UNIVERSIDAD DEL BÍO BÍO
FACULTAD DE EDUCACIÓN Y HUMANIDADES
ESCUELA DE PEDAGOGÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Descomposición LU Y De Cholesky

Otárola Lagos, Manuel

Soto Muñoz, Isabel

Vallejos Améstica, Franchesca

Profesor Guía: Friz Roa, Luis

Chillán, 2022

Índice general

Capítulo I 5

1.1 Introducción 6

1.2 Justificación 6

1.3 Marco Teórico 7

1.4 Objetivos: 15

1.5 Metodología 15

1.6 Recursos 16

Capítulo II 17

2.1 Operaciones y Matrices Elementales 18

Capítulo III 23

3.1 Factorización o Descomposición LU 24

Capítulo IV 29

4.1 Factorización o descomposición de Cholesky 30

Bibliografía 37

Capítulo I

1.1 Introducción

La evolución de la teoría de las matrices ha permitido realizar un completo desarrollo en cuanto a la resolución de ecuaciones lineales. Las ecuaciones lineales o sistemas de ecuaciones se presentan en gran parte de las ramas de la matemática partiendo, inclusive, de la formulación inicial de un problema, dónde podemos utilizar matrices para su respectiva solución. Las primeras nociones de las matrices parten desde los años 300 a.c. al 200 a.c., y se volvió a hacer un trabajo profundizado a partir del siglo XIX.

Por otra parte, si hablamos de la enseñanza de los métodos numéricos, esto ha aumentado de forma drástica en ingeniería y ciencias, reflejando el claro uso de ellos en las computadoras. Aprendiendo métodos numéricos podemos resolver diferentes problemas matemáticos de ingeniería y científicos en una computadora, escribir programas, usar software existente para su resolución. Un método numérico de uso computacional básico es la descomposición LU. Para ser más precisos, la descomposición o factorización LU es una transformación de una matriz A como el producto de dos matrices, es decir, $A = LU$ (L es una matriz triangular inferior y U es una matriz triangular superior). Es así, como en este trabajo desarrollaremos el concepto de matriz y algunas operaciones elementales, para mostrar en profundidad el desarrollo del método de factorización LU.

1.2 Justificación

La historia nos ha permitido frecuentar los campos ajenos al desarrollo de la matemática, entregándonos un sin número de herramientas, métodos o sugerencias necesarias para la correcta aplicación y desarrollo al abordar cualquier problema, nos ha mostrado que las contribuciones en el desarrollo de los diferentes métodos han sido uno de los conocimientos que han favorecido la resolución de los sistemas de ecuaciones lineales. Si nos enfocamos en otro método denominado “método de Gauss” aplicado según su definición y criterios a las matrices, este método consiste en efectuar operaciones de filas a la matriz del sistema de forma que el sistema resultante (que es equivalente al original) tenga la matriz del sistema triangular superior, pudiendo así resolver problemas de ecuaciones lineales de la forma Ax = B, con “n” incógnitas, donde el números de operaciones elementales crece con el cubo de “n”. Para los posibles valores de “n”, donde este resulte convenientemente con valores muy grandes, es preciso buscar alguna herramienta o método de resolución que logre reducir el número de operaciones elementales aplicadas.

Para reducir estas operaciones elementales, nos centraremos en la descomposición o factorización de LU, esta consiste en factorizar la matriz de A en la forma A

= LU, como producto de dos matrices triangulares, con "U" superior; "L" inferior y con unos (1) en la diagonal.

Desde un punto de vista matemático, es relevante hacer un estudio riguroso sobre la descomposición de LU y una derivación de tal descomposición que es el Método de Cholesky que es una manera de resolver una matriz simétrica definida positiva que se puede descomponer cómo el producto de una matriz triangular inferior y su transpuesta de la matriz triangular inferior. Además, el resultado de cholesky ha sido extendido a matrices con entradas complejas.

1.3 Marco Teórico

1.3.1 Antecedentes históricos. La historia de las matrices se orienta a su uso para resolver ecuaciones lineales. En un destacado texto matemático chino del año 300 a.c. a 200 a.c., "nueve capítulos sobre el arte de las matemáticas (Jiu Zhang Suan Shu)", escrito durante la dinastía Han, en el cual es el primer ejemplo que se conoce el uso del método de matrices para resolver sistemas de ecuaciones simultáneas conocido como método matricial, dice que:

"hay tres tipos de trigo, de los que tres sacos del primero, dos del segundo y uno del tercero hacen 39 medidas, dos del primero, tres del segundo y una del tercero son 34 medidas; una del primero, dos del segundo y tres del tercero son 26 medidas ¿cuántas medidas de cada tipo de trigo contiene un saco?".

En nuestro siglo XX el método llega a nosotros escribiendo las ecuaciones lineales como las filas de la matriz más bien que como las columnas, pero la aplicación del método es idéntica. Es interesante como el autor, escribiendo en el 200 A.C., instruye al lector a multiplicar la columna del medio por 3 y restar la columna de la derecha tantas veces como sea posible, lo mismo ocurre después sustrayendo la columna de la derecha tantas veces como sea posible de 3 veces la primera columna. (p. 36)

Los cuadrados mágicos eran conocidos por los matemáticos árabes, posiblemente del siglo VII, además de otros aspectos de las matemáticas combinatorias. La idea proviene de China, los primeros cuadrados mágicos aparecen en Bagdad aparecieron ya más consolidados en la biblioteca de la hermandad de pureza.

En 1545 Cardano da las reglas para resolver el sistema de dos ecuaciones lineales denominado "regla de modo", la que indica lo esencial que es la regla de "Cramer" para resolver un sistema de 2x2, pero este no alcanzó a entregar la definición de determinante, aunque induce a su definición.

En 1693, Leibniz (1646–1716) uno de los dos fundadores del análisis, desarrolló en 1693 la teoría de los determinantes para facilitar la resolución de las ecuaciones lineales, usó un conjunto sistemático de índices para los coeficientes de un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas obteniendo un determinante.

Gabriel Cramer quién profundizó esta teoría, presentando el método que lleva su nombre “Cramer” en 1750, publicando el libro “Introduction ‘à l’analyse des lignes courbes algébriques” la regla para determinar los coeficientes de una cónica general pasando por 5 puntos dados utilizando determinantes.

Carl Friedrich Gauss y Wilhelm Jordan desarrollaron el método de eliminación Gauss-Jordan en el siglo XIX.

James Joseph Sylvester fue el primero en utilizar el término “Matriz” en 1848/1850, quien definió una matriz como un “oblong arrangement of terms” (arreglo cuadrilongo de términos).

