (2010). Effect of frother on initial bubble shape and velocity. *International Journal of Mineral Processing*, *94*(3–4), 115–120. <https://doi.org/10.1016/j.minpro.2010.01.003>
- Lin, B., Recke, B., Knudsen, J. K. H., & Jørgensen, S. B. (2008). Bubble size estimation for flotation processes. *Minerals Engineering*, *21*(7), 539–548. <https://doi.org/10.1016/j.mineng.2007.11.004>
- Lin, T. J., & Lin, G. M. (2005). An experimental study on flow structures of a single bubble rising in a shear-thinning viscoelastic fluid with a new measurement technique. *International Journal of Multiphase Flow*, *31*(2), 239–252. <https://doi.org/10.1016/j.ijmultiphaseflow.2004.11.004>
- Liu, G., Hou, Y., Zhang, G., & Craig, V. S. J. (2009). Inhibition of bubble coalescence by electrolytes in binary mixtures of dimethyl sulfoxide and propylene carbonate. *Langmuir*, *25*(18), 10495–10500. <https://doi.org/10.1021/la901199h>
- Liu, J. J., MacGregor, J. F., Duchesne, C., & Bartolacci, G. (2005). Flotation froth monitoring using multiresolutional multivariate image analysis. *Minerals Engineering*, *18*(1), 65–76. <https://doi.org/10.1016/j.mineng.2004.05.010>
- Marrucci, G. (1969). A theory of coalescence. In *Chemical Engineering Science* (Vol. 24). Pergamon Press.
- Marrucci, G., & Nicodemo, L. (1967). Coalescence of gas bubbles in aqueous solutions of inorganic electrolytes. In *Chemical Engineering Science* (Vol. 22). Pergamon Press Ltd.
- Martins Vianna, S. (2004). The effect of particle size, collector coverage and liberation on the floatability of galena particles in an ore. <https://doi.org/10.13140/RG.2.2.33486.31044>
- Nicklin, D. J. (1962). Two-phase bubble flow. In *Chemical Engineering Science* (Vol. 17). Pergamon Press Ltd., London. Primed in Great Britain.
- Nishino, K., Kato, H., & Torii, K. (2000). Stereo imaging for simultaneous measurement of size and velocity of particles in dispersed two-phase flow. In *Meas. Sci. Technol* (Vol. 11). <http://iopscience.iop.org/0957-0233/11/6/306>

9. ANEXOS.

Anexo 1. Solapamiento de Burbujas

El solapamiento entre las burbujas del fotograma f y $f + 1$, es realizado a partir de los puntos máximos de las burbujas.

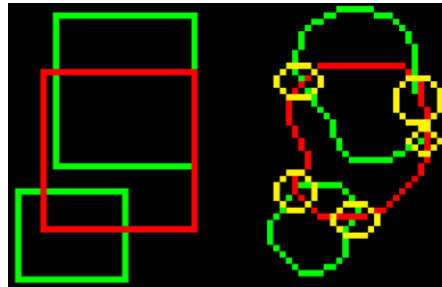


Figura 40. Ejemplo de áreas rectangulares generadas a partir de los puntos máximos en el área de las burbujas.

Utilizando las aristas de los rectángulos se utilizaron algoritmos para verificar el solapamiento de estos de la siguiente forma.

Siendo $R1$, $R2$, $L1$ y $R2$ los puntos máximo derecho (R) y mínimos izquierdos (L), para los rectángulos 1 y 2

Si algún rectángulo está por encima de otro

if($R1.y \geq L2.y$ or $R2.y \geq L1.y$):

return Existe Solapamiento

Si no existe la posibilidad de que dichos rectángulos se intercepten entre si

if($L1.x == R1.x$ or $L1.y == R1.y$ or $L2.x == R2.x$ or $L2.y == R2.y$):

return Imposible Solapamiento

De esta manera, se comprueba si dichos rectángulos se encuentran solapados y, por ende, indican una posible coalescencia, la cual debe ser confirmada más adelante por los contactos directos que existen en las burbujas, utilizando los contornos internos de las mismas.

Anexo 2. Velocidades de Burbujas totales.

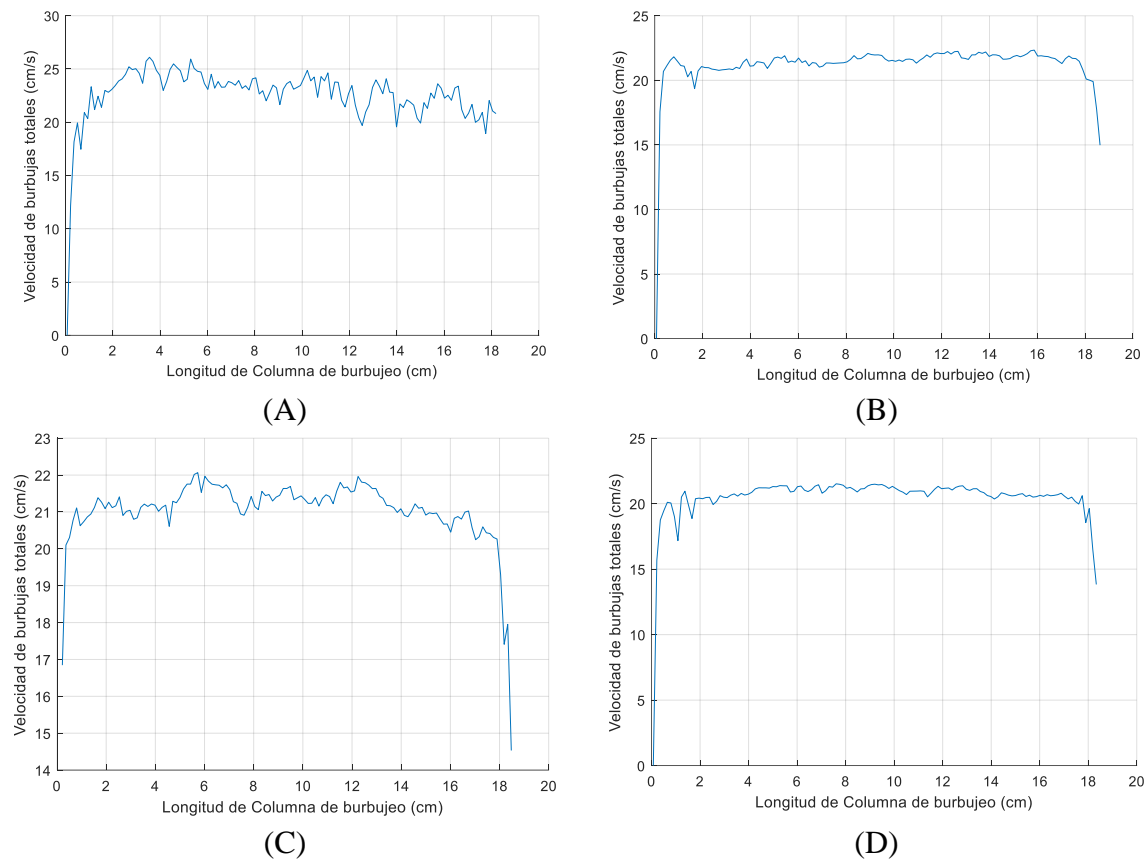


Figura 41. Histogramas de velocidades de burbujas totales. Agua (A), MIBC 20 ppm (B). MIBC 50 ppm (C), MIBC 100 ppm (D).

