



MAGÍSTER EN MATEMÁTICA

MENCIÓN MATEMÁTICA APLICADA O MENCIÓN ESTADÍSTICA

MODELADO Y ESTIMACIÓN DE DATOS
GEOREFERENCIADOS CON ASIMETRÍA Y/O COLAS
PESADAS MEDIANTE CAMPOS ALEATORIOS TUKEY- h Y
TUKEY- hh

Tesis presentada al Programa de Magíster en Matemática, Mención (Matemática Aplicada o Mención Estadística) del Departamento de Estadística y Departamento de Matemática de la Universidad del Bío Bío como parte de los requisitos para la obtención del grado de Magíster en Matemática con Mención en (Matemática Aplicada o Estadística) de la Universidad del Bío-Bío.

POR CRISTIAN LÓPEZ SALINAS

DIRECTOR: CHRISTIAN CAAMAÑO

MODELADO Y ESTIMACIÓN DE DATOS
GEOREFERENCIADOS CON ASIMETRÍA Y/O COLAS
PESADAS MEDIANTE CAMPOS ALEATORIOS TUKEY- h Y
TUKEY- hh

POR

CRISTIAN LÓPEZ

Tesis presentada al Programa de Magíster en Matemática, Mención (Matemática Aplicada o Mención Estadística) del Departamento de Estadística y Departamento de Matemática de la Universidad del Bío Bío como parte de los requisitos para la obtención del grado de Magíster en Matemática con Mención en (Matemática Aplicada o Estadística) de la Universidad del Bío-Bío.

APROBADA POR:

Christian Caamaño

Director

Departamento Estadística, Universidad del Bío-Bío

Tarik Faouzi

Profesor Informante

Departamento Estadística, Universidad del Bío-Bío

Moreno Bevilacqua

Profesor informante (externo)

Facultad de Ingeniería y Ciencias, Universidad Adolfo Ibáñez

UNIVERSIDAD DEL BÍO-BÍO

FACULTAD DE CIENCIAS

DEPARTAMENTO DE (MATEMÁTICA O ESTADÍSTICA)

Agradecimientos

Quiero expresar mi agradecimiento a todas las personas que han acompañado en mi proceso de formación académica. En primer lugar, al profesor Christian Caamaño por su incondicional apoyo durante mi proceso de aprendizaje. También quiero agradecer al profesor Moreno Bevilacqua que fue un importante guía para el desarrollo de nuestra investigación. A mis profesores del Magíster de la Universidad del Bío-Bío por sus consejos y sabiduría. Finalmente, a mi familia que siempre me ha apoyado, en especial a mi madre María Inés Salinas.

Muchas gracias.

RESUMEN

En los últimos años ha habido un interés creciente en proponer métodos con estimaciones escalables para datos geoestadísticos, muchas veces considerando un campo aleatorio gaussiano que no se ajusta de mejor forma a las características del proceso. En esta investigación nos enfrentamos a este tipo de problema para los datos espaciales con distribución no gaussianas.

La estimación de máxima verosimilitud para un campo aleatorio no gaussiano es, en general, más exigente computacionalmente que el caso gaussiano. La log-verosimilitud compuesta es un interesante método de estimación alternativo que equilibra la eficiencia estadística y la complejidad computacional.

En primer lugar, proponemos un esquema de ponderación novedoso basado en vecinos más cercanos para la estimación de verosimilitud basada en pares. El nuevo tipo de pesos ponderados permite manejar conjuntos de datos masivos gaussianos o no gaussianos con respecto a las ponderaciones propuestas anteriormente basadas en distancias.

Luego aplicamos la función de ponderación propuesta a la estimación de una nueva clase de campos aleatorios no gaussianos denominados campos aleatorios Tukey-*hh*. Nuestra propuesta de campos aleatorios de Tukey-*hh* tienen distribuciones marginales flexibles, posiblemente sesgadas y/o con cola pesada y, como consecuencia, tienen una amplia gama de aplicaciones. Proporcionamos expresiones analíticas asociadas para la función de covarianza y para la distribución bivariada y multivariante.

En un extenso estudio de simulación, estudiamos la eficiencia estadística de la función de ponderación propuesta al estimar los parámetros del campo aleatorio de Tukey-*hh* con verosimilitud por parejas marginal y condicional.

Palabras Claves: Campos aleatorios no gaussianos, Pesos ponderados, Verosimilitud compuesta, Campos aleatorios tukey-*hh*, Equilibrio eficiente, Modelación, Predicción.

ABSTRACT

In recent years there has been a growing interest in proposing methods with scalable estimates for geostatistical data, often considering a Gaussian random field that does not better fit the characteristics of the process. In this research we face this type of problem for spatial data with non-Gaussian distribution.

The maximum likelihood estimate for a non-Gaussian random field is generally more computationally demanding than the Gaussian case. Compound log-likelihood is an interesting alternative estimation method that balances statistical efficiency and computational complexity.

First, we propose a novel nearest neighbor-based weighting scheme for pair-based likelihood estimation. The new type of weighted weights allows handling massive Gaussian or non-Gaussian data sets with respect to previously proposed distance-based weights.

We then apply the proposed weighting function to the estimation of a new class of non-Gaussian random fields called Tukey-*hh* random fields. Our proposed Tukey-*hh* random fields have flexible, possibly skewed and/or heavy-tailed marginal distributions and as a consequence have a wide range of applications. We provide associated analytical expressions for the covariance function and for the bivariate and multivariate distribution.

In an extensive simulation study, we studied the statistical efficiency of the proposed weighting function by estimating the Tukey-*hh* random field parameters with marginal and conditional pairwise likelihood.

Key Words: Non-Gaussian Random Fields, Weighted Weights, Compound Likelihood, Tukey- *hh* Random Fields, Efficient Equilibrium, Modeling, Prediction.

Índice general

1. Introducción	9
2. Objetivos	13
2.1. Objetivo General	14
2.2. Objetivos Específicos	14
2.3. Hipótesis	14
3. Metodología	15
3.1. Modelado Espacial	16
3.1.1. Procesos Espaciales	16
3.1.2. Estacionalidad	16
3.1.3. Campos aleatorios Gaussianos	18
3.1.4. Funciones de covarianza y propiedades de variogramas	20
3.1.5. Isotropía y algunos modelos paramétricos	22
3.1.6. Propiedades geométricas de un campo aleatorio	25
3.1.7. Modelado de datos espaciales	28
3.1.8. Estimación de parámetros	29
3.1.9. Predicción	32
3.1.10. Campos aleatorios no Gaussianos	33
4. Resultados: Modelación, estimación y predicción	35
4.1. Modelado y estimación espacial con datos de asimetría y/o colas pesadas con campos aleatorios Tukey- hh	36
4.1.1. Campo Aleatorio y Distribución Tukey- h	36
4.1.2. Campo Aleatorio Tukey- hh	38
4.2. Estimación y Predicción de campos aleatorios Tukey- hh	48
4.3. Rendimiento de la estimación de verosimilitud compuesta.	48
5. Conclusiones	55
5.1. Conclusiones	56

6. Bibliografía	59
7. Apéndice A	65
7.1. Prueba Lema 4.1	66
7.2. Prueba Teorema 4.3	67
7.3. Prueba Teorema 4.4	69
8. Apéndice B	71
8.1. Simulación variable aleatorio Tukey- <i>hh</i>	72
8.2. Contorno Tukey- <i>hh</i>	73
8.3. Correlación Tukey- <i>hh</i>	77
8.4. Simulación, estimación y predicción campo aleatorio Tukey- <i>hh</i> usando verosimilitud por parejas ponderadas	79

Capítulo 1

Introducción

Durante los últimos años, la estadística espacial viene tomando fuerza en diferentes áreas del conocimiento. El modelado de variables medidas en diferentes sitios de una región con continuidad espacial y que presentan alguna estructura de correlación espacial ha sido desarrollada desde los años sesenta (Cressie 1993), con el desarrollo de los análisis geoestadísticos (Matheron 1962), incrementándose su uso en diferentes disciplinas científicas tales como la minería, geología, ecología, ciencias ambientales, salud pública y climatología.

En los estudios geoestadísticos el modelado y predicción de un determinado fenómeno, se obtiene importantes beneficios si se considera la evolución conjunta del proceso en el espacio-tiempo. Dado que se necesita manipular grandes conjuntos de datos obtenidos con una elevada resolución espacial y periodicidad temporal, se hará indispensable la utilización de métodos computacionales intensivos para su manejo.

Los procesos estocásticos gaussianos (GRF) se encuentran entre las herramientas más populares para analizar datos espaciales porque se pueden caracterizar simplemente por una estructura media y una función de covarianza válida. Se han estudiado varias funciones de covarianza paramétricas y no paramétricas en la literatura y han demostrado ser útiles en la práctica, lo que mejora aún más el poder de modelado de los GRF. Desafortunadamente, la Gaussianidad es una suposición fuerte que rara vez se cumple en la realidad. Los datos recopilados de una amplia gama de aplicaciones a menudo muestran una fuerte asimetría y/o colas pesadas en sus distribuciones, por ejemplo, datos de velocidad del viento (Zhu y Genton 2012), datos de temperatura (North et al. 2011) y datos de precipitación (Marchenko y Genton 2010), por mencionar sólo algunos. Por lo tanto, el marco gaussiano no es realista porque los datos observados tienen características específicas como asimetría y/o colas pesadas.

Desafortunadamente, otro problema de uso práctico de los campos aleatorios gaussianos es el punto de vista computacional. La estimación de los campos aleatorios gaussianos con el método de máxima verosimilitud implica operaciones que implican un gran almacenamiento de memoria, relacionadas potencialmente con el número de sitios de ubicación, lo que puede ser computacionalmente impráctico cuando se trabaja con datos moderadamente grandes. Este hecho motiva la búsqueda de métodos de estimación con un buen equilibrio entre complejidad computacional y eficiencia estadística. El problema computacional para la estimación del caso gaussiano puede ser aún más difícil para los campos aleatorios no gaussianos dependiendo del tipo de proceso.

En los últimos años, se han propuesto diferentes enfoques para analizar este tipo de datos. La transformación de procesos gaussianos (trans-gaussianos) es un método general para modelar datos espaciales no gaussianos obtenidos mediante la aplicación de algunas transformaciones no lineales a los datos originales (Allcroft y Glasbey, 2003; De Oliveira et al., 1997; De Oliveira, 2006). Sin embargo, en muchos casos, puede ser difícil encontrar una transformación no lineal adecuada con inversa explícita. Se ha propuesto un proceso trans-gaussiano flexible basado en la distribución Tukey g-h en Xua y Genton (2017) para modelar datos espaciales con asimetría y/o colas pesadas. En este caso, la transformación no admite una inversa explícita y, como consecuencia, los métodos basados en la verosimilitud no son fácilmente aplicables.

Wallin y Bolin (2015) propusieron campos aleatorios no gaussianas derivadas de ecuaciones diferenciales parciales estocásticas para modelar datos espaciales no gaussianos. Sin embargo, este enfoque está restringido al modelo de covarianza de Matérn (Stein, 1999). El marco de cópula se ha adaptado en el contexto espacial para tener en cuenta las posibles desviaciones de la distribución gaussiana, en particular utilizando la cópula gaussiana (Bardossy, 2006; Kazianka y Pilz, 2010; Masarotto y Varin, 2012).

