



MAGÍSTER EN MATEMÁTICA MENCIÓN MATEMÁTICA APLICADA

MATERIALES VISCOSOS Y MODELAMIENTO DE SUS OSCILACIONES

Tesis presentada al Programa de Magíster en Matemática, Mención Matemática Aplicada del Departamento de Matemática de la Universidad del Bío Bío como parte de los requisitos para la obtención del grado de Magíster en Matemática con Mención en Matemática Aplicada de la Universidad del Bío-Bío.

POR JOSUÉ MELLA AMIGO

DIRECTOR: JAIME MUÑOZ RIVERA

MATERIALES VISCOSOS Y MODELAMIENTO DE SUS OSCILACIONES

POR JOSUÉ MELLA AMIGO

Tesis presentada al Programa de Magíster en Matemática, Mención Matemática Aplicada del Departamento de Estadística y Departamento de Matemática de la Universidad del Bío Bío como parte de los requisitos para la obtención del grado de Magíster en Matemática con Mención en Matemática Aplicada de la Universidad del Bío-Bío.

APROBADA POR:

Jaime Muñoz Rivera

Director

Departamento Matemática, Universidad del Bío-Bío

Octavio Vera Villagran

Profesor Informante

Departamento Matemática, Universidad del Bío-Bío

Luis Friz

Profesor Informante

Departamento Matemática, Universidad del Bío-Bío

To Fu Ma (externo)

Profesor Informante

Departamento Matemática , Universidad de Brasília

UNIVERSIDAD DEL BÍO-BÍO

FACULTAD DE CIENCIAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

RESUMEN

En esta tesis estudiamos las propiedades cualitativas de una viga formada por tres componentes, una de ellas es del tipo elástico sin propiedad disipativa, la segunda componente posee un mecanismo disipativo del tipo friccional y la tercera es formada por un material viscoso del tipo de Kelvin-Voight; por ser materiales diferentes con distintos coeficientes elásticos el modelo resultante es una ecuación con coeficientes discontinuos de primera especie en las conexiones de los materiales, este modelo es también conocido como problema de transmisión. Estos problemas han sido estudiados principalmente por su comportamiento asintótico, existen muchos trabajos donde se muestra que la solución decae exponencialmente a cero.

El principal resultado de esta tesis es probar que el semigrupo asociado al modelo de vigas es diferenciable, lo que en particular significa que el modelo presenta un efecto regularizante sobre los datos iniciales, es decir, independiente de la regularidad de los datos iniciales la solución es infinitamente diferenciable en un tiempo positivo (instantáneamente diferenciable), esto a pesar de que el modelo posee coeficientes discontinuos. Este es un resultado nuevo para el modelo que estudiamos e implica en otras dos propiedades importantes: La primera es el decaimiento exponencial de las soluciones, la segunda es que el tipo del semigrupo es igual a la cota superior del espectro de su generador infinitesimal.

Palabras Claves: Modelo de vigas de Euler Bernoulli, Ecuación de Vigas, Problema de transmisión, semigrupos, semigrupos diferenciables, efecto regularizante, decaimiento.

ABSTRACT

In this thesis it is studied the qualitative properties of a beam formed by three components. One of them is of an elastic type, without any dissipative mechanism. The second component has a frictional mechanism and the third component is formed by a viscous material of the Kelvin-Voight type. Because of the different materials with different elastic coefficients, the resulting model is an equation with discontinuous coefficients of the first kind. This model is also known as a transmission problem.

These problems have been studied mainly for their asymptotic behaviour. There are many studies in which it is shown that the solution declines exponentially to zero.

The main result of this thesis is to prove that the semigroup associated with the beam model is differentiable, it means that the model has a regularizing effect on the initial data, furthermore, regardless of the regularity of the initial data, the solution is infinitely differentiable in a positive time (instantaneously differentiable), this, despite the fact that the model has discontinuous coefficients.

This is a new result for the model being studied and it implies two other important properties, the first one is the exponential decay of solutions, and the second property is that the type of the semigroup is equal to the upper bound of the spectrum of its infinitesimal generator.

Key Words: Euler Bernoulli beam model, Beams equation, transmission problem, semigroups, differentiable semigroups, regularizing effect, decay.

Índice general

1. Introducción	9
1.1. Objetivos	11
1.2. Hipótesis	12
2. Preliminares	13
2.1. Notaciones	13
2.2. Espacios L^p	14
2.3. Espacios de Sobolev $W^{m,p}$	15
2.4. Espacios de Hilbert	17
2.5. Operadores Compactos	19
2.6. Desigualdades importantes	20
2.7. Teoría de Semigrupos	20
2.8. Diferenciabilidad del semigrupo.	24
2.9. Soluciones de una Ecuación de Vigas	25
3. El modelo matemático	29
3.1. Deducción Física	29
3.2. El problema de transmisión	32
4. Buena colocación del Problema	35
4.1. Método de Semigrupos	36
4.2. Estabilidad Exponencial	40
4.2.1. Método de la Energía	40

5. Diferenciabilidad	45
5.0.1. Observabilidad	53
5.1. Orden de las componentes	70
6. Conclusiones y Discusión de resultados	71
6.1. Buena colocación del modelo	71
6.2. Diferenciabilidad y regularidad	71
6.3. Orden de las componentes	72
6.4. Trabajos Futuros	73

Capítulo 1

Introducción

En esta tesis estudiaremos el modelo de oscilaciones de una viga compuesta de tres componentes. La primera es un material elástico sin disipación, la segunda posee un mecanismo del tipo friccional y la tercera componente es un material viscoso del tipo de Kelvin Voight. Como se muestra en la figura 1.1

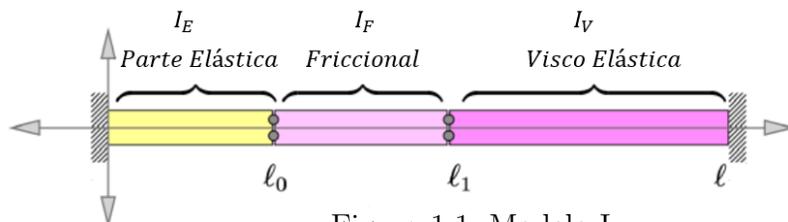


Figura 1.1: Modelo I

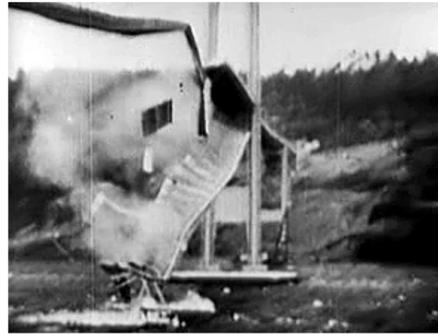
Es una viga empotrada en sus dos extremos, las condiciones de contorno que consideraremos en este trabajo son las de Dirichlet.

Actualmente el estudio de los mecanismos disipativos son de mucha importancia, pues eliminan la posibilidad de fenómenos resonantes.

El estudio de estos mecanismos comenzó con la tragedia del puente Tacoma Narrows, construido en 1940. El puente colgante ubicado en el estado de Washington, EE. UU., se inauguró el 1 de julio de 1940 y se derrumbó repentinamente el 7 de noviembre del mismo año. El colapso impulsó la investigación sobre aerodinámica y aeroelasticidad estructural, que afectó el diseño de todos los puentes posteriores.



Puente de Tacoma (1940)



El puente se derrumba, en un fotograma de una película cinematográfica (1940)

Desde este acontecimiento el estudio de los problemas oscilatorios y mecanismos con amortiguación aumentó considerablemente, siendo actualmente materia obligatoria prácticamente en todos los cursos de ingeniería civil.

Uno de los primeros resultados sobre problemas con viscosidad localizada fue desarrollado en [13] por G. Chen, S. A. Fulling, F. J. Narcowich, and S. Sun. Los autores probaron que el modelo con amortiguamiento viscoso localizado produce decaimiento exponencial.

Posteriormente F. Huang en [9] y F. Huang and K. Liu [10] mostraron que el tipo de amortiguación Kelvin-Voigt cuando es efectivo en todo el dominio no sólo produce estabilidad exponencial sino también analiticidad.

Sin embargo cuando la disipación viscosa esta localizada a una parte del material se pierde la analiticidad como fue probado por Z. Liu y K. Liu en [6], los autores solo mostraron la falta de analiticidad y nada afirmaron sobre la diferenciabilidad.

Es este trabajo estudiaremos el modelo de oscilaciones de una viga del tipo Euler-Bernoulli compuesta de tres componentes, siendo una de ellas, una componente viscosa del tipo Kelvin-Voigt, queremos saber si la posición de estas componentes afecta el desempeño de la viga.

La metodología que utilizaremos es basada principalmente en la teoría de semigrupos. Por la cual caracterizamos estas propiedades a través del operador resolvente; otros resultados importantes que usaremos son los teoremas de inmersiones y las desigualdades de Sobolev, esto para complementar las desigualdades de observabilidad que usaremos. Estos resultados serán desarrollados en el capítulo 2

En el capítulo 3 mostramos la deducción física del modelo que describe las oscilaciones de una viga, objeto de nuestro estudio. En el capítulo 4 probaremos la buena colocación del modelo y terminaremos probando la estabilidad exponencial del semigrupo, usando el método de la energía, en el caso que los mecanismos disipativos sean efectivos sobre todo el dominio. En el capítulo 5 estudiamos el resultado principal de este trabajo, probaremos que el semigrupo asociado al modelo propuesto es diferenciable. Esto en particular implica que la solución posee un efecto regularizante entre otras propiedades importantes. Veremos en particular como este resultado implica el decaimiento exponencial de las soluciones.

1.1. Objetivos

El principal objetivo de este trabajo es estudiar el problema de transmisión con disipación viscosa localizada como se muestra en la figura 1.1. Este modelo posee una ecuación compleja pues tiene coeficientes discontinuos y el modelo debe ser desarrollado sobre conjuntos abiertos disconexos. Por lo tanto el problema de la buena colocación no es simple, es necesario usar muchas técnicas del Análisis funcional que no son frecuentes.

A seguir enumeramos los objetivos específicos de este trabajo.

1. La buena colocación de la ecuación de vigas.- Existencia, unicidad y dependencia continua de la solución con relación a los datos del problema.
2. El decaimiento de la solución del problema. Verificaremos el decaimiento es exponencial.
3. La diferenciabilidad del sistema
4. Estudiaremos las principales consecuencias de que el modelo tenga un semigrupo diferenciable.
5. El orden los los componentes de la viga y su influencia sobre los resultados anteriores.

1.2. Hipótesis

1. El semigrupo asociado al modelo es exponencialmente estable.
2. El semigrupo asociado al modelo es Diferenciable
3. El orden de las componentes de la viga no incide en la estabilidad y diferenciabilidad del modelo.

Capítulo 2

Preliminares

En este capítulo estudiamos resultados importantes del Análisis Funcional que serán usados en este trabajo, estos resultados están probados y generalizados en los siguientes libros [1, 2, 12, 8].

2.1. Notaciones

Espacios de Funciones Continuas Usaremos las siguientes notaciones para $m = 0, 1, 2, \dots$

$$C^m(\Omega) = \{f \in C^0(\Omega); D^\alpha f \in C^0(\Omega), \forall |\alpha| \leq m\},$$

$$C_0^m(\Omega) = \{f \in C^0(\Omega); D^\alpha f \in C^0(\Omega), \forall |\alpha| \leq m, D^\alpha f(x) = 0, x \in \delta\Omega, |\alpha| \leq m - 1\},$$

$$C_0^\infty(\Omega) = \{f \in C^\infty(\Omega); \exists K \subset \Omega \text{ compacto}, f(x) = 0, \forall x \in \Omega \setminus K\}.$$

Sucesión de Cauchy

Sea (X, d) un espacio métrico, diremos que una sucesión $(x_n)_{n=1}^\infty \subset X$ es de Cauchy si dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n, m \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad d(x_n, x_m) < \epsilon.$$

Espacios completos

Un espacio métrico (X, d) es completo, si toda sucesión de Cauchy en X es convergente.

Espacios de Banach

Se dice que X es un espacio de Banach, si es un espacio vectorial normado y completo.

2.2. Espacios L^p

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, para $p \geq 1$ definimos

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ medible y } \int_{\Omega} |f(x)|^p dx < \infty \right\}.$$

El conjunto

$$L^\infty(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ medible y } |f(x)| \leq C, \text{ casi siempre en } \Omega \right\},$$

observe que para $p = 2$ los espacios L^2 son espacios de Hilbert.

Que f sea medible quiere decir que f es límite de una sucesión de funciones simples sobre Ω .

Su producto interno $(f, g) = \int_{\Omega} f(x)g(x) dx$ induce la norma $\|f\|^2 = \int_{\Omega} |f(x)|^2 dx$, y la convergencia débil $f_\nu \rightharpoonup f \Leftrightarrow \int_{\Omega} f_\nu g dx \rightarrow \int_{\Omega} fg dx$.

Teorema 2.1 *Los espacios $L^p(\Omega)$ son reflexivos para $1 < p < \infty$.*

Este teorema nos dice que sucesiones limitadas en $L^p(\Omega)$ poseen subsecuencias convergentes en la topología débil, esto es cualquier sucesión limitada $f_n \in L^p(\Omega)$ posee una subsecuencia que converge débil en $L^p(\Omega)$.

El Teorema de la Representación de Riesz nos dice que el espacio dual de $L^p(\Omega)$ es $L^q(\Omega)$, esto es

$$[L^p(\Omega)]^* = L^q(\Omega),$$

donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Así tenemos que

$$L^\infty(\Omega) = [L^1(\Omega)]^*.$$

Teorema 2.2 (Desigualdad de Holder) Sean $1 \leq p, q \leq \infty$, con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Entonces si $u \in L^p(\Omega)$ y $v \in L^q(\Omega)$, se tiene la desigualdad de Holder

$$\int_{\Omega} |uv| dx \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)}$$

2.3. Espacios de Sobolev $W^{m,p}$

Estos son espacios de derivadas débiles. La derivada débil es definida a seguir

Definición 2.1 Diremos que una función $f \in L^p(\Omega)$ posee derivada débil si existe una función $v \in L^p(\Omega)$ tal que

$$\int_{\Omega} f(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \varphi(x) dx = - \int_{\Omega} v \varphi(x) dx, \quad \forall \varphi \in C_0^1(\Omega) \quad i = 1, \dots, n.$$

Note que si $f \in C^1(\Omega)$ tenemos que $v = \frac{\partial}{\partial x_i} f(x)$ en el sentido clásico.

Análogamente definimos derivadas débiles de orden superior, usando la notación de multi-índices.

$$\alpha \in \mathbb{N}^n, \quad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), \quad |\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i, \quad D^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

Diremos que g es la derivada débil de orden α si

$$\int_{\Omega} f(x) D^\alpha \varphi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} g(x) \varphi(x) dx, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Con estas notaciones, introducimos los espacios de Sobolev.

$$W^{1,p}(\Omega) = \{f \in L^p(\Omega); D^\alpha f \in L^p(\Omega), |\alpha| \leq 1\}.$$

La derivada en el sentido débil. Para $m > 1$ definimos

$$W^{m,p}(\Omega) = \{f \in L^p(\Omega); D^\alpha f \in L^p(\Omega), |\alpha| \leq m\},$$

es un espacio vectorial normado y completo con la norma

$$\|f\|_{m,p} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D^\alpha f(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

Teorema 2.3 *Los espacios $W^{m,p}(\Omega)$ son reflexivos para $1 < p < \infty$.*

Esta propiedad es muy importante porque nos permite caracterizar la convergencia débil.

Cuando $p = 2$ los espacios son de Hilbert y denotados como

$$W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega),$$

su producto interno:

$$(f, g)_m = \int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq m} D^\alpha f D^\alpha g dx \quad \Rightarrow \quad \|f\|_m^2 = \int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq m} |D^\alpha f|^2 dx,$$

la convergencia débil es dada por

$$f_\mu \rightarrow f \Leftrightarrow (f_\mu, g)_m \rightarrow (f, g)_m,$$

para todo $w \in H_0^m(\Omega)$ tenemos $D^\alpha w(x) = 0$, $|\alpha| \leq m - 1$ sobre $\partial\Omega$, definimos

$$W_0^{m,p}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{m,p}}.$$

La clausura de $C_0^\infty(\Omega)$ con la topología fuerte de $W^{m,p}$.

Teorema 2.4 (Desigualdad de Gagliardo Nirenberg) . *Sea $u \in W^{1,p}(a, b)$ entonces tenemos*

$$\sup_{x \in [a,b]} |f(x)| \leq C \left(\int_a^b |f(s)|^2 ds \right)^{1/4} \left(\int_a^b |f_x(s)|^2 ds \right)^{1/4}.$$

Teorema 2.5 (Derivadas intermedias) *Sea $u \in L^p(a, b)$ tal que $u^{(m)} \in L^p(a, b)$ entonces tenemos que*

$$u^{(j)} \in L^p(a, b), \quad j = 1, \dots, m - 1,$$

y además tenemos

$$\|u^{(j)}\|_{L^p} \leq c\|u\|_{L^p} + c\|u\|_{L^p}^{1-\frac{j}{m}} \|u^{(j)}\|_{L^p}^{\frac{j}{m}}.$$

Teorema 2.6 (Desigualdad de Poincaré) *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, tal que $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ entonces tenemos*

$$\int_{\Omega} |u|^p dx \leq c \int_{\Omega} |\nabla u|^p dx.$$

2.4. Espacios de Hilbert

Es esta sección enunciaremos las principales propiedades de los espacios de Hilbert que usaremos en este trabajo, un resultado importante en el estudio de las ecuaciones diferenciales, es el teorema de la representación de Riesz que caracteriza los espacios duales de los espacios de Hilbert, este teorema es un punto de partida para las formulaciones variacionales que son usadas para la definición de soluciones débiles de ecuaciones diferenciales parciales.