Anexo 3. Histogramas de Velocidades Paralelas

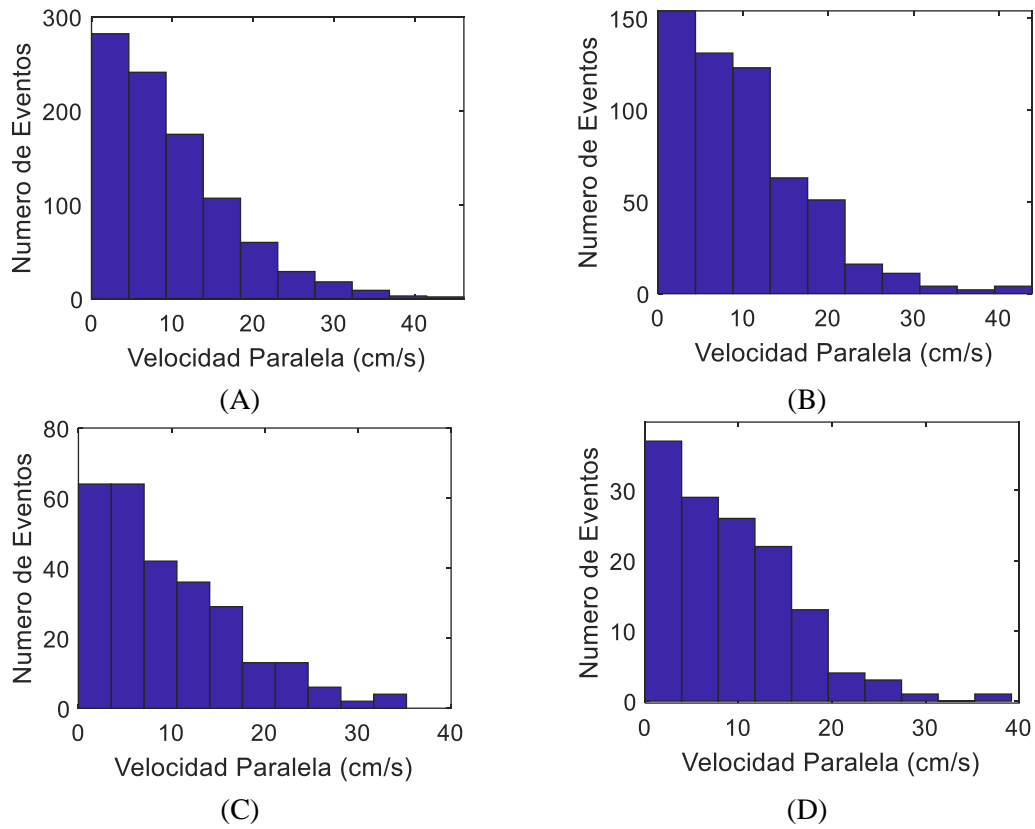


Figura 42. Histogramas de velocidades paralelas. Agua (A), MIBC 20 ppm (B), MIBC 50 ppm (C), MIBC 100 ppm (D).

Anexo 4. Histogramas de Velocidades de Acercamiento

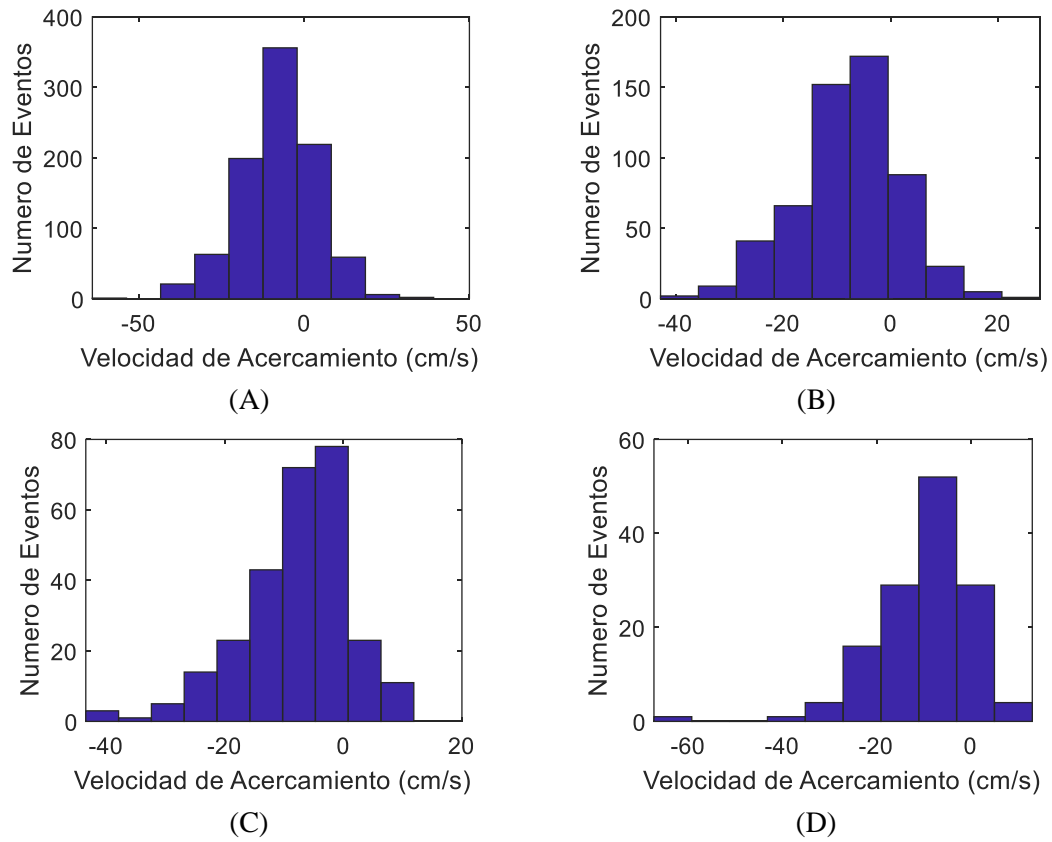


Figura 43. Histogramas de velocidades de acercamiento. Agua (A), MIBC 20 ppm (B). MIBC 50 ppm (C), MIBC 100 ppm (D).

Anexo 5. Longitud de contacto entre las burbujas

La distancia de contacto entre dos burbujas se calcula utilizando la mínima distancia que existe entre los contornos internos de las burbujas consumidas en eventos de coalescencia, utilizando la pendiente que se genera entre dichos puntos, se buscan los puntos más cercanos del contorno externo hacia dicha pendiente, por el lado superior y por el lado inferior a la pendiente (Figura 44).