La mezcla y convolución de procesos gaussianos y no gaussianos es una estrategia atractiva para modelar datos espaciales con asimetría. Por ejemplo, Zhang y El-Shaarawi (2010) propusieron una convolución mitad-gaussiana (Gaussian-Half) para construir un proceso con distribuciones marginales del tipo sesgo-gaussiano (Azzalini y Capitanio, 2014). Zareifard y col. (2018) desarrollaron la inferencia bayesiana para la estimación de un proceso con distribuciones marginales asimétricas obtenidas a través de la convolución de procesos gaussianos y log-gaussianos. Recientemente, Bevilacqua et al. (2020) propuso un enfoque de mezcla de esca-la gaussiana-inversa y Gamma para obtener un campo aleatorio con distribución

marginal t y se centró en la estimación de verosimilitud por parejas (PL).

Entre los diferentes métodos de estimación propuestos en la literatura para afrontar el problema computacional asociado a la verosimilitud gaussiana, se encuentra el método de verosimilitud compuesta (CL) (Lindsay, 1988, Varin et al. 2011). es un enfoque general que se ha aplicado con éxito para la estimación de RF gaussiana. El método de estimación de CL se basa en la probabilidad de eventos marginales o condicionales (ver Varin et al. 2011 para una revisión completa) y puede ser útil cuando es difícil evaluar o especificar la probabilidad total. Por ejemplo, Stein et al. (2004) propusieron un CL basado en eventos condicionales mejorando una propuesta previa de Vecchia (1988). Más recientemente, Bevilacqua et al. (2015) consideraron un CL ponderado basado en pares y Eidsvik et al. (2013) desarrollaron una probabilidad compuesta de bloques gaussianos por pares en la línea similar de Caragea y Smith (2006).

Un beneficio de usar CL basado en pares con respecto a otros tipos de CL es que en algunos campos aleatorios no gaussianos la distribución multivariante es desconocida o difícil de calcular, pero la densidad bivariada es conocida y relativamente simple de evaluar. Por ejemplo, el campo aleatorio Bernoulli por Heagerty y Lele (1998) o la clase general de modelos mixtos espaciales generalizados (Varin et al. 2011) del campo t aleatorio propuesto en (Bevilacqua et al. 2020) tiene distribuciones bivariadas conocidas pero la trivariada o más en general la distribución multivariante son desconocidos o computacionalmente imprácticos incluso para n pequeños. En este caso, el uso de CL basado en bloques independientes podría resultar problemático. Como consecuencia, la CL basada en pares tiene potencialmente una aplicabilidad más amplia con respecto a otros tipos de CL y puede aplicarse siempre que esté disponible el bivariado de la RF no gaussiana. Por esta razón, nos enfocamos en CL basados en pares, en particular consideramos la probabilidad marginal y condicional por pares (Bevilacqua y Gaetan 2015).

Nuestra propuesta, en primer lugar, propone un nuevo esquema de ponderación basado en el vecino más cercano para la estimación de CL basada en pares. Este tipo de ponderaciones permite realizar estimaciones para conjuntos de datos masivos y mejorar la complejidad computacional asociada a ponderaciones de propuestas anteriores basadas en distancias (Bevilacqua, Gaetan, Mateu, y Porcu (2012)). En particular, proponemos ponderaciones simétricas basadas en vecinos más cercanos de un orden fijo que se pueden calcular utilizando algoritmos de árbol k -dimensionales con una complejidad de orden $n \log(n)$ y un almacenamiento de orden n .

La segunda propuesta se incluye en la clase de transformación de un campo aleatorio gaussiano y es similar al enfoque de Xua y Genton (2017), basado en la distribución de Tukey $g - h$, pero con algunos beneficios adicionales. Específicamente, proponemos un campo aleatorio *tukey- hh* que se define como una generalización del campo aleatorio *tukey- h* (Xua y Genton (2017)) y que tiene en cuenta tanto las colas pesadas como la asimetría. Realizando un estudio de simulación observamos la eficiencia estadística de la función de ponderación propuesta por vecindades con respecto a la función de ponderación basada en distancias al estimar los parámetros del campo aleatorio de *Tukey- hh* con verosimilitud par marginal y condicional. Resulta que la función de ponderación propuesta también mejora la eficiencia estadística de la verosimilitud par marginal y condicional. métodos con respecto a la función de peso se basa en distancias.

La metodología considerada en este artículo se implementa en el paquete R GeoModels (Bevilacqua y Morales-Oñate, 2018). El resto de la investigación está organizado de la siguiente manera. En el Capítulo 2, presentamos los principales objetivos de investigación.

En el Capítulo 3, abordaremos los fundamentos previos que sostiene nuestra investigación, revisando la estimación de CL basada en pares e introduciendo un nuevo esquema de ponderación basado en vecinos más cercanos.

En el Capítulo 4, presentamos los campos aleatorios *Tukey- hh* , estudiamos las propiedades geométricas y de segundo orden y proporcionamos una expresión analítica para la distribución bivariada y la distribución multivariante. Además de presentar un estudio de modelación, simulación y predicción de campos aleatorios *tukey- hh* . Finalmente, el Capítulo de conclusiones seguido del Apéndice A que contiene las demostraciones a los teoremas planteados en la investigación, y luego el Apéndice B con los códigos utilizados en el desarrollo del Capítulo 4.

Capítulo 2

Objetivos

En este capítulo se presentan los principales objetivos que se abordarán en la investigación. En primer lugar el objetivo general que expone la idea y finalidad de nuestro trabajo, junto con los objetivos específicos que detallan los procesos necesarios para la completa realización de nuestra investigación, para finalmente exponer nuestra hipótesis que formula proposiciones tentativas al modelo estudiado.

2.1. Objetivo General

- Modelar datos espaciales o espacio-temporales con asimetría y/o colas pesadas utilizando campos aleatorios *tukey-h* y *tukey-hh*.

2.2. Objetivos Específicos

- Construir los campos aleatorios *tukey-hh* para el análisis de un conjunto de datos espacial o espacio temporales con asimetría y/o colas pesadas.
- Estudiar la distribución bivariada, la función de covarianza y las propiedades geométricas y de segundo orden de los campos aleatorios *tukey-hh*.
- Realizar amplios estudios de simulación para investigar el desempeño de la estimación de verosimilitud por parejas para los campos aleatorios *tukey-h* y *tukey-hh*.
- Aplicar estimación de verosimilitud por pares utilizando un nuevo criterio de pesos ponderados.

2.3. Hipótesis

- Creemos que la clase de campos aleatorios *tukey-h* y *tukey-hh* son una herramienta útil para modelar datos espaciales o espacio-temporales con asimetría y/o colas pesadas.

Capítulo 3

Metodología

En este capítulo, se abordan fundamentos previos que sostienen nuestra investigación. Veremos conceptos teóricos del modelado espacial, considerando la dependencia de las observaciones, junto con la teoría y características de los campos aleatorios Gaussianos y algunos procesos no gaussianos.

3.1. Modelado Espacial

3.1.1. Procesos Espaciales

Revisamos algunos conceptos básicos que son importantes para la comprensión de los procesos espaciales. Denotamos como $Z(\mathbf{s})$ un conjunto de variables aleatorias indexadas en \mathbf{s} , donde $\mathbf{s} \in D \subset \mathbb{R}^d$ representa un conjunto de índices o localizaciones pertenecientes al subconjunto D dentro de un espacio de dimensión d .

De manera práctica, las observaciones o datos corresponden a una realización o muestra del proceso Z , por lo que se puede expresar como un vector de observaciones de la forma $Z(s_1), Z(s_2), \dots, Z(s_n)$, para $s_1, s_2, \dots, s_n \in D$. A modo de ejemplo, el conjunto de localizaciones en una dimensión ($d = 1$) puede corresponder a instantes concretos de tiempo; por otro lado si es en dos dimensiones ($d = 2$) puede corresponder a la longitud y latitud en un sistema de coordenadas de un mapa.

Definition 3.1. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad y sea $D \subset \mathbb{R}^d$ un conjunto arbitrario. Para cada $\mathbf{s} \in D$ la función $Z(\mathbf{s}, \cdot) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \omega \rightarrow (\mathbf{s}, \omega)$ es una variable aleatoria, y cualquier colección de variables aleatorias $Z = \{Z(\mathbf{s}, \cdot), \mathbf{s} \in D \subset \mathbb{R}^d\}$ definida en $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ corresponde a un proceso estocástico con conjunto de índices D .

$Z(\mathbf{s})$ es simplemente una variable aleatoria para cada \mathbf{s} y sus propiedades (por ejemplo, media y varianza) se puede describir por su función de distribución. De manera más general, estamos interesados en estudiar toda la colección de variables aleatorias $\{Z(\mathbf{s}), \mathbf{s} \in D\}$ y su función de distribución conjunta (Abrahamsen, 1997).

Definition 3.2. Para un campo aleatorio dado, $Z(\mathbf{s})$, la función de distribución conjunta $F_{Z(\mathbf{s}_1), Z(\mathbf{s}_2), \dots, Z(\mathbf{s}_n)}(z_1, \dots, z_n) : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, 1]$ se define como

$$F_{Z(\mathbf{s}_1), Z(\mathbf{s}_2), \dots, Z(\mathbf{s}_n)}(z_1, \dots, z_n) = Pr(Z(\mathbf{s}_1) \leq z_1, \dots, Z(\mathbf{s}_n) \leq z_n)$$

A partir de esta sección se denominará por campo aleatorio (RF) a cualquier proceso espacial $Z = \{Z(\mathbf{s}), \mathbf{s} \in D\}$ cuya dimensión de índices $\mathbf{s} \in D$ sea mayor o igual a dos, es decir, $\mathbf{s} \in D \subset \mathbb{R}^d$ y $d \geq 2$.

3.1.2. Estacionalidad

Al hacer inferencias sobre la estructura de probabilidad del proceso espacial en base a las observaciones (a menudo, una sola realización del proceso), una suposición simplificadora es la estacionalidad. La estacionalidad, en términos simples,

significa que el campo aleatorio parece similar en diferentes partes del dominio. Hay diferentes tipos de estacionalidad.

Definición 3.3. *Un proceso $Z(\mathbf{s})$ se dice estrictamente estacionario si para todo $\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_n$ y cualquier $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^d$, la distribución conjunta de $Z(\mathbf{s}_1), \dots, Z(\mathbf{s}_n)$ es idéntica a la distribución conjunta de $Z(\mathbf{s}_1 + \mathbf{h}), \dots, Z(\mathbf{s}_n + \mathbf{h})$, es decir,*

$$Pr(Z(\mathbf{s}_1) \leq z_1, \dots, Z(\mathbf{s}_n) \leq z_n) = Pr(Z(\mathbf{s}_1 + \mathbf{h}) \leq z_1, \dots, Z(\mathbf{s}_n + \mathbf{h}) \leq z_n)$$

donde $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{R}$.

Corresponde a la ley de probabilidad de un proceso estrictamente estacionario, que es invariante bajo un cambio en el espacio. Otro tipo de estacionalidad es la estacionalidad débil:

Definición 3.4. *Un proceso $Z(\mathbf{s})$ es débilmente estacionario (WS) si:*

$$E(Z(\mathbf{s})) = \mu$$

y

$$Cov(Z(\mathbf{s}_1), Z(\mathbf{s}_2)) = C(\mathbf{s}_2 - \mathbf{s}_1) = C(\mathbf{h})$$

donde $\mathbf{h} = \mathbf{s}_j - \mathbf{s}_i$ corresponde a la separación de dos localizaciones.

Por tanto, un proceso espacial cuya media no depende de la ubicación espacial y cuya covarianza es función del rezago de separación \mathbf{h} , es un proceso WS. $C(\mathbf{h})$ se llama función de covarianza de $Z(\mathbf{s})$.