En 1801, el término “determinante” fue introducido por Gauss en “Disquisitiones arithmeticae” donde discutía sobre formas cuadráticas. Aunque el concepto de Gauss sobre el determinante no es el mismo que conocemos hoy en día. Así mismo, Gauss escribe los coeficientes de sus formas cuadráticas con un arreglo rectangular. Describiendo la multiplicación de matrices y la inversa de una matriz particular en ese contexto.

Siguiendo la definición del determinante, Cauchy en 1812 es quién nos entregó la definición actual. Pues su trabajo es el más completo sobre este tema. Descartó los primeros resultados y entregó nuevos. Así, el teorema sobre la multiplicación de determinantes es probado por primera vez.

Cayley pública en 1853 un documento que aparece por primera vez la inversa de una matriz, en 1858, publica su “Memoir on the theory of matrices”, en donde tiene la primera definición abstracta de matriz y las leyes del cálculo de matrices.

1.3.2 Definiciones y notaciones. Una matriz puede representar una tabla de valores, un determinante, una familia de vectores, una aplicación lineal, un endomorfismo, un sistema de ecuaciones diferenciales, etc. Como observamos una misma representación matricial puede ser interpretada de diversas maneras, como también, diferentes matrices pueden representar un mismo objeto, un claro ejemplo ocurre en los cambios de base de las aplicaciones lineales.

Una matriz es un arreglo bidimensional de números (llamados entradas de la matriz) que están ordenados en filas y columnas, donde una fila es cada una de las líneas horizontales de la matriz y una columna es cada una de las líneas verticales. A una matriz con n filas y m columnas se les denomina matriz $n \times n$, donde $n, m \in \mathbb{N} - \{0\}$. Para designar a cada uno de los n, m elementos de la matriz se utiliza un doble subíndice que indica el número de fila y el número de columna que le corresponde en el arreglo:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

El conjunto de las matrices de tamaño $n \times m$ se representa como $M_{n\times m}(\mathbb{K})$. El tamaño de una matriz siempre se da con el número de filas primero y el número de columnas después. Dos matrices se dice que son iguales si tienen el mismo tamaño y las mismas entradas.

A la entrada de una matriz que se encuentra en la fila i-ésima y la columna j-ésima se le llama entrada i, j o entrada (i, j)-ésima de la matriz. En estas expresiones también se consideran primero las filas y después las columnas.

Casi siempre se denotan las matrices con letras mayúsculas mientras que se utilizan las correspondientes letras en minúsculas para denotar las entradas de las mismas.

Ejemplo 1. Al elemento de una matriz A que se encuentra en la fila i-ésima y la columna j-ésima se le denota comoa_{ij}, donde $1 \leq i \leq n$ y $1 \leq j \leq m$. Cuando se va a representar explícitamente una entrada, la cual esta indexada con un i o un j con dos cifras se introduce una coma entre el índice de filas y de columnas.

Ejemplo 2. La entrada que esta en la primera fila y la segunda columna de la matriz A de tamaño 50×100 se presenta como $a_{1,2}$mientras que la entrada que está en la fila número 23 y la columna 100 se representa como $a_{23,100}$.

Numerosos autores, además de utilizar letras mayúsculas, representan a las matrices con fuentes en negrita para distinguirlas de otro objetos matemáticos, así $\boldsymbol{A}$ es una matriz, mientra que A es un escalón en esa notación. Sin embargo, esta notaciones generalmente se deja para los libros y publicaciones, donde es posible hacer esta distinción tipográfica con facilidad. En otras notaciones se considera que el contexto es lo suficientemente claro como para no usar negritas.

Otra notación, en si un abuso de notación, representa a la matriz por sus entradas, $A := (a_{ij})$ o incluso $A := a_{ij}$.

Una definición, muy usada en la solución de sistemas de ecuaciones lineales, es de vectores fila y vectores columna. un vector fila o vector renglón es cualquier matriz de tamaño $1 \times m$ mientras que un vector columna es cualquier matriz de tamaño $n \times 1$.

Finalmente, a las matrices que tienen el mismo número de filas que de columnas,$n = m$, se les llama matrices cuadradas y el conjunto se denota $\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$ o alternativamente$\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

$$A, B \in \mathbb{R}^{n\times m}; A = B \longleftrightarrow a_{ij} = b_{ij} \; \forall i, j$$

1.3.3 Conocimientos previos. Operaciones básicas de las matrices: Las operaciones que se pueden realizar con las matrices se derivan de sus aplicaciones sobre todo en el álgebra lineal.

- Adición de matrices:

Definición. Es una operación binaria $+ : \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})\times\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$ tal que $(A,B) \mapsto C = A+B$ y donde $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ en el que la operación de suma en la última expresión es la operación binaria correspondiente, pero en el ccuerpo K.

Observación. Sólo se pueden sumar si ambas son matrices del mismo tamaño. La suma de matrices en el caso de que las entradas estén en un cuerpo.*

- Producto Escalar:

Definición. Es una función $K \times M_{n\times m}(K) \to M_{n\times m}(K)$ tal que $(\lambda, A) \mapsto B = \lambda A$ y donde $b_{ij} = \lambda a_{ij}$ en donde el producto es la operación binaria correspondiente, pero en el campo K.

Observación. El producto de una matriz por un escalar da como resultado una matriz del mismo tamaño que la original. También el producto por un escalar dependerá de la estructura algebraica en la que las entradas están.

- Producto:

Definición. EL producto de matrices representa la composición de aplicaciones lineales. En efecto, en ciertas bases tenemos que $f : V \to W$ se puede representar como $f(x) = Ax$ donde x es la representación de un vector V en la base que se ha elegido para V en forma de vector columna.

Si tenemos dos aplicaciones lineales $f : V \to W$ y $g : W$, entonces $f(x) = Bx$ y $g(x) = Ax$, luego la aplicación $g(x) \circ f(x) = g(f(x)) = g(Bx) = ABx$ y donde AB es el producto de las representaciones matriciales de f, g.

Observación. La composición no se puede dar entre cualquier aplicación sino entre las aplicaciones que vaya de $V \to W \to U$, en particular debe de haber una relación entre las dimensiones de los espacioes vectoriales.

Además, debemos tener en cuenta la definición de función del producto de matrices y la de las entradas, pues es necesario que se tengan el mismo número de columnas y filas para que exista. Así, las propiedades del producto resultan ser limitadas por la naturaleza de las entradas, pues no siempre se tratará de una operación interna.