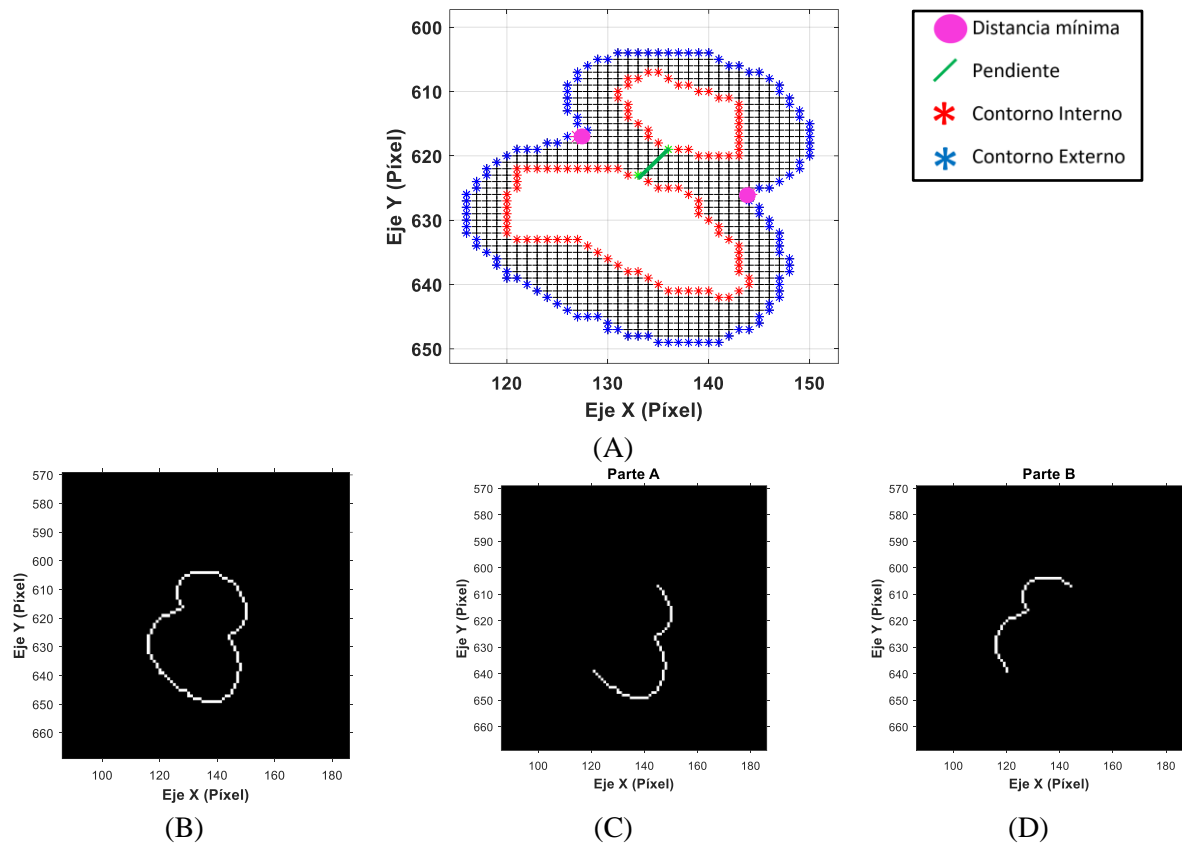


Figura 44. Metodología para calcular los puntos mínimos entre dos burbujas. Estructura de una burbuja, mediante el análisis de imagen, mostrando contorno interno y externo (A), contorno externo de una burbuja (B), parte inferior (C) y parte superior (D).

Anexo 6. Cálculo de velocidad de acercamiento y paralela

Para calcular las velocidades de impacto en los eventos de coalescencia se utilizó la velocidad relativa que poseen las burbujas entre sí, en función a la distancia mínima que existe entre sus centroides (figura 44).

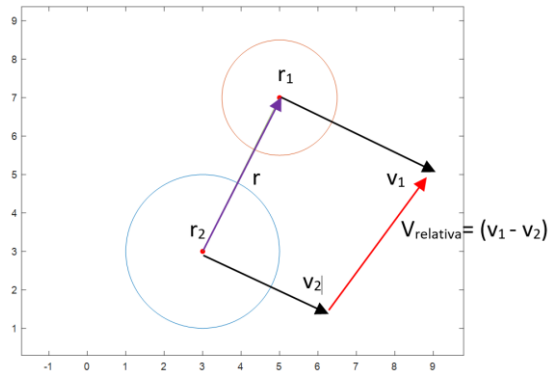


Figura 45. Representación gráfica de los vectores utilizados en el cálculo de la velocidad de acercamiento.

Como la velocidad relativa no se encuentra en la misma orientación que el vector r , se descompone la velocidad relativa (figura 45.), en una velocidad paralela al vector r y una velocidad de acercamiento que es perpendicular al vector r .

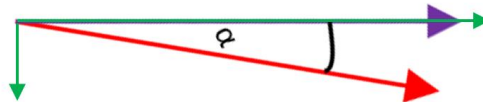


Figura 46. Vector de posición r y vector de la velocidad relativa

Siendo las ecuaciones:

$$V_{acercamiento} = |V_{relativa}| * \cos \alpha \rightarrow$$

$$V_{paralela} = |V_{relativa}| * \sin \alpha \downarrow$$

Anexo 7. Velocidad Relativa de las burbujas consumidas en eventos de coalescencia.