Para un proceso WS $Z(\mathbf{s})$, la correlación entre $Z(\mathbf{s}_1)$ y $Z(\mathbf{s}_2)$ se define como:

$$Corr(Z(\mathbf{s}_1), Z(\mathbf{s}_2)) = \frac{C(\mathbf{h})}{C(\mathbf{0})} = \rho(\mathbf{h})$$

Otro supuesto de la estacionalidad débil es cuando el proceso debe tener varianza constante, por lo que cualquier función de covarianza se puede expresar de la siguiente manera:

$$C(\mathbf{h}) = \sigma^2 \rho(\mathbf{h})$$

esto implica que el estudio sobre características de funciones de covarianza puede ser equivalente al estudio sobre funciones de correlación bajo estacionalidad débil, sin pérdida de generalidad (Abrahamsen, 1997).

La estacionariedad estricta (si existen momentos de segundo orden) implica WS mientras que de lo contrario no se cumple. Una hipótesis común con respecto a la distribución de dimensión finita de los campos aleatorios $Z(\mathbf{s})$ es la gaussianidad.

3.1.3. Campos aleatorios Gaussianos

El Campo aleatorio Gaussiano (GRF) es la herramienta de modelización más utilizada en Geoestadística (Gelfand y Schliep, 2016). El motivo de su popularidad es debido a una gran cantidad de propiedades de modelización para observaciones espacialmente dependientes que se pueden derivar a partir de la función de correlación asociada al proceso. Además, para la inferencia de parámetros, las expresiones algebraicas tienden a ser no tan complejas por lo que utilizar campos aleatorios Gaussianos se vuelve muy conveniente.

Definition 3.5. $Z(\mathbf{s})$ es llamado proceso gaussiano si para todo n y $\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_n$ admisibles, la distribución conjunta de $Z(\mathbf{s}_1), \dots, Z(\mathbf{s}_n)$ es normal multivariante.

Dado que la función de distribución conjunta Gaussiana multivariada se caracteriza por la estructura de media y covarianza, fácilmente se pueden atribuir propiedades al campo aleatorio Gaussiano. Por lo que los dos primeros momentos de un proceso gaussiano especifican completamente su estructura de probabilidad. Por tanto, para los procesos gaussianos, WS implica una estacionalidad estricta.

Definition 3.6. Un proceso $Z(\mathbf{s})$ es intrínsecamente estacionario (IS) si:

$$E(Z(\mathbf{s})) = \mu$$

y

$$\text{Var}(Z(\mathbf{s}_1) - Z(\mathbf{s}_2)) = 2\gamma(\mathbf{s}_2 - \mathbf{s}_1) = 2\gamma(\mathbf{h})$$

La función $2\gamma(\mathbf{h})$ se llama variograma. IS es una propiedad más débil que WS. Si el proceso es WS, es fácil verificar que:

$$\text{Var}(Z(\mathbf{s}_1) - Z(\mathbf{s}_2)) = 2C(\mathbf{0}) - 2C(\mathbf{h})$$

y entonces llamamos semivariograma a $\gamma(\mathbf{h}) = C(\mathbf{0}) - C(\mathbf{h})$. Por el contrario, en general IS no implica una estacionariedad débil.

Una manera más general de caracterizar un campo aleatorio Gaussiano es considerando la siguiente representación:

$$G(\mathbf{s}) = \mu(\mathbf{s}) + \sigma G^*(\mathbf{s}) + \tau \epsilon(\mathbf{s}). \quad (3.1)$$

entonces, así definimos G como un campo aleatorio Gaussiano no estacionario cuyas componentes son: $\mu(\mathbf{s}) \in \mathbb{R}$ como una función espacialmente dependiente que puede ser definida tradicionalmente como un arreglo de covariables $M(\mathbf{s})^T \beta$ para un análisis de regresión espacial con vector de parámetros $\beta \in \mathbb{R}^p$.

Además, a la ecuación (3.1) se le incorpora un parámetro de escala al modelo, $\sigma \in \mathbb{R}^+$ y otro campo aleatorio estrictamente estacionario $\epsilon = \{\epsilon(\mathbf{s}), \mathbf{s} \in D\}$ de media 0, varianza 1 y con correlación espacial nula, además de ser independiente de G^* un campo aleatorio Gaussiano estacionario débil con $E[G^*(\mathbf{s})] = 0$, $Var[G^*(\mathbf{s})] = 1$ y $Corr[G^*(\mathbf{s}_i), G^*(\mathbf{s}_j)] = \rho(h)$.

La ventaja de considerar una representación del tipo (3.1) para un campo aleatorio Gaussiano es que permite realizar el análisis de regresión y de dependencia espacial dado que los momentos del campo aleatorio (3.1) quedan establecidos por:

$$E[G(\mathbf{s})] = \mu(\mathbf{s}), \quad (3.2)$$

$$Var[G(\mathbf{s})] = \sigma^2 + \tau^2, \quad (3.3)$$

$$Cov[G^*(\mathbf{s}_i), G^*(\mathbf{s}_j)] = \sigma^2 \rho(\mathbf{h}) + \tau^2 I(\mathbf{h} = \mathbf{0}), \quad (3.4)$$

$$Corr[G^*(\mathbf{s}_i), G^*(\mathbf{s}_j)] = \frac{\sigma^2 \rho(\mathbf{h}) + \tau^2 I(\mathbf{h} = \mathbf{0})}{\sigma^2 + \tau^2}, \quad (3.5)$$

para $\tau \in \mathbb{R}_0^+$ es llamado *efecto nugget* el cual representa una variación a pequeña escala (que no se puede diferenciar de un posible error de medición) cuyos efectos en la función de correlación se estudiarán en la siguiente subsección.

Bajo la representación (3.1) de un campo aleatorio Gaussiano, la función de distribución conjunta es dada por:

$$f_G(\mathbf{g}; \boldsymbol{\mu}, \Omega) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |\Omega|^{1/2}} \exp \left\{ \frac{-(\mathbf{g} - \boldsymbol{\mu})^T \Omega^{-1/2} (\mathbf{g} - \boldsymbol{\mu})}{2} \right\} \quad (3.6)$$

para \mathbf{g} un vector n -dimensional de observaciones (conocido también como la realización del campo aleatorio G), $\boldsymbol{\mu} = [\mu(\mathbf{s}_i)]_{i=1}^n$ un vector n -dimensional correspondiente al arreglo de covariables, $\Omega \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ la matriz de covarianzas cuyos elementos se definen por (3.4) y $\rho(\mathbf{h})$ la función de correlación asociada al campo aleatorio G^* .

Los procesos gaussianos juegan un papel central en el modelado de datos espaciales. Las ventajas del supuesto del proceso gaussiano son obvias: permite una teoría de distribución conveniente (por ejemplo, las distribuciones condicionales se obtienen fácilmente de las distribuciones conjuntas). Los procesos gaussianos tienen una teoría general rica, detallada y muy bien entendida. Además, en la mayoría de las aplicaciones, observamos una realización única del proceso en un conjunto finito de ubicaciones. No es fácil criticar una suposición gaussiana ya que solo tenemos un tamaño de muestra de uno de una distribución dimensional finita. Sin embargo, hay situaciones en las que es más apropiado utilizar otros procesos para modelar datos espaciales.

3.1.4. Funciones de covarianza y propiedades de variogramas

La función de covarianza o variograma válido (o permisible) significa que deben respetar algunas restricciones matemáticas. De hecho, no se puede definir una función de covarianza espacial o variograma de una manera totalmente arbitraria. La propiedad clave que debe satisfacer es la definición semi-positiva (Abrahamsen, 1997), es decir, debe cumplir para $\mathbf{s}_i, \mathbf{s}_j \in D$ y $a_i \in \mathbb{R}$ con $i = (1, \dots, n)$:

Definition 3.7. Para un proceso espacial $Z(\mathbf{s})$ con segundos momentos finitos, su matriz de covarianza asociada $C = \{C(\mathbf{s}_i, \mathbf{s}_j)\}_{i,j}^n$, es semi-definida positiva si:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j C(\mathbf{s}_i, \mathbf{s}_j) \geq 0. \quad (3.7)$$

La condición semi-definida positiva es necesaria para la existencia de un campo aleatorio con segundos momentos finitos. Esta condición garantiza que la varianza de las predicciones espaciales no sea negativa. Esto simplemente sigue notando que (3.7) es $Var(\sum_i^n a_i Z(\mathbf{s}_i))$.

Por otro lado, si C es positivo semi-definido, existe un campo aleatorio gaussiano con matriz de covarianza C y media $E(Z(\mathbf{s})) = m < \infty$. Por tanto, la definición positiva es una condición necesaria y suficiente para una función de covarianza.

Si Z es un proceso estacionario, $C(\mathbf{s}_i, \mathbf{s}_j)$ depende solo de $\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_j$ (ver definición 3.4). Entonces podemos usar la función de covarianza $C(\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_j)$ para describir la estructura de covarianza de Z .

El teorema de Bochner (1933) proporciona las condiciones necesarias y suficientes para que una función de covarianza $C(\mathbf{h})$ de un proceso WS sea semidefinida positiva.

Theorem 3.8. (Teorema de Bochner). Para un proceso WS con valor real en \mathbb{R}^d , $C(\mathbf{h})$ es semidefinido positivo si y solo si se puede representar como:

$$C(\mathbf{h}) = \int e^{i\boldsymbol{\omega}^T \mathbf{h}} dF(\boldsymbol{\omega}) \quad (3.8)$$

donde F es una medida positiva, simétrica y finita llamada medida espectral de $C(\mathbf{h})$. Si F es absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue, es decir, $dF(\boldsymbol{\omega}) = f(\boldsymbol{\omega})d(\boldsymbol{\omega})$, entonces $f(\boldsymbol{\omega})$ se llama densidad espectral.

De manera análoga a la función de covarianza, el variograma debe respetar algunas condiciones para ser permisible. Específicamente, para cualquier conjunto de $\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_n$ y cualquier conjunto de a_1, \dots, a_n tal que $\sum_i^n a_i = 0$,

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j \gamma(\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_j) \leq 0. \quad (3.9)$$

Además,

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j \gamma(\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_j) = -E \left(\sum_{i=1}^n (a_i Z(\mathbf{s}_i))^2 \right) \leq 0. \quad (3.10)$$

Las funciones de variograma y covarianza son parámetros del proceso espacial y juegan un papel crítico en el método geoestadístico de análisis de datos espaciales. Ambos son ingredientes importantes de los métodos kriging para la predicción espacial. Los estadísticos están más familiarizados con las funciones de covarianza, mientras que los geoestadísticos prefieren el variograma. En WS, el uso de $C(\mathbf{h})$ y $\gamma(\mathbf{h})$ para fines estadísticos o de predicción es equivalente.

Bajo la hipótesis de estacionalidad de segundo orden, la función de covarianza verifica las siguientes propiedades teóricas:

- i) $C(\mathbf{0}) \geq 0$;
- ii) $C(\mathbf{h}) = C(-\mathbf{h})$ es decir, C es una función par;
- iii) $C(\mathbf{0}) \geq |C(\mathbf{h})|$;
- iv) Si $C_j(\mathbf{h})$ son válidas la función de covarianza $j = 1, \dots, k$ entonces $\sum_{j=1}^k b_j C_j(\mathbf{h})$ es una función de covarianza válida, si $b_j \geq 0, \forall j$;
- v) Si $C_j(\mathbf{h})$ son válidas la función de covarianza $j = 1, \dots, k$ entonces $\prod_{j=1}^k C_j(\mathbf{h})$ es una función de covarianza válida;
- vi) Si $C(\mathbf{0})$ es una función de covarianza válida en \mathbb{R}^d , entonces también es una función de covarianza válida en $\mathbb{R}^p, p \leq d$.