- Rango:

Definición. El rango de una matriz A es la dimensión de la imagen de la aplicación lineal representada por A, que coincide con la dimensión de los espacios vectoriales generados por las filas o columnas de A.

- Traspuesta:

Definición. La traspuesta de una matriz $A \in M_{n\times m}(X)$, donde X no es necesariamente un campo, es una matriz $B \in M_{m\times n}(X)$ tal que $b_{ij} = a_{ij}$.

- Matrices Cuadradas:

Definición. Una matriz cuadrada es una matriz que tiene el mismo número de filas que de columnas. El conjunto de matrices cuadradas n-por-n dotado de la suma y la multiplicación de matrices, tiene la estructura algebraica de anillo, que generalmente no es conmutativo. La matriz identidad es el elemento unitario en el anillo de matrices cuadradas. Los elementos invertibles de este anillo se llaman matrices invertibles o matrices no singulares. Una matriz A n por n es invertible si y sólo si existe una matriz B tal que $AB = I_n = BA$

En este caso, B es la matriz inversa de A, identificada por A^{-1}. El conjunto de todas las matrices invertibles n por n forma un grupo (concretamente un grupo de Lie) bajo la multiplicación de matrices, el grupo general lineal.

- Matrices Elementales:

Definición. Una matriz elemental de orden n, sea la matriz $A \in M_{n\times n}(R)$, se denomina una matriz elemental si se puede obtener a partir de la matriz identidad, In por medio de una sola operación elemental de filas o columnas.

- Por escalonamiento.
- Producto de fila por un escalar o suma de una fila con una combinación lineal de otras (eliminación)
- Por permutación (Intercambio de filas).

Teorema. *sea A una matriz de m filas, para realizar una operación sobre A basta realizar dicha operación elemental sobre las filas de la matriz identidad I_m y multiplicar el resultado por A.*

Obteniendo las operaciones elementales:

- $e_1 = i \to j$
- $e_2 = i \to \lambda i$
- $e_3 = i \to i + \lambda j$

si consideramos la matriz $A_{n\times n}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

y suponer que la matriz $l_n$es la matriz identidad $n \times n$.

- Operaciones elementales:

Sea la matriz $A \in M_{n\times n}(R)$, efectuamos una operación elemental sobre una fila o columna de A cuando realizamos una de estas tres operaciones:

- Intercambiando las filas i y j, así mismo se puede buscar por transposición o permutación $(e_1 = |i \to j|)$.
- Multiplicando la fila i por una constante o escalar 0, o también denominado escalamiento $(e_2 = |i \to \lambda i|)$.
- Sumando la fila i la fila j multiplicando por la constante o escalar $\lambda \neq 0$, $(e_3 = |i \to i + \lambda j|)$.

1.3.4 Antecedentes conceptuales.

- Descomposición LU

Dada dos matrices, una triangular inferior L y otra triangular superior U de modo que $A = LU$. Su principal utilidad es que permite resolver de forma muy rápida cualquier sistema compatible determinado $Ax = b$ a través de dos algoritmos de bajada y subida

$$LUx = b \leftrightarrow |Lz = b|\,|Ux = z|.$$

Definición. Sea $A = (a_{ij})$ una matriz cuadrada $n \times m$. se dice que A es diagonal dominante en sentido estricto si

$$|a_{ij}| > \sum_{j=1, j\neq 1}^{n} |a_{ij}|$$

para toda fila $i = 1, ..., n$.

Teorema. *Sea A una matriz cuadrada de nxn. Supongamos que A se puede reducir por una matriz triangular superior, U aplicando operaciones elementales. Entonces existe un matriz triangular inferior L que es invertible y posee unos en su diagonal principal, tal que $A = LU$ Si A es invertible, entonces esta descomposición es única.*

- La descomposición LU

Para una matriz dada la manera de obtener esta descomposición es mediante un algoritmo, el cual se explicará con mayor detalle en el desarrollo de esta Actividad de Titulación.

En general, podemos escribir la factorización de LU de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ l_{n-1,1} & l_{n-1,2} & \cdots & 1 & 0 \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1,n-1} & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2,n-1} & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{n-1,n-1} & u_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & u_{n-n} \end{pmatrix}$$

La factorización o descomposición LU, está directamente relacionada con las operaciones elementales aplicadas a una matriz para llevarla a una forma triangular superior. En términos generales, supongamos que se conoce como factorizar una matriz A, $n \times n$ en la forma: $A = LU$ donde L es una matriz triangular inferior $n \times n$ y U es una matriz escalonada $n \times n$. Entonces el sistema $Ax = b$ puede resolverse utilizando $A = LU$. El sistema $Ax = b$ se puede escribir en la forma $L(Ux) = b$ donde podemos introducir una nueva variable $y = Ux$ obteniendo así el nuevo sistema $Ly = b$.

Podemos resolver dicho sistema para la variable y, mediante sustitución hacia adelante. Finalmente, usamos sustitución hacia atrás para resolver el sistema $Ux = y$.

Estos sistemas no tienen mayor dificultad de resolverse, pues se trata de matrices de coeficientes triangulares inferiores y superiores respectivamente. La factorización LU es útil cuando se requiere resolver de manera simultánea varios sistemas de ecuaciones que difieren en la parte no homogénea.

- Descomposición de Cholesky

Para definir y conocer la factorización de Cholesky, es preciso definir y conocer lo que es U^*, este es el traspuesto conjugado (también llamado el hermitiano adjunto o la hermítica) de U. En matemáticas, la matriz transpuesta conjugada, matriz adjunta o simplemente adjunta de una matriz A, es una matriz A^+ (también denotada como A^*, o como A^h) obtenida de A mediante la obtención de su transpuesta y después de su conjugada compleja.

El traspuesto conjugado de una matriz $A = a_{ij} \in C$ es definido como$A^* = \underline{a}_{ij}$, que es el traspuesto de A y todos los elementos a_{ij} conjugados.

DEFINICIÓN. Si A es una matriz de $n \times m$ sobre los complejos: $A \in M_{n\times m}(C)$ de la forma:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2m} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Entonces la adjunta se obtiene tomando el complejo conjugado de cada elemento y después permutando de filas por columnas o viceversa en la matriz A, produce a la matriz traspuesta:

$$A^+ = \begin{pmatrix} \overline{a}_{11} & \overline{a}_{12} & \overline{a}_{13} & \cdots & \overline{a}_{n1} \\ \overline{a}_{12} & \overline{a}_{22} & \overline{a}_{32} & \cdots & \overline{a}_{n2} \\ \overline{a}_{13} & \overline{a}_{23} & \overline{a}_{33} & \cdots & \overline{a}_{n3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \cdots \\ \overline{a}_{1m} & \overline{a}_{2m} & \overline{a}_{3m} & \cdots & \overline{a}_{nm} \end{pmatrix}$$

Una vez entendido del concepto de U^*, se da paso a la factorización de Choleski a través de la factorización de LU que en ciertos casos especiales se puede encontrar como $L = U^* = B$, de este modo se conoce la factorización de Choleski para una matriz cuadrada simétrica: $A = BB^*$.