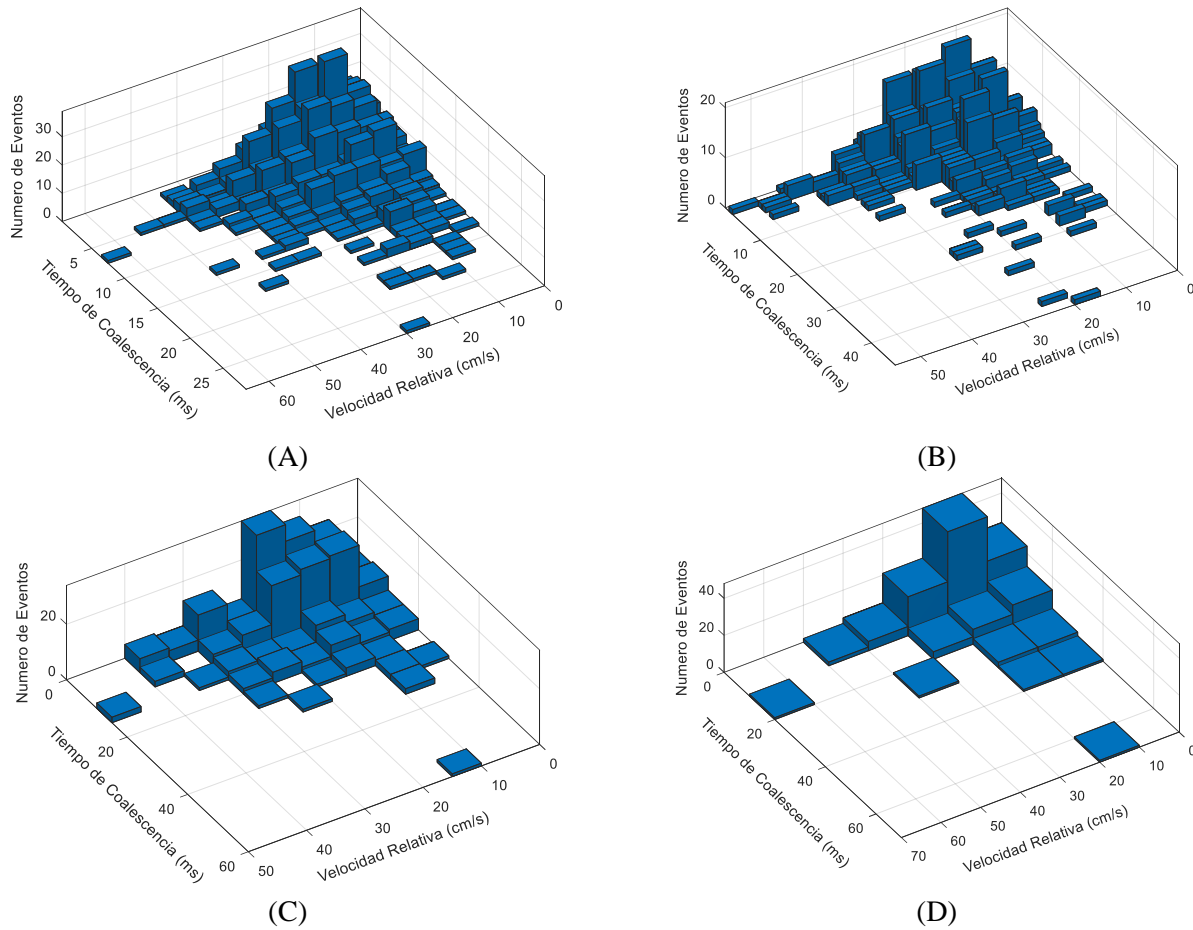


Figura 47. Gráficos de Velocidad relativa en relación con el número de eventos y tiempos de coalescencia. Agua (A), MIBC 20 ppm (B), MIBC 50 ppm (C), MIBC 100 ppm (D).

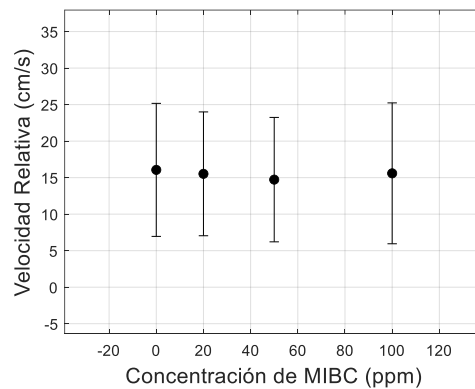


Figura 48. Promedio de las velocidades que poseen dos burbujas consumidas en un evento de coalescencia en el momento anterior a su coalescencia (1 fotograma antes), para diferentes concentraciones de MIBC.

Anexo 8. Velocidad Paralela de las burbujas consumidas en eventos de coalescencia.

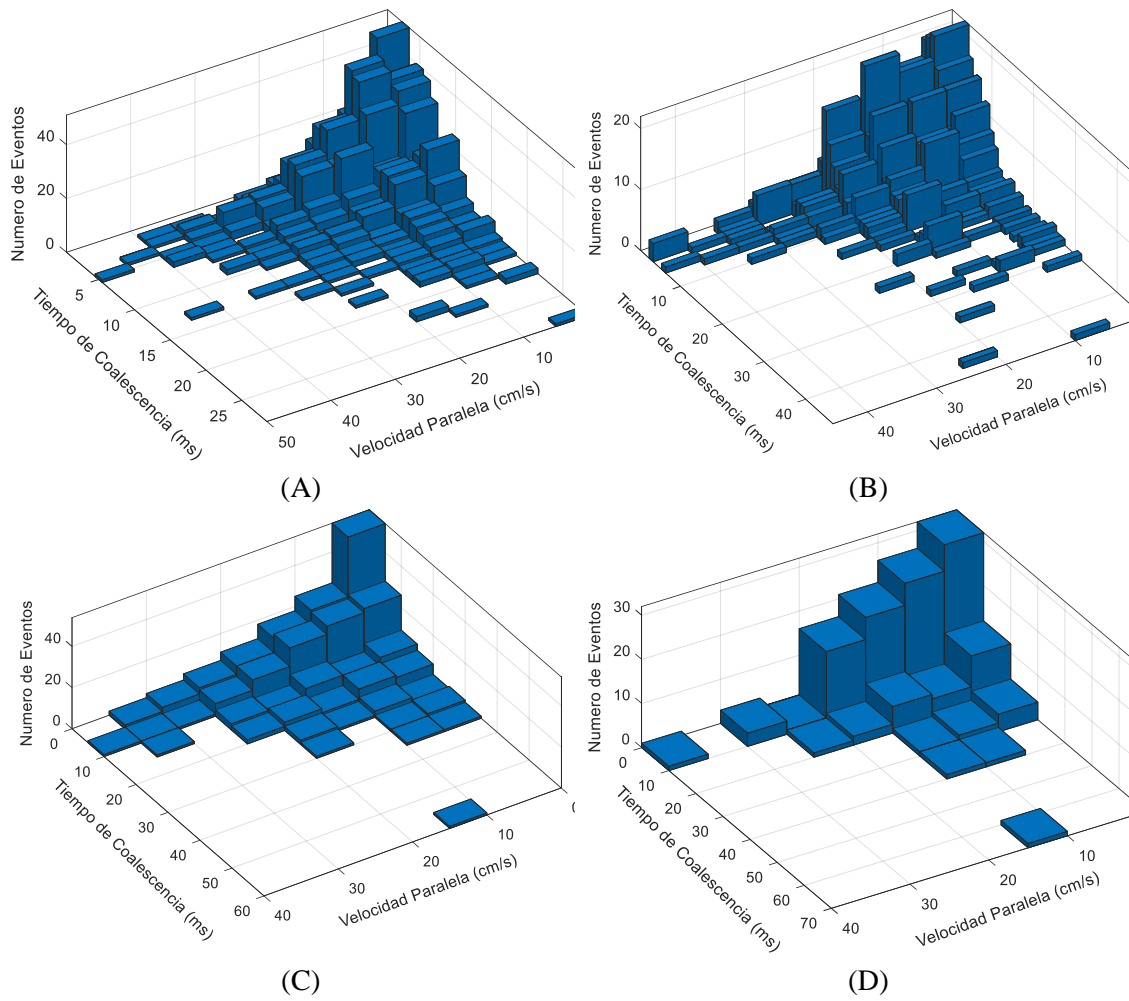


Figura 49. Gráficos de Velocidad paralela en relación con el número de eventos y tiempos de coalescencia. Agua (A), MIBC 20 ppm (B), MIBC 50 ppm (C), MIBC 100 ppm (D).

Anexo 9. Velocidad de Acercamiento de las burbujas consumidas en eventos de coalescencia.