Las propiedades análogas del variograma son:

- i) $\gamma(\mathbf{0}) = 0$;
- ii) $\gamma(\mathbf{h}) = \gamma(-\mathbf{h})$ es decir, γ es una función par;
- iii) $\gamma(\mathbf{h}) \geq 0$;
- iv) Si $\gamma_j(\mathbf{h})$ son variogramas válidos $j = 1, \dots, k$ entonces $\sum_{j=1}^k b_j \gamma_j(\mathbf{h})$ es un variograma válido, si $b_j \geq 0, \forall j$.

3.1.5. Isotropía y algunos modelos paramétricos

Un campo aleatorio WS se dice isotrópico si su función de covarianza $C(\mathbf{h})$ solo depende de $\|\mathbf{h}\|$, donde $\|\cdot\|$ indica la distancia euclidiana, es decir, $C(\mathbf{s}_i, \mathbf{s}_j) = C(\mathbf{h})$, donde $s_i, s_j \in D$ dos localizaciones. La propiedad de isotropía puede pensarse como una propiedad de invariancia bajo rotaciones.

La caracterización de funciones de covarianza o de correlación, si bien no es una tarea sencilla, se presenta de manera unificada en Abrahamsen (1997). El autor señala que cualquier función de correlación isotrópica para campos aleatorios débilmente estacionarios se pueden representar a través del siguiente teorema:

Theorem 3.9. *Para $d \geq 2$, una función $C(\mathbf{h})$ es una función de covarianza isotrópica continua de un campo aleatorio WS en \mathbb{R}^d si y solo si se puede representar como:*

$$C(\mathbf{h}) = 2^{\frac{d-2}{2}} \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \int_0^\infty (\omega\|\mathbf{h}\|)^{-\frac{d-2}{2}} \mathbf{J}_{\frac{d-2}{2}}(\omega\|\mathbf{h}\|) dG(\omega). \quad (3.11)$$

Donde \mathbf{J}_k es una función de Bessel de primera especie de orden k y $G(\cdot)$ una medida no decreciente acotada en \mathbb{R}^+ y cumple que $G(\mathbf{0}) = 0$.

Una forma general de una función de covarianza isotrópica es:

$$C(\mathbf{h}, \psi) = \begin{cases} \sigma^2 \rho(\|\mathbf{h}\|, \psi), & \|\mathbf{h}\| > 0 \\ \sigma^2 + \tau^2, & \|\mathbf{h}\| = 0, \end{cases} \quad (3.12)$$

donde τ es el parámetro llamado *nugget*. Este parámetro describe el comportamiento de la covarianza cerca del origen. Un fenómeno bastante común en las aplicaciones es que el variograma en el origen no alcanza el cero. Esto se debe a la variabilidad a microescala (variabilidad de un proceso espacial que opera a distancias de retardo más cortas que el retardo más pequeño observado en los datos) y/o al error de medición. En la literatura geoestadística, τ es el efecto pepita, $\sigma^2 + \tau^2$ es el umbral y σ^2 es el umbral o varianza parcial.

La familia de funciones de covarianza de Matérn soportada globalmente (Stein, 1999) ha jugado un papel central en las estadísticas espaciales durante décadas, siendo una clase paramétrica flexible con un parámetro que determina la suavidad de las trayectorias del campo espacial subyacente. Se define de la siguiente manera:

$$\mathcal{M}_{\nu, \beta}(r) = \frac{2^{1-\nu}}{\Gamma(\nu)} \left(\frac{r}{\beta}\right)^\nu \mathcal{K}_\nu\left(\frac{r}{\beta}\right), \quad r \geq 0, \quad (3.13)$$

para $\nu > 0$, $\beta > 0$, y es positivo definido en cualquier dimensión $d = 1, 2, \dots$. Aquí, es la función gamma y \mathcal{K}_ν es la función de Bessel modificada del segundo tipo (Abramowitz y Stegun, 1970) de orden ν . La correlación está soportada globalmente porque $\mathcal{M}_{\nu,\beta}(r) > 0$, para $r > 0$. El parámetro ν indexa la diferenciabilidad en media cuadrática de un campo aleatorio gaussiano que tiene una función de correlación de Matérn y sus rutas muestrales asociadas. En particular, para un entero positivo k , las rutas de la muestra son k veces diferenciables, en cualquier dirección, si y solo si $\nu > k$ (Stein, 1999; Banerjee et al., 2004).

Introducimos ahora una generalización del modelo de Matérn propuesto en Bevilacqua et al. (2020). Sea:

$$\delta_{\nu,\mu,\beta} = \beta \left(\frac{\Gamma(\mu + 2\nu + 1)}{\Gamma(\mu)} \right)^{\frac{1}{1+2\nu}}, \quad (3.14)$$

donde $\nu \geq 0$, $\beta > 0$ y $\mu \geq (d + 1)/2 + \nu$ y sea ${}_2F_1$ la función hipergeométrica gaussiana planteada por (Gradshteyn y Ryzhik, 2007), definida como

$${}_2F_1(a, b, c; x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k} \frac{x^k}{k!}, \quad (3.15)$$

con $(s)_k = \Gamma(s + k)/\Gamma(s)$ para $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ siendo el símbolo de Pochhammer y consideramos las restricciones $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ y $x \geq 0$.

El modelo de correlación propuesto en Bevilacqua et al. (2020) es una reparametrización de soporte compacto específico del modelo de Wendland generalizado (Bevilacqua et al., 2019; Gneiting, 2002). Tiene una representación en serie en términos de función hipergeométrica gaussiana ${}_2F_1$ de la siguiente manera:

$$\mathcal{GW}_{\nu,\mu,\delta_{\nu,\mu,\beta}}(r) = \begin{cases} K \left(1 - \left(\frac{r}{\delta_{\nu,\mu,\beta}} \right)^2 \right)^{\nu+\mu} {}_2F_1 \left(\frac{\mu}{2}, \frac{\mu+1}{2}; \nu + \mu + 1; 1 - \left(\frac{r}{\delta_{\nu,\mu,\beta}} \right)^2 \right) & 0 \leq r \leq \delta_{\nu,\mu,\beta} \\ 0 & r > \delta_{\nu,\mu,\beta} \end{cases} \quad (3.16)$$

con $K = \frac{\Gamma(\nu)\Gamma(2\nu+\mu+1)}{\Gamma(2\nu)\Gamma(\nu+\mu+1)2^{\mu+1}}$.

De manera similar al caso Matérn, este modelo permite la parametrización de manera continua de la diferenciabilidad cuadrática media del campo aleatorio gaussiano subyacente y sus rutas muestrales asociadas. Específicamente, las rutas muestrales del modelo de Wendland generalizado son k -veces diferenciables, en cualquier dirección, si y solo si $\nu > k - 0,5$.

El modelo de correlación (3.16) es muy flexible, ya que nos permite considerar funciones de correlación soportadas de forma compacta y global. De hecho, Bevilacqua et al. (2020) muestran que la familia Matérn $\mathcal{M}_{\nu+1/2,\beta}$ es un caso especial de el modelo $\mathcal{GW}_{\nu,\mu,\delta_{\nu,\mu,\beta}}$ cuando $\mu \rightarrow \infty$. Por lo tanto, el parámetro μ sirve para corregir la carencia de la matriz de correlación asociada y permite cambiar el campo de las funciones de covarianza flexibles con soporte compacto, al campo de las funciones de correlación flexibles con soporte global. Tenga en cuenta que el soporte compacto $\delta_{\nu,\mu,\beta}$ depende de ν, β y μ , y es una función creciente de μ .

En el Cuadro 3.1 reportamos el modelo de correlación $\mathcal{GW}_{\nu,\mu,\delta_{\nu,\mu,\beta}}$ para los casos especiales $\nu = 0, 1, 2, 3$ y su caso límite asociado cuando $\mu \rightarrow \infty$, es decir, el modelo de correlación de Matérn $\mathcal{M}_{\nu+1/2,\beta}$.

ν	$\mathcal{GW}_{\nu,\mu,\delta_{\nu,\mu,\beta}}(r)$	$\mathcal{M}_{\nu+1/2,\beta}(r)$
0	$\left(1 - \frac{r}{\delta_{0,\mu,\beta}}\right)_+^\mu$	$e^{-\frac{r}{\beta}}$
1	$\left(1 - \frac{r}{\delta_{1,\mu,\beta}}\right)_+^{\mu+1} \left(1 + \frac{r}{\delta_{1,\mu,\beta}}(\mu + 1)\right)$	$e^{-\frac{r}{\beta}} \left(1 + \frac{r}{\beta}\right)$
2	$\left(1 - \frac{r}{\delta_{2,\mu,\beta}}\right)_+^{\mu+2} \left(1 + \frac{r}{\delta_{2,\mu,\beta}}(\mu + 2) + \left(\frac{r}{\delta_{2,\mu,\beta}}\right)^2 (\mu^2 + 4\mu + 3)\frac{1}{3}\right)$	$e^{-\frac{r}{\beta}} \left(1 + \frac{r}{\beta} + \frac{r^2}{3\beta^2}\right)$
3	$\left(1 - \frac{r}{\delta_{3,\mu,\beta}}\right)_+^{\mu+3} \left(1 + \frac{r}{\delta_{3,\mu,\beta}}(\mu + 3) + \left(\frac{r}{\delta_{3,\mu,\beta}}\right)^2 (2\mu^2 + 12\mu + 15)\frac{1}{5} + \left(\frac{r}{\delta_{3,\mu,\beta}}\right)^3 (\mu^3 + 9\mu^2 + 23\mu + 15)\frac{1}{15}\right)$	$e^{-\frac{r}{\beta}} \left(1 + \frac{r}{2\beta} + \frac{6r^2}{15\beta^2} + \frac{r^3}{15\beta^3}\right)$

Cuadro 3.1: El modelo $\mathcal{GW}_{\nu,\mu,\delta_{\nu,\mu,\beta}}$ con soporte compacto $\delta_{\nu,\mu,\beta}$ (ver ecuación 3.14) para $\nu = 0, 1, 2, 3$ y el límite asociado cuando $\mu \rightarrow \infty$, es decir, el modelo Matérn $\mathcal{M}_{\nu+1/2,\beta}$.

3.1.6. Propiedades geométricas de un campo aleatorio

Son de interés las propiedades de regularidad, como la continuidad y la diferenciabilidad de las rutas muestrales de un campo aleatorio. No obstante, también presentaremos los conceptos (más débiles) de continuidad cuadrática media y diferenciabilidad cuadrática media, ya que están directamente relacionados con la estructura de segundo orden y las propiedades de suavidad de un campo aleatorio.

Continuidad de un campo aleatorio

Como existen diferentes tipos de convergencia para variables aleatorias, existen tipos correspondientes de convergencia para campos aleatorios. Se considerarán tres tipos de continuidad basados en la convergencia casi segura (es decir, la convergencia con probabilidad uno) y la convergencia cuadrática media.