Recordemos que dado un espacio normado E , su espacio dual denotado como E^* definido como

$$E^* = \{T : E \rightarrow \mathbb{R}, T \text{ es lineal continua}\}.$$

Teorema 2.7 (Representación de Riesz (TRR.)) *Sea H un espacio de Hilbert, con producto interno $(\cdot, \cdot)_H$ y sea H^* su espacio dual, entonces para todo $T \in H^*$ existe un único elemento $u \in H$ tal que*

$$T(w) = (u, w)_H.$$

Este resultado nos caracteriza todo elemento del espacio dual, es decir, todo elemento del dual puede ser representado a través de su producto interno, esto es w_μ converge débil en H espacio de Hilbert, esto es

$$w_\mu \rightharpoonup w \Leftrightarrow (w_\mu, v) \rightarrow (w, v).$$

En particular este resultado es muy importante para caracterizar la convergencia débil. Gracias al Teorema de la representación podemos probar que todo espacio de Hilbert es reflexivo.

Teorema 2.8 (Reflexividad) *Todo espacio de Hilbert es reflexivo.*

Este teorema nos dice que secuencias limitadas en un espacio de Hilbert, poseen subsecuencias que convergen en la topología débil.

A través del TRR. podemos identificar el dual $[L^2(\Omega)]^*$, con el espacio $L^2(\Omega)$ estos dos espacios se identifican, a través de la aplicación

$$f \mapsto T_f, \quad T_f(w) = \int_{\Omega} fw \, dx.$$

Una generalización del Teorema de Representación, es el Teorema de Lax-Milgran, que establece todo elemento del dual de un espacio de Hilbert puede ser representado a través de una bilineal $a(\cdot, \cdot)$ que verifica las condiciones de un producto interno excepto por la simetría. Justamente en este punto radica la generalización.

Teorema 2.9 (Lax-Milgram) *Sea H un espacio de Hilbert, si $a : H \times H \rightarrow \mathbb{C}$ es una forma bilineal, continua y coercitiva, entonces para cada $F \in H'$, existe un único $u \in H$ tal que*

$$a(u, v) = F(v), \text{ para todo } v \in H.$$

A continuación un resultado a utilizar muy importante en la Teoría de distribuciones, el Lema de DuBois Raymond. Denotemos por $L^p_{loc}(\Omega)$ al siguiente espacio

$$L^p_{loc}(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; \int_K |f|^p \, dx < \infty, \forall K \subset \Omega \text{ compacto} \}.$$

Lema 2.1 (DuBois Raymond) Sea $f \in L^p_{loc}(\Omega)$ verificando

$$\int_{\Omega} f(x)\phi(x) dx = 0 \quad \forall \phi \in C_0^{\infty}(\Omega),$$

entonces $f(x) = 0$ casi siempre en Ω .

El Lema de DuBois Raymond implica la densidad.

Teorema 2.10 (Densidad) El espacio de las funciones $C_0^{\infty}(\Omega)$ es denso en $L^p(\Omega)$ para todo $p \geq 1$.

2.5. Operadores Compactos

Definición 2.2 Sea E, F dos espacios normados completos y sea $T : E \rightarrow F$. Diremos que T es compacto si T lleva conjuntos limitados de E a conjuntos compactos de F .

El teorema siguiente es esencial a la hora de mostrar la compacidad de un operador.

Teorema 2.11 (Operadores Compactos) Sea $T : E \rightarrow E$ un operador compacto con E un espacio normado de dimensión infinita entonces tenemos

1. $0 \in \sigma(T)$,
2. $\sigma(T) \setminus \{0\} = AV(T) \setminus \{0\}$,
3. Uno de los siguientes casos sucede.
 - a) $\sigma(T) = \{0\}$
 - b) $\sigma(T) \setminus \{0\}$ es un conjunto finito
 - c) $\sigma(T) \setminus \{0\}$ es una secuencia convergiendo para cero.

2.6. Desigualdades importantes

Desigualdad de Holder:

Si $a, b > 0$ y $1 < p, q < \infty$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, entonces $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$.

Esta desigualdad es muy usada en el caso $p = 2$, donde tenemos

$$ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2},$$

y también cuando queremos que un factor sea mucho menor que otro

$$ab = \left(\frac{a}{\varepsilon}\right) (\varepsilon b) \leq \frac{1}{\varepsilon^p} a^p + \frac{\varepsilon^q}{q} b^q,$$

tomando $\varepsilon \rightarrow 0$ sigue que $\frac{1}{\varepsilon^p} \rightarrow \infty$. Denotando por $\delta = \frac{\varepsilon^q}{q}$ y por tanto $c_\delta = \frac{1}{\varepsilon^p}$ podemos reescribir esta propiedad de la siguiente forma

$$ab \leq c_\delta a^p + \delta b^q.$$

2.7. Teoría de Semigrupos

Diremos que la familia de operadores $S(t)$, $t > 0$, es un semigrupo de operadores definidas sobre X , tal que $S(t) \in \mathcal{L}(X)$ si para todo $t \geq 0$ se verifica

$$S(0) = I, \quad S(t+s) = S(t)S(s).$$

Entre los principales teoremas está el Teorema de Hille- Yosida y Lummer Phillips.

Definición 2.3 Diremos que un semigrupo $S(t)$ sobre el espacio de fase X es de contracciones si

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq 1.$$

Definición 2.4 Diremos que un semigrupo $S(t)$ sobre el espacio de fase X es exponencialmente estable si existe $\gamma > 0$, tal que

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq ce^{-\gamma t}.$$

Definición 2.5 Diremos que un semigrupo $S(t)$ definido sobre el espacio de fase X es instantáneamente diferenciable si la función $t \mapsto S(t)x \in C^1([0, T]; X)$, para todo x en el espacio de fase X .

Teorema 2.12 (Teorema de Hille-Yosida) Un operador A es generador infinitesimal de un semigrupo de contracciones definido en el espacio de fase \mathcal{H} (espacio de Hilbert) si y solo si

- A es un operador cerrado y $D(A)$ es denso en el espacio \mathcal{H}
- $\mathbb{R}_+ \subset \rho(A)$ y $\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda}$, para todo $\lambda > 0$.

Teorema 2.13 (Teorema de Lummer Phillips) Sea X un espacio de Banach y $A : D(A) \subseteq X \rightarrow X$

- Si A es disipativo e $Im(\lambda_0 I - A) = X$ para algún $\lambda_0 > 0$, entonces A es el generador infinitesimal de un C_0 -semigrupo de contracciones en X
- Si A es el Generador infinitesimal de un C_0 -semigrupo de contracciones en X , entonces $Im(\lambda I - A) = X$ para todo $\lambda > 0$ y A es disipativo. Más aún, $\forall x \in D(A), \forall x^* \in F(x)$, se tiene que $Re \langle Ax, x^* \rangle \leq 0$.

Una propiedad muy útil para usar junto al Teorema de Pruess, es que el operador resolvente, es una función Holomorfa.

Teorema 2.14 (Holomorfía del Operador Resolvente) El operador resolvente $(\lambda I - A)^{-1}$ es holomorfo sobre el conjunto $\rho(A)$.

En efecto

$$\begin{aligned} (\lambda I - A)^{-1} - (\mu I - A)^{-1} &= (\lambda I - A)^{-1} [I - (\lambda I - A)(\mu I - A)^{-1}] \\ &= (\lambda I - A)^{-1} (\mu I - A)^{-1} [\mu I - A - \lambda I + A] \\ &= -(\lambda I - A)^{-1} (\mu I - A)^{-1} (\lambda - \mu). \end{aligned}$$

Dividiendo por $\lambda - \mu$ tenemos

$$\lim_{\lambda \rightarrow \mu} \frac{(\lambda I - A)^{-1} - (\mu I - A)^{-1}}{\lambda - \mu} = -(\mu I - A)^{-2}.$$

Por tanto

$$\frac{d}{d\mu}(\mu I - A)^{-1} = -(\mu I - A)^{-2}.$$

□

En particular el operador resolvente es continuo. Luego $(i\lambda I - A)^{-1}$ lleva limitados en limitados. Por lo tanto para probar que el resolvente sea un operador limitado sobre todo el eje imaginario bastará limitar este operador para valores grandes de λ .

Estabilidad

Los resultados de estabilización de sistemas dinámicos son importantes para determinar su variación en tiempos grandes. La mayor dificultad en caracterizar el decaimiento es por la dimensión, en dimensión finita la estabilización depende exclusivamente del espectro del operador A .

Teorema 2.15 (Estabilidad en dimensión Finita) *Sea A una matriz, denotemos por $\sigma(A)$ su espectro, entonces la solución de la ecuación $Y' - AY = 0$, $Y(0) = Y_0$ decae exponencialmente, si y sólo si*

$$Re \max \sigma(A) < 0.$$

En dimensión infinita la caracterización es mas compleja, observe el siguiente resultado debido a Jurgen Pruess.

Teorema 2.16 (Teorema de Estabilidad de Pruess) *Un semigrupo de contracciones $S(t) = e^{At}$ sobre \mathcal{H} espacio de Hilbert es exponencialmente estable:*

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq Ce^{-\gamma t}, \forall t > 0 \quad \text{si y sólo si} \quad i\mathbb{R} \subset \rho(A) \text{ y } \|(i\lambda I - A)^{-1}\| \leq C, \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

2.7. TEORÍA DE SEMIGRUPOS

23

Teorema 2.17 *Sea A generador infinitesimal de un semigrupo de contracciones en \mathcal{H} .*

Si $\sup \{s > 0, [-is, is] \subset \rho(A)\} < \infty$, entonces existe una secuencia $(U_n, F_n) \in D(A) \times \mathcal{H}$ verificando $\|U_n\| = 1$, $F_n \rightarrow 0$ y además

$$i\lambda_n U_n - AU_n = F_n \rightarrow 0.$$

Prueba: Denotemos por $\mathcal{N} = \sup \{s > 0, [-is, is] \subset \rho(A)\}$, por hipótesis $\sup \mathcal{N} = \lambda < \infty$, entonces existe $\lambda_n \in \mathcal{N}$ que se aproxima al supremo λ , note que λ no pertenece al resolvente de A .

En efecto, supongamos por el contrario que $\lambda \in \rho(A)$, al ser $\rho(A)$ un conjunto abierto tendríamos que

$$\lambda + \varepsilon \in \rho(A), \quad \varepsilon > 0$$

lo que contradice la maximalidad de λ .

Así tenemos:

$$\|(i\lambda_n I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \rightarrow \infty \quad \text{pues } \lambda \notin \rho(A).$$

Por la definición de una norma, existe una secuencia $\tilde{F}_n \in \mathcal{H}$, tal que $\|\tilde{F}_n\| = 1$ y

$$\|(i\lambda_n I - A)^{-1} \tilde{F}_n\| \rightarrow \infty \quad \tilde{U}_n \in D(A),$$

$$\tilde{U}_n = (i\lambda_n I - A)^{-1} \tilde{F}_n \Rightarrow i\lambda_n \tilde{U}_n - A\tilde{U}_n = \tilde{F}_n.$$

$$\text{Haciendo } U_n = \frac{\tilde{U}_n}{\|\tilde{U}_n\|} \quad F_n = \frac{\tilde{F}_n}{\|\tilde{U}_n\|} \quad \text{verificamos } \|U_n\| = 1, F_n \rightarrow 0.$$

Y además: $i\lambda_n U_n - AU_n = F_n \rightarrow 0$ lo que prueba el resultado. \square

Teorema 2.18 *Teorema del Funcional de Liapunov.*

Sean C_0, C_1, γ números positivos. Sean $\mathcal{L}(t)$ y $E(t)$ funcionales tales que

$$C_0 E(t) \leq \mathcal{L}(t) \leq C_1 E(t) \quad \text{y} \quad \frac{d}{dt} \mathcal{L}(t) + \gamma_0 \mathcal{L}(t) \leq 0,$$

entonces

$$E(t) \leq \frac{C_1}{C_0} E(0) e^{-\gamma t}.$$

2.8. Diferenciabilidad del semigrupo.

Definición 2.6 Diremos que un semigrupo es diferenciable si para todo $x \in \mathcal{H}$, la función $t \rightarrow S(t)x$ es diferenciable para $t > 0$.

Algunos autores llaman a esta propiedad de diferenciabilidad instantánea.

A continuación enunciaremos algunas propiedades de semigrupos diferenciables.

Teorema 2.19 Si un semigrupo $S(t) = e^{At}$ es diferenciable, entonces es infinitamente diferenciable, además tenemos que $AS(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ y $S(t)$ es un semigrupo continuo en la norma uniforme $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, para $t > 0$.

Teorema 2.20 Si un semigrupo $S(t) = e^{At}$ es diferenciable, entonces es infinitamente diferenciable, en la norma uniforme $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, para $t > 0$

Teorema 2.21 Sea un semigrupo $S(t) = e^{At}$ es diferenciable para $t > 0$, si $\lambda \in \sigma(A)$ entonces $\lambda e^{\lambda t} \in \sigma(Ae^{At})$.

Aunque estas propiedades son importantes no nos dicen nada acerca de algún criterio para que el semigrupo sea diferenciable, los resultados siguientes nos darán una caracterización al respecto.

El siguiente teorema presenta una condición necesaria y suficiente, para la diferenciabilidad.

Teorema 2.22 Sea el semigrupo $S(t) = e^{At}$, tal que $\|e^{At}\| \leq Me^{wt}$ es diferenciable para $t > 0$ si y sólo si existen a, b, c tales que

$$\begin{aligned} \Sigma &= \{\lambda \in \mathbb{C}; \operatorname{Re}\lambda \geq a - b \ln(|\operatorname{Im}\lambda|) \subset \rho(A)\}; \\ \|(\lambda I - A)^{-1}\| &\leq c|\operatorname{Im}\lambda|, \quad \lambda \in \Sigma, \quad \operatorname{Re}\lambda \leq w, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Una consecuencia muy importante:

Teorema 2.23 Sea $S(t) = e^{At}$ es diferenciable para $t > 0$, tal que $\|e^{At}\| \leq Me^{wt}$ verificando para algún $\mu \in \mathbb{R}$

$$\ln(|\tau|) \|((\mu + i\tau)I - A)^{-1}\| \leq C \quad \mu \geq w,$$

entonces $S(t)$ es diferenciable para $t > 0$.

2.9. SOLUCIONES DE UNA ECUACIÓN DE VIGAS

25

Lo cual es una condición suficiente para la diferenciabilidad, este resultado es importante, pues si el semigrupo es de contracciones tenemos

$$\|e^{At}\| \leq 1, \quad w = 0, \quad M = 1.$$

Así para probar que $S(t)$ sea diferenciable, basta probar

Teorema 2.24 (Diferenciabilidad del Semigrupo) *Sea $S(t) = e^{At}$ un semigrupo de contracciones sobre \mathcal{H} espacio de Hilbert, si*

$$i\mathbb{R} \subset \rho(A) \quad y \quad \ln(|\lambda|)\|(i\lambda I - A)^{-1}\| \leq C, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Entonces $S(t)$ es diferenciable para $t > 0$.

Condición suficiente para la diferenciabilidad.

Observe que para valores de $|\tau| \geq 1$ vale

$$\begin{aligned} \ln(|\tau|^a) &\leq |\tau|^a, \\ \text{lo que implica que } \ln(|\tau|) &\leq \frac{1}{a}|\tau|^a, \quad \forall \tau \geq 1. \end{aligned}$$

Así procedemos a probar un resultado más simple y suficiente para la diferenciabilidad.

Corolario 2.1 *Sea $S(t) = e^{At}$ un semigrupo de contracciones sobre \mathcal{H} espacio de Hilbert, si*

$$i\mathbb{R} \subset \rho(A) \quad y \quad |\tau|^a\|(i\tau I - A)^{-1}\| \leq C, \quad \forall \tau \in \mathbb{R}, \quad a > 0,$$

entonces $S(t)$ es diferenciable para $t > 0$.

2.9. Soluciones de una Ecuación de Vigas

A continuación la soluciones débiles y fuertes de la ecuación de vigas de Eurler Bernoulli

$$(\alpha(x)u_{xx})_{xx} + \beta(x)u = f. \tag{2.1}$$

Satisfaciendo las condiciones de contorno

$$u(0) = u(\ell) = u_x(0) = u_x(\ell) = 0. \quad (2.2)$$

Tenemos el siguiente Teorema

Teorema 2.25 Sean $\alpha, \beta \in L^\infty(0, \ell)$, verificando $0 < \alpha_0 \leq \alpha(x)$ y $0 < \beta_0 \leq \beta(x)$ casi siempre en $]0, \ell[$. Entonces para todo elemento $f \in H^{-2}(0, \ell)$ existe una única solución débil de (2.1) verificando

$$\int_0^\ell \alpha(x) u_{xx} \varphi_{xx} dx + \int_0^\ell \beta(x) u \varphi dx = \langle f, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in H_0^2(0, \ell),$$

verificando la ecuación de contorno (2.2).