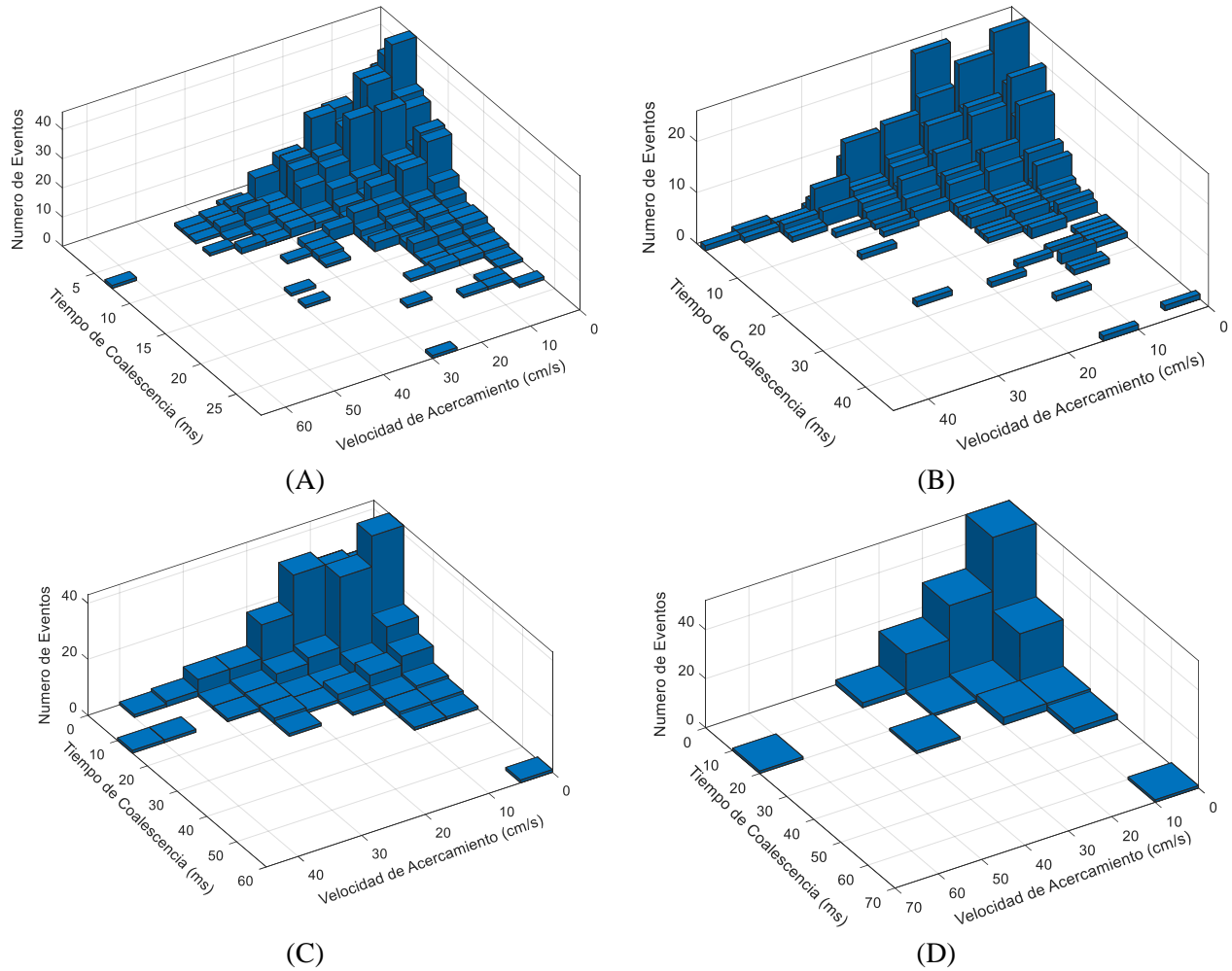


Figura 50. Velocidad de Acercamiento. Agua (A), MIBC 20 ppm (B). MIBC 50 ppm (C), MIBC 100 ppm (D).

Anexo 10. Variabilidad del tiempo de coalescencia respecto a la velocidad de acercamiento

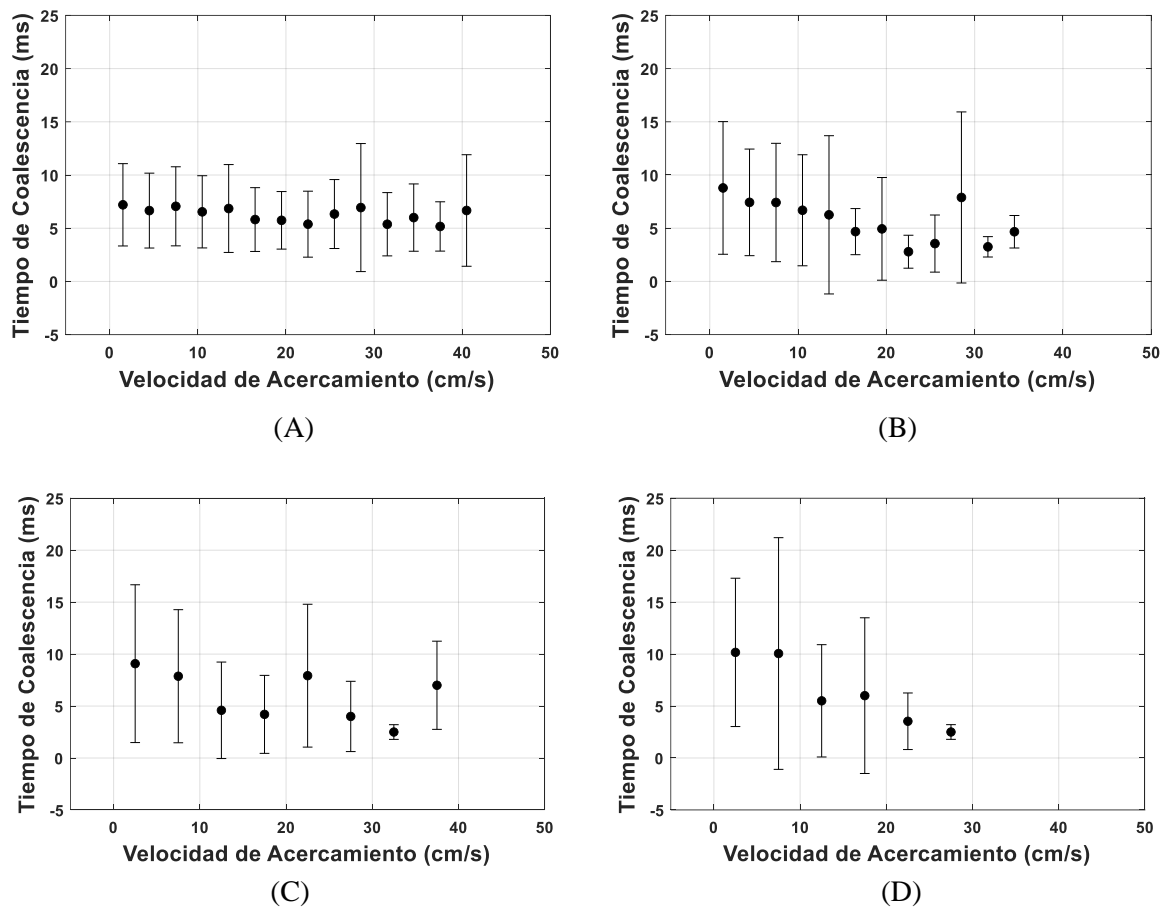


Figura 51. Variabilidad del tiempo de coalescencia respecto a la velocidad de acercamiento. Agua (A), MIBC 20 ppm (B), MIBC 50 ppm (C), MIBC 100 ppm (D).