OBSERVACIÓN. Donde B es una matriz triangular inferior con entradas estrictas positivas y B^* representa la conjugada transpuesta de B.

DEFINICIÓN. Sea $A = (a_{ij})$ una matriz nxm de coeficientes reales. Diremos que A es definida positiva si $\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}u_iu_j > 0$, para todo $u \in R^n/0$.

TEOREMA. *(Factorización de Cholesky) La matriz A que es definida simétrica por nxn positiva, entonces existe por lo menos una matriz nxn triangular inferior B de modo que $A = BB^*$. Además, se dice que $b_{ii} > 0$ para todo $i = 1, ..., n$, y por ese modo la factorización anterior es única.*

Recíprocamente del teorema de factorización de Cholesky obtenemos que:

PROPOSICIÓN. *Si B es una matriz nxn triangular inferior regular, y definimos $A = BB^*$, entonces A es simétrica y definida positiva.*

Observación. Sea A una matriz real simétrica nxn. Dicha matriz es definida positiva si y sólo si todos sus menores principales son positivos.

Cálculo efectivo factorización de Cholesky

Para determinar el cálculo efectivo de la factorización de Cholesky, se inicia de la siguiente igualdad.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ b_{n-1,1} & b_{n-1,2} & \cdots & b_{n-1,n-1} & 0 \\ b_{n,1} & b_{n,2} & \cdots & b_{n,n-1} & b_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} & \cdots & b_{n-1,1} & b_{n,1} \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{n-1,2} & b_{n,2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{n-1,n-1} & b_{n,n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{n,n} \end{pmatrix}$$

1.4 Objetivos:

1.4.1 Objetivo General.

- Aplicar métodos de resolución de sistemas lineales, específicamente en el método de factorización LU.
- Utilizar Método de Cholesky como una derivación de la factorización LU.

1.4.2 Objetivos específicos.

- Determinar las caracterísitcas de la factorización LU
- Aplicar el método de factorización LU en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales.
- Determinar las características del método de Cholesky
- Aplicar el método de Cholesky en la resolución de sistemas de ecuaciones lienales.

1.5 Metodología

La metodología empleada para el desarrollo de este anteproyecto es principalmente el estudio crítico de la teoría y su aplicación. También se implementaron discusiones constructivas sobre los contenidos entre compañeros de tesis y profesor guía.

1.6 Recursos

- Recurso bibliográficos tales como libros y apuntes matemáticos.
- Procesador de texto matemático especializado (LYX)

Capítulo II

2.1 Operaciones y Matrices Elementales

2.1.1 Operaciones Básicas:

2.1.1.1 Adición: Propiedades:

Sean $A, B, C \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$, donde $\mathbb{K}$ es un campo, entonces cumple las siguientes propiedades para operación binaria $+$.

Asociatividad $(A+B)+C = A+(B+C)$

Demostración. Dada la definición de la operación binaria $+$ se sigue el resultado, ya que $(a_{ij}+b_{ij})+c_{ij} = a_{ij}+(b_{ij}+c_{ij})$ debido a que a_{ij}, b_{ij}, $c_{ij} \in \mathbb{K}$ para todo i, j. $\square$

Conmutatividad $(A+B) = (B+A)$

Demostración. Dada la definición de la operación binaria $+$ se sigue el resultado, ya que $(a_{ij}+b_{ij}) = (b_{ij}+a_{ij})$ debido a que a_{ij}, $b_{ij}, \in \mathbb{K}$ para todo i, j. $\square$

Existencia del elemento neutro aditivo

Existe $0 \in M(\mathbb{K})$ tal que $0_k \in \mathbb{K}$ para cualquier i, j (donde este último es el elemento neutro aditivo en el campo, el cual existe necesariamente).

2.1.1.2 Operaciones Elementales. Sea la matriz $A \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$, efectuamos una operación elemental sobre una fila o columna de A cuando realizamos una de estas tres operaciones:

a) Intercambiar entre sí la i y j, también se denomina transposición o permutación. ($e_1 = [i \to j]$)

b) Multiplicar la i por un escalar $\lambda \neq 0$, denominado escalamiento o lineahomotecia. ($e_2 = [i \to \lambda_i]$)

c) Sumar la i la j multplicada por un escalar $\lambda = 0$. ($e_3 = [i \to i + \lambda_i]$)

Las Operaciones de fila se pueden aplicar a cualquier matriz. Decimos que dos matrices A y B del mimos orden $A, B \in M(\mathbb{R})$ son equivalentes por las y se escribe

$$A \sim B$$

Cuando la matriz B se obtiene a partir de A mediante un número finito de operaciones elementales de filas, es decir, existe una sucesión de operaciones elementales de fila que transforman una matriz en otra.

2.1.1.3 Matriz Elemental. La matriz $A \in M(\mathbb{R})$, se denomina una matriz elemental si se puede obtener a partir de la matriz identidasd, l_n mediante una sola operación elemental de filas

Teorema 3. *Sea una matriz A de m filas, para realizar una operación elemental sobre A basta realizar dicha operación elemental sobre las filas de la matriz identida l_m y multiplicar el resultado por A*

Sean las operaciones elementales
$e_1 = [i \to j]$
$e_2 = [i \to \lambda j]$
$e_3 = [i \to i + \lambda j]$
Consideremos la matriz $A_{n\times n}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

y supongamos que ln es la matriz identidad $n \times n$

Demostración. Intercambio de filas

Probando para $e_1$donde a la indetidad se le han intercambiado la fila i con la j.

Realizamos la multiplicación $PA = B$, donde B es una matriz $n \times n$

Sea $l \neq i$ y $l \neq j$, en este caso $p_{lq} = 0$, si $l \neq q$ y $p_{ll} = 1$. Luego P es l intercambiando la fila $i$con la fila j.

$$b_{lk} = \sum_{q=1}^{n} p_{lq} a_{qk} = a_{lk}$$

O sea, las filas de A distintas de i o j no sufren modificación al multiplicar por P.