Definition 3.10. *Considere $D \subset \mathbb{R}^d$*

i) Un campo aleatorio $Z(\mathbf{s})$ tiene una ruta de muestreo continua con probabilidad de uno en D si para cada \mathbf{s}_0 para el cual $\|\mathbf{s}_0 - \mathbf{s}\| \rightarrow 0$ donde $\mathbf{s} \rightarrow \mathbf{s}_0$, entonces

$$Pr(\omega : |Z(\mathbf{s}_0, \omega) - Z(\mathbf{s}, \omega)| \rightarrow 0 \text{ cuando } \mathbf{s} \rightarrow \mathbf{s}_0 \text{ para todo } \mathbf{s} \in D) = 1$$

ii) Un campo aleatorio $Z(\mathbf{s})$ es continuo de forma casi segura en D si para cada \mathbf{s}_0 para cuando $\|\mathbf{s}_0 - \mathbf{s}\| \rightarrow 0$ donde $\mathbf{s} \rightarrow \mathbf{s}_0$, entonces

$$Pr(\omega : |Z(\mathbf{s}_0, \omega) - Z(\mathbf{s}, \omega)| \rightarrow 0 \text{ cuando } \mathbf{s} \rightarrow \mathbf{s}_0) = 1 \text{ para todo } \mathbf{s} \in D$$

iii) Un campo aleatorio $Z(\mathbf{s})$ es continuo en media cuadrática en D si para cada \mathbf{s}_0 para cuando $\|\mathbf{s}_0 - \mathbf{s}\| \rightarrow 0$ donde $\mathbf{s} \rightarrow \mathbf{s}_0$, entonces

$$E\{[Z(\mathbf{s}) - Z(\mathbf{s}_0)]^2\} \rightarrow 0 \text{ cuando } \mathbf{s} \rightarrow \mathbf{s}_0 \text{ para todo } \mathbf{s} \in D$$

Cuando tenemos rutas muestrales continuas con probabilidad uno significa que no hay, con probabilidad uno, discontinuidades dentro del dominio completo D . Sin embargo, la continuidad casi segura permite discontinuidades dentro de D . Aquí no hay contradicción; aunque una realización tiene discontinuidades, la probabilidad de encontrar una discontinuidad en una posición particular, digamos \mathbf{s} , es cero. Evidentemente, la continuidad de la ruta de muestra es una propiedad mucho más fuerte que la continuidad casi segura. En general, la continuidad en media cuadrática no está implícita en la continuidad de la ruta de muestra. La continuidad en media cuadrática tampoco implica la continuidad del camino de

la muestra. La continuidad de la ruta de la muestra es una condición mucho más fuerte que depende de un comportamiento mucho más específico de la función de covarianza.

Sin embargo, para los campos aleatorios gaussianos, la continuidad cuadrática media está implícita en las condiciones suficientes para trayectos muestrales continuos. Para los campos aleatorios gaussianos, se establece el siguiente teorema según Alder (1981).

Theorem 3.11. *Sea $Z(\mathbf{s})$ un campo aleatorio gaussiano de media cero con una función de covarianza continua. Entonces si, para algunos $c < 0$ y algunos $\epsilon > 0$,*

$$E\{|Z(\mathbf{s}) - Z(\mathbf{s} + \mathbf{h})|^2\} = \frac{c}{|\log \|\mathbf{h}\||^{1+\epsilon}}$$

entonces el campo aleatorio $Z(\mathbf{s})$ será una ruta de muestra continua con probabilidad uno.

Finalmente, si $Z(\mathbf{s})$ es un proceso acotado, entonces la continuidad casi segura implica una continuidad cuadrática media. Es fácil demostrar que para un campo aleatorio WS, la continuidad del cuadrado medio en \mathbf{s} implica que:

$$\lim_{h \rightarrow 0} E[Z(\mathbf{s}) - Z(\mathbf{s} + \mathbf{h})]^2 = 0$$

Por lo tanto, se muestra fácilmente que para un campo aleatorio WS la continuidad cuadrática media es equivalente a que la función de covarianza $C(\mathbf{h})$ sea continua en 0. Es decir, la continuidad cuadrática media se puede verificar mediante el comportamiento de la función de covarianza cerca de 0. Como se explicó en la sección 3.1.5 algunos procesos parecen tener una covarianza tal que $C(\mathbf{h}) \rightarrow \tau > 0$ cuando $\mathbf{h} \rightarrow 0$, es decir, el efecto *nugget*.

Significa que la continuidad en media cuadrática por sí misma no transmite mucho sobre la suavidad del proceso y cómo se relaciona con la función de covarianza. El concepto de suavidad se enfoca mediante el estudio de las derivadas parciales del campo aleatorio y la introducción de la diferenciabilidad cuadrática media.

Diferenciabilidad del campo aleatorio

Considere los campos aleatorios gaussianos $Z(\mathbf{s})$ en \mathbb{R}^d . Suponga que Z tiene rutas muestrales diferenciables. Luego, el campo de gradiente asociado, $\dot{Z}(\mathbf{s})$, es un vector espacial en \mathbb{R}^d definido por sus componentes en un sistema de coordenadas cartesiano:

$$\dot{Z}_i(\mathbf{s}, \omega) = \frac{\partial Z(\mathbf{s})}{\partial \mathbf{s}_i} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{Z(\mathbf{s} - \Delta \mathbf{e}_i, \omega) - Z(\mathbf{s}, \omega)}{\Delta}$$

donde ω se mantiene fijo y \mathbf{e}_i es un vector unitario en la i -ésima dirección. Un campo de gradiente se denomina comúnmente campo vectorial potencial y se caracteriza por una curvatura cero. Los componentes de \dot{Z} también son campos aleatorios gaussianos ya que el operador diferente es lineal.

Existen diferentes formas de diferenciación basadas en diferentes formas de convergencia.

Definition 3.12. *Considere a $D \subset \mathbb{R}^d$*

- i) Un campo aleatorio $Z(\mathbf{s})$ tiene una ruta muestral diferenciable con probabilidad de uno en D si para cada \mathbf{s}_0 para el cual $\|\mathbf{s}_0 - \mathbf{s}\| \rightarrow 0$ como $\mathbf{s} \rightarrow \mathbf{s}_0$, entonces*

$$Pr(\omega : |\dot{Z}_i(\mathbf{s}_0, \omega) - \dot{Z}_i(\mathbf{s}, \omega)| \rightarrow 0 \text{ cuando } \mathbf{s} \rightarrow \mathbf{s}_0 \text{ para todo } \mathbf{s} \in D) = 1$$

- ii) Un campo aleatorio $Z(\mathbf{s})$ es diferenciable de forma casi segura en D si para cada \mathbf{s}_0 para cuando $\|\mathbf{s}_0 - \mathbf{s}\| \rightarrow 0$ donde $\mathbf{s} \rightarrow \mathbf{s}_0$, entonces*

$$Pr(\omega : |\dot{Z}_i(\mathbf{s}_0, \omega) - \dot{Z}_i(\mathbf{s}, \omega)| \rightarrow 0 \text{ cuando } \mathbf{s} \rightarrow \mathbf{s}_0) = 1 \text{ para todo } \mathbf{s} \in D$$

- iii) Un campo aleatorio $Z(\mathbf{s})$ es diferenciable en media cuadrática en D si para cada \mathbf{s}_0 para cuando $\|\mathbf{s}_0 - \mathbf{s}\| \rightarrow 0$ donde $\mathbf{s} \rightarrow \mathbf{s}_0$, entonces*

$$E\{[\dot{Z}_i(\mathbf{s}) - \dot{Z}_i(\mathbf{s}_0)]^2\} \rightarrow 0 \text{ cuando } \mathbf{s} \rightarrow \mathbf{s}_0 \text{ para todo } \mathbf{s} \in D$$

La discusión que sigue a la definición 3.10 de continuidad de campos aleatorios se aplica a la diferenciabilidad simplemente reemplazando la continuidad por la diferenciabilidad.

La diferenciabilidad en media cuadrática de orden superior se define secuencialmente, es decir, $X(\mathbf{s})$ es diferenciable en media cuadrática dos veces si $X(\mathbf{s})$ es diferenciable en media cuadrática.

La continuidad en media cuadrática, es una condición necesaria para trayectorias muestrales diferenciables y tiene una relación simple con la función de covarianza.

Theorem 3.13. *Considere un campo aleatorio $Z(\mathbf{s})$ en \mathbb{R}^d con función de covarianza C y expectativa diferenciable. Si la derivada $\partial^2 C(\mathbf{s}, \mathbf{t}) / \partial \mathbf{s}_i \partial \mathbf{t}_i$ existe y es finita para todo $i = 1, \dots, n$ en el punto (\mathbf{s}, \mathbf{s}) entonces $Z(\mathbf{s})$ es la diferenciable en media cuadrática en \mathbf{s} . La función de covarianza de $\dot{Z}_i(\mathbf{s})$ viene dada por $\partial^2 C(\mathbf{s}, \mathbf{t}) / \partial \mathbf{s}_i \partial \mathbf{t}_i$.*

Para campos aleatorios estacionarios, el teorema se simplifica.

Corolary 3.14. *Considere un campo aleatorio $Z(\mathbf{s})$ en \mathbb{R}^d con función de covarianza C . Si la derivada $\partial^2 C(\mathbf{h})/\partial h_i^2$ existe y es finita para todo $i = 1, \dots, n$ en el punto 0 entonces $Z(\mathbf{s})$ es la diferenciable en media cuadrática en cualquier \mathbf{h} . La función de covarianza de $\dot{Z}_i(\mathbf{s})$ viene dada por $-\partial^2 C(\mathbf{h})/\partial h_i^2$.*

Para la función de covarianza isotrópica, esto se simplifica aún más ya que todas las derivadas parciales son iguales; basta con considerar $-\partial^2 C(\mathbf{h})/\partial h^2$.

Corolary 3.15. *Considere un campo aleatorio $Z(\mathbf{s})$ en \mathbb{R}^d con función de covarianza C y posee las derivadas necesarias. Si la derivada*

$$\frac{\partial^{2|k|}}{\partial s_1^{k_1} \dots \partial s_n^{k_n} \partial t_1^{k_1} \dots \partial t_n^{k_n}} C(\mathbf{s}, \mathbf{t}) \tag{3.17}$$

existe y es finito para todo $i = 1, \dots, n$ en el punto (\mathbf{s}, \mathbf{s}) entonces $Z(\mathbf{s})$ es $|k|$ veces diferenciable en media cuadrática en \mathbf{s} . La función de covarianza de

$$\frac{\partial^{|k|} Z(\mathbf{s})}{\partial s_1^{k_1} \dots \partial s_n^{k_n}}$$

es dada en (3.17).

Esto significa que la suavidad del campo aleatorio está relacionada con la suavidad de la función de covarianza.

3.1.7. Modelado de datos espaciales

Un modelo de proceso espacial común se construye de la siguiente manera

$$Y(\mathbf{s}_i) = \mu(\mathbf{s}_i) + Z(\mathbf{s}_i) + \epsilon(\mathbf{s}_i) \tag{3.18}$$

donde $\mu(\mathbf{s}_i)$ es la media de $Y(\mathbf{s}_i)$, de la forma $X^T(\mathbf{s}_i)\boldsymbol{\beta}$. $X(\mathbf{s}_i)$ es un vector p -dimensional de variables explicativas en la ubicación \mathbf{s}_i y $\boldsymbol{\beta}$ es un vector p -dimensional de parámetros. $Z(\mathbf{s})$ es un proceso espacial de media cero (a menudo se supone que $Z(\mathbf{s})$ es un proceso WS Gaussiano con una función de covarianza paramétrica y $\epsilon(\mathbf{s})$ es un proceso de error con media 0 y *nugget* de varianza). Así, el proceso espacial $Y(\mathbf{s}_i)$ se descompone en una tendencia determinista, la variabilidad espacial pura explicada por la función de covarianza y un proceso de error explicado por el *nugget*.