Anexo 11. Variabilidad del tiempo de coalescencia respecto a la velocidad paralela

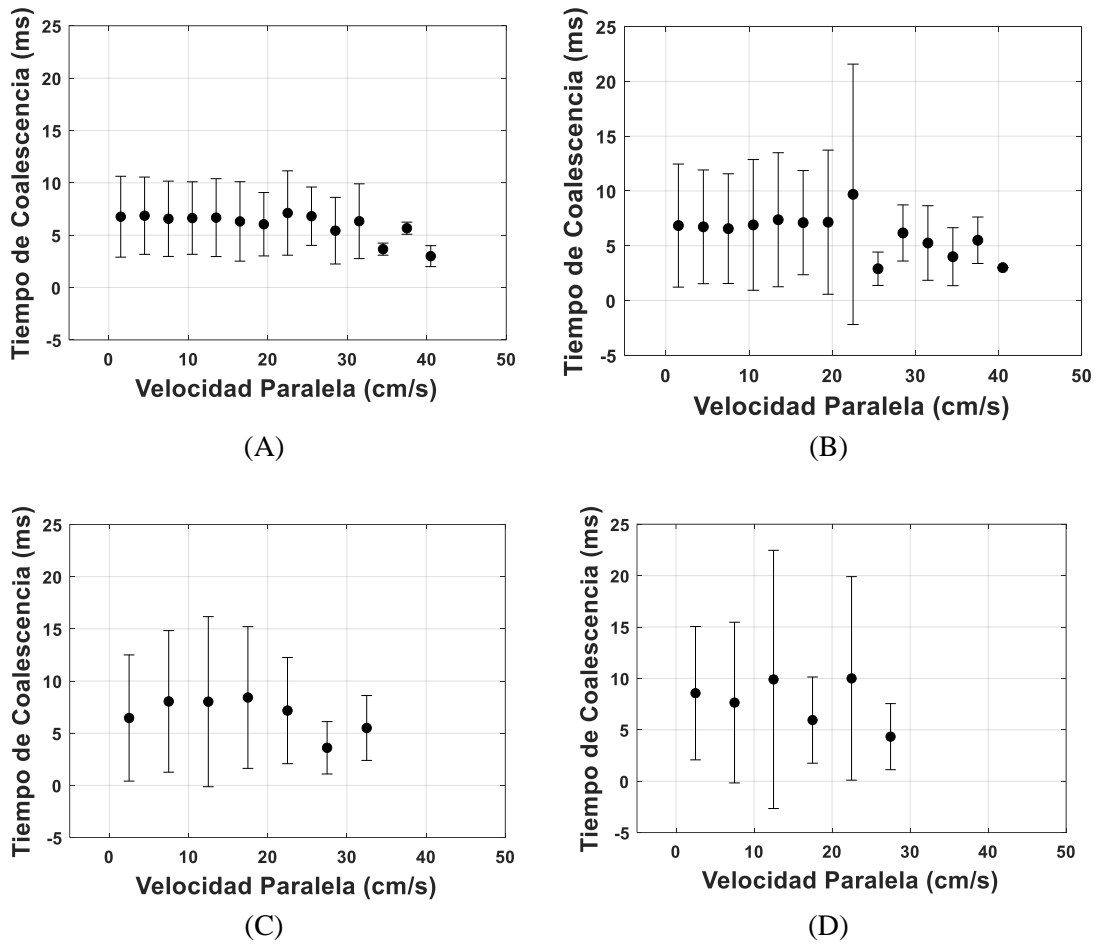


Figura 52. Variabilidad del tiempo de coalescencia respecto a la velocidad paralela. Agua (A), MIBC 20 ppm (B), MIBC 50 ppm (C), MIBC 100 ppm (D).

Anexo 12. Celdas en MATLAB

Una celdas en MATLAB, es un tipo arreglo matricial del tipo indexado, Existen para distintos tipos de lenguajes de programación, básicamente es una estructura de datos que puede contener todo tipo de información, conteniendo para cada índice vectores y matrices dentro de cada celda (Figura A10).

<p>cell 1,1</p> <table border="1"> <tr><td>3</td><td>4</td><td>2</td></tr> <tr><td>9</td><td>7</td><td>6</td></tr> <tr><td>8</td><td>5</td><td>1</td></tr> </table>	3	4	2	9	7	6	8	5	1	<p>cell 1,2</p> <table border="1"> <tr><td>'Anne Smith'</td></tr> <tr><td>'9/12/94'</td></tr> <tr><td>'Class II'</td></tr> <tr><td>'Obs. 1'</td></tr> <tr><td>'Obs. 2'</td></tr> </table>	'Anne Smith'	'9/12/94'	'Class II'	'Obs. 1'	'Obs. 2'	<p>cell 1,3</p> <table border="1"> <tr><td>.25+3i</td><td>8-16i</td></tr> <tr><td>34+5i</td><td>7+.92i</td></tr> </table>	.25+3i	8-16i	34+5i	7+.92i	
3	4	2																			
9	7	6																			
8	5	1																			
'Anne Smith'																					
'9/12/94'																					
'Class II'																					
'Obs. 1'																					
'Obs. 2'																					
.25+3i	8-16i																				
34+5i	7+.92i																				
<p>cell 2,1</p> <table border="1"> <tr><td>[1.43 2.98</td></tr> <tr><td>5.67]</td></tr> </table>	[1.43 2.98	5.67]	<p>cell 2,2</p> <table border="1"> <tr><td>7</td><td>2</td><td>14</td></tr> <tr><td>8</td><td>3</td><td>45</td></tr> <tr><td>52</td><td>16</td><td>3</td></tr> </table>	7	2	14	8	3	45	52	16	3	<p>cell 2,3</p> <table border="1"> <tr> <td>'text'</td> <td> <table border="1"> <tr><td>4</td><td>2</td></tr> <tr><td>1</td><td>5</td></tr> </table> </td> </tr> <tr> <td>[4 2 7]</td> <td>.02 + 8i</td> </tr> </table>	'text'	<table border="1"> <tr><td>4</td><td>2</td></tr> <tr><td>1</td><td>5</td></tr> </table>	4	2	1	5	[4 2 7]	.02 + 8i
[1.43 2.98																					
5.67]																					
7	2	14																			
8	3	45																			
52	16	3																			
'text'	<table border="1"> <tr><td>4</td><td>2</td></tr> <tr><td>1</td><td>5</td></tr> </table>	4	2	1	5																
4	2																				
1	5																				
[4 2 7]	.02 + 8i																				

Figura 53. Ejemplo de una matriz compuesta por celdas que contienen distintos tipos de información indexada (The MathWorks, 2022).

Anexo 13. Trayectorias de burbujas consumidas en eventos de coalescencia.