PRUEBA.- Para mostrar este teorema usaremos el Lema de Lax Milgran, o el teorema de la Representación de Riesz, para esto consideraremos el espacio

$$V = H_0^2(0, \ell), \quad \|w\|_V^2 = \int_0^\ell |w_{xx}|^2 + |w_x|^2 + |w|^2 dx,$$

y la bilineal o producto interno

$$a(u, v) = \int_0^\ell \alpha(x) u_{xx} v_{xx} dx + \int_0^\ell \beta(x) uv dx.$$

Note que $a(\cdot, \cdot)$ es una bilineal continua, simétrica y coercitiva, pues

$$|a(w, v)| \leq c \|w\|_V \|v\|_V,$$

$$a(w, v) = a(v, w),$$

$$a(v, v) \geq c \|v\|_V^2.$$

Respectivamente, el Lema de Lax Milgran garantiza que existe un único elemento $u \in H_0^2(0, \ell)$ verificando

$$a(u, v) = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in V = H_0^2(0, \ell),$$

de donde sigue el resultado.

Definición 2.7 Diremos que una solución débil es fuerte cuando esta pertenece al dominio del operador diferencial.

2.9. SOLUCIONES DE UNA ECUACIÓN DE VIGAS

En este caso para probar la existencia de la solución fuerte, debemos exigir que las funciones α y β sean de clase C^2 y que $f \in L^2(0, \ell)$.

Teorema 2.26 (Soluciones fuertes) Sean $\alpha, \beta \in L^\infty(0, \ell) \cap C^2(0, \ell)$, verificando $0 < \alpha_0 \leq \alpha(x)$ y $0 < \beta_0 \leq \beta(x)$ casi siempre en $]0, \ell[$. Entonces para todo elemento $f \in L^2(0, \ell)$ existe una única solución fuerte $u \in H^4(0, \ell)$ verificando (2.1) y la condición de contorno (2.2).

PRUEBA.- Claramente tenemos que se verifican las condiciones del Teorema 2.25 luego existe una solución verificando

$$\int_0^\ell \alpha(x)u_{xx}\varphi_{xx} dx + \int_0^\ell \beta(x)u\varphi dx = \int_0^\ell f(x)\varphi dx,$$

considerando u como distribución y $\varphi \in C_0^\infty(0, \ell)$ tenemos que

$$\int_0^\ell [\alpha(x)u_{xx}]_{xx}\varphi dx + \int_0^\ell \beta(x)u\varphi dx = \int_0^\ell f(x)\varphi dx,$$

de donde

$$\int_0^\ell ([\alpha(x)u_{xx}]_{xx} + \beta(x)u - f) \varphi dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(0, \ell).$$

Por lo tanto distribucionalmente tenemos

$$[\alpha(x)u_{xx}]_{xx} + \beta(x)u - f = 0 \quad \Rightarrow \quad [\alpha(x)u_{xx}]_{xx} = -\beta(x)u + f \quad \in L^2(0, \ell) \text{ es un autovalor de } A.$$

Así concluimos que

$$\alpha(x)u_{xx} = G \in H^2(0, \ell)$$

De donde sigue que $u \in H^4(0, \ell)$

□

Capítulo 3

El modelo matemático

En este capítulo estudiamos la ecuación de viga de Euler-Bernoulli, formada por tres componentes. Una de ellas es del tipo elástico, sin ningún mecanismo disipativo, la segunda componente posee un mecanismo friccional y la tercera componente es formada por un material viscoso del tipo de Kelvin-Voight. Por ser materiales distintos con diferentes coeficientes elásticos el modelo resultante es una ecuación con coeficientes discontinuos de primera especie, este modelo es también conocido como problema de transmisión. Estos problemas han sido estudiados principalmente por su comportamiento asintótico, existen muchos trabajos donde se muestra que la solución decae exponencialmente para cero.

Comenzaremos nuestro estudio considerando la ecuación general de la viga, usando la Teoría de Euler Bernoulli.

3.1. Deducción Física

Los materiales visco elásticos son muy utilizados en la construcción civil, sobre todo en la elaboración de aisladores sísmicos, estos materiales poseen leyes constitutivas donde la relación de tensión σ deformación ε es dada de la siguiente forma

$$\sigma = \alpha_0 \varepsilon + \alpha_1 \dot{\varepsilon}_t$$

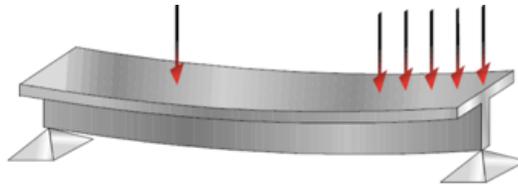
Quiere decir que la tensión depende por un lado de la ley Hooke: (tensión proporcional a la deformación) pero también de la velocidad con que se deforma el cuerpo, donde α_0, α_1

son los módulos de Young respectivos.

En este proyecto estamos interesados en estudiar los modelos de vibraciones de estos materiales, los cuales son todos tridimensionales por tanto sus deformaciones son vectores de tres dimensiones, pero los podemos subdividir en dos tipos especiales de acuerdo a sus proporciones.

Cuando existen dos dimensiones mucho mayores que la tercera, entonces llamamos al cuerpo de placa, ejemplos de placas es la lámina de un tambor, la superficie de un barco, o el ala de un avión; el otro tipo es cuando una de las dimensiones es mucho mayor que las otras dos, como los puentes, en este caso llamados al cuerpo de viga.

En este trabajo nos centraremos en el estudio de vigas visco elásticas de Euler Bernoulli.



En la figura previa tenemos una viga afectada por una fuerza distribuida, haciendo que se deforme, tal deformación es la que queremos calcular, si realizamos un corte transversal a la viga observaremos el eje neutro, el que proporcionará la posición de toda la viga, tal como se muestra en la siguiente imagen.



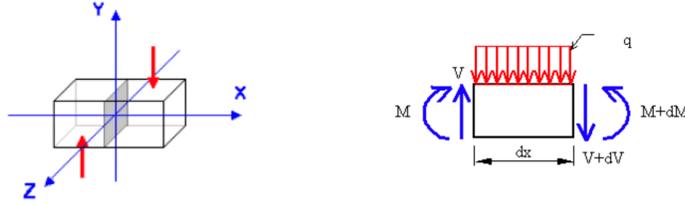
En la Figura de la izquierda, se muestra el eje neutro y la viga en su posición inicial de reposo, mientras que la figura de la derecha, muestra la posición de equilibrio.

Nuestro interés es encontrar una función cuyo gráfico defina la posición de equilibrio de la viga.

Observe las fuerzas cortantes (esfuerzo interno resultante de las tensiones paralelas a la sección transversal de una viga produciendo oscilaciones).

3.1. DEDUCCIÓN FÍSICA

31



Analizando los momentos en el diagrama de cuerpo libre tenemos

$$(M + dM) - M - (V + dV)dx - qdx\left(\frac{dx}{2}\right) = 0.$$

En donde V representa la fuerza cortante, q la fuerza distribuida que actúa sobre la viga y dx es la longitud, observe que estamos calculando los momentos en el extremo izquierdo de la viga y por tanto sólo aparecen las fuerzas cortantes hacia abajo. Despreciando los productos entre diferenciales obtenemos

$$dM - Vdx = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dM}{dx} = V, \quad (3.1)$$

cuando toda la viga es homogéneamente viscosa, el momento flector es dado por

$$M = \alpha I u_{xx} + \alpha_0 u_{xxt}.$$

Donde α es el modulo de Young, y α_0 es la constante viscosa, I es el momento de inercia de la sección transversal, $u(x, t)$ la deformación transversal del punto x del eje neutro de la viga en el instante t . Recordemos la fuerza cortante dada por V , según (3.1) así

$$V = \frac{d}{dx} M,$$

usando la segunda ley de Newton para las oscilaciones encontramos que

$$\rho u_{tt} = -\frac{d}{dx} V + F.$$

Así tendremos que la ecuación de Vigas para $F = 0$ es dada por

$$\rho u_{tt} + \alpha u_{xxxx} + \alpha_0 u_{xxxxt} = 0. \quad (3.2)$$

Cuando existen fuerzas externas distribuidas F actuando sobre la viga, la ecuación resulta

$$\rho u_{tt} + \alpha u_{xxxx} + \alpha_0 u_{xxxxt} = F. \quad (3.3)$$

Otro punto interesante en el estudio de las oscilaciones de vigas es cuando el material es parcialmente viscoso, esto es cuando el material posee una componente que es simplemente elástica, sin ningún tipo de mecanismo disipativo; en este sentido tenemos los trabajos de [3, 6], donde los autores prueban que el sistema es exponencialmente estable.

En la literatura que trata sobre los problemas localizados son considerados apenas dos tipos de materiales: uno viscoso y otro simplemente elástico; en este trabajo consideraremos una componente adicional que es aquella producida por fuerzas externas como la fuerza de fricción, el propósito es mostrar como esta tercera componente modifica (o no) el comportamiento de la viga, esto es, saber si el orden de las componentes es importante o no en las propiedades asintóticas, o si existe un orden donde la estabilización sea más rápida.

3.2. El problema de transmisión

Consideraremos una viga configurada sobre el intervalo $]0, \ell[$, cuyas componentes se encuentran distribuidas sobre los subintervalos

$$\tilde{I} =]0, \ell_0[\cup]\ell_0, \ell_1[\cup]\ell_1, \ell[.$$

Observe que $\tilde{I} =]0, \ell[\setminus \{\ell_0, \ell_1\}$. Inicialmente consideramos la parte elástica que denotaremos por I_E concentrada sobre el intervalo $]0, \ell_0[$, la componente con disipación friccional se localiza sobre el intervalo $] \ell_0, \ell_1[$ denotado como I_F y finalmente la componente viscosa concentrada en $] \ell_1, \ell[$ que la denotaremos como I_V .

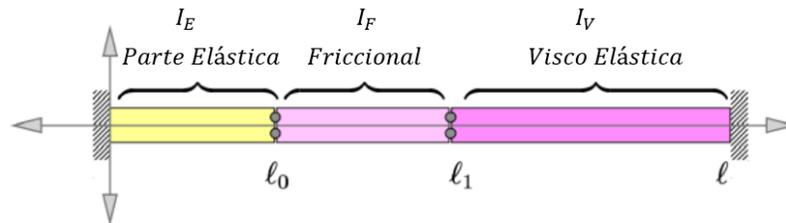


Figura 3.1: Modelo I

3.2. EL PROBLEMA DE TRANSMISIÓN

33

Aquí los tamaños de cada subintervalo pueden ser arbitrarios, sólo nos preocupamos por sus posiciones, los llamamos modelo I, II y III cuando la componente Friccional, componente elástica y componente visco elástica están en el medio de la viga, respectivamente.

Note que en estos casos las leyes constitutivas poseen discontinuidades, α y α_0 en $x = \ell_0$ y $x = \ell_1$ y que \tilde{I} no es un conjunto conexo. Así en este caso el momento flector es dado por

$$M = \alpha u_{xx} + \alpha_0 u_{xxt}.$$

Y el mecanismo friccional lo vamos a considerar como una fuerza externa $F = -\alpha_1 u_t$. Substituyendo en (3.3) tenemos

$$\rho u_{tt} + (\alpha u_{xx})_{xx} + (\alpha_0 u_{xxt})_{xx} + \alpha_1 u_t = 0, \quad \text{en } \tilde{I} \times \mathbb{R}_0^+. \quad (3.4)$$

Los mecanismos localizados producen leyes constitutivas discontinuas para los coeficientes en $x = \ell_0$ y $x = \ell_1$, los que se comportan de la siguiente forma

$$\rho(x) = \begin{cases} \rho_1, & x \in (0, l_0) \\ \rho_2, & x \in (l_0, l_1) \\ \rho_3, & x \in (l_1, l) \end{cases} \quad \alpha(x) = \begin{cases} a_1, & x \in (0, l_0) \\ a_2, & x \in (l_0, l_1) \\ a_3, & x \in (l_1, l) \end{cases}$$

$$\alpha_0(x) = \begin{cases} 0, & x \in (0, l_0) \\ 0, & x \in (l_0, l_1) \\ \kappa_0, & x \in (l_1, l) \end{cases} \quad \alpha_1(x) = \begin{cases} 0, & x \in (0, l_0) \\ b, & x \in (l_0, l_1) \\ 0, & x \in (l_1, l) \end{cases}$$

donde ρ_i, a_i, b y κ_0 son constantes positivas.

Consideraremos las siguientes condiciones de contorno

$$u(0, t) = u(\ell, t) = u_x(0, t) = u_x(\ell, t) = 0, \quad (3.5)$$

y las condiciones iniciales

$$u_t(x, 0) = u_1(x), \quad u(x, 0) = u_0(x). \quad (3.6)$$

El modelo debe satisfacer las siguientes condiciones de transmisión

$$u(\ell_i^-) = u(\ell_i^+) \qquad u_x(\ell_i^-) = u_x(\ell_i^+) \qquad (3.7)$$

$$M(\ell_i^-) = M(\ell_i^+) \qquad M_x(\ell_i^-) = M_x(\ell_i^+). \qquad (3.8)$$

Para $i = 0, 1$, donde $M = \alpha u_{xx} + \alpha_0 v_{xx}$.

Capítulo 4

Buena colocación del Problema

A continuación estudiaremos la buena colocación de nuestro modelo

$$\rho u_{tt} + (\alpha u_{xx})_{xx} + (\alpha_0 u_{xxt})_{xx} + \alpha_1 u_t = 0, \quad \text{en } \tilde{I} \times \mathbb{R}_0^+. \quad (4.1)$$

Esto es probaremos existencia, unicidad de $u(x, t)$ y dependencia continua en relación a los datos del modelo, para esto usaremos técnicas de la teoría de semigrupo que pueden ser encontradas en los libros [6, 8] así como también en el capítulo 7 del libro de Brezis [2]. Para un estudio mas avanzado sobre las propiedades de la Teoría de semigrupos sugerimos el libro de K.Engel y R. Nagel [14].

Los mecanismos localizados producen leyes constitutivas discontinuas para los coeficientes en los puntos $x = \ell_0$ y $x = \ell_1$. Los que se comportan de la siguiente forma

$$\rho(x) = \begin{cases} \rho_1, & x \in (0, l_0) \\ \rho_2, & x \in (l_0, l_1) \\ \rho_3, & x \in (l_1, l) \end{cases} \quad \alpha(x) = \begin{cases} a_1, & x \in (0, l_0) \\ a_2, & x \in (l_0, l_1) \\ a_3, & x \in (l_1, l) \end{cases}$$

$$\alpha_0(x) = \begin{cases} 0, & x \in (0, l_0) \\ 0, & x \in (l_0, l_1) \\ \kappa_0, & x \in (l_1, l) \end{cases} \quad \alpha_1(x) = \begin{cases} b, & x \in (0, l_0) \\ b, & x \in (l_0, l_1) \\ 0, & x \in (l_1, l) \end{cases}$$

donde , ρ_i, a_i, b y κ_0 son constantes positivas.

Consideraremos las siguientes condiciones de contorno

$$u(0, t) = u(\ell, t) = u_x(0, t) = u_x(\ell, t) = 0, \quad (4.2)$$

y las condiciones iniciales

$$u_t(x, 0) = u_1(x), \quad u(x, 0) = u_0(x). \quad (4.3)$$

El modelo debe satisfacer las siguientes condiciones de transmisión

$$u(\ell_i^-) = u(\ell_i^+) \quad u_x(\ell_i^-) = u_x(\ell_i^+) \quad (4.4)$$

$$M(\ell_i^-) = M(\ell_i^+) \quad M_x(\ell_i^-) = M_x(\ell_i^+). \quad (4.5)$$

Para $i = 0, 1$, donde $M = \alpha u_{xx} + \alpha_0 v_{xx}$.

4.1. Método de Semigrupos

El primer punto para usar el método de semigrupos es determinar el espacio de fase al cual pertenecerá la solución del modelo, el criterio que usaremos para escoger el espacio, está dado por el mayor espacio donde esté bien definida la energía del sistema.

Para esto multiplicamos la ecuación (4.1) por \bar{u}_t , así tenemos

$$\begin{aligned} \rho u_{tt} \bar{u}_t + \alpha (u_{xx})_{xx} \bar{u}_t + (\alpha_0 u_{xxt})_{xx} \bar{u}_t + \alpha_1 u_t \bar{u}_t &= 0, \\ \frac{\rho}{2} \frac{d}{dt} |u_t|^2 + (\alpha u_{xx})_{xx} \bar{u}_t + (\alpha_0 u_{xxt})_{xx} \bar{u}_t + \alpha_1 |u_t|^2 &= 0, \end{aligned}$$

integrando por partes tenemos

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^\ell \rho |u_t|^2 dx + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^\ell \alpha |u_{xx}|^2 dx + \int_0^\ell \alpha_0 |u_{xxt}|^2 dx + \int_0^\ell \alpha_1 |u_t|^2 dx = 0.$$

De donde sigue

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^\ell \rho |u_t|^2 + \alpha |u_{xx}|^2 dx = - \int_0^\ell \alpha_0 |u_{xxt}|^2 + \alpha_1 |u_t|^2 dx \leq 0. \quad (4.6)$$

Tomamos la energía

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^\ell \rho |u_t|^2 + \alpha |u_{xx}|^2 dx, \quad (4.7)$$

y la derivada de la energía

$$\frac{d}{dt} E(t) = - \int_0^\ell \alpha_0 |u_{xxt}|^2 + \alpha_1 |u_t|^2 dx \leq 0. \quad (4.8)$$

Lo que implica la disipación de la energía en el modelo.

Espacio de Fase \mathcal{H} :

Para reducir a primer orden la ecuación hacemos $u_t = v$, así $U = (u, v)^t$.