El modelo (3.18) se puede ver como un modelo jerárquico con una primera etapa condicionalmente independiente dada $Z(\mathbf{s})$ y $\mu(\mathbf{s})$. En la segunda etapa, generalmente asumimos que $Z(\mathbf{s})$ es un campo aleatorio gaussiano con media cero y cierta estructura de covarianza paramétrica.

3.1.8. Estimación de parámetros

En el estudio de la inferencia estadística para muestras aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, el concepto de dependencia se vuelve complicada al estimar los parámetros de los modelos. En la práctica la estadística clásica trabaja con una muestra de tamaño uno con valores correspondientes a una observación de un proceso.

Los principales métodos para la estimación de parámetros asociados a los modelos en estadística espacial son: el estimador de máxima verosimilitud, validación cruzada, inferencia bayesiana y aproximaciones de funciones de verosimilitud (Bachoc, 2014; Bevilacqua y cols., 2019c). Con diferencia, el método más utilizado en la inferencia estadística es el de máxima verosimilitud, pero en el caso de Estadística Espacial no siempre suele ser aplicable ya que muchas veces para campos aleatorios no Gaussianos, es difícil conseguir expresiones cerradas para las funciones finito dimensionales asociadas a los campos aleatorios. De manera alternativa, una aproximación es el método de la verosimilitud compuesta (Varin, Reid, y Firth, 2011) que sólo requiere la función de distribución de probabilidad bivariada para el caso de verosimilitud por parejas ponderadas o la función de distribución compuesta para la verosimilitud compuesta ponderada.

Estimación de log-verosimilitud compuesta

La log-verosimilitud compuesta es una clase general de funciones objetivas que combinan términos de baja dimensión basados en la log-verosimilitud de eventos marginales o condicionales para construir una pseudo-verosimilitud (Varin et al., 2011).

Para cualquier conjunto de puntos distintos $(\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_n)^T$, $\mathbf{s}_i \in A$, $n \in \mathbb{N}$, denotamos por $\mathbf{Z}_{ij} = (Z(\mathbf{s}_i), Z(\mathbf{s}_j))^T$, $i \neq j$ y $\mathbf{Z}_{i|j} = Z(\mathbf{s}_i)|Z(\mathbf{s}_j) = z_j$ el vector aleatorio bivariado y la variable aleatoria condicional respectivamente y denotamos por $\mathbf{Z} = (Z(\mathbf{s}_1), \dots, Z(\mathbf{s}_n))^T$ el vector aleatorio multivariante. Además, denotamos con $f_{\mathbf{Z}_{ij}}$, $f_{\mathbf{Z}_{i|j}}$ y $f_{\mathbf{Z}}$ las funciones de densidad de probabilidad asociadas. Finalmente, con f_{Z_k} denotamos la función de densidad marginal de $Z(\mathbf{s}_k)$.

Sea B_k un conjunto marginal o condicional de \mathbf{Z} , la log-verosimilitud compuesta (CL) (Lindsay,1988) Es una función objetiva definida como una suma de K sub-verosimilitudes.

$$CL(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{k=1}^K l(\boldsymbol{\theta}; B_k)w_k, \quad (3.19)$$

donde $\boldsymbol{\theta}$ es el vector de parámetros desconocidos y $l(\boldsymbol{\theta}; B_k)$ es una log-verosimilitud calculada considerando sólo las variables aleatorias en B_k y w_k son ponderaciones no negativas adecuadas que no dependen de $\boldsymbol{\theta}$. La máxima estimación CL viene dada por $\hat{\boldsymbol{\theta}} = \operatorname{argmax}_{\boldsymbol{\theta}} CL(\boldsymbol{\theta})$.

Estableciendo $B_k = \mathbf{Z}_{ij}$ y $B_k = Z_{i|j}$ obtenemos el log-verosimilitud por pares $l_{ij} = \log(f_{\mathbf{Z}_{ij}})$ y la log-verosimilitud condicional por pares $l_{i|j} = \log(f_{Z_{i|j}})$ respectivamente. Las correspondientes log-verosimilitudes compuestas ponderadas son:

$$pl_M(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n l_{ij}(\boldsymbol{\theta})w_{ij}, \quad pl_C(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i}^n l_{i|j}(\boldsymbol{\theta})w_{ij} \quad (3.20)$$

Suponiendo pesos simétricos, es decir, $w_{ij} = w_{ji}$, entonces la expresión anterior se puede simplificar, hasta una constante proporcional, como (Bevilacqua y Gaetan 2015)

$$pl_M(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j>i}^n l_{ij}(\boldsymbol{\theta})w_{ij}, \quad pl_C(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j>i}^n [2l_{ij}(\boldsymbol{\theta}) - (l_i(\boldsymbol{\alpha}) + l_j(\boldsymbol{\alpha}))]w_{ij} \quad (3.21)$$

donde $l_k(\boldsymbol{\alpha}) = \log(f_{Z_k})$ es la log-verosimilitud marginal que depende de un parámetro vectorial $\boldsymbol{\alpha} \subsetneq \boldsymbol{\theta}$. Cuando se conocen los parámetros marginales $\boldsymbol{\alpha}$, entonces pl_M y pl_C tienen la misma eficiencia. De lo contrario, no es obvio qué tipo de estimación es más eficiente. Bevilacqua y Gaetan (2015) en el caso de Gaussiano muestran a través de experimentos teóricos y numéricos que el pl_C se desempeña ligeramente mejor en términos de eficiencia estadística.

El papel de las ponderaciones w_{ij} es mejorar la eficiencia estadística. Una función de ponderación simple que ha sido utilizada por diferentes autores (Bevilacqua y Gaetan, 2015; Feng, 2014; Heagerty y Lele, 2018) es la función de ponderación simétrica con soporte compacto.

$$w_{ij}(k) = \begin{cases} 1 & \|\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_j\| < k \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}. \quad (3.22)$$

donde $k \in \mathbb{R}^+$ es una distancia arbitraria mayor que la distancia mínima de los puntos de ubicación. Este tipo de ponderaciones permite calcular un cierto porcentaje (dependiendo de k) del número total de pares igual a $n(n-1)/2$. Por lo

tanto, la maximización eficiente de pl_M y pl_C implica una selección preliminar de los pares "útiles" que requieren el cálculo de todas las distancias posibles. Para conjuntos de datos masivos, esto puede ser un cuello de botella ya que el orden de cálculo es del orden n^2 y el almacenamiento asociado es del mismo orden.

Nuestra propuesta considera pesos simétricos basados en vecinos más cercanos. Específicamente, sea $N_m(\mathbf{s}_l)$ el conjunto de vecinos de orden $m = 1, 2, \dots$ del punto $\mathbf{s}_l \in A$. Entonces la función de peso simétrica propuesta es:

$$w_{ij}(m) = \begin{cases} 1 & \mathbf{s}_i \in N_m(\mathbf{s}_j) \cup \mathbf{s}_j \in N_m(\mathbf{s}_i) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (3.23)$$

Este tipo de ponderaciones simétricas son computacionalmente convenientes ya que Los algoritmos de tipo *kd - tree* se pueden usar para encontrar los vecinos más cercanos exactos de orden m para cada sitio de ubicación, es decir $N_m(\mathbf{s}_l)$ para $l = 1, \dots, n$ con una complejidad computacional de orden $n \log(n)$ y almacenamiento asociado de orden n . El paquete GeoModels utiliza el paquete RNN (REF) que implementa un algoritmo *kd - tree* (Bentley (1975), Arya et. Al. S., (1998)) para encontrar los vecinos más cercanos de orden m para cada punto de ubicación dado un conjunto de coordenadas espaciales.

El estimador de máxima log-verosimilitud por parejas ponderadas (wpl) viene dada por $\hat{\boldsymbol{\theta}}_M := \operatorname{argmax}_{\boldsymbol{\theta}} pl_M(\boldsymbol{\theta})$, y análogamente, el estimador de máxima log-verosimilitud compuesta ponderada (wcl) es dado por $\hat{\boldsymbol{\theta}}_C := \operatorname{argmax}_{\boldsymbol{\theta}} pl_C(\boldsymbol{\theta})$.

Argumentando como en Bevilacqua y Gaetan (2015), se puede demostrar que, bajo dominio creciente asintótico, $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ es consistente y asintóticamente gaussiano con matriz de covarianza asintótica dada por $\mathcal{G}_n^{-1}(\boldsymbol{\theta})$ la inversa de la matriz de información de Godambe $\mathcal{G}_n(\boldsymbol{\theta}) := \mathcal{H}_n(\boldsymbol{\theta})\mathcal{J}_n(\boldsymbol{\theta})^{-1}\mathcal{H}_n(\boldsymbol{\theta})$, donde $\mathcal{H}_n(\boldsymbol{\theta}) := E[-\nabla^2 pl(\boldsymbol{\theta})]$ y $\mathcal{J}_n(\boldsymbol{\theta}) := \operatorname{Var}[\nabla pl(\boldsymbol{\theta})]$. La estimación del error estándar se puede obtener considerando los elementos diagonales de la raíz cuadrada de $\mathcal{G}_n^{-1}(\hat{\boldsymbol{\theta}})$. Además, la selección del modelo se puede realizar considerando dos criterios de información, tales como

$$PLIC := -2 pl(\hat{\boldsymbol{\theta}}) + 2 \operatorname{tr}(\mathcal{H}_n(\hat{\boldsymbol{\theta}})\mathcal{G}_n^{-1}(\hat{\boldsymbol{\theta}})), \quad BLIC := -2 pl(\hat{\boldsymbol{\theta}}) + \log(n) \operatorname{tr}(\mathcal{H}_n(\hat{\boldsymbol{\theta}})\mathcal{G}_n^{-1}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$$

que son una versión de la verosimilitud compuesta del criterio de información de Akaike (AIC) y Criterio de información bayesiano (BIC) respectivamente (Varin y Vidoni, 2005). Tenga en cuenta que, el cálculo de los errores estándar requiere la evaluación de las matrices $\mathcal{H}_n(\hat{\boldsymbol{\theta}})$ y $\mathcal{J}_n(\hat{\boldsymbol{\theta}})$. Sin embargo, la evaluación de $\mathcal{J}_n(\hat{\boldsymbol{\theta}})$ es computacionalmente inviable para grandes conjuntos de datos, sin embargo se pueden utilizar técnicas de submuestreo de casos para estimar $\mathcal{J}_n(\boldsymbol{\theta})$ como en

Bevilacqua et al.(2012) y Heagerty y Lele (1998). Una alternativa sencilla y más sólida es la estimación de bootstrap paramétrica de $\mathcal{G}_n^{-1}(\boldsymbol{\theta})$. Utilizamos la segunda estrategia, más adelante, en el capítulo Resultados.