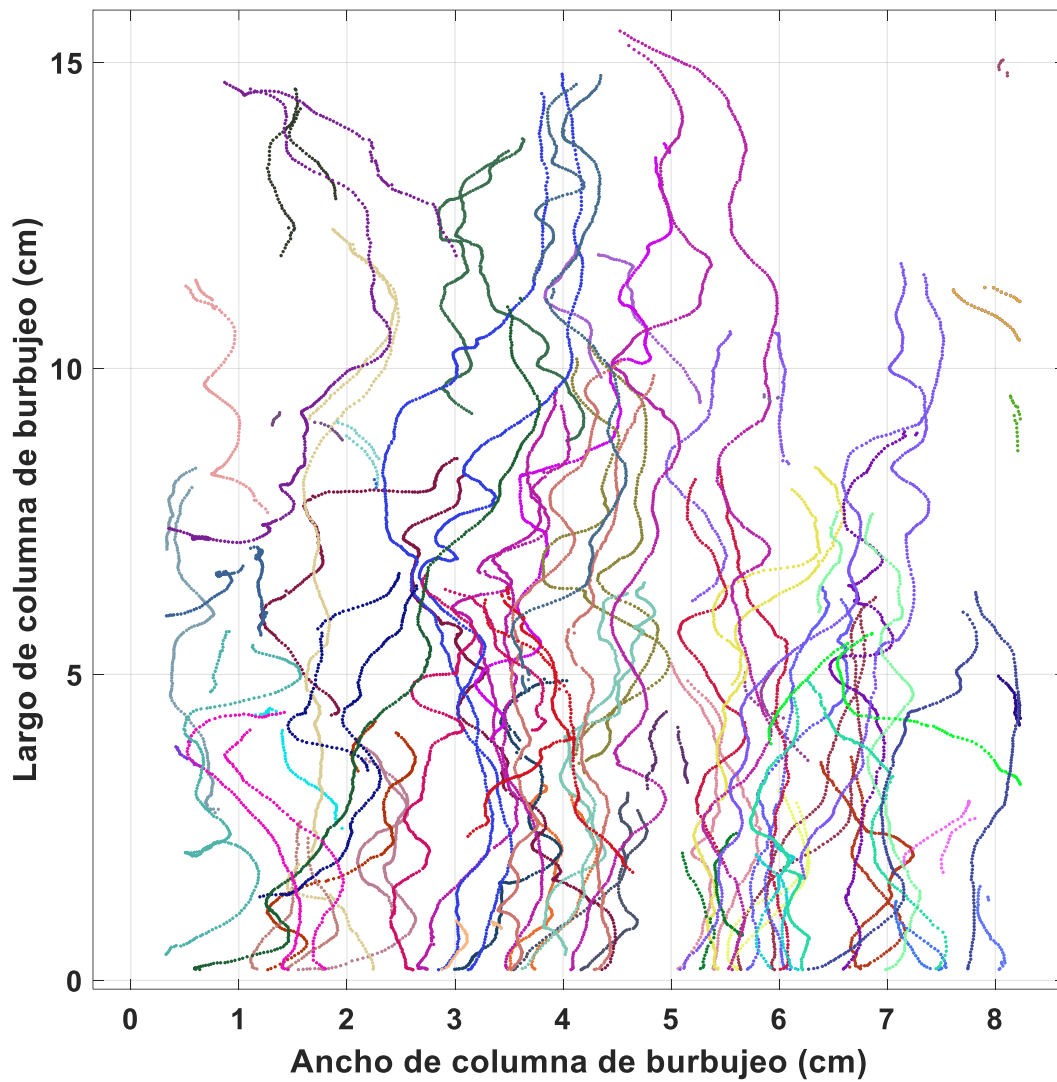


Figura 54. Ejemplo de trayectorias de burbujas consumidas en eventos de coalescencia detectadas por el algoritmo (colores por parejas).

Anexo 14. Coalescencias detectadas

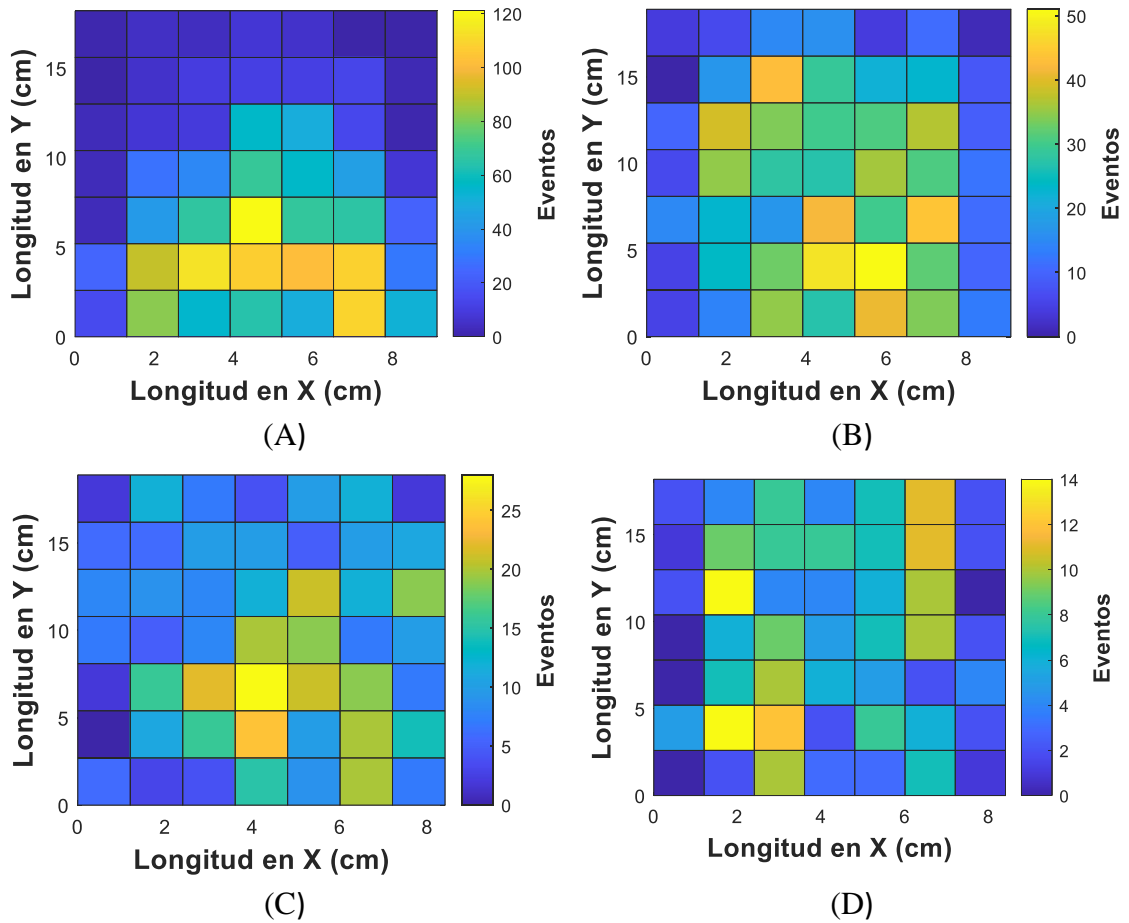


Figura 55. Coalescencias detectadas para el total de videos, para 0 Ppm de MIBC (A), 20 ppm de MIBC (B), 50 ppm de MIBC (C), 100 ppm de MIBC (D) (escala no ajustada).

Anexo 15. Variabilidad del tiempo de coalescencia respecto a la Superficie de Contacto.