En el caso de la fila i, se tiene que $p_{iq} = 0$, si $p_{ij} = 1$, así:

$$b_{lk} = \sum_{q=1}^{n} p_{iq} a_{qk} = a_{jk}$$

O sea, las filas i y j quedan intercambiadas al multiplicar por P.

Multiplicación de una fila por un escalar

Probando para e_2, consideremos una matriz $A \in M(\mathbb{R})$ y supongamos que P es la matriz identidad de $n \times m$ a la cual se le ha multiplicado la fila i por un escalar α.

Vamos a multiplicar $PA = B$, donde B también es una matriz de $n \times n$.

Sea $l \neq i$, en este caso $p_{lq} = 0$ si $l \neq q$ y $p_{ll} = 1$

$$b_{lk} = \sum_{q=1}^{n} p_{lq} a_{qk} = a_{lq}$$

Es decir, las filas distintas de i no sufren modificaciones.

En el caso de la fila i tenemos que $p_{iq} = 0$ si $i \neq q$ y $p_{ii} = \alpha$. Luego,

$$b_{iq} = \sum_{q=1}^{n} p_{iq} a_{qi}$$

Como $p_{ii} = \alpha$ y $p_{ik} = 0$, si $k \neq i$ entonces:

$$\sum_{q=1}^{n} p_{ik} a_{kq} = \alpha a_{iq}$$

Por lo tanto, $b_{iq} = \alpha a_{iq}$

Sumar una fila a otra fila multiplicada por un escalar.

Ahora, probando para e_3 donde a la fila i se le suma la fila j multiplicada por un escalar α. Supongamos que P es la matriz identidad de $n \times n$ a la cual se le multiplica la fila j por un escalar α y se le suma a la fila i. Si realizamo la multiplicación $PA = B$ tenemos lo siguiente. Como:

$$p_{ik} \begin{cases} 0, & k \neq i, k \neq j \\ \alpha, & k = j \\ 1, & k = 1 \end{cases}$$

Entonces,

$$b_{ik} = \sum_{q=1}^{n} p_{iq} a_{qk} = \alpha a_{jk} + a_{ik}$$

Dicho teorema es aplicable de igual modo para matrices rectangulares de $m \times n$ y su demostración es semejante a lo explicitado anteriormente. □

2.1.1.4 Matriz inversa como el producto de matrices elementales.

Teorema 4. *Sea A y B dos matrices $n \times m$, suponga que*

$$AB = BA = I$$

Entonces B se llama la inversa de A y se denota por A^{-1}

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

Si A tiene inversa, entonces se dice que Aes invertible.

Para determinar la inversa de un amatriz A, se forma la matriz $n \times 2n[A \vdots I_n]$, que se obtiene al adjuntar la matriz identidad l_n con la matriz dada A, luego se transforma la matriz obtenida a su forma escalonada reducida por filas mediante operaciones elementales por filas (toda operación realizada a una fila de A también debe ser aplicada a la fila correspondiente de l_n. Supongamos que se ha producido la matriz $[C \vdots D]$ es forma escalonada reducida por filas.

a) Si $C = l_n$ entonces $D = A^{-1}$

b) Si $C \neq l_n$ entonces C tiene una fila de ceros. En este caso, Aes singular y A^{-1} no existe. Quedando de este modo:

$$[A \vdots I] \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots [I \vdots A^{-1}]$$

Como para realizar una operación elemental sobre A basta realizar dicha operación elemental sobre las filas de la matriz identidad l_m y premultiplicar el resultado por A,entonces podemos establecer lo siguiente:

$$(E_n \ldots\ldots E_3 E_2 E_1)A = I$$

Ejemplo:

Calcular la inversa de una matriz 3×3

Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, calcule A^{-1}si existe.

Solución: Primero se pone A seguido de I en la forma de matriz aumentada

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & : & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & : & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & : & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aplicamos operaciones elementales

$$E_1 = F_1 \to F_1 + F_3 \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & : & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & : & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & : & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_2 = F_3 \to F_1 - F_3 \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & : & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & : & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & : & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E_3 = F_1 \to F_1 - F_3 \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & : & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & : & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & : & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La inversa de la matriz A es:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Así: $E_3E_2E_1 = A^{-1}$

Capítulo III

3.1 Factorización o Descomposición LU

Una factorización LU de una matriz A es el producto de una matriz triangular inferior L y una matriz triangular superior U cuyo resultado es igual a A. Una de las motivaciones para una factorización LU es el hecho de que esta factorización puede usarse como un método alternativo para resolver sistemas de ecuaciones lineales, donde una vez que la matriz del sistema se ha factorizado, la solución del sistema se puede obtener resolviendo dos sistemas sencillos, uno por el método de sustitución hacia atrás. La factorización LU es otro enfoque diseñado para explotar sistemas triangulares.

Aunque es muy común que se le pida encontrar una factorización LU para una matriz cuadrada, los conceptos también se extienden a matrices rectangulares. En este problema de la semana, debes tratar con la factorización LU para una matriz rectangular.

Cuando se trabaja con notación matricial, la resolución de Sistemas de Ecuaciones Lineales (SEL) se basa en encontrar la x dentro de la ecuación matricial $Ax = b$, siendo A la matriz asociada al SEL, x el vector de incógnitas y b el término independiente. Una de las situaciones típicas de la resolución de SEL es que en un problema cualquiera, los datos que lo modelan generalmente afectan solo al vector de términos independientes. Esto quiere decir que por el simple hecho de cambiar un vector, se han de rehacer todo los cálculos para resolver el SEL. De esta problemática nació la factorización de matrices.

La primera factorización fue la LU y se basa en separar la matriz A en dos matrices triangulares L(Lower) y U(Upper), donde L es una matriz triangular inferior y U es una matriz triangular superior. De esta forma:

$$Ax = b \Rightarrow LUx = b \Leftrightarrow \begin{cases} Ly = b & (1) \\ Ux = y & (2) \end{cases}$$

TEOREMA 5. *Si los menores principales de una matriz A de dimensión son no nulos entonces A admite una descomposición en LU. Esta descomposición es única si los elementos de la diagonal principal de L son todos unos. Una condición suficiente para aplicar el resultado anterior es la siguiente:*

DEFINICIÓN 6. Sea $A = (a_{ij})$ una matriz cuadrada $n \times n$ diagonalmente dominante en sentido estricto si

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}| \text{ para toda fila } i = 1, \ldots, n. \tag{1}$$

TEOREMA 7. *Sea $A = (a_{ij})$ una matriz cuadrada $n \times n$ diagonalmente dominante en sentido estricto. Entonces,*

a) A es regular,

b) A admite una única factorización LU.