3.1.9. Predicción

Uno de los objetivos principales del modelado geoestadístico es hacer predicciones en ubicaciones espaciales sin observaciones. El Kriging es una técnica de interpolación geoestadística que considera tanto la distancia como el grado de variación entre puntos de datos conocidos al estimar valores en puntos de ubicación desconocidos. Una estimación kriging es una combinación lineal ponderada de los valores muestrales conocidos alrededor del punto que se va a estimar. Si se aplica correctamente, kriging permite al usuario derivar ponderaciones que dan como resultado estimaciones óptimas e imparciales. El predictor kriging depende del modelo que se adopte para la función aleatoria $Y(\mathbf{s})$. Por lo general, $Y(\mathbf{s})$ se suele descomponer en una componente de tendencia y una componente residual, tal como lo expresa la ecuación

$$Y(\mathbf{s}) = \mu(\mathbf{s}) + \epsilon(\mathbf{s}), \tag{3.24}$$

donde $Y = \{Y(\mathbf{s}), \mathbf{s} \in A\}$ un campo aleatorio, con $E(Y(\mathbf{s})) = \mu(\mathbf{s})$, $Var(Y(\mathbf{s})) = \sigma^2$ y función de correlación paramétrica $\rho_Y(\mathbf{h}, \phi)$. Sea $y = (y(\mathbf{s}_1), \dots, y(\mathbf{s}_n))^T$ una realización finita de Y y supongamos que queremos predecir Y en sitios no observados \mathbf{s}_0 suponiendo que se conocen los parámetros del campo aleatorio. La predicción en una nueva localización espacial está dada por:

$$Y_O(\mathbf{s}_0) = \sum_{i=1}^n w_i X(\mathbf{s}_i) + k, \tag{3.25}$$

donde $X(\mathbf{s}_i)$ es un vector de n observaciones del campo aleatorio, w_i pesos que cumplen $\sum_{i=1}^n w_i = 1$. Distintas versiones de kriging dependen de los supuestos de $\mu(\mathbf{s})$. Si es que la media es conocida y constante se denomina kriging simple, si es constante pero desconocida y además estacionaria el valor se denomina kriging ordinario. Por otro lado, si la media se asume desconocida y se puede representar por un arreglo de covariables, es decir, $\mu(\mathbf{s}) = X^t \beta$ es denominado Kriging universal. Para el kriging ordinario, el predictor óptimo (en el sentido cuadrático medio) de la variable aleatoria $Y(\mathbf{s}_0)$ y su varianza asociada están dados por:

$$\widehat{Y_O(\mathbf{s}_0)} = E(Y(\mathbf{s}_0)|Y = y), \quad Var(\widehat{Y_O(\mathbf{s}_0)}) = Var(Y(\mathbf{s}_0)|Y = y) \tag{3.26}$$

donde $Y = y$ es equivalente a $(Y(\mathbf{s}_1) = y(\mathbf{s}_1), \dots, Y(\mathbf{s}_n) = y(\mathbf{s}_n))$.

El predictor óptimo requiere el conocimiento de la distribución finito-dimensional (FDD) de Y que en algunos casos puede ser problemático. Los métodos de Monte Carlo pueden ser una opción atractiva en este caso. Sin embargo, desde un punto de vista computacional, las muestras de Monte Carlo son difíciles de producir de manera eficiente y dicho método puede ser inviable para grandes conjuntos de datos. Se puede obtener una solución más práctica y menos eficiente que requiere solo el conocimiento de la covarianza, utilizando la predicción lineal óptima y su varianza asociada dada por:

$$\widehat{Y_{OL}(\mathbf{s}_0)} = \mu(\mathbf{s}_0) + c^T R^{-1}(y - \mu), \quad \text{Var}(\widehat{Y_{OL}(\mathbf{s}_0)}) = \sigma^2(1 - c^T R^{-1}c), \quad (3.27)$$

donde $\mu = (\mu(\mathbf{s}_1), \dots, \mu(\mathbf{s}_n))^T$, $c = [\rho_Y(\mathbf{s}_0 - \mathbf{s}_i)]_{i=1}^n$ y $R = [\rho_Y(\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_j)]_{i,j=1}^n$.

3.1.10. Campos aleatorios no Gaussianos

Los campos aleatorios Gaussianos son herramientas muy populares al momento de analizar datos espaciales ya que pueden caracterizarse simplemente por una estructura de media y una función de covarianza válida. Desafortunadamente el supuesto de Gaussianidad es fuerte y rara vez se cumple en observaciones reales. Por lo que, se suele trabajar con campos aleatorios no Gaussianos que modelizan observaciones espacialmente dependientes que presentan distintas características que no necesariamente cumplen con los supuestos de gaussianidad, como puede ser la asimetría y/o colas pesadas, con recorridos con soporte en \mathbb{R}_0^+ , compactos e incluso observaciones discretas.

Los procesos trans-gaussianos son un método general para modelar datos espaciales no gaussianos obtenidos mediante la aplicación de algunas transformaciones no lineales a los datos originales. Varios autores han trabajado proponiendo nuevos modelos que se ajusten a las características de las observaciones, trabajando muchas veces con asimetrías y/o colas pesadas. Algunos ejemplos de estos modelos pueden ser campos aleatorios con distribuciones marginales con soporte positivo como los campos aleatorios log-Gaussianos (De Oliveira, 2006), Chi-cuadrado (Ma, 2010a), Gaussiano log-Gaussiano (Zareifard, Khaledi, Rivaz, y Vahidi-Asl, 2018) o Gamma y Weibull (Bevilacqua, Caamaño, y Gaetan, 2019b). Por otro lado también se ha trabajado con modelos a distribuciones continuas con soporte en los reales, pero que presenten asimetría o colas más o menos pesadas que la distribución Gaussiana tales como campos aleatorios con distribuciones marginales Gaussianas asimétrica (Zhang y El-Shaarawi, 2010; Alegría, Caro, Bevilacqua, Porcu, y Clarke, 2017), Tukey $g - h$ (Xu y Genton, 2017) o t de student y t de student asimétrica (Bevilacqua y cols., 2019a).

Capítulo 4

Resultados: Modelación, estimación y predicción

En el presente capítulo, analizaremos el desempeño del método de verosimilitud por parejas ponderadas y el método de verosimilitud compuesta ponderada, al estimar el campo aleatorio *tukey-hh* y compararemos el rendimiento del predictor lineal óptimo.

4.1. Modelado y estimación espacial con datos de asimetría y/o colas pesadas con campos aleatorios Tukey-hh

4.1.1. Campo Aleatorio y Distribución Tukey-h

A partir de ahora, utilizaremos las siguientes notaciones para simplificar la escritura. Dado un campo aleatorio $Q = \{Q(\mathbf{s}), \mathbf{s} \in A\}$ con $E(Q(\mathbf{s})) = \mu(\mathbf{s})$ y $Var(Q(\mathbf{s})) = \sigma^2$, denotamos por $\rho_Q(\mathbf{h}) = Corr(Q(\mathbf{s}_i), Q(\mathbf{s}_j))$ su función de correlación, donde $\mathbf{h} = \mathbf{s}_i - \mathbf{s}_j$ es el vector de separación de retardos. Para cualquier conjunto de puntos distintos $(\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_n)^T$, $n \in \mathbb{N}$, denotamos por $\mathbf{Q}_{ij} = (Q(\mathbf{s}_i), Q(\mathbf{s}_j))^T$, $i \neq j$, el vector aleatorio bivariado y por $\mathbf{Q} = (Q(\mathbf{s}_1), \dots, Q(\mathbf{s}_n))^T$ el vector aleatorio multivariado. Además, denotamos con $f_{Q(\mathbf{s})}$ y $F_{Q(\mathbf{s})}$ la función de densidad de probabilidad marginal (pdf) y la función de distribución acumulada (cdf) de $Q(\mathbf{s})$ respectivamente, con $f_{\mathbf{Q}_{ij}}$ el pdf de \mathbf{Q}_{ij} y con $f_{\mathbf{Q}}$ el pdf de \mathbf{Q} . Finalmente, denotamos con Q^* el proceso estandarizado débilmente estacionario, es decir $Q^*(\mathbf{s}) := (Q(\mathbf{s}) - \mu(\mathbf{s}))/\sigma$.

Sea $G = G(\mathbf{s}), \mathbf{s} \in A$ un campo aleatorio gaussiano débilmente estacionario con una varianza unitaria y media cero, con función de correlación dada por $\rho_G(\mathbf{h}) := \rho(\mathbf{h})$. Según Xua y Genton (2017) considera $T_h = \{T_h(\mathbf{s}), \mathbf{s} \in A\}$ un campo aleatorio con distribución marginal estándar de Tukey-h definida a través de una transformación monótona del GRF estándar subyacente G como:

$$T_h(\mathbf{s}) =: \tau_h(G(\mathbf{s})) = G(\mathbf{s})e^{\frac{h(G(\mathbf{s}))^2}{2}}. \quad (4.1)$$

Este tipo de campo aleatorio tiene distribuciones simétricas marginales y es un caso especial del campo aleatorio Tukey $g-h$ propuesto en Xua y Genton (2017). En particular el parámetro $h \in [0, 1/2)$ gobierna el comportamiento de la cola del campo aleatorio. Si el valor de h aumenta, entonces la cola es más pesada. Si $h = 0$, obtenemos el GRF "padre".

Definimos un campo aleatorio Q débilmente estacionario con Q^* un proceso estandarizado débilmente estacionario, es decir, $Q^*(\mathbf{s}) := (Q(\mathbf{s}) - \mu(\mathbf{s}))/\sigma$. Luego definimos la transformación de localización escala del campo aleatorio $T_h = \{T_h(\mathbf{s}), \mathbf{s} \in A\}$ como:

$$T_h(\mathbf{s}) =: \mu(\mathbf{s}) + \sigma^2 T_h^*(\mathbf{s}), \quad (4.2)$$

donde $\mu(\mathbf{s})$ es la media dependiente de la ubicación y $\sigma > 0$ es un parámetro de escala. Una típica especificación paramétrica de la media viene dada por

$\mu(\mathbf{s}) = X(\mathbf{s})^T \beta$ donde $X(\mathbf{s}) \in \mathbb{R}^k$ es un vector de covariables y $\beta \in \mathbb{R}^k$ coeficientes de regresión. Se pueden considerar otros tipos de funciones paramétricas o no paramétricas.

Para el campo aleatorio Tukey- h $\mathbb{E}(T_h^*(s)) = 0$, $Var(T_h^*(s)) = (1 - 2h)^{-3/2}$ y la función de correlación está dada por:

$$\rho_{T_h^*}(\mathbf{h}) = \frac{\rho(\mathbf{h})(1 - 2h)^{3/2}}{[(1 - h)^2 - h^2 \rho^2(\mathbf{h})]^{3/2}} \quad (4.3)$$

Más importante aún, se puede demostrar algunas propiedades, como la estacionariedad, la continuidad cuadrática media y los grados de diferenciabilidad cuadrática media, que pueden heredarse del campo aleatorio gaussiano "padre". En particular, utilizando los resultados en (4.3) al vincular el comportamiento de la correlación en el origen y las propiedades geométricas del proceso asociado, podemos probar que T_h es continua en media cuadrática si G es continua en media cuadrática y es k -veces diferenciable en media cuadrática si G es k -veces diferenciable en media cuadrática. Finalmente, es trivial ver que la continuidad y diferenciabilidad de la ruta de muestra se heredan del campo aleatorio gaussiano "padre". Como consecuencia, la continuidad en media cuadrática y la diferenciabilidad de las rutas de muestra del campo aleatorio Tukey- h se pueden modelar utilizando funciones de correlación paramétrica flexible como en el caso del campo aleatorio gaussiano.

El campo aleatorio Tukey- h tiene una distribución marginal con pdf proporcionado por (Goerg, 2015):

$$f_{T_h^*}(t) = \frac{\tau_h^{-1}(t)}{t(1 + W(ht^2))} \phi(\tau_h^{-1}(t), 0, 1) \quad , \quad (4.4)$$

donde $\tau_h^{-1}(t) = \text{sign}(t) \left(\frac{W(ht^2)}{h} \right)^{1/2}$ y $W(\cdot)$ es la función de Lambert- W . El pdf multivariada del vector $\mathbf{T}_h^* = (T_h^*(s_1), \dots, T_h^*(s_n))^T$ se puede calcular a través de:

$$f_{\mathbf{T}_h^*}(t) = \frac{\prod_{i=1}^N \tau_h^{-1}(t_i)}{(\prod_{i=1}^N t_i (1 + W(ht_i^2)))} \phi_N(\tau_h^{-1}(t), 0, R_N) \quad (4.5)$$

con $R_N = [\rho(s_i - s_j)]_{i,j=1}^N$ la matriz de correlación asociada a la función de correlación subyacente y la transformación $\tau_h^{-1}(x)$ se aplica puntualmente para un vector x dado.