Para que la energía esté bien definida el espacio de fase debe verificar

$$u \in H_0^2(0, \ell), \quad v \in L^2(0, \ell).$$

De donde definimos el espacio de fase

$$\mathcal{H} = H_0^2(0, \ell) \times L^2(0, \ell). \quad (4.9)$$

Definimos como la norma de este espacio

$$\|U\|_{\mathcal{H}}^2 = \int_0^\ell \rho |u_t|^2 + \alpha |u_{xx}|^2 dx. \quad (4.10)$$

El Generador Infinitesimal

Usando el vector $U = (u, v)^t$ la ecuación puede escribirse como

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_t \\ u_{tt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ -(\alpha u_{xx})_{xx} - (\alpha_0 v_{xx})_{xx} - \alpha_1 v \end{pmatrix},$$

de donde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -(\alpha \partial_x^2)_{xx} & -(\alpha_0 \partial_x^2)_{xx} - \alpha_1 \end{pmatrix}.$$

Note que

$$A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ -(\alpha u_{xx})_{xx} - (\alpha_0 v_{xx})_{xx} - \alpha_1 v \end{pmatrix}.$$

Una vez fijado el espacio de fase, calculamos el dominio del operador A ,

$$D(A) = \left\{ U \in \mathcal{H} : AU = \begin{pmatrix} v \\ -(\alpha u_{xx})_{xx} - (\alpha_0 v_{xx})_{xx} - \alpha_1 v \end{pmatrix} \in \mathcal{H} \right\},$$

lo que implica

$$D(A) = \left\{ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \mathcal{H} : v \in H_0^2(0, \ell), \quad \alpha u_{xx} + \alpha_0 v_{xx} \in H^2(0, \ell) \right\}.$$

Teorema 4.1 *El operador A es un Generador Infinitesimal de un Semigrupo de Contracciones.*

Demostración.- Probaremos que A es disipativo y $0 \in \rho(A)$. De hecho

$$(AU, U)_{\mathcal{H}} = \left(\begin{pmatrix} v \\ -(\alpha u_{xx})_{xx} - (\alpha_0 v_{xx})_{xx} - \alpha_1 v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right)_{\mathcal{H}},$$

usando la definición de producto interno tenemos

$$\operatorname{Re} (AU, U)_{\mathcal{H}} = - \int_0^{\ell} \alpha_0 |v_{xx}|^2 + \alpha_1 |v|^2 dx.$$

Por tanto el operador es disipativo.

Finalmente probaremos que $0 \in \rho(A)$, esto es que para todo $F \in \mathcal{H}$ existe un único $U \in D(A)$ tal que

$$AU = F. \tag{4.11}$$

En términos de sus componentes tenemos

$$\begin{aligned} v &= f, \\ (\alpha u_{xx})_{xx} - (\alpha_0 v_{xx})_{xx} + \alpha_1 v &= g. \end{aligned}$$

Resulta que el sistema es equivalente a la ecuación:

$$(\alpha u_{xx})_{xx} = (\alpha_0 f_{xx})_{xx} - \alpha_1 f + g,$$

verificando las condiciones de transmisión y de contorno

$$u(0, t) = u(\ell, t) = u_x(0, t) = u_x(\ell, t) = 0, \tag{4.12}$$

$$u_t(x, 0) = u_1(x), \quad u(x, 0) = u_0(x). \tag{4.13}$$

4.1. MÉTODO DE SEMIGRUPOS

39

Y las condiciones de transmisión

$$u(\ell_i^-) = u(\ell_i^+) \quad u_x(\ell_i^-) = u_x(\ell_i^+), \quad (4.14)$$

$$M(\ell_i^-) = M(\ell_i^+) \quad M_x(\ell_i^-) = M_x(\ell_i^+). \quad (4.15)$$

Definimos la bilineal

$$a(u, w) = \int_0^\ell \alpha u_{xx} w_{xx} dx \quad \forall w \in H_0^2(0, \ell),$$

que verifica ser continua, simétrica y coercitiva. Tomando

$$T(w) = \int_0^\ell (-(\alpha_0 f_{xx})_{xx} - \alpha_1 f - g) w dx,$$

por el Lema de Lax-Milgran tenemos que existe un único $u \in H_0^2(0, \ell)$ tal que

$$a(u, w) = T(w) \quad \forall w \in H_0^2(0, \ell).$$

Esto es u verifica

$$\int_0^\ell \alpha u_{xx} w_{xx} dx = \int_0^\ell (-(\alpha_0 f_{xx})_{xx} - \alpha_1 f - g) w dx \quad \forall w \in H_0^2(0, \ell).$$

Distribucionalmente tenemos

$$\int_0^\ell (\alpha u_{xx})_{xx} w dx = \int_0^\ell (-(\alpha_0 f_{xx})_{xx} - \alpha_1 f - g) w dx \quad \forall w \in H_0^2(0, \ell)$$

Como distribuciones tenemos

$$(\alpha u_{xx})_{xx} = -(\alpha_0 f_{xx})_{xx} - \alpha_1 f - g,$$

tomando $v = f$, verificamos que $v \in H_0^2(0, \ell)$. Además

$$\alpha u_{xx} + \alpha_0 v_{xx} = -\alpha_1 f - g \in L^2(0, \ell).$$

Por tanto el vector $U = (u, v)^t \in D(A)$, lo que completa la prueba, por tanto A es generador infinitesimal de un semigrupo de contracciones.

En estas condiciones tenemos

Teorema 4.2 *Sobre las notaciones anteriores, para $(u_0, u_1) \in \mathcal{H}$ existe una única solución débil del problema (4.1)–(4.5) verificando*

$$(u, u_t) \in C([0, T]; \mathcal{H}).$$

En cambio para $(u_0, u_1) \in D(A)$ existe una única solución fuerte del problema (4.1)–(4.5) verificando

$$(u, u_t) \in C^1([0, T]; \mathcal{H}) \cap C([0, T]; D(A)).$$

Prueba.- Recordando la definición 2.7 la prueba es inmediata por los Teoremas 2.25 y 2.26.

Terminamos este capítulo mostrando el decaimiento exponencial del sistema cuando el mecanismo disipativo es efectivo sobre todo el dominio.

4.2. Estabilidad Exponencial

4.2.1. Método de la Energía

En esta sección consideraremos que los mecanismos disipativos son efectivos sobre todo el dominio, esto es

$$\alpha_0(x) \geq a_0 > 0, \quad \alpha_1(x) \geq a_1 > 0, \quad \forall x \in [0, \ell].$$

El siguiente Teorema es mostrado usando el método de la energía, muy usado en los años 90, lo haremos de manera didáctica, y posteriormente utilizaremos la teoría de semigrupos, cuando la disipación es localizada. Este método puede ser estudiado más a fondo en los artículos de Mitsuhiro Nakao [7] y de Enrique Zuazua [11].

Teorema 4.3 (Decaimiento exponencial) *Supongamos que $\alpha_1(x) > 0$ para todo $x \in [0, \ell]$. Entonces existen constantes positivas c_1, C_0, γ tales que*

$$E(t) \leq \frac{c_1}{C_0} E(0) e^{-\gamma t}.$$

4.2. ESTABILIDAD EXPONENCIAL

41

Demostración.- Utilizaremos técnicas multiplicativas para conseguir este resultado. Así multiplicando la ecuación (4.1) por \bar{u}_t tenemos

$$\frac{d}{dt}E(t) = - \int_0^\ell (\alpha_0 |u_{xxt}|^2 + \alpha_1 |u_t|^2) dx \leq 0.$$

Para mostrar el decaimiento exponencial probaremos que existe $\mathcal{L}(t)$ verificando

$$C_0 E(t) \leq \mathcal{L}(t) \leq C_1 E(t) \quad y \quad \frac{d}{dt} \mathcal{L}(t) + \gamma_0 \mathcal{L}(t) \leq 0,$$

lo que probará el decaimiento exponencial de $E(t)$.

Multiplicamos por \bar{u} la ecuación (4.1)

$$\rho u_{tt} \bar{u} + (\alpha u_{xx})_{xx} \bar{u} + (\alpha_0 u_{xxt})_{xx} + \alpha_1 u_t \bar{u} = 0.$$

Integrando de $]0, \ell[$

$$\frac{d}{dt} \int_0^\ell \left(\rho u_t \bar{u} + \frac{\alpha_0}{2} |u_{xx}|^2 + \frac{\alpha_1}{2} |u|^2 \right) dx - \int_0^\ell \rho |u_t|^2 dx + \int_0^\ell \alpha |u_{xx}|^2 dx = 0,$$

de donde aparece nuestro término buscado pero con otro extra

$$\frac{d}{dt} \int_0^\ell \left(\rho u_t \bar{u} + \frac{\alpha_0}{2} |u_{xx}|^2 + \frac{\alpha_1}{2} |u|^2 \right) dx = \int_0^\ell \rho |u_t|^2 dx - \int_0^\ell \alpha |u_{xx}|^2 dx.$$

Definimos a seguir

$$\mathcal{L}(t) := N E(t) + \int_0^\ell \left(\rho u_t \bar{u} + \frac{\alpha_0}{2} |u_{xx}|^2 + \frac{\alpha_1}{2} |u|^2 \right) dx.$$

De manera que con N grande y sabiendo que $\frac{d}{dt} E(t) < 0$, al multiplicar por N la derivada aumentará negativamente y absorberá los términos positivos que aparecen

$$\frac{d}{dt} \mathcal{L}(t) = N \left(- \int_0^\ell (\alpha_0 |u_{xxt}|^2 + \alpha_1 |u_t|^2) dx \right) + \int_0^\ell \rho |u_t|^2 dx - \int_0^\ell \alpha |u_{xx}|^2 dx,$$

$$\frac{d}{dt} \mathcal{L}(t) = - \int_0^\ell (N \alpha_1 - \rho) |u_t|^2 dx - \int_0^\ell N \alpha_0 |u_{xxt}|^2 dx - \int_0^\ell \alpha |u_{xx}|^2 dx.$$

Para N grande tenemos $-(N\alpha_1 - \rho) < 0$ y $-\int_0^\ell N\alpha_0|u_{xxt}|^2 dx < 0$,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) &\leq -CE(t) - \int_0^\ell N\alpha_0|u_{xxt}|^2 dx, \\ &\leq -CE(t). \end{aligned}$$

Usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz y Poincaré tenemos

$$\begin{aligned} \left| \int_0^\ell u_t \bar{u} + \frac{\alpha_0}{2}|u_{xx}|^2 + \frac{\alpha_1}{2}|u|^2 dx \right| &\leq \left(\int_0^\ell |u|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_0^\ell |u_t|^2 dx \right)^{1/2} + \int_0^\ell \frac{\alpha_0}{2}|u_{xx}|^2 + \frac{\alpha_1}{2}|u|^2 dx, \\ &\leq C \left(\int_0^\ell |u_x|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_0^\ell |u_t|^2 dx \right)^{1/2} + \int_0^\ell \frac{\alpha_0}{2}|u_{xx}|^2 + C|u_x|^2 dx. \end{aligned}$$

Como $u_x(0) = 0$ por la desigualdad de Poincaré y de Holder tenemos

$$\begin{aligned} \left| \int_0^\ell u_t \bar{u} + \frac{\alpha_0}{2}|u_{xx}|^2 + \frac{\alpha_1}{2}|u|^2 dx \right| &\leq c \int_0^\ell |u_t|^2 + |u_{xx}|^2 dx, \\ &\leq CE(t). \end{aligned}$$

De donde

$$-CE(t) \leq \int_0^\ell u_t \bar{u} + \frac{\alpha_0}{2}|u_{xx}|^2 + \frac{\alpha_1}{2}|u|^2 dx \leq CE(t).$$

Sumando $NE(t)$ a la desigualdad

$$(N - C_0)E(t) \leq NE(t) + \int_0^\ell u_t \bar{u} + \frac{\alpha_0}{2}|u_{xx}|^2 + \frac{\alpha_1}{2}|u|^2 dx \leq (N + C_0)E(t),$$

así

$$(N - C_0)E(t) \leq \mathcal{L}(t) \leq (N + C_0)E(t).$$

Multiplicando por $\frac{-C}{N + C_0}$

$$-CE(t) \leq \frac{-C}{N + C_0}\mathcal{L}(t).$$

De lo obtenido anteriormente y como $\frac{d}{dt}E(t) \leq 0$

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) \leq -CE(t) \leq \frac{-C}{N + C_0}\mathcal{L}(t),$$

así \mathcal{L} decae exponencialmente, es decir

$$\mathcal{L}(t) \leq \mathcal{L}(0)e^{-\gamma t},$$

de donde

$$E(t) \leq \frac{N + C_0}{N - C_0} E(0)e^{-\gamma_0 t}, \quad \gamma_0 = \frac{C}{N + C_0},$$

lo que prueba el decaimiento exponencial de la energía.

Observe que asumimos la existencia de disipación sobre toda la viga, el caso de la disipación localizada es mas complejo, para este caso es mejor abordar el problema usando el Teorema de Pruess.

Estabilidad Exponencial

Teorema 4.4 *Teorema de Estabilidad de Pruess.*

Un semigrupo de contracciones $S(t) = e^{At}$ sobre \mathcal{H} espacio de Hilbert es exponencialmente estable, es decir $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq Ce^{-\gamma t}$, $\forall t > 0$ sí y sólo si

$$i\mathbb{R} \subset \rho(A) \quad \text{y} \quad \|(i\lambda I - A)^{-1}\| \leq C, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Este resultado lo abordaremos al final, observaremos de tal manera que bajo ciertas circunstancias la estabilidad exponencial se volverá una consecuencia de la diferenciabilidad.

Capítulo 5

Diferenciabilidad

Nuestra viga es compuesta por tres tipos de materiales diferentes, asumiremos que la viga presenta la siguiente distribución

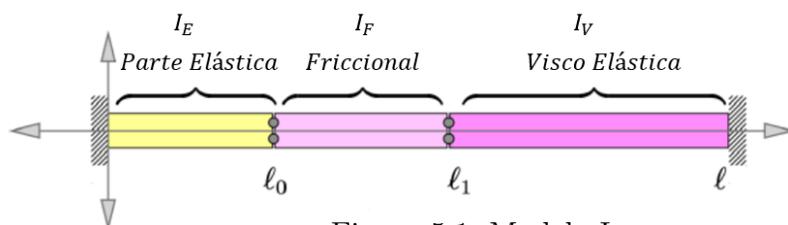


Figura 5.1: Modelo I

La diferenciabilidad de un semigrupo es una propiedad importante, tanto como la analiticidad, la principal diferencia es que las funciones analíticas pueden desarrollarse en series de potencias, en cambio la diferenciabilidad del semigrupo no implica que exista una serie de potencias convergentes que pueda representar el semigrupo en algún intervalo. La analogía es que tanto los semigrupos analíticos como los semigrupos diferenciales son infinitamente diferenciables para todo $t > 0$, esto significa que las soluciones del correspondiente modelo son infinitamente diferenciables para $t > 0$ independientemente de que los datos iniciales sean regulares.

Recordemos que todo semigrupo analítico es diferenciable, el recíproco de esta propiedad es falso, más aún semigrupos diferenciales no son analíticos en general, no existen muchos ejemplos de semigrupos diferenciales en la literatura matemática. Mostraremos

que el modelo de vigas con disipación visco elástica localizada tipo Kelvin-Voight, define un semigrupo diferenciable, lo cual será un resultado inédito.

El modelo

Como los coeficientes elásticos son discontinuos en los puntos ℓ_0, ℓ_1 sobre el intervalo $]0, \ell[$, debemos desarrollar el modelo sobre el conjunto

$$\tilde{I} =]0, \ell_0[\cup]\ell_0, \ell_1[\cup]\ell_1, \ell[.$$

La ecuación del movimiento es dada por

$$\rho u_{tt} + (\alpha u_{xx})_{xx} + (\alpha_0 u_{xxt})_{xx} + \alpha_1 u_t = 0, \quad \text{en } \tilde{I} \times \mathbb{R}_0^+. \quad (5.1)$$

Con condiciones de contorno

$$u(0, t) = u(\ell, t) = u_x(0, t) = u_x(\ell, t) = 0, \quad (5.2)$$

y las condiciones iniciales

$$u_t(x, 0) = u_1(x), \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad (5.3)$$

El modelo debe satisfacer las siguientes condiciones de transmisión

$$u(\ell_i^-) = u(\ell_i^+), \quad u_x(\ell_i^-) = u_x(\ell_i^+), \quad (5.4)$$

$$M(\ell_i^-) = M(\ell_i^+), \quad M_x(\ell_i^-) = M_x(\ell_i^+). \quad (5.5)$$

Para $i = 0, 1$, donde $M = \alpha u_{xx} + \alpha_0 v_{xx}$.

Asumiremos que

$$\begin{aligned} \alpha(x) \geq \alpha > 0, \quad \forall x \in [0, \ell], \quad \alpha_0 \geq \alpha_1 > 0, \quad x \in [\ell_1, \ell], \quad \alpha_0(x) = 0, \quad \forall x \notin [\ell_0, \ell_1], \\ \alpha_1 \geq \alpha_2 > 0, \quad x \in [\ell_1, \ell], \quad \alpha_1(x) = 0, \quad \forall x \notin [\ell_0, \ell_1]. \end{aligned}$$

La energía asociada al modelo es dada por

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^\ell \rho |u_t|^2 + \alpha |u_{xx}|^2 dx. \quad (5.6)$$

Resultado Principal

En este capítulo probaremos que el semigrupo asociado al modelo 5.1 es diferenciable en el sentido de la definición 2.6, para esto usaremos un corolario del siguiente teorema

Teorema 5.1 (Diferenciabilidad del Semigrupo) *Sea $S(t) = e^{At}$ un semigrupo de contracciones sobre \mathcal{H} espacio de Hilbert, si*

$$i\mathbb{R} \subset \rho(A) \text{ y } \ln(|\lambda|)\|(i\lambda I - A)^{-1}\| \leq C, \quad \forall |\lambda| > \varepsilon.$$

Entonces $S(t)$ es diferenciable para $t > 0$.