Para el cálculo efectivo de la factorización LU de una matriz dada, en la práctica se obtienen los elementos de L y de U por identificación de forma recursiva, admitiendo que existe la factorización. Así, si

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ l_{n-1,1} & l_{n-1,2} & \cdots & 1 & 0 \\ l_{n,1} & l_{n,2} & \cdots & l_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1,n-1} & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2,n-1} & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{n-1,n-1} & u_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & u_{n,n} \end{pmatrix}$$

Identificando los elementos de la primera fila de A con los correspondientes de LU, y los de la primera columna de A con los correspondientes de LU, obtenemos

$$\begin{cases} a_{1j} = u_{1j}, & j = 1, \ldots, n, \\ a_{i1} = l_{i1}u_{11} \Rightarrow l_{i1} = \frac{a_{i1}}{u_{11}}, & i = 2, \ldots, n. \end{cases}$$

Identificando a continuación los elementos de la segunda fila de A con los correspondientes de LU, y los de la segunda columna de A con los correspondientes de LU, obtenemos

$$\begin{cases} a_{2j} = l_{21}u_{1j} + u_{2j} \Rightarrow u_{2j} = a_{2j} - l_{21}u_{1j}, & j = 2, \ldots, n, \\ a_{i2} = l_{i1}u_{12} + l_{i2}u_{22} \Rightarrow l_{i2} = \frac{1}{u_{22}}(a_{i2} - l_{i1}u_{12}), & i = 3, \ldots, n. \end{cases}$$

Y en general, si suponemos conocidad las $k-1$ primeras filas de U y las $k-1$ primeras columnas de L, entonces, identificando los elementos de la k-ésima fila de A con los correspondientes de LU, y los de la k-ésima columna de A con los correspondientes de LU, obtenemos

$$\begin{cases} a_{kj} = l_{k1}u_{1j} + \ldots + l_{k,k-1}u_{k-1,j} + u_{kj} & \\ \Rightarrow u_{kj} = a_{kj} - \sum\limits_{r=1}^{k-1} l_{kr}u_{rj}, & j = k, \ldots, n, \\ a_{ik} = l_{i1}u_{1k} + \ldots + l_{i,k-1}u_{k-1,k} + l_{ik}u_{kk} & \\ \Rightarrow l_{ik} = \frac{1}{u_{kk}} \left(a_{ik} - \sum\limits_{r=1}^{k-1} l_{ir}u_{rk} \right), & i = k+1, \ldots, n. \end{cases}$$

Demostración. Existen matrices elementales $E_1, E_2, \ldots, E_k$ y una matriz U(triangular superior) tales que $E_kE_{k-1}\ldots E_2E_1 = U$ de aquí obtenemos $A = E_1^{-1}E_2^{-1}\cdots E_j^{-1}U$. □

Ahora bien, por construcción, cada matriz elemental $E_1, E_2, \ldots, E_k$ es triangular inferior y tiene unos en su diagonal principal, por consiguiente sus inversas $A = E_1^{-1}E_2^{-1}\cdots E_k^{-1}$ y la matriz $L = E_1^{-1}E_2^{-1}\cdots E_k^{-1}$ también tienen las mismas características.

Lo que implica que hemos obtenido la factorización LU buscada para la matriz A, es decir:

$$A = LU$$

Consideremos ahora una matriz invertible A y demostremos la unicidad de dicha factorización.

Supongamos que tenemos dos factorizaciones LU para A de la forma

$$A = L_1U_1 = L_2U_2$$

Como U_1, U_2 son matrices triangulares superiores, más aún sus inversas son igualmente triangulares superiores. De esta última igualdad obtenemos entonces

$$L_2^{-1}L_1 = U_2U_1^{-1}$$

El lado izquierdo de esta igualdad es producto de matrices triangulares inferiores con unos en la diagonal, por lo tanto es triangular inferior y tiene unos en la diagonal principal. Igualmente, el lado derecho es una matriz triangular superior, pues es producto de matrices triangulares superiores. Entonces, $L_2^{-1}L_1 = I$, de eso se sigue que $L_1 = L_2$ y por ende,

$$U_1 = U_2$$

3.1.1 Matriz U. Consideremos la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 3 \\ 6 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ escribir A como el producto de dos matrices, una triangular superior y la otra triangular inferior.

Primero haremos operaciones de fila de manera de transformar A a una matriz equivalente por filas, pero triangular superior

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 3 \\ 6 & 3 & 5 \end{pmatrix} \quad f_2 - 2f_1 \to f_2$$
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & 5 \\ 6 & 3 & 5 \end{pmatrix} \quad f_3 - 3f_1 \to f_3$$
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \quad = U$$

Y ahora obtenemos las matrices elementales

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} f_2 - 2f_1 \to f_2 \quad E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} f_3 - 3f_1 \to f_3 \quad E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donde $U = E_1E_2A$

$U = E_2E_1A$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 3 \\ 6 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 3 \\ 6 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Sea $E = E_2E_1$

$$E = E_2E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.1.2 Matriz L. Mediante los paso aplicados anteriormete se logra llegar de una matriz A a U, lo que es bueno. Ahora debemos deshacer los pasos realizados anteriormente.

Para deshacer los pasos anteriores se invierte la matriz elemental E_1:

Se obtiene la inversa de E_1:

$$L = E^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad f_2 + 2f_1$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad f_3 + 3f_1$$

$$E^{-1} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Se invierte cada paso individual, se obtiene una matriz que denominaremos L, la cual lleva a la matriz U de regreso a A.

$$EA = U/L$$
$$LEA = LU$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 3 \\ 6 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}}^{L} \overbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}}^{U}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 3 \\ 6 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 3 \\ 6 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

De este modo podemos factorizar una matriz cualquiera de la forma $A = LU$

Capítulo IV

4.1 Factorización o descomposición de Cholesky

Enfocándonos un poco más en la factorización de LU de una matriz, nace lo que se conoce como factorización o descomposición de Cholesky, en este caso especial encontramos que podemos elegir $L = U^* = B$, para una matriz cuadrada simétrica: $A = BB^*$. Estando así, íntimamente relacionada con la expresión $A = LU = LDL^*$.