4.1.2. Campo Aleatorio Tukey- hh

Generalizando lo propuesto en la ecuación (4.1), Xua y Genton (2017) utilizó los campos aleatorios Tukey $g - h$ para modelar tanto colas pesadas como la asimetría. Desafortunadamente, la transformación involucrada no tiene un inverso explícito y, como consecuencia, el método basado en la verosimilitud no es fácilmente aplicable.

Nuestra propuesta consiste en una posible generalización del campo aleatorio Tukey- h que tenga en cuenta tanto las colas pesadas como la asimetría. Consideramos un nuevo campo aleatorio $T_{h_l, h_r}^* = \{T_{h_l, h_r}^*(s), s \in A\}$ definido como:

$$T_{h_l, h_r}^*(\mathbf{s}) := \begin{cases} G(\mathbf{s})e^{\frac{h_l(G(\mathbf{s}))^2}{2}}, & G(\mathbf{s}) < 0 \\ G(\mathbf{s})e^{\frac{h_r(G(\mathbf{s}))^2}{2}}, & G(\mathbf{s}) \geq 0 \end{cases}. \quad (4.6)$$

En la literatura, esta distribución es llamada Tukey- hh (Morgenthaler y Tukey, 2000). Se debe tener en cuenta que cuando $h_l = h_r$ volvemos a (4.1). La familia de dos parámetros h_l, h_r puede ayudar a corregir la asimetría (a través de la diferencia $h_l - h_r$) y la curtosis (a través de $\max(h_l - h_r)$). Por lo tanto, podemos modelar datos sesgados y de cola pesada.

Lo primero que se debe estudiar es la función de covarianza, las propiedades geométricas y proporcionar expresiones analíticas para la distribución bivariada del campo aleatorio tukey- hh . Las distribuciones bivariadas permiten el uso del método de estimación de verosimilitud por parejas y la función de covarianza que garantiza la obtención el predictor lineal óptimo.

La distribución marginal es llamada distribución Tukey- hh (Morgenthaler y tukey, 2000) con su pdf dada por (Goerg, 2015):

$$f_{T_{h_l, h_r}^*}(t) = \frac{\tau_{h_l}^{-1}(t)}{t(1 + W(h_l t^2))} \phi(\tau_{h_l}^{-1}(t), 0, 1) I_{(-\infty, 0)}(t) + \frac{\tau_{h_r}^{-1}(t)}{t(1 + W(h_r t^2))} \phi(\tau_{h_r}^{-1}(t), 0, 1) I_{[0, \infty)}(t), \quad (4.7)$$

donde $I_A(x)$ es la función indicadora del conjunto A , $\tau_{h_a}^{-1}(t) = \text{sign}(t) \left(\frac{W(h_a t^2)}{h_a} \right)^{1/2}$ y $W(\cdot)$ es la función de Lambert - W (Goerg, 2015). Además, para el campo aleatorio Tukey- hh tenemos

$$E(T_{h_l, h_r}^*(\mathbf{s})) = \frac{h_r - h_l}{\sqrt{2\pi}(1 - h_l)(1 - h_r)} \quad (4.8)$$

$$\text{Var}(T_{h_l, h_r}^*(\mathbf{s})) = \frac{1}{2} \left[(1 - 2h_l)^{-3/2} + (1 - 2h_r)^{-3/2} - \frac{(h_r - h_l)^2}{\pi(1 - h_l)^2(1 - h_r)^2} \right]. \quad (4.9)$$

El siguiente lema nos proporciona el (1,1)-ésimo momento de la distribución de Tukey- hh y es útil para dar una expresión de forma cerrada para $\rho_{T_{h_l, h_r}}(\mathbf{h})$. Depende de la función hipergeométrica definida por (Gradshteyn y Ryzhik, 2007), que se encuentra en la ecuación (3.15)

Lemma 4.1. *Sea T_{h_l, h_r} , con $h_l, h_r \in [0, 1/2)$ un campo aleatorio estacionario Tukey- hh con función de correlación Gaussiana $\rho(\mathbf{h})$. Luego:*

$$\begin{aligned}
 E(T_{h_l, h_r}^*(\mathbf{s}_i)T_{h_l, h_r}^*(\mathbf{s}_j)) &= \frac{g_1(\mathbf{h}, h_l) {}_2F_1\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{\rho^2(\mathbf{h})}{g_1^2(\mathbf{h}, h_l)}\right)}{2\pi g_2^{3/2}(\mathbf{h}, h_l)} + \frac{\rho(\mathbf{h})}{4g_2^{3/2}(\mathbf{h}, h_l)} \\
 &+ \frac{g_1(\mathbf{h}, h_r) {}_2F_1\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{\rho^2(\mathbf{h})}{g_1^2(\mathbf{h}, h_r)}\right)}{2\pi g_2^{3/2}(\mathbf{h}, h_r)} + \frac{\rho(\mathbf{h})}{4g_2^{3/2}(\mathbf{h}, h_r)} \\
 &- \frac{[g_1(\mathbf{h}, h_l)g_1(\mathbf{h}, h_r)]^{1/2} {}_2F_1\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{\rho^2(\mathbf{h})}{g_1(\mathbf{h}, h_l)g_1(\mathbf{h}, h_r)}\right)}{\pi g^{3/2}(\mathbf{h}, h_l, h_r)} \\
 &+ \frac{\rho(\mathbf{h})}{2g^{3/2}(\mathbf{h}, h_l, h_r)} \tag{4.10}
 \end{aligned}$$

donde $g_1(\mathbf{h}, h_l) = 1 - (1 - \rho^2(\mathbf{h}))h_l$, $g_2(\mathbf{h}, h_l) = (1 - h_l)^2 - h_l^2\rho^2(\mathbf{h})$, $g_1(\mathbf{h}, h_r) = 1 - (1 - \rho^2(\mathbf{h}))h_r$, $g_2(\mathbf{h}, h_r) = (1 - h_r)^2 - h_r^2\rho^2(\mathbf{h})$, $g(\mathbf{h}, h_l, h_r) = 1 - h_l - h_r + (1 - \rho^2(\mathbf{h}))h_lh_r$ y además, ${}_2F_1\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; x\right) = \sqrt{1-x} + \sqrt{x}\arcsin(\sqrt{x})$.

El siguiente teorema da una expresión analítica para $\rho_{T_{h_l, h_r}}(\mathbf{h})$ en términos del lema 4.1.

Theorem 4.2. *Sea T_{h_l, h_r}^* , con $h_l, h_r \in [0, 1/2)$ un campo aleatorio débilmente estacionario Tukey- hh , entonces la función de correlación viene dada por*

$$\begin{aligned}
 \rho_{T_{h_l, h_r}^*}(\mathbf{h}) &= \frac{\mathbb{E}(T_{h_l, h_r}^*(\mathbf{s}_i)T_{h_l, h_r}^*(\mathbf{s}_j))}{\frac{1}{2} \left[\frac{\pi(1-h_l)^2(1-h_r)^2((1-2h_l)^{-3/2} + (1-2h_r)^{-3/2}) - (h_r - h_l)^2}{\pi(1-h_l)^2(1-h_r)^2} \right]} \\
 &- \frac{(h_r - h_l)^2}{\pi(1-h_l)^2(1-h_r)^2((1-2h_l)^{-3/2} + (1-2h_r)^{-3/2}) - (h_r - h_l)^2/2} \tag{4.11}
 \end{aligned}$$

El siguiente teorema describe algunas características del campo aleatorio Tukey- hh y otras interesantes propiedades de su función de correlación. Usando la función de correlación de T_{h_l, h_r}^* puede mostrar que el campo aleatorio es continuo en media cuadrática, pero no diferenciable en media cuadrática. La diferenciable en media cuadrática ocurre cuando $h_l = h_r$ que corresponde al caso de un campo

aleatorio Tukey- h . Como consecuencia, el campo aleatorio no hereda la diferenciabilidad en media cuadrática del campo aleatorio "padre". Esto puede ser un inconveniente cuando se utilizan campos aleatorios para modelar datos espaciales que exhiben un comportamiento suavizado. Finalmente, una característica atractiva e intuitiva es que la correlación de T_{h_l, h_r}^* a partir de la correlación de G donde $h_l, h_r \rightarrow 0$ y a partir de la correlación de T_h cuando $h_l = h_r$.

Theorem 4.3. *Sea T_{h_l, h_r}^* , $h_l, h_r \in [0, 1/2)$ un campo aleatorio Tukey-hh estándar y considerando la correlación gaussiana $\rho(\mathbf{h})$. Luego:*

- a) T_{h_l, h_r}^* también es débilmente estacionario;
- b) T_{h_l, h_r}^* es continuo en media cuadrática si y solo si G es continuo en media cuadrática;
- c) T_{h_l, h_r}^* no es m -veces diferenciable en media cuadrática cuando $h_l \neq h_r$ si G es m -veces diferenciable en media cuadrática.
- d) T_{h_l, h_r}^* es m -veces diferenciable en media cuadrática cuando $h_l = h_r$ si G es m -veces diferenciable en media cuadrática.
- e) $\rho_{T_{h_l, h_r}^*}(\mathbf{h}) \leq \rho(\mathbf{h})$ y además, $\lim_{h_l, h_r \rightarrow 0} \rho_{T_{h_l, h_r}^*}(\mathbf{h}) = \rho(\mathbf{h})$.
- f) $\rho_{T_{h_l, h_r}^*}(\mathbf{h}) = \rho_{T_{h_r, h_l}^*}(\mathbf{h})$.

Simulación Campo Aleatorio Tukey-hh

Para ilustrar algunos ejemplos asociados con las propiedades geométricas del campo aleatorio Tukey-hh, definimos un modelo isotrópico flexible del campo aleatorio gaussiano "padre". Sea la función de correlación Wendland generalizada (Gneiting, 2002), planteada anteriormente en la ecuación (3.16), definida para $\psi > 0$

$$\mathcal{GW}_{\alpha, \psi, \gamma}(\mathbf{h}) := \begin{cases} \frac{\int_{\|\mathbf{h}\|/\alpha}^1 u(u^2 - (\|\mathbf{h}\|/\alpha)^2)^{\psi-1} (1-u)^\gamma du}{B(2\psi, \gamma+1)} & \|\mathbf{h}\| < \alpha \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}, \quad (4.12)$$

y para $\psi = 0$, como:

$$\mathcal{GW}_{\alpha, 0, \gamma}(\mathbf{h}) := \begin{cases} (1 - \|\mathbf{h}\|/\alpha)^\gamma & \|\mathbf{h}\| < \alpha \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}, \quad (4.13)$$

donde $B(\cdot, \cdot)$ es la función Beta y $\alpha > 0$, $\gamma \geq (d+1)/2 + \psi$ garantiza la definición positiva del modelo en \mathbb{R}^d .

En particular para un entero positivo k , las rutas de muestra de un proceso gaussiano son k -veces diferenciable si y solo si $\psi > k$ en el caso Matérn (Stein, 1999) y si y solo si $\psi > k - 1/2$ en el caso de Wendland generalizada (Bevilacqua et al., 2018).

En la primera columna de la Figura 4.1 representamos, de arriba a abajo, una