Usando la propiedad

$$\ln(|\tau|) \leq C|\tau|^\gamma, \quad \forall |\tau| > 1,$$

tenemos el siguiente corolario

Corolario 5.1 *Sea $S(t) = e^{At}$ un semigrupo de contracciones sobre \mathcal{H} espacio de Hilbert, si $i\mathbb{R} \subset \rho(A)$ y*

$$|\lambda|^\gamma \|(i\lambda I - A)^{-1}\| \leq C, \quad \forall |\lambda| > \varepsilon,$$

Entonces $S(t)$ es diferenciable para $t > 0$.

Recordemos el espacio de fase

$$\mathcal{H} = H_0^2(0, \ell) \times L^2(0, \ell). \tag{5.7}$$

El Generador Infinitesimal

$$A = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -(\alpha \partial_x^2)_{xx} & -(\alpha_0 \partial_x^2)_{xx} - \alpha_1 \end{pmatrix},$$

su dominio

$$D(A) = \left\{ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \mathcal{H} : v \in H_0^2(0, \ell), \quad \alpha u_{xx} + \alpha_0 v_{xx} \in H^2(0, \ell) \right\},$$

la norma del espacio de fase

$$\|U\|_{\mathcal{H}}^2 = \int_0^\ell \rho |u_t|^2 + \alpha |u_{xx}|^2 dx, \quad (5.8)$$

recordemos que

$$Re(AU, U)_{\mathcal{H}} = - \int_0^\ell \alpha_0 |v_{xx}|^2 + \alpha_1 |v|^2 dx \leq 0. \quad (5.9)$$

Esta condición es muy importante para obtener las hipótesis del corolario 5.1.

La Ecuación resolvente en términos de sus componentes es dada por

$$i\lambda u - v = f \quad \text{en }]0, \ell[, \quad (5.10)$$

$$i\lambda v + \alpha u_{xxxx} + \alpha_0 v_{xxxx} + \alpha_1 v = g \quad \text{en }]0, \ell[. \quad (5.11)$$

Debido a la discontinuidad de los coeficientes en ℓ_0, ℓ_1 recordamos las condiciones de transmisión

$$u(\ell_i^-) = u(\ell_i^+) \quad u_x(\ell_i^-) = u_x(\ell_i^+), \quad (5.12)$$

$$M(\ell_i^-) = M(\ell_i^+) \quad M_x(\ell_i^-) = M_x(\ell_i^+). \quad (5.13)$$

Para $i = 0, 1$, donde $M = \alpha u_{xx} + \alpha_0 v_{xx}$.

Un primer punto importante es que la familia de resolventes del operador A no son compactos

Teorema 5.2 *El operador resolvente de A definido por (5.1)-(5.13) no es compacto.*

Prueba.- Si el operador resolvente fuera compacto, entonces el espectro de A estaría formado solo por los autovalores de A . Probaremos que el espectro de A posee términos que no son autovalores, por tanto por el Teorema 2.11, concluimos que el resolvente de A no puede ser compacto.

De hecho, consideremos la ecuación resolvente sobre la parte viscosa, recordemos que en esta parte de la viga $\alpha_1 = 0$ por tanto la ecuación es dada por

$$\lambda u - v = f \quad \text{en }]\ell_1, \ell[, \quad (5.14)$$

$$\lambda v + \alpha u_{xxxx} + \alpha_0 v_{xxxx} = g \quad \text{en }]\ell_1, \ell[. \quad (5.15)$$

Para $\lambda \in \mathbb{C}$, sustituyendo (5.14) en (5.15), tenemos

$$\lambda v + u_{xxxx} + \alpha_0 \lambda u_{xxxx} = g + \alpha_0 f_{xxxx} \quad \text{en }]\ell_1, \ell[,$$

o equivalentemente

$$\lambda v + (\alpha + \alpha_0 \lambda) u_{xxxx} = g + \alpha_0 f_{xxxx} \quad \text{en }]\ell_1, \ell[.$$

Escogiendo $\lambda = -\frac{\alpha}{\alpha_0}$ de tal forma que $\alpha + \alpha_0 \lambda = 0$, tenemos

$$\lambda v = g + \alpha_0 f_{xxxx} \quad \text{en }]\ell_1, \ell[.$$

Observe que $(f, g) \in \mathcal{H}$ en particular tenemos $f \in H^2(0, \ell)$, así

$$\lambda v = g + \alpha_0 f_{xxxx} \in H^{-2}(\ell_0, \ell)$$

Por lo tanto para este valor $\lambda = -\frac{\alpha}{\alpha_0}$ la segunda componente de $U = (u, v)$, no pertenece a $L^2(0, \ell)$. Por lo tanto este valor no puede estar en el resolvente de A ($\rho(A)$), luego debe estar en el espectro de A .

Claramente $\lambda = -\frac{\alpha}{\alpha_0}$ no es autovalor, por tanto A no es compacto.

Estabilidad fuerte

Nuestro primer paso para obtener las hipótesis de la proposición 5.1 y probar la diferenciabilidad del semigrupo, es mostrar que el eje imaginario está contenido en el operador resolvente.

Lema 5.1 $i\mathbb{R} \subset \rho(A)$.

Prueba: Denotemos por $\mathcal{N} = \sup \{s > 0, [-is, is] \subset \rho(A)\}$.

Por hipótesis $\sup \mathcal{N} = \lambda < \infty$, entonces existe $\lambda_n \in \mathcal{N}$ que se aproxima al supremo λ , note que λ no pertenece al resolvente de A ; en efecto supongamos por el contrario que $\lambda \in \rho(A)$, al ser $\rho(A)$ un conjunto abierto tendríamos que

$$\lambda + \epsilon \in \rho(A), \quad \epsilon > 0$$

lo que contradice la maximalidad de λ .

Así tenemos

$$\|(i\lambda_n I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \rightarrow \infty \quad \text{pues } \lambda \notin \rho(A).$$

Por la definición de una norma, existe una secuencia $\tilde{F}_n \in \mathcal{H}$, tal que $\|\tilde{F}_n\| = 1$ y

$$\|(i\lambda_n I - A)^{-1} \tilde{F}_n\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \rightarrow \infty.$$

Definimos $\tilde{U}_n \in D(A)$ tal que $\tilde{U}_n = (i\lambda_n I - A)^{-1} \tilde{F}_n$, más aún $i\lambda_n \tilde{U}_n - A\tilde{U}_n = \tilde{F}_n$.

Haciendo $U_n = \frac{\tilde{U}_n}{\|\tilde{U}_n\|}$, $F_n = \frac{\tilde{F}_n}{\|\tilde{U}_n\|}$ verificamos $\|U_n\| = 1$, $F_n \rightarrow 0$, así tenemos que la secuencia verifica

$$i\lambda_n U_n - AU_n = F_n \rightarrow 0.$$

Tomando producto interno

$$\begin{aligned} i\lambda_n \|U_n\|^2 - (AU_n, U_n)_{\mathcal{H}} &= (F_n, U_n)_{\mathcal{H}} \rightarrow 0, \\ -\operatorname{Re}(AU_n, U_n)_{\mathcal{H}} &= \operatorname{Re}(F_n, U_n)_{\mathcal{H}} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Usando (5.9)

$$\int_0^\ell \alpha_0 |v_{n,xx}|^2 + \alpha_1 |v_n|^2 dx = \operatorname{Re}(F_n, U_n)_{\mathcal{H}} \rightarrow 0,$$

de donde

$$\begin{aligned} v_n &\rightarrow 0 \text{ fuerte en } H_0^2(0, \ell), \\ i\lambda_n u_n = v_n + F_n &\rightarrow 0 \text{ fuerte en } H_0^2(0, \ell). \end{aligned}$$

Como $\|u_n\|_{\mathcal{H}} = 1$ tenemos la contradicción deseada, y por tanto $i\mathbb{R} \subset \rho(A)$.

Procedimientos

Para probar la diferenciabilidad usando el Corolario 5.1 debemos mostrar que existe un $\gamma > 0$ tal que

$$|\lambda|^\gamma \|(i\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq C, \quad \forall |\lambda| > \varepsilon; \quad (5.16)$$

recordando la ecuación resolvente,

$$i\lambda U - AU = F, \quad \Rightarrow \quad U = (i\lambda I - A)^{-1}F,$$

y su norma

$$|\lambda|^\gamma \|(i\tau I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} = |\tau|^\gamma \sup_{\|F\| \leq 1} \|(i\lambda I - A)^{-1}F\| = |\lambda|^\gamma \sup_{\|F\| \leq 1} \|U\|_{\mathcal{H}}.$$

Por lo tanto bastará probar que existe una constante C tal que

$$|\lambda|^\gamma \|U\|_{\mathcal{H}} \leq C \|F\|_{\mathcal{H}}, \quad \forall F \in \mathcal{H}.$$

En términos de las componentes de U y de la norma del espacio de fase, la desigualdad anterior se escribe como

$$|\lambda|^{2\gamma} \int_0^\ell |v|^2 + \alpha |u_{xx}|^2 dx \leq c \|F\|_{\mathcal{H}}^2. \quad (5.17)$$

La desigualdad (5.17) implica la desigualdad (5.16), que por el Corolario 5.1 implica la diferenciabilidad del semigrupo, observe que la potencia γ debe ser apenas positiva.

Por lo tanto en lo restante de este capítulo probaremos la desigualdad (5.17), dividiremos esto en dos partes: La primera, estimación sobre la componente viscosa

$$|\lambda| \int_{\ell_1}^\ell |v|^2 + |u_{xx}|^2 dx \leq c \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + c \|F\|_{\mathcal{H}}^2. \quad (5.18)$$

La segunda estimación sobre las componentes elásticas y friccionales

$$|\lambda|^{2\gamma} \int_0^{\ell_1} |v|^2 + |u_{xx}|^2 dx \leq c \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + c \|F\|_{\mathcal{H}}^2. \quad (5.19)$$

Para esta segunda parte usaremos las desigualdades de observabilidad, las desigualdades puntuales de Sobolev y un Lema relativo a las ecuaciones diferenciales ordinarias. Observe que las desigualdades (5.18) y (5.19) implican la desigualdad (5.17) que muestra la diferenciabilidad.

Estimación sobre la parte Viscosa

La primera parte de la demostración consiste en la estimación sobre la componente viscosa, la segunda parte la obtenemos por la desigualdad de observabilidad que estudiaremos posteriormente.

Teorema 5.3 *La solución de la ecuación resolvente sobre la parte viscosa verifica*

$$\lambda \int_{I_V} |v|^2 + |u_{xx}|^2 dx \leq c \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + c \|F\|_{\mathcal{H}}^2. \quad (5.20)$$

Prueba.- Recordemos que

$$\operatorname{Re} (AU, U)_{\mathcal{H}} = - \int_0^\ell \alpha_0 |v_{xx}|^2 + \alpha_1 |v|^2 dx$$

Haciendo producto interno con U en la ecuación resolvente $i\lambda U - AU = F$ tenemos

$$i\lambda(U, U)_{\mathcal{H}} - (AU, U)_{\mathcal{H}} = (F, U)_{\mathcal{H}}.$$

Tomando la parte real

$$\int_0^\ell \alpha_0 |v_{xx}|^2 + \alpha_1 |v|^2 dx = \operatorname{Re} (U, F)_{\mathcal{H}}, \quad (5.21)$$

usando la ecuación resolvente

$$\int_{\ell_1}^\ell \alpha_0 |i\lambda u_{xx} - f_{xx}|^2 dx \leq \operatorname{Re}(U, F)_{\mathcal{H}},$$

de donde

$$\lambda^2 \int_{\ell_1}^\ell \alpha_0 |u_{xx}|^2 dx \leq c \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + c \|F\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Por otro lado de la ecuación resolvente obtenemos $i\lambda v + (\alpha u_{xx})_{xx} + (\alpha_0 v_{xx})_{xx} = g$, aplicamos la norma $\|\cdot\|_{\mathcal{H}^{-2}}$ y obtenemos

$$|\lambda| \|v\|_{\mathcal{H}^{-2}} \leq c \|u_{xx}\| + c \|v_{xx}\| + \|F\| \leq c \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + c \|F\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Usando desigualdades de interpolación tenemos

$$\begin{aligned} \left(\int |v|^2 dx \right)^{1/2} = \|v\|_{L^2} &\leq c \|v\|_{H^{-2}}^{1/2} \|v\|_{H^2}^{1/2}, \\ &\leq \frac{c}{|\lambda|^{1/2}} (\|u_{xx}\| + c \|v_{xx}\| + \|F\|)^{1/2} \|v_{xx}\|_{L^2}^{1/2}, \\ &\leq \frac{c}{|\lambda|^{1/2}} (\|U\|^{1/2} \|F\|^{1/2} + \|F\|)^{1/2} \|v_{xx}\|_{L^2}^{1/2}. \end{aligned}$$

De donde

$$\begin{aligned} \lambda \int |v|^2 dx &\leq c (\|U\|^{1/2} \|F\|^{1/2} + \|F\|) \|v_{xx}\|_{L^2}, \\ &\leq c (\|U\|^{1/2} \|F\|^{1/2} + \|F\|) \|U\|^{1/2} \|F\|^{1/2}, \\ &\leq c (\|U\| \|F\| + c \|F\|^2). \end{aligned}$$

Y sigue el resultado

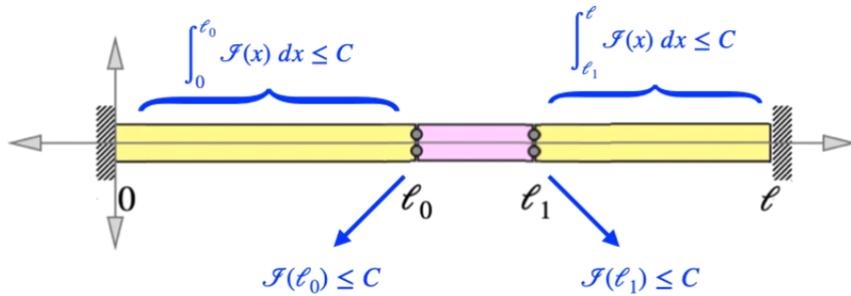
$$\int_{I_V} |v|^2 + |u_{xx}|^2 dx \leq \frac{c}{|\lambda|} (\|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + c \|F\|_{\mathcal{H}}^2).$$

Dado que $\lambda \rightarrow \infty$, entonces $\|U\| \leq C$ o equivalentemente $\|(i\lambda I - A)^{-1}\| \leq C$ en la componente viscosa.

□

5.0.1. Observabilidad

La llamada propiedad de observabilidad es una desigualdad que relaciona la energía puntual con la energía integrada, esta propiedad fue muy usada en la Controlabilidad exacta y en los problemas de estabilización cuando la disipación se encuentra localizada apenas en una parte del dominio. Por ejemplo considere



Denotemos por \mathcal{J} la energía del sistema, la observabilidad consiste en estimar la energía puntual por la energía integrada, esto es

$$\mathcal{J}(\ell_1) \leq c \int_0^{\ell_1} \mathcal{J}(s) ds + C,$$

y viceversa, así estimamos la energía integrada por la energía puntual también

$$\int_0^{\ell_1} \mathcal{J}(s) ds \leq \mathcal{J}(\ell_1) + C.$$

De esta forma se pueden traspasar las estimaciones de las componentes disipativas a las componentes donde no existe disipación.

Esta propiedad es obtenida a través de técnicas multiplicativas, existen dos versiones de la observabilidad, una de ellas la más común es la asociada al problema de evolución (5.1); la segunda asociada al sistema resolvente (5.10)-(5.11). Nosotros trataremos la desigualdad de observabilidad asociada al sistema resolvente.