4.1.1 Características. La descomposición de Cholesky consite en:

- Una matriz cuadrada triangular superior: Matriz cuadrada que sólo tiene ceros debajo de la diagonal principal
- Una matriz cuadrada triangular inferior: Matriz que sólo tiene ceros por encima de la diagonal principal

Matemáticamente, si existe una matriz simétrica definida positiva,E, entonces existe una matriz simétrica triangular inferior, K, de la misma dimensión que E, resultando en:

$$E = KxK^T$$

La matriz anterior figura como la matriz de Cholesky de E. Esta matriz actúa como la raíz cuadrada de la matriz E. Sabemos que el dominio de la raíz cuadrada es:

$$\{x \in \mathbb{R} : x \geqslant 0\}$$

La cual está definida en todos los números reales no negativos. De la misma manera que la raíz cuadrada, la matriz de Cholesky solo existirá si la matriz está definida semi-positiva.

Una matriz está definida semi-positiva cuando los principales menores tienen un determinante postivo o cero.

La descomposición de Cholesky de E es una matriz diagonal tal que:

$$E = KxK^T = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & G_{1,i} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ G_{i,1} & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{1,1} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 \\ K_{i,1} & \cdots & K_{i,i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{1,1} & \cdots & K_{1,i} \\ 0 & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & K_{i,i} \end{bmatrix}$$

Podemos ver que las matrices son cuadradas y contienen las características mencionadas; triángulo de ceros por encima de la diagonal principal en la primera matriz y triángulo de ceros por debajo de la diagonal principal en la matriz transformada, naciendo así su definición.

Definición. Sea $A = a_{ij}$ una matriz $n \times n$ de coeficientes reales. Diremos que A es definida positiva si

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}u_iu_j > 0, \text{para todo } u \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \tag{2}$$

Teorema. *(Factorización de Cholesky) Si A es una matriz $n \times n$ simétrica definida positiva, entonces existe al menos una matriz $n \times n$ triangular inferior B tal que $A = BB^*$. Además, se puede imponer que $b_{ii} > 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$ y en tal caso la factorización anterior es única. El recíproco del Teorema de factorización de Cholesky es también cierto.*

Proposición. *Si B es una matriz $n \times n$ triangular inferior regular, y definimos $A = BB^*$, entonces A es simétrica y definida positiva.*

- Calculo efectivo Factorización de Cholesky.

Para el cálculo efectivo de la factorización de Cholesky, se parte de la igualdad

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ b_{n-1,1} & b_{n-1,2} & \cdots & b_{n-1,n-1} & 0 \\ b_{n,1} & b_{n,2} & \cdots & b_{n,n-1} & b_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} & \cdots & b_{n-1,1} & b_{n1} \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{n-1,2} & b_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{n-1,n-1} & b_{n,n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{n,n} \end{pmatrix}$$

con $b_{ii} > 0$

De esta forma, identificando los elementos de la primera fila de A con las correspondientes de BB^*, obtenemos:

$$\begin{cases} a_{11} = b_{11}^2 \Rightarrow b_{11} = \sqrt{a_{11}} \\ a_{ij} = b_{11}b_{j1} \Rightarrow b_{j1} = \frac{a_{1j}}{b_{11}}, \quad j = 2, \ldots, n, \end{cases}$$

Identificando a continuación los elementos de la segunda fila de A con los correspondientes BB^*, obtenemos:

$$a_{2j} = b_{21}b_{j1} + b_{22}b_{j2}, \quad j = 2, \ldots, n,$$

y en consecuencia

$$\begin{cases} b_{22} = \sqrt{a_{22} - b_{21}^2}, \\ b_{j2} = \frac{1}{b_{22}}(a_{2j} - b_{21}b_{j1}), \quad j = 3, \ldots, n, \end{cases}$$

y en general si suponemos conocidad las $k-1$ primeras columnas de B entonces, identificando los elementos de la $k-ésima$ fila de A con los correspondientes de BB^*, obtenemos

$$a_{kj} = b_{k1}b_{j1} + b_{k2}b_{j2} + \ldots + b_{kk}b_{jk}, \quad j = k, \ldots, n,$$

y en consecuencia

$$\begin{cases} b_{kk} = \sqrt{a_{kk} - \sum_{r=1}^{k-1} b_{kr}^2}, \\ b_{jk} = \frac{1}{b_{kk}} \left(a_{kj} - \sum_{r=1}^{k-1} b_{kr}b_{jr} \right), \quad j = k+1, \ldots, n. \end{cases}$$

Se puede demostrar que el número de operaciones necesarias para llevar a cabo el método de cálculo anterior resulta ser aproximandamente la mitad de sumas y productos que en el método de Gauss o el de LU, a cambio de calcular además en raíces cuadradas. Cuando no es grande, el método de Cholesky es el más favorable para el caso de matrices simétricas y definidas positivas.

4.1.2 Ejemplo de la descomposión de Cholesky.

Ejemplo. (De la descomposición de Cholesky) Este es el ejemplo más sencillo que podemos encontrar de descomposión de Cholesky ya que las matrices tienen que ser cuadradas, en este caso, la matriz es 2×2. Además, cumple con las caracterísiticas de tener ceros por encima y por debajo de la diagonal principal. Esta matriz esta definida semi-positiva porque los principales menores tienen un determinante positivo:

Definimos:

$$E = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \; y \; K = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

Resolviendo para: $c_2 = 4; b \cdot c = -2; a_2 + b_2 = 5$; tenemos cuatro posibles matrices de Cholesky:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Por último, calculamos para encontrar (a, b, c). Una vez que los encontremos, tendremos las matrices de Cholesky. El cálculo es el siguiente:

$$c = \sqrt{4} \to c = 2; c = -2$$

$$c = 2 \to bv = -2 \to b = -1$$

$$c = 2; b = -1 \to a^2 + b^2 = 5 \to a = \sqrt{4} \to a = 2; a = -2$$

$$c = -2 \to bc = -2 \to b = 1$$

$$c = -2; b = 1 \to a^2 + b^2 = 5 \to a = \sqrt{4} \to a = 2; a = -2$$

Ejemplo. Realiza la descomposición de Cholesky de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

Recordemos que:

1. El método de descomposición de Cholesky es un método de descomposición LU en el caso en que A sea una matriz simétrica y definida positiva. Bastará con tomar $U = L^t$, siendo $A = LU = LL^t$.

Por lo tanto tenemos que:

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ 0 & l_{22} & l_{23} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{bmatrix}$$

Realizamos así el producto de matrices de la derecha, y obtenemos:

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11}^2 & l_{11}l_{12} & l_{11}l_{13} \\ l_{21}l_{11} & l_{21}^2 + l_{22}^2 & l_{21}l_{31} + l_{22}l_{23} \\ l_{31}l_{11} & l_{32}l_{12} + l_{32}l_{22} & l_{31}^2 + l_{32}^2 + l_{33}^2 \end{bmatrix} \tag{m}$$

Igualamos elemento a elemento las dos matrices, y tenemos un sistema de ecuaciones que debemos resolver.