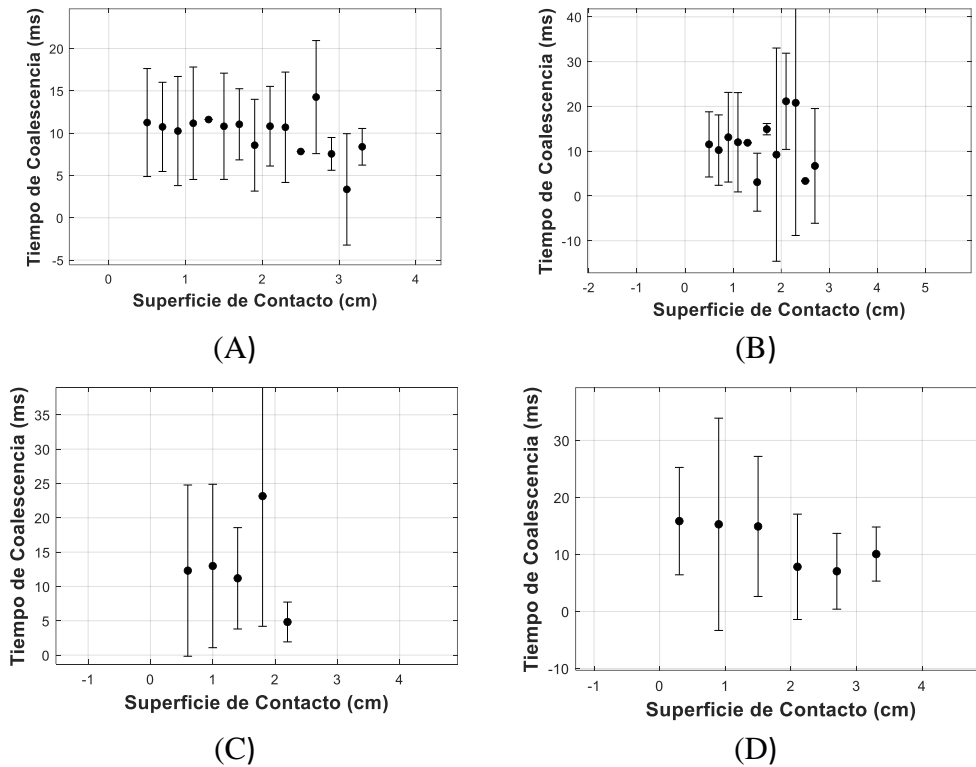


Figura 56. Variabilidad del tiempo de coalescencia respecto a la superficie de contacto. Agua (A), MIBC 20 ppm (B). MIBC 50 ppm (C), MIBC 100 ppm (D).

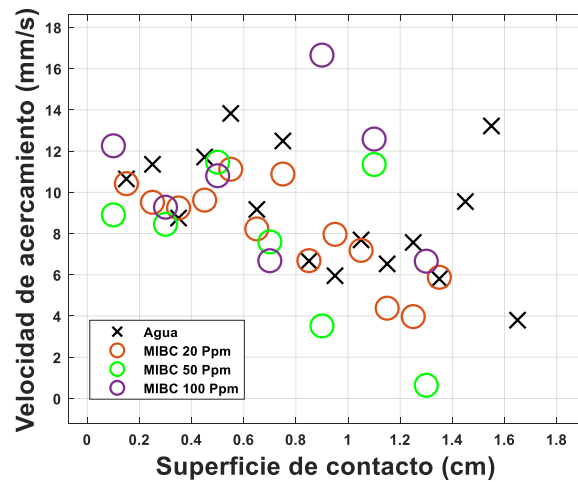


Figura 57. Variabilidad de la velocidad de acercamiento de las burbujas, respecto a la superficie de contacto.

Anexo 16. Promedios de Velocidades Totales

Las velocidades de burbuja totales comprenden el promedio de promedios entre todas las velocidades que componen las trayectorias de todas las burbujas (Figura 56).

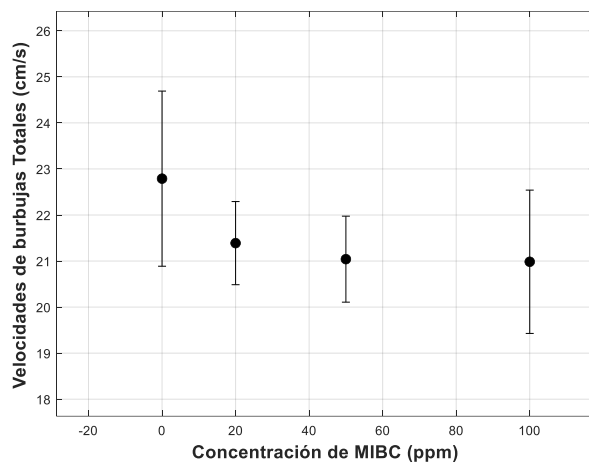


Figura 58. Promedio de las velocidades de todas las burbujas presentes en los videos, calculadas como el promedio de la suma de las velocidades de las trayectorias de todas las burbujas para cada fotograma, para diferentes concentraciones de MIBC.

Anexo 17. Relación de Aspecto de la Columna de burbujeo

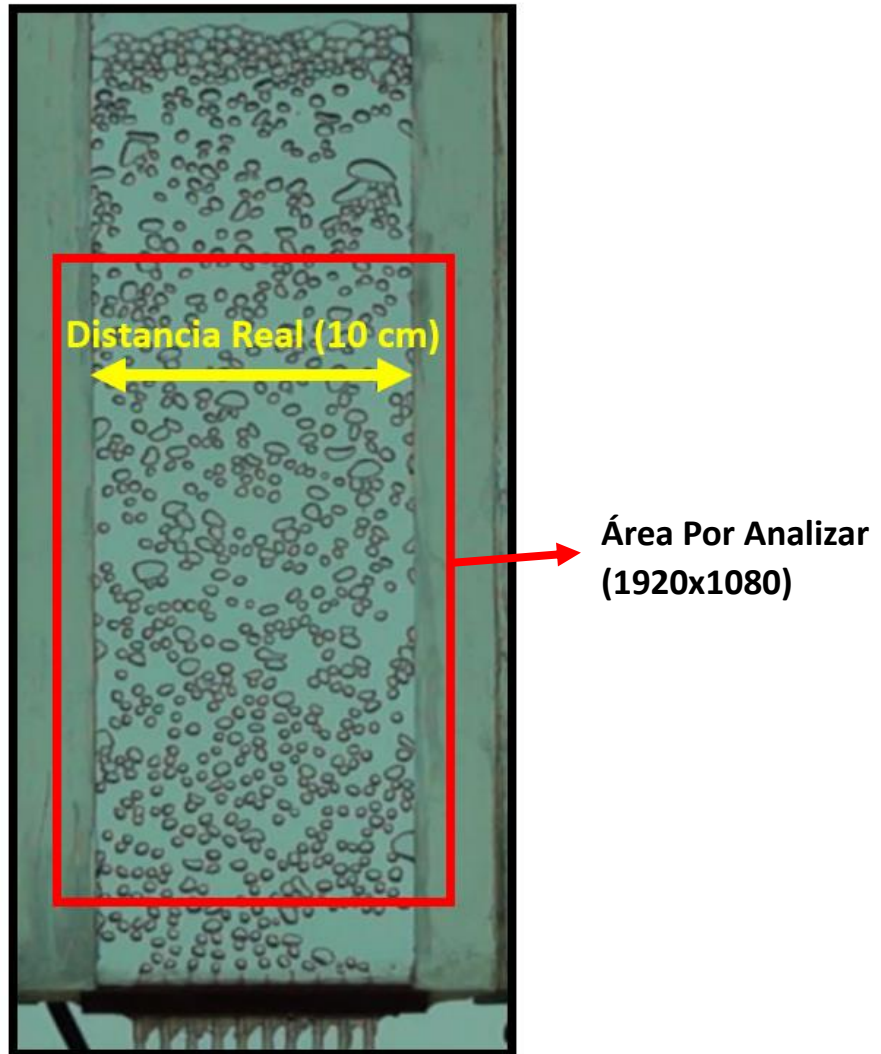


Figura 59. Ejemplo de Relación de Aspecto de la Columna de burbujeo.