Recordemos que la energía total del sistema es dada por

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^\ell \rho |u_t|^2 + \alpha |u_{xx}|^2 dx,$$

además se verifica que

$$\frac{d}{dt} E(t) = - \int_0^\ell \alpha_0 |u_{xxt}|^2 + \alpha_1 |u_t|^2 dx \leq 0.$$

Denotemos la energía puntual

$$\mathcal{J}(x) = \frac{1}{2} (|v(x)|^2 + \alpha |u_{xx}(x)|^2).$$

La Observabilidad es basada en la identidad establecida en el siguiente lema

Lema 5.2 *La solución de la ecuación resolvente (5.10)-(5.11) sobre la parte elástica o friccional $[a, b] \subset I_E \cup I_F$ verifica*

$$\begin{aligned} & \int_a^b q' \alpha |u_{xx}|^2 dx - \frac{1}{2} \int_a^b q \frac{d}{dx} \mathcal{J}(x) dx \\ & = -q(x) (\alpha_0 u_{xx})_x \overline{u_x} \Big|_a^b + (\alpha_0 u_{xx}) \overline{u_x} \Big|_a^b + \int_a^b \alpha_1 v q \overline{u_x} dx + \int_a^b v q \overline{f_x} + g q \overline{u_x} dx. \end{aligned}$$

Prueba.- Multiplicando la ecuación (5.11) por $q \overline{u_x}$, con $q(x) = x - r$ e integrando sobre el intervalo $[a, b]$ tenemos

$$- \int_a^b v q (\overline{i \lambda u})_x dx + \int_a^b (\alpha u_{xx})_{xx} q \overline{u_x} dx + \int_a^b \alpha_1 v q \overline{u_x} dx = \int_a^b g q \overline{u_x} dx,$$

integrando por partes tenemos

$$\begin{aligned} & \int_a^b q' \alpha |u_{xx}|^2 dx - \frac{1}{2} \int_a^b q \frac{d}{dx} (\alpha |u_{xx}|^2 + |v|^2) dx \\ &= -q(x) (\alpha_0 u_{xx})_x \bar{u}_x \Big|_a^b + (\alpha_0 u_{xx}) \bar{u}_x \Big|_a^b + \int_a^b \alpha_1 v q \bar{u}_x dx + \int_a^b v q \bar{f}_x + g q \bar{u}_x dx, \end{aligned}$$

de donde sigue el resultado. \square

Observación 5.1 *Sobre la parte visco-elástica no tenemos la observabilidad.*

Observación 5.2 *Del Lema 5.2 concluimos que*

$$\begin{aligned} & \left| \int_a^b q' \alpha |u_{xx}|^2 dx - \frac{1}{2} \int_a^b q \frac{d}{dx} (\alpha |u_{xx}|^2 + |v|^2) dx \right| \\ & \leq \underbrace{\left| -q(x) (\alpha_0 u_{xx})_x \bar{u}_x \Big|_a^b + (\alpha_0 u_{xx}) \bar{u}_x \Big|_a^b \right|}_{:=P_1} + \underbrace{\left| \int_a^b \alpha_1 v q \bar{u}_x dx + \int_a^b v q \bar{f}_x + g q \bar{u}_x dx \right|}_{:=P_2} \end{aligned}$$

Para obtener la estimación de la observabilidad debemos estimar los términos puntuales en P_1 y los términos integrales en P_2 .

Estimación de los términos puntuales P_1

Para usar la Observabilidad y estimar el operador resolvente sobre las partes elástica y friccional necesitamos estimar los términos puntuales, especialmente en ℓ_1 que es uno de los extremos del intervalo viscoso y de esta forma estimar el operador resolvente en las componentes friccional y elástica. Haremos esto usando las desigualdades de Sobolev, específicamente la desigualdad de Gagliardo-Nirenberg y el teorema de las derivadas intermedias. Para las demostraciones y generalizaciones de estas desigualdades sugerimos los textos [1, 2, 12].

A continuación todas las estimaciones previas para estimar los términos puntuales en nuestro problema.

Lema 5.3 (Derivadas intermedias) *Sea $a, b \in \mathbb{R}$. Asumimos $u, u^{(m)} \in L^2(a, b)$ luego, $u^{(j)} \in L^2(a, b)$, para $j = 1, \dots, m$, donde $u^{(j)} = \frac{d^j}{dx^j} u$. Para algún $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ tenemos*

$$\|u^{(j)}\|_{L^2} \leq C\varepsilon \|u^{(m)}\|_{L^2} + C\varepsilon^{-\frac{j}{m-j}} \|u\|_{L^2}, \quad (5.22)$$

que implica

$$\|u^{(j)}\|_{L^2} \leq C\|u\|_{L^2} + C\|u\|_{L^2}^{1-\frac{j}{m}} \|u^{(m)}\|_{L^2}^{\frac{j}{m}}. \quad (5.23)$$

PRUEBA.- Por el Teorema 4.14 de [1] sigue (5.22). Denotamos $\|u\|_m := \|u\|_{L^2} + \|u^{(m)}\|_{L^2}$ y tomando en (5.22) que

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \left(\frac{\|u\|}{\|u\|_m} \right)^{\frac{m-j}{m}},$$

obtenemos

$$\|u^{(j)}\|_{L^2} \leq C\|u\|_{L^2}^{1-\frac{j}{m}} \|u\|_{L^2}^{\frac{j}{m}},$$

lo que conduce a (5.23) por la definición de $\|\cdot\|_m$. \square

Lema 5.4 *Sea $u \in H^2(a, b)$, entonces tenemos*

$$\|u\|_{\infty} = \sup_{s \in [a, b]} |u(s)| \leq C\|u\|_{L^2} + C\|u\|_{L^2}^{3/4} \|u_{xx}\|_{L^2}^{1/4}, \quad (5.24)$$

$$\|u_x\|_{\infty} = \sup_{s \in [a, b]} |u_x(s)| \leq C\|u\|_{L^2} + C\|u\|_{L^2}^{1/4} \|u_{xx}\|_{L^2}^{3/4}. \quad (5.25)$$

Prueba.- Por la desigualdad de Gagliardo-Nirenberg tenemos

$$\begin{aligned} |u_x(s)| &\leq C\|u\|_{L^2}^{3/4} \|u_{xx}\|_{L^2}^{1/4}, \\ |u_x(b)|^2 &\leq C\|u_x\|(\|u\| + \|u_{xx}\|) \leq C\|u\|^{1/2}(\|u\| + \|u_{xx}\|)^{3/2}. \end{aligned}$$

Donde usamos el Lema 5.3 obtenemos $\|u_x\| \leq C\|u\|^{1/2}(\|u\| + \|u_{xx}\|)^{1/2}$, entonces sigue (5.25), usando los mismos argumentos obtenemos (5.24). \square

Nuestro punto de partida para las estimaciones de la solución en los puntos ℓ_0 y ℓ_1 es el siguiente Lema.

Lema 5.5 *La solución de la ecuación resolvente sobre la parte viscosa verifica*

$$\begin{aligned} \|v\|_{L^{\infty}} &\leq \frac{c}{|\lambda|^{3/8}} (\|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + c\|F\|_{\mathcal{H}}^2), \\ \|v_x\|_{L^{\infty}} &\leq \frac{c}{|\lambda|^{1/8}} (\|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + c\|F\|_{\mathcal{H}}^2). \end{aligned}$$

Prueba.- De la desigualdad de Gagliardo Nirenberg sigue que

$$\|v\|_{L^\infty} \leq c\|v\|_{L^2}^{1/2}\|v_x\|_{L^2}^{1/2},$$

usando el teorema de las derivadas intermediarias

$$\|v_x\|_{L^2} \leq c\|v\|_{L^2}^{1/2}\|v_{xx}\|_{L^2}^{1/2},$$

de donde sigue que

$$\|v\|_{L^\infty} \leq c\|v\|_{L^2}^{3/4}\|v_{xx}\|_{L^2}^{1/4},$$

usando el Teorema 5.3 y la desigualdad (5.21) concluimos

$$\|v\|_{L^\infty} \leq \frac{c}{|\lambda|^{3/8}}(\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + c\|F\|_{\mathcal{H}}^2)^{1/2},$$

de donde sigue la primera parte del Lema, para la segunda parte procedemos de forma análoga.

De la desigualdad de Gagliardo Nirenberg

$$\|v_x\|_{L^\infty} \leq c\|v_x\|_{L^2}^{1/2}\|v_{xx}\|_{L^2}^{1/2},$$

usando las desigualdades de las derivadas intermediarias

$$\|v_x\|_{L^2} \leq c\|v\|_{L^2}^{1/2}\|v_{xx}\|_{L^2}^{1/2},$$

sustituyendo esta desigualdad tenemos

$$\|v_x\|_{L^\infty} \leq c\|v\|_{L^2}^{1/4}\|v_{xx}\|_{L^2}^{3/4}.$$

Usando el Teorema 5.3 y la desigualdad (5.21) concluimos

$$\|v_x\|_{L^\infty} \leq \frac{c}{|\lambda|^{1/8}}(\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + c\|F\|_{\mathcal{H}}^2)^{1/2},$$

obteniéndose las estimaciones del Lema.

Estimación puntual de la segunda y tercera derivada

Para estimar la segunda y tercera derivada en el punto ℓ_1 usamos la ecuación resolvente

$$\begin{aligned} i\lambda u - v &= f & \Leftrightarrow & & i\lambda u - v &= f, \\ i\lambda v + (\alpha u_{xx} + \alpha_0 v_{xx})_{xx} &= g, & & & i\lambda v + w_{xxxx} &= g. \end{aligned}$$

Donde $w = \alpha u + \alpha_0 v$, definimos Y como

$$Y = -\frac{1}{i\lambda} \left(w_{xx} - \int_{\ell_0}^x \int_{\ell_0}^s g(s) ds dx \right) \Rightarrow Y_{xx} = v \quad \Rightarrow Y_{xxxx} = v_{xx},$$

así tenemos

Lema 5.6 *La función $w_{xx} = \alpha u_{xx} + \alpha_0 v_{xx}$ verifica*

$$\begin{aligned} \|w_{xx}\|_{L^\infty} &\leq c|\lambda|^{1/8} (\|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + c\|F\|_{\mathcal{H}}^2)^{1/2}, \\ \|w_{xxx}\|_{L^\infty} &\leq c|\lambda|^{3/8} (\|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + c\|F\|_{\mathcal{H}}^2)^{1/2}. \end{aligned}$$

Prueba.- De la desigualdad de Gagliardo Nirenberg

$$\|Y\|_{L^\infty} \leq c\|Y\|_{L^2}^{1/2} \|Y_x\|_{L^2}^{1/2},$$

de las desigualdad de las derivadas intermediarias

$$\|Y_x\|_{L^2} \leq c\|Y\|_{L^2}^{3/4} \|Y_{xxx}\|_{L^2}^{1/4},$$

de las dos últimas desigualdades obtenemos

$$\|Y\|_{L^\infty} \leq c\|Y\|_{L^2}^{7/8} \|Y_{xxx}\|_{L^2}^{1/8}.$$

Como $Y_{xxxx} = v_{xx}$

$$\|Y\|_{L^\infty} \leq c\|Y\|_{L^2}^{7/8} \|v_{xx}\|_{L^2}^{1/8},$$

recordando la definición de Y tenemos

$$\|w_{xx}\|_{L^\infty} \leq c|\lambda|^{1/8} \|w_{xx} + \mathcal{F}_0\|_{L^2}^{7/8} \|v_{xx}\|_{L^2}^{1/8},$$

donde

$$\mathcal{F}_0 = \int_{\ell_0}^x \int_{\ell_0}^s g(s) ds dx .$$

Por tanto

$$\|w_{xx}\|_{L^\infty} \leq c|\lambda|^{1/8} (\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + c\|F\|_{\mathcal{H}}^2)^{1/2} ,$$

de forma análoga usando la desigualdad

$$\|Y_x\|_{L^\infty} \leq C\|Y\| + C\|Y\|^{1/4}\|Y_{xx}\|^{3/4} ,$$

dado $Y_{xx} = v$, con $\mathcal{F}_1 = \int_{\ell_0}^x g(s) ds$, obtenemos del Teorema 5.3 que

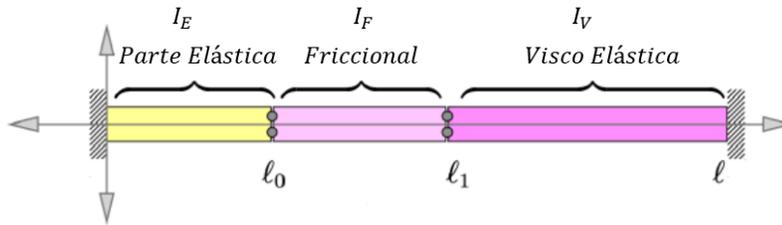
$$\begin{aligned} \|w_{xxx}\|_{L^\infty} &\leq C\|w_{xx}\| + C\|w_{xx} + \mathcal{F}_1\| + C|\lambda|^{3/4}\|w_{xx} + \mathcal{F}_1\|^{1/4}\|v\|^{3/4} + C\|F\|_{\mathcal{H}} , \\ &\leq C\|w_{xx}\| + C\|w_{xx} + \mathcal{F}_1\| + C|\lambda|^{3/8}\|w_{xx} + \mathcal{F}_1\|^{1/4}\|\lambda^{1/2}v\|^{3/4} + C\|F\|_{\mathcal{H}} , \\ &\leq C|\lambda|^{3/8} (\|U\|^{1/2}\|F\|^{1/2} + C\|F\|_{\mathcal{H}}) . \end{aligned}$$

□

Mediante estas estimaciones tenemos lo necesario para estimar P_1 .

Estimación de los términos integrales P_2

Recordemos la viga tiene la siguiente composición



Lema 5.7 *La solución del sistema resolvente en la parte elástica y friccional verifica*

$$\left| \int_0^{\ell_1} gq\bar{u}_x dx \right| + \left| \int_0^{\ell_1} qv\bar{f}_x dx \right| + \left| \int_0^{\ell_1} \alpha_1 qv\bar{u}_x dx \right| \leq \frac{c}{|\lambda|^{1/2}} (\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + c\|F\|_{\mathcal{H}}^2) .$$

Prueba.- Observe que en la parte elástica el procedimiento es el mismo que en la parte friccional salvo que $\alpha_1 = 0$; utilizando la ecuación resolvente sobre la parte elástica y friccional $]0, \ell_0[\cup]\ell_0, \ell_1[$

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{\ell_1} gq\overline{u_x} dx \right| &= \left| -\frac{1}{i\lambda} \int_0^{\ell_1} gqi\lambda\overline{u_x} dx \right| = \left| -\frac{1}{i\lambda} \int_0^{\ell_1} gq(\overline{v_x + f_x}) dx \right|, \\ &\leq \frac{c}{|\lambda|} (\|U\|_{\mathcal{H}} \|v_x\|_{\mathcal{H}} + c\|F\|_{\mathcal{H}}^2). \end{aligned}$$

Por las derivadas intermedias, y recordando $v_{xx} = i\lambda u_{xx} - f_{xx}$

$$\begin{aligned} \|v_x\|_{L^2} &= \|v_x\|_{L^2}^{1/2} \|v_{xx}\|_{L^2}^{1/2} \leq |\lambda|^{1/2} \|v\|_{L^2}^{1/2} \|u_{xx}\|_{L^2}^{1/2} + \|U\|_{L^2}^{1/2} \|F\|_{L^2}^{1/2}, \\ \left| \int_0^{\ell_1} gq\overline{u_x} dx \right| &\leq \frac{c}{|\lambda|^{1/2}} (\|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + c\|F\|_{\mathcal{H}}^2). \end{aligned}$$

Lo que prueba la estimación para el primer término.

De manera análoga y usando la ecuación (5.11) tenemos $i\lambda v = g - u_{xxxx} - \alpha_1 v$

$$\begin{aligned} \int_0^{\ell_1} qv\overline{f_x} dx &= \frac{1}{i\lambda} \int_0^{\ell_1} qi\lambda v\overline{f_x} dx = \frac{1}{i\lambda} \int_0^{\ell_1} q(g - u_{xxxx} - \alpha_1 v)\overline{f_x} dx, \\ &= \frac{1}{i\lambda} \int_0^{\ell_1} qg\overline{f_x} dx - \frac{1}{i\lambda} \int_0^{\ell_1} qu_{xxxx}\overline{f_x} dx - \frac{1}{i\lambda} \int_0^{\ell_1} q\alpha_1 v\overline{f_x} dx. \end{aligned}$$

Integrando por partes, recordando que $\overline{f_x(0)} = 0$

$$\begin{aligned} \int_0^{\ell_1} qv\overline{f_x} dx &= \frac{1}{i\lambda} \left(\int_0^{\ell_1} qg\overline{f_x} dx - q(\ell_1)\overline{f_x}(\ell_1)u_{xxx}(\ell_1) + \int_0^{\ell_1} qu_{xxx}\overline{f_{xx}} dx \right), \\ &\quad + \frac{1}{i\lambda} \left(\int_0^{\ell_1} q'u_{xxx}\overline{f_x} dx - \int_0^{\ell_1} q\alpha_1 v\overline{f_x} dx \right). \end{aligned}$$

De donde tenemos

$$\left| \int_0^{\ell_1} qv\overline{f_x} dx \right| \leq \frac{c}{|\lambda|} (\|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + |\overline{f_x}(\ell_1)u_{xxx}(\ell_1)| + \|u_{xxx}\|_{L^2} \|F\|_{\mathcal{H}}). \quad (5.26)$$

Usando (5.11) $u_{xxxx} = -i\lambda v - \alpha_1 v + g$ y las desigualdades de derivadas intermedias, tenemos

$$\begin{aligned} \|u_{xxx}\|_{L^2} &\leq \|u_{xx}\|_{L^2}^{1/2} \|u_{xxxx}\|_{L^2}^{1/2}, \\ &\leq \|u_{xx}\|_{L^2}^{1/2} \|-i\lambda v - \alpha_1 v + g\|_{L^2}^{1/2}, \\ &\leq c\|u_{xx}\|_{L^2}^{1/2} |\lambda|^{1/2} \|v\|_{L^2}^{1/2} + \|u_{xx}\|_{L^2}^{1/2} \|v\|_{L^2}^{1/2} + \|u_{xx}\|_{L^2}^{1/2} \|g\|_{L^2}^{1/2}, \\ &\leq c|\lambda|^{1/2} \|U\|_{\mathcal{H}} + \|U\|_{\mathcal{H}} + \|U\|_{\mathcal{H}}^{1/2} \|F\|_{\mathcal{H}}^{1/2}. \end{aligned}$$

Sustituyendo esta desigualdad en (5.26) tenemos para λ grande que

$$\left| \int_0^{\ell_1} qv \overline{f_x} dx \right| \leq \frac{c}{|\lambda|^{1/2}} (\|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + c \|F\|_{\mathcal{H}}^2) + \frac{c}{|\lambda|} |\overline{f_x}(\ell_1) u_{xxx}(\ell_1)|. \quad (5.27)$$

Usando el Lema 5.6 tenemos por las condiciones de transmisión que

$$|\alpha u_{xxx}(\ell_1)| = |w_{xxx}(\ell_1)| \leq c|\lambda|^{3/8} (\|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + c \|F\|_{\mathcal{H}}^2)^{1/2},$$

Sustituyendo en (5.27) tenemos para λ grande que

$$\left| \int_0^{\ell_1} qv \overline{f_x} dx \right| \leq \frac{c}{|\lambda|^{5/8}} (\|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + c \|F\|_{\mathcal{H}}^2). \quad (5.28)$$

Lo que prueba la desigualdad deseada.