Igualamos la primera fila:

$$l_{22}^2 = 4 \to l_{11} = 2$$

$$l_{11}l_{12} = -1 \to 2l_{12} = -1 \to l_{12} = -\frac{1}{2}$$

$$l_{11}l_{13} = 0 \to 2l_{13} = 0 \to l_{13} = 0$$

Igualamos la segunda fila:

$$l_{21}l_{11} = -1 \to \left(-\frac{1}{2}\right) 2 = -1 \to esta\, ecuación\, no\,, nos\, da\, información$$

$$l_{21}^2 l_{22}^2 = 4 \rightarrow \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + l_{22}^2 = 4 \rightarrow l_{22} = \frac{\sqrt{15}}{2}$$

$$l_{21}l_{31} + l_{22}l_{23} = -1 \rightarrow \left(-\frac{1}{2}\right)(0) + \left(\frac{\sqrt{15}}{2}\right) l_{23} = -1 \rightarrow l_{23} = -\frac{2}{\sqrt{15}} = -\frac{2\sqrt{15}}{15}$$

Igualamos la tercera fila:

$$l_{31}l_{11} = 0 \rightarrow (0)(2) = 0 \rightarrow no\, nos\, da\, informaci\acute{o}n$$

$$l_{31}l_{12}+l_{32}l_{22} = -1 \rightarrow (0)\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{2\sqrt{15}}{\sqrt{15}}\right)\left(\frac{\sqrt{15}}{2}\right) = -1 \rightarrow no\, nos\, da\, informaci\acute{o}n$$

$$l_{31}^2 + l_{32}^2 + l_{33}^2 = 4 \rightarrow 0^2 + \left(\frac{2\sqrt{15}}{\sqrt{15}}\right)^2 + l_{33}^2 = 4 \rightarrow l_{33} = \sqrt{\frac{56}{15}}$$

Hemos obtenido el sistema de ecuaciones y por lo tanto tenemos la descomposición de Cholesky de la matriz A, el cual no quedaría:

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{15}}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{2\sqrt{15}}{\sqrt{15}} & \sqrt{\frac{56}{15}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{15}}{2} & -\frac{2\sqrt{15}}{\sqrt{15}} \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{56}{15}} \end{bmatrix}$$

Ejemplo. Sea el sistema de ecuaciones simultaneas

$$4x_1 + x_2 + 2x_3 = 1$$

$$x_1 + 2x_2 = 2$$

$$2x_2 + 5x_3 = 4$$

Donde,

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Al estar ante una matriz y para poder aplicar el método de Cholesky, es preciso comprobar si es simétrica y además, positiva para proceder a determinar así, si existe al menos una matriz $n \times n$ triangular inferior B tal que $A = BB^*$.

Entonces,

$$Submatrices \quad \begin{array}{c} [4] = 4 \\ \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = 8 - 1 = 7 \\ \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 & \vdots & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & \vdots & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 5 & \vdots & 2 & 0 \end{bmatrix} = [40 + 0 + 0] - [5 + 0 + 3] = 27$$

$$\therefore Es\, una\, matriz\, simétrica\, definida\, positiva$$

Aplicamos lo visto en el ejemplo 2 (m)

$$A = LL^t$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11}^2 & l_{11}l_{12} & l_{11}l_{13} \\ l_{21}l_{11} & l_{21}^2 + l_{22}^2 & l_{21}l_{31} + l_{22}l_{23} \\ l_{31}l_{11} & l_{32}l_{12} + l_{32}l_{22} & l_{31}^2 + l_{32}^2 + l_{33}^2 \end{bmatrix}$$

Igualamos elemento a elemento las dos matrices, y tenemos un sistema de ecuaciones que debemos resolver.

Igualamos la primera fila:

$$l_{11}^2 = 4 \rightarrow l_{11} = 2$$

$$l_{11}l_{12} = 1 \rightarrow l_{12} = 1 \rightarrow l_{12} = \frac{1}{2}$$

$$l_{11}l_{13} = 2 \rightarrow 2l_{13} = 2 \rightarrow l_{13} = 1$$

Igualamos la segunda fila

$$l_{21}l_{11} = 1 \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right) 2 = 1 \rightarrow esta\, ecuación\, no\, nos\, da\, información$$

$$l_{21}^2 l_{22}^2 = 2 \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^2 + l_{22}^2 = 2 \rightarrow l_{22} = \sqrt{\frac{7}{4}} = \frac{\sqrt{7}}{2}$$

$$l_{21}l_{31} + l_{22}l_{23} = 0 \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)(1) + \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right) l_{23} = 0 \rightarrow l_{23} = -\frac{1}{\sqrt{7}}$$

Igualamos la tercera fila:

$$l_{31}l_{11} = 2 \rightarrow (1)(2) = 2 \rightarrow no\, nos\, da\, informaci\acute{o}n$$

$$l_{31}l_{12} + l_{32}l_{22} = 0 \rightarrow (1)\left(\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{\sqrt{7}}\right)\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right) = 0 \rightarrow no\, nos\, da\, informaci\acute{o}n$$

$$l_{31}^2 + l_{32}^2 + l_{33}^2 = 5 \rightarrow 1^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{7}}\right)^2 + l_{33}^2 = 5 \rightarrow l_{33} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$$

Hemos obtenido la descomposición de Cholesky de la matriz A,el cual nos quedaría:

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{7}}{2} & 0 \\ 1 & -\frac{1}{\sqrt{7}} & \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{7}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{\sqrt{7}}{2} & -\frac{1}{\sqrt{7}} \\ 0 & 0 & \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{7}} \end{bmatrix}$$

Bibliografía

[Burden. R. L. (1993). Análisis Numérico. Grupo Editorial Americana]

[Del Valle Sotelo, J. C. (13 de Febrero de 2018). Álgebra Lineal para Estudiantes Ingeniería y Ciencias. McGraw-Hill]

[Grossman, S. I. (2008). Álgebra Lineal. McGraw-Hill]

[Lang, S. (1990). Introducción al álgebra lineal. Addison-Wesley Iberoamericana]

[Peña, D. L. (8 de Julio de 2006). Historia del Álgebra Lineal hasta los Albores del Siglo XX. Universidad del Zulia, Maracaibo.]

[Strang, G. (1982). Álgebra lineal y sus aplicaciones. Fondo Educativo Interamericano]