Finalmente, por el teorema de las derivadas intermedias tenemos

$$\begin{aligned} \|u_x\|_{L^2} &\leq c \|u\|_{L^2}^{1/2} \|u_{xx}\|_{L^2}^{1/2}, \\ &\leq \frac{c}{|\lambda|^{1/2}} \|v + f\|_{L^2}^{1/2} \|u_{xx}\|_{L^2}^{1/2}. \end{aligned} \quad (5.29)$$

Para el último término usando la desigualdad de Cauchy Schwarz tenemos

$$\int_0^{\ell_1} \alpha_1 qv \overline{u_x} dx \leq c \|v\|_{L^2} \|u_x\|_{L^2},$$

usando (5.29) tenemos

$$\int_0^{\ell_1} \alpha_1 qv \overline{u_x} dx \leq \frac{c}{|\lambda|^{1/2}} (\|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + c \|F\|_{\mathcal{H}}^2),$$

así tomando la cota superior de la desigualdad anterior y de (5.29) obtenemos el resultado.

□

Estimación sobre la parte Elástica y Friccional

A continuación un resultado importante para establecer la observabilidad.

Teorema 5.4 *La solución del sistema resolvente en la parte elástica y friccional verifica*

$$\left| - \int_0^{\ell_1} q \frac{d}{dx} \mathcal{J}(x) dx + \int_0^{\ell_1} q' |u_{xx}|^2 dx \right| \leq \frac{c}{|\lambda|^{1/2}} (\|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + c \|F\|_{\mathcal{H}}^2).$$

Donde $2\mathcal{J}(x) = |v(x)|^2 + |u_{xx}(x)|^2$. Caso que $q=1$ tenemos

$$|\mathcal{J}(\ell_1) - \mathcal{J}(0)| \leq \frac{c}{|\lambda|^{1/2}} (\|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + c \|F\|_{\mathcal{H}}^2).$$

Prueba.- Del Teorema 5.2 para $a = 0$ y $b = \ell_1$

$$\begin{aligned} & - \int_0^{\ell_1} q \frac{d}{dx} \mathcal{J}(x) dx + \int_0^{\ell_1} q' \alpha |u_{xx}|^2 dx \\ & = -q(\ell_1) u_{xxx}(\ell_1) \overline{u_x}(\ell_1) + u_{xx}(\ell_1) \overline{u_x}(\ell_1) - \int_0^{\ell_1} \alpha_1 v q \overline{u_x} dx + \int_0^{\ell_1} g q \overline{u_x} + q v \overline{f_x} dx. \end{aligned}$$

Usando el Lema 5.7 tenemos

$$\begin{aligned} \left| - \int_0^{\ell_1} q \frac{d}{dx} \mathcal{J}(x) dx + \int_0^{\ell_1} q' \alpha |u_{xx}|^2 dx \right| & \leq \left| \underbrace{-q(\ell_1) u_{xxx}(\ell_1) \overline{u_x}(\ell_1)}_{:=H_1} + \underbrace{u_{xx}(\ell_1) \overline{u_x}(\ell_1)}_{:=H_2} \right| \\ & \quad + \frac{c}{|\lambda|^{1/2}} (\|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + c \|F\|_{\mathcal{H}}^2). \end{aligned} \quad (5.30)$$

A seguir, estimaremos los términos puntuales H_1 y H_2 ,

$$\begin{aligned} H_1 = |-q(\ell_1) u_{xxx}(\ell_1) \overline{u_x}(\ell_1)| & = \frac{1}{|\lambda|} |-q(\ell_1) u_{xxx}(\ell_1) i \lambda \overline{u_x}(\ell_1)|, \\ & = \frac{1}{|\lambda|} |-q(\ell_1) u_{xxx}(\ell_1) (\overline{v_x}(\ell_1) + f_x(\ell_1))|, \\ & \leq \frac{c}{|\lambda|} |w_{xxx}(\ell_1) \overline{v_x}(\ell_1)| + \frac{c}{|\lambda|} |w_{xxx}(\ell_1) f_x(\ell_1)|. \end{aligned}$$

Por el Lema 5.6 tenemos que

$$\begin{aligned} |u_{xxx}(\ell_1) \overline{u_x}(\ell_1)| & = \frac{1}{|\lambda|} |-q(\ell_1) u_{xxx}(\ell_1) i \lambda \overline{u_x}(\ell_1)|, \\ & = \frac{1}{|\lambda|} |-q(\ell_1) u_{xxx}(\ell_1) (\overline{v_x}(\ell_1) + f_x(\ell_1))|, \\ & \leq \frac{c}{|\lambda|} |w_{xxx}(\ell_1) \overline{v_x}(\ell_1)| + \frac{c}{|\lambda|^{5/8}} (\|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + c \|F\|_{\mathcal{H}}^2). \end{aligned}$$

Usando el Lema 5.5 y el Lema 5.6 tenemos

$$|u_{xxx}(\ell_1) \overline{u_x}(\ell_1)| \leq \frac{c}{|\lambda|^{6/8}} (\|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + c \|F\|_{\mathcal{H}}^2) + \frac{c}{|\lambda|^{5/8}} (\|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + c \|F\|_{\mathcal{H}}^2).$$

Escogemos la cota superior para λ grande, obtenemos

$$|u_{xxx}(\ell_1) \overline{u_x}(\ell_1)| \leq \frac{c}{|\lambda|^{5/8}} (\|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + c \|F\|_{\mathcal{H}}^2),$$

de forma análoga

$$H_2 = |-q(\ell_1)u_{xx}(\ell_1)\overline{u_x}(\ell_1)| \leq \frac{c}{|\lambda|^{5/8}}(\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + c\|F\|_{\mathcal{H}}^2).$$

Usando los mismos procedimientos, obtenemos la segunda desigualdad del Lema para $q = 1$. \square

Nuestro siguiente paso será estimar la energía en el punto $x = 0$; aquí seguiremos ideas parecidas a las usadas por los profesores S. Liu e K. Liu en el artículo [6].

Lema 5.8 *Sobre el intervalo elástico y friccional $]0, \ell_1[$ con las condiciones de contorno $u(0) = u_x(0) = 0$ tenemos*

$$|u_{xx}(0)| \leq c \frac{|u_{xxx}(0)|}{|\lambda|^{1/2}} + \frac{C}{|\lambda|^{3/4}}\|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{Ce^{-|\lambda|^{1/2}\ell_0}}{|\lambda|^{1/2}}\|U\|_{\mathcal{H}}^{1/2}\|F\|_{\mathcal{H}}^{1/2}.$$

Prueba.- El modelo de vigas sobre el intervalo $]0, \ell_1[$ es escrito como

$$i\lambda u - v = f \quad \in H^2(0, \ell_1), \quad (5.31)$$

$$i\lambda v + \alpha u_{xxxx} = g - \alpha_1 v \quad \in L^2(0, \ell_1). \quad (5.32)$$

Sustituyendo v dado por la ecuación (5.31) en (5.32) produce

$$u_{xxxx} - \sigma^4 u = G, \quad \text{con} \quad G = \frac{1}{\alpha}(i\lambda f + g), \quad \sigma = \left(\frac{\rho\lambda^2}{\alpha}\right)^{1/4}.$$

Denotando por $D = \frac{d}{dx}$, el sistema anterior puede ser escrito

$$(D^4 - \sigma^4)u = G, \quad \Rightarrow \quad (D^2 + \sigma^2) \underbrace{(D + \sigma)(D - \sigma)}_{:=\varphi} u = G. \quad (5.33)$$

Por lo tanto tenemos $(D^2 + \sigma^2)\varphi = G$. La solución de este sistema es dado por

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= C_1 e^{i\sigma x} + C_2 e^{-i\sigma x} + \int_0^x e^{-i\sigma s} G(s) ds \frac{e^{i\sigma x}}{2i\sigma} - \int_0^x e^{i\sigma s} G(s) ds \frac{e^{-i\sigma x}}{2i\sigma} \\ &:= J_1 + J_2 + J_3 + J_4, \end{aligned} \quad (5.34)$$

donde

$$C_1 = \frac{1}{2i\sigma} [i\sigma\varphi(0^+) + \varphi_x(0^+)], \quad C_2 = \frac{1}{2i\sigma} [i\sigma\varphi(0^+) - \varphi_x(0^+)].$$

Como $\varphi = u_{xx} - \sigma^2 u$ y $u(0) = u_x(0) = 0$ tenemos $\varphi(0) = u_{xx}(0)$, $\varphi_x(0) = u_{xxx}(0)$. Por tanto

$$C_1 = \frac{1}{2i\sigma} [i\sigma u_{xx}(0) + u_{xxx}(0)], \quad C_2 = \frac{1}{2i\sigma} [i\sigma u_{xx}(0) - u_{xxx}(0)]. \quad (5.35)$$

Denotando por $z = (D + \sigma)u$ tenemos

$$z_x - \sigma z = \varphi, \quad \Rightarrow \quad z(x) = e^{\sigma(x-\ell_1^-)} z(\ell_1^-) + \int_{\ell_1^-}^x e^{\sigma(x-s)} \varphi(s) ds,$$

donde $z(\ell_1^-) = u_x(\ell_1^-) - \sigma u(\ell_1^-)$. Como $z(0) = 0$, tenemos

$$0 = e^{-\sigma\ell_0} z(\ell_1^-) - \int_0^{\ell_1^-} e^{-\sigma s} (J_1(s) + J_2(s) + J_3(s) + J_4(s)) ds. \quad (5.36)$$

Usando las condiciones de contorno y el Lema 5.5,

$$|z(\ell_0)| = |u_x(\ell_1^-) - \sigma u(\ell_1^-)| = |u_x(\ell_1^+) - \sigma u(\ell_0^+)| \leq \frac{C}{|\lambda|^{7/8}} \|U\|_{\mathcal{H}}^{1/2} \|F\|_{\mathcal{H}}^{1/2} + \frac{C}{|\lambda|^{1/2}} \|F\|_{\mathcal{H}}, \quad (5.37)$$

por lo tanto

$$|e^{-\sigma\ell_1} z(\ell_1^-)| \leq \frac{C e^{-\sigma\ell_1}}{|\lambda|^{1/2}} (\|U\|^{1/2} \|F\|^{1/2} + \|F\|),$$

note que

$$\int_0^{\ell_1^-} e^{-\sigma s} J_1(s) ds = C_1 \int_0^{\ell_1^-} e^{\sigma(-1+i)s} ds = \frac{C_1}{\sigma(-1+i)} (e^{-\ell_0\sigma+i\ell_0\sigma} - 1),$$

similarmente tenemos

$$\int_0^{\ell_1^-} e^{-\sigma s} J_2(s) ds = -\frac{C_2}{\sigma(1+i)} (e^{-\ell_0\sigma-i\ell_0\sigma} - 1).$$

De donde sigue que

$$\int_0^{\ell_1^-} e^{-\sigma s} (J_1(s) + J_2(s)) ds = K_2 - \frac{C_1}{\sigma(-1+i)} + \frac{C_2}{\sigma(1+i)}.$$

Donde

$$K_2 = \frac{C_1 e^{-\ell_1\sigma+i\ell_0\sigma}}{\sigma(-1+i)} - \frac{C_2 e^{-\ell_1\sigma-i\ell_0\sigma}}{\sigma(1+i)}, \quad \Rightarrow \quad |K_2| \leq \frac{ce^{-\ell_1\sigma}}{\sigma} (\sigma|u_{xx}(0^+)| + |u_{xxx}(0^+)|).$$

Esta última desigualdad la tenemos por la condición (5.35), además

$$\begin{aligned} \int_0^{\ell_0} e^{-\sigma s} (J_1 + J_2) ds &= K_2 - \frac{i\sigma u_{xx}(0) + u_{xxx}(0)}{2i\sigma^2(-1+i)} + \frac{i\sigma u_{xx}(0) - u_{xxx}(0)}{2i\sigma^2(1+i)}, \\ &= K_2 + \frac{u_{xx}(0^+)}{2i\sigma} - \frac{u_{xxx}(0^+)}{2\sigma^2}. \end{aligned} \quad (5.38)$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \int_0^{\ell_0} e^{-\sigma s} J_3(s) ds &= \frac{1}{2i\sigma} \int_0^{\ell_0} e^{-\sigma(1-i)s} \int_0^s e^{-i\sigma\tau} G(\tau) d\tau ds, \\ &= \frac{1}{-2i\sigma^2(1-i)} \int_0^{\ell_0} \int_0^s e^{-i\sigma\tau} G(\tau) d\tau d(e^{-\sigma(1-i)s}), \\ &= \frac{-e^{-\ell_0\sigma + i\ell_0\sigma}}{2i\sigma^2(1-i)} \int_0^{\ell_0} e^{-i\sigma\tau} G(\tau) d\tau + \frac{1}{2i\sigma^2(1-i)} \int_0^{\ell_0} e^{-\sigma s} G(s) ds. \end{aligned} \quad (5.39)$$

Como $f_1(0) = f_1'(0) = 0$, integrando por partes tenemos

$$\begin{aligned} \int_0^{\ell_0} e^{-\sigma s} G(s) ds &= \frac{1}{\alpha} \int_0^{\ell_0} e^{-\sigma s} [i\lambda f_1 + f_2] ds \\ &= \underbrace{-\frac{i\lambda}{\alpha\sigma^2} e^{-\sigma\ell_0} [\sigma f_1(\ell_0) + f_{1,s}(\ell_0)]}_{:=J_1} + \underbrace{\frac{i\lambda}{\alpha\sigma^2} \int_0^{\ell_0} e^{-\sigma s} f_{1,ss}(s) ds + \frac{1}{\alpha} \int_0^{\ell_0} e^{-\sigma s} f_2(s) ds}_{:=J_2}. \end{aligned}$$

Es simple verificar que

$$|J_1| \leq c\sigma \|F\| e^{-\sigma\ell_0}, \quad |J_2| \leq \frac{c}{\sqrt{\sigma}} [1 - e^{-\ell_0\sigma}]^{1/2} (\|f_1\|_2 + \|f_2\|).$$

Sustituyendo en (5.39) obtenemos

$$\left| \int_0^{\ell_0} e^{-\sigma s} J_3 ds \right| \leq \frac{C}{\sigma^{5/2}} (\|f_1\|_2 + \|f_2\|), \quad (5.40)$$

para λ grande. Similarmente, tenemos

$$\left| \int_0^{\ell_0} e^{-\sigma s} J_4 ds \right| \leq \frac{C}{\sigma^{5/2}} (\|f_1\|_2 + \|f_2\|). \quad (5.41)$$

Sustituyendo las desigualdades (5.38), (5.40) y (5.41) en (5.36) obtenemos

$$|u_{xx}(0)| \leq c \frac{|u_{xxx}(0)|}{\sigma} + \frac{C}{\sigma^{3/2}} (\|f_1\|_2 + \|f_2\|),$$

esto porque $|\sigma K_2| \leq \varepsilon |u_{xx}(0)| + \varepsilon \frac{|u_{xxx}(0)|}{\sigma}$, para λ grande ($\sigma = \sqrt[4]{\rho/\alpha} \sqrt{|\lambda|}$).

La prueba esta completa. \square

El siguiente Lema nos relaciona términos puntuales en $x = 0$ con los términos puntuales en $x = \ell_1$.

Lema 5.9 *La solución de la ecuación resolvente (5.10)-(5.11) verifica*

$$\frac{c}{\lambda} \left| \int_0^{\ell_1} \frac{d}{dx} (|v_x|^2 + |u_{xxx}|^2) dx \right| \leq \frac{c}{|\lambda|^{1/4}} (\|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + c \|F\|_{\mathcal{H}}^2) .$$

Prueba.- Multiplicamos la ecuación (5.11) por $q\overline{u_{xxx}}$

$$i\lambda v q\overline{u_{xxx}} + q(\alpha u_{xx})_{xx} \overline{u_{xxx}} + \alpha_1 v q\overline{u_{xxx}} = qg\overline{u_{xxx}} ,$$

integrando en la componente elástica - friccional

$$i\lambda \int_0^{\ell_1} qv\overline{u_{xxx}} dx + \int_0^{\ell_1} q \frac{d}{dx} \frac{\alpha}{2} |u_{xxx}|^2 dx = \int_0^{\ell_1} qg\overline{u_{xxx}} dx .$$

Integrando por partes y usando la ecuación resolvente $i\lambda u - v = f \Rightarrow -i\lambda \overline{u_{xx}} = v_{xx} + f_{xx}$

$$\begin{aligned} \int_0^{\ell_1} q \frac{1}{2} \frac{d}{dx} |v_x|^2 dx + \int_0^{\ell_1} q \frac{1}{2} \frac{d}{dx} |u_{xxx}|^2 dx &= \int_0^{\ell_1} qg\overline{u_{xxx}} - qv_x \overline{f_{xx}} dx + i\lambda \int_0^{\ell_1} q'v\overline{u_{xx}} dx , \\ &\quad -i\lambda qv\overline{u_{xx}}|_0^{\ell_1} , \\ \int_0^{\ell_1} q \frac{1}{2} \frac{d}{dx} (|v_x|^2 + |u_{xxx}|^2) dx &= \int_0^{\ell_1} qg\overline{u_{xxx}} - qv_x \overline{f_{xx}} , \\ &\quad + i\lambda q'v\overline{u_{xx}} dx - i\lambda qv\overline{u_{xx}}|_0^{\ell_1} . \end{aligned}$$

Para $q = 1$ tenemos

$$\int_0^{\ell_1} q \frac{1}{2} \frac{d}{dx} (|v_x|^2 + |u_{xxx}|^2) dx = \int_0^{\ell_1} qg\overline{u_{xxx}} - qv_x \overline{f_{xx}} dx - i\lambda qv\overline{u_{xx}}|_0^{\ell_1} ,$$

estimando el término puntual

$$-i\lambda qv\overline{u_{xx}}|_0^{\ell_1} = -i\lambda qv(\ell_1)\overline{u_{xx}}(\ell_1) \leq \frac{c|\lambda|}{|\lambda|^{1/4}} (\|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + c \|F\|_{\mathcal{H}}^2)^{1/2} .$$

Por las derivadas intermedias y usando la ecuación resolvente

$$\begin{aligned} \|u_{xxx}\| &\leq \|u_{xx}\|^{1/2} \|u_{xxxx}\|^{1/2} \leq c|\lambda|^{1/2} \|v\|^{1/2} \|u_{xx}\|^{1/2} + c\|U\|_{\mathcal{H}}^{1/2} \|F\|_{\mathcal{H}}^{1/2} , \\ \|v_x\| &\leq c\|v\|^{1/2} \|v_{xx}\|^{1/2} \leq c|\lambda|^{1/2} \|v\|^{1/2} \|u_{xx}\|^{1/2} + c\|U\|_{\mathcal{H}}^{1/2} \|F\|_{\mathcal{H}}^{1/2} . \end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned} \int_0^{\ell_1} q \frac{1}{2} \frac{d}{dx} (|v_x|^2 + |u_{xxx}|^2) dx &= \int_0^{\ell_1} qg\overline{u_{xxx}} - qv_x\overline{f_{xx}} dx - i\lambda qv\overline{u_{xx}} \Big|_0^{\ell_1}, \\ &\leq c|\lambda|^{1/2} \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + c|\lambda|^{1/2} \|F\|_{\mathcal{H}}, \\ &\quad + \frac{c|\lambda|}{|\lambda|^{1/4}} (\|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + c\|F\|_{\mathcal{H}}^2). \end{aligned}$$

Dividiendo todo por $|\lambda|$ obtenemos

$$\frac{c}{\lambda} \left| \int_0^{\ell_1} q \frac{d}{dx} (|v_x|^2 + |u_{xxx}|^2) dx \right| \leq \frac{c}{|\lambda|^{1/4}} (\|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + c\|F\|_{\mathcal{H}}^2).$$

□

Finalmente tenemos lo necesario para probar el resultado principal del capítulo, la diferenciabilidad.

Teorema 5.5 *El semigrupo asociado al modelo de vigas visco elástica es diferenciable*

Prueba.- Del Teorema 5.9 tenemos

$$\frac{c}{\lambda} \left| \int_0^{\ell_1} \frac{d}{dx} (|v_x|^2 + |u_{xxx}|^2) dx \right| \leq \frac{c}{|\lambda|^{1/4}} (\|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + c\|F\|_{\mathcal{H}}^2).$$

Esto es para $q(x) = 1$ y por el teorema fundamental del cálculo

$$\frac{c}{\lambda} |u_{xxx}(0)|^2 \leq \frac{c}{|\lambda|} (|v_x(\ell_1)|^2 + |u_{xxx}(\ell_1)|^2) + \frac{c}{|\lambda|^{1/4}} (\|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + c\|F\|_{\mathcal{H}}^2),$$

recordando la condición de transmisión $\alpha u_{xxx}(\ell_1^-) = w_{xxx}(\ell_1^+)$ y además de los Lemas 5.5 y 5.6

$$\begin{aligned} \|v_x\|_{L^\infty} &\leq \frac{c}{|\lambda|^{1/8}} (\|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + c\|F\|_{\mathcal{H}}^2), \\ \|w_{xxx}\|_{L^\infty} &\leq c|\lambda|^{3/8} (\|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + c\|F\|_{\mathcal{H}}^2)^{1/2}. \end{aligned}$$

Obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{c}{\lambda} |u_{xxx}(0)|^2 &\leq \frac{c}{|\lambda|} (|v_x(\ell_1)|^2 + |u_{xxx}(\ell_1)|^2) + \frac{c}{|\lambda|^{1/4}} (\|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + c\|F\|_{\mathcal{H}}^2), \\ &\leq \frac{c}{|\lambda|^{5/8}} (\|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + c\|F\|_{\mathcal{H}}^2) + \frac{c}{|\lambda|^{1/4}} (\|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + c\|F\|_{\mathcal{H}}^2). \end{aligned}$$

Así tenemos para λ grande que

$$\frac{c}{\lambda} |u_{xxx}(0)|^2 \leq \frac{c}{|\lambda|^{1/4}} (\|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + c \|F\|_{\mathcal{H}}^2) .$$

Usando el Lema 5.8

$$\left| \frac{u_{xx}(0)}{2\sigma} \right| \leq \left| \frac{u_{xxx}(0)}{2\sigma^2} \right| + e^{-\sigma\ell_0} [u_x(\ell_0) + \sigma u(\ell_0)] + c \frac{e^{-\sigma\ell_0}}{\sigma^2} \|F\|^2 + \frac{1}{\sigma^{5/2}} \|F\|^2 ,$$

donde $\sigma = \sqrt{|\lambda|}$. Multiplicando por $2\sqrt{|\lambda|}$ y elevando al cuadrado

$$|u_{xx}(0)|^2 \leq \frac{c}{|\lambda|^{1/4}} (\|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + c \|F\|_{\mathcal{H}}^2) .$$

Usando el Teorema 5.4 para $q = x - \ell_1$ tenemos

$$\left| - \int_0^{\ell_1} q \frac{d}{dx} \mathcal{J}(x) dx + \int_0^{\ell_1} q' |u_{xx}|^2 dx \right| \leq \frac{c}{|\lambda|^{1/2}} (\|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + c \|F\|_{\mathcal{H}}^2) ,$$

esto es

$$\int_0^{\ell_1} \mathcal{J}(x) dx + \int_0^{\ell_1} |u_{xx}|^2 dx \leq \frac{\ell_1}{2} |u_{xx}(0)|^2 + \frac{c}{|\lambda|^{1/2}} (\|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + c \|F\|_{\mathcal{H}}^2) ,$$

de donde sigue que

$$\int_0^{\ell_1} \mathcal{J}(x) dx \leq \frac{c}{|\lambda|^{1/4}} (\|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + c \|F\|_{\mathcal{H}}^2) .$$

Usando el Teorema 5.3, la solución de la ecuación resolvente verifica

$$|\lambda| \int_{\ell_1}^{\ell} |v|^2 + \alpha |u_{xx}|^2 dx \leq c \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + c \|F\|_{\mathcal{H}}^2 .$$

Uniendo las dos estimaciones anteriores tenemos

$$\int_0^{\ell} \mathcal{J}(x) dx \leq \frac{c}{|\lambda|^{1/4}} (\|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + c \|F\|_{\mathcal{H}}^2) .$$

Como $|\lambda|$ va al infinito la expresión anterior es equivalente a

$$|\lambda|^{1/4} \|(i\lambda I - A)^{-1}\| \leq c, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}. \quad (5.42)$$

Mediante el Corolario 5.1 hemos demostrado la diferenciabilidad del Semigrupo. \square

Como consecuencia de la diferenciabilidad tenemos la estabilidad exponencial del modelo, en efecto.

Teorema 5.6 *El semigrupo asociado al modelo de vigas visco elástica decae exponencialmente para cero.*

Prueba.- Primero recordemos que en el Teorema 4.1 probamos que $0 \in \rho(A)$. Más aún, por ser el resolvente un conjunto abierto tenemos que

$$] - \varepsilon, \varepsilon[\subset \rho(A)$$

Siendo el resolvente una función holomorfa [ver Teorema 2.14], tenemos que

$$\|(i\lambda I - A)^{-1}\| \leq C, \quad \forall \lambda \in] - \varepsilon, \varepsilon[.$$

Usando la desigualdad (5.42) tenemos que

$$\|(i\lambda I - A)^{-1}\| \leq \frac{C}{|\lambda|^{1/4}}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \setminus] - \varepsilon, \varepsilon[,$$

de donde sigue que

$$\|(i\lambda I - A)^{-1}\| \leq C, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Por el Teorema 5.6 concluimos que el sistema es exponencialmente estable.

5.1. Orden de las componentes

De la forma que se probó la diferenciabilidad es simple verificar que el orden de las componentes de la viga no incide en la diferenciabilidad del modelo, observe los siguientes modelos.

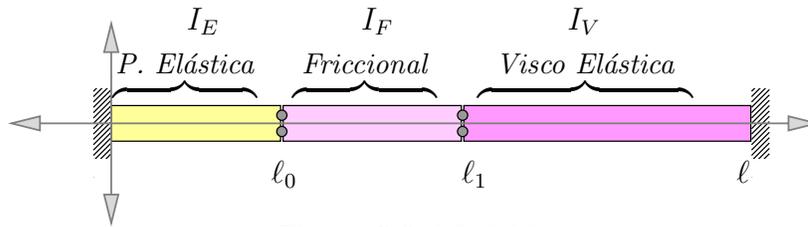


Figura 5.2: Model I

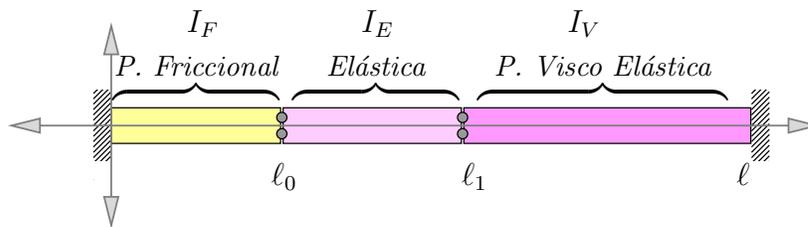


Figura 5.3: Model II

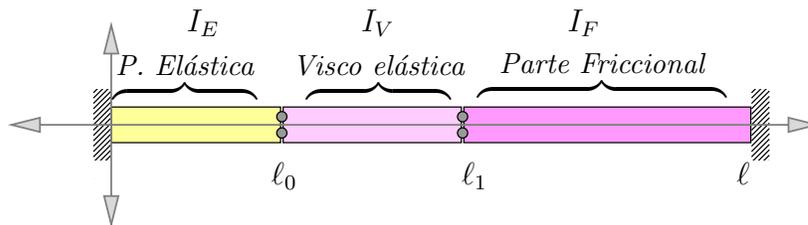


Figura 5.4: Model III

Es simple verificar que todas las otras opciones de clasificación de la configuración son equivalentes a las tres anteriores (Figuras 5.2,5.3,5.4) mediante el cambio de la variable $x \mapsto \ell - x$. De las cuales se pueden separar en 2 casos que dependen de la ubicación de la componente Visco Elástica, la cual puede ubicarse en un extremo o al centro de la viga. Es decir, para el Modelo I y el Modelo II tenemos las desigualdades de observabilidad en el intervalo $I_E \cup I_F$. Mientras que para el Modelo III no hay observabilidad en el intervalo $I_E \cup I_V$. Por lo tanto, se utilizan diferentes procedimientos para mostrar diferenciabilidad del semigrupo correspondiente.

Capítulo 6

Conclusiones y Discusión de resultados

6.1. Buena colocación del modelo

En el capítulo 4 hemos probado la buena colocación de la ecuación de vigas visco elástica Euler-Bernoulli con disipación localizada, hemos probado que el operador del semigrupo asociado al modelo visco elástico es disipativo y aunque el dominio posea discontinuidades puntuales, mostramos mediante el Teorema 5.6 que es exponencialmente estable, la estabilidad más fuerte conocida. Probamos también por medio del Teorema de representación de Riesz que las soluciones son fuertes.

6.2. Diferenciabilidad y regularidad

Probamos que el semigrupo asociado a la ecuación de vigas de tipo Euler-Bernoulli con amortiguación localizada de tipo Kelvin-Voigt y componentes visco-elástica, elástica sin amortiguamiento, y una componente friccional externa, posee propiedad de diferenciabilidad, más aún por el Teorema 2.19, el semigrupo asociado es infinitamente diferenciable. Sin embargo, no pudimos conseguir la analiticidad.

El resultado complementa las diversas investigaciones tales como la encontradas en los artículos [6], [4] y [11]. Además abre opciones de investigación debido a la introducción de la fuerza externa friccional, queda pendiente estudiar si la componente agregada mejora o empeora la tasa de decaimiento exponencial. En [6] se prueba la falta de analiticidad de un modelo similar, pero con sólo dos componentes, una elástica y otra visco-elástica de tipo Kelvin-Voigt, lo que nos lleva a inferir que nuestra función es de clase Gevrey (Diferenciable pero no analítica).

Observe que al ser un modelo con soluciones C_0^∞ existe una serie de potencias que lo representa, mas dicha serie no converge, es decir con radio de convergencia cero, por lo cual su serie de potencia no presenta mayor funcionalidad.

Notemos además que la diferenciabilidad más la condición de que $0 \in \rho(A)$ para un semigrupo holomorfo, implica estabilidad exponencial.

6.3. Orden de las componentes

De la forma que se probaron las propiedades cualitativas no es muy difícil ver que el orden de las componentes en la viga no incide en la estabilidad y diferenciabilidad. Solamente queda verificar el Modelo III, en donde las primeras dos componentes (I_E, I_V) probar la diferenciabilidad es un resultado análogo al Modelo I y $\alpha_0 = 0$

Producto de la falta de observabilidad en la componente visco elástica, debemos estimar la Diferenciabilidad para la componente friccional por separado. Así sustituyendo $x \mapsto \ell - x$ en el Lema 5.8, la demostración se vuelve completamente análoga a la prueba del Teorema 5.5 . Por tanto el orden de las componentes no influyen al momento de encontrar las propiedades cualitativas.

6.4. Trabajos Futuros

1. Probar la tasa de optimalidad ya sea para el decaimiento exponencial (calcular la cota superior del espectro), tanto como para la diferenciabilidad.
2. Probar que no hay analiticidad para el sistema de componentes elástico-friccional-viscoso.
3. Probar en placas bidimensionales.
El problema principal sería abordar los términos de la frontera, ya que la derivada normal, pasaría a ser tangencial.
4. Discretizar el sistema y aplicar resultados de métodos numéricos. Recuerde que los coeficientes son constantes en su respectivas componentes pero no en todo el sistema.
5. Estudiar si la incorporación de la componente friccional acelera la estabilidad exponencial o la ralentiza.

Bibliografía

- [1] R. A. Adams, Sobolev Spaces. Academic Press, New York 1975.
- [2] H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, New York 2010.
- [3] G. Chen, S. A. Fulling, F. J. Narcowich, and S. Sun (1991), *Exponential decay of the energy of evolution equation with locally distributed damping*, SIAM J. Appl. Math. 51, pp. 266-301.
- [4] Li, Fushan; Asymptotic analysis of linearly viscoelastic shells-justification of Koiter's shell, *Asymptotic Analysis Vol. 54, (1-2), pages 51- 70, (2007)*
- [5] Z. Liu And S. Zheng (1999), *Semigroups Associated with dissipative Systems*, CRC Res. Notes in math. 398. Chapman and Hall, London.
- [6] K. Liu and Z. Liu (1998), *Exponential decay of energy of the Euler Bernoulli beam with locally distributed Kelvin-Voigt damping* , SIAM J. Control Optim., 36(3), pp. 1086-1098.
- [7] M. Nakao (1996), *Decay of solutions of the wave equation with a local nonlinear dissipation*, Math. Ann. 305, pp. 403-417.
- [8] Pazy, A. *Semigroup of linear operators and applications to partial differential equations*. Springer-Verlag, New york, (1983).
- [9] F. HUANG, *On the mathematical model for linear elastic systems with analytic damping*, SIAM J. Control Optim., 26 (1988), No.3, pp. 714-724.

- [10] F. HUANG AND K. LIU, *Holomorphic property and exponential stability of the semigroup associated with linear elastic systems with damping*, Ann. Differential Equations, 4 (1988), No.4, pp. 411-424.
- [11] E. Zuazua (1990), *Exponential decay for the semilinear wave equation with locally distributed damping*, Commun. Partial Differ. Equations 15(2), 205-235.
- [12] J. E. Muñoz (2004), *Teoria das Distribuições e Equações Diferenciais Parciais*, Rio de Janeiro 2008.
- [13] G. CHEN, S. A. FULLING, F. J. NARCOWICH, AND S. SUN, *Exponential decay of the energy of evolution equation with locally distributed damping*, SIAM J. Appl. Math., 51 (1991), pp. 266-301.
- [14] K.Engel and R. Nagel; *One Parameter semigroups for linear evolution equations*, Springer-Verlag New York Vol. , (), pages 1- 589, (2000). doi:10.1007/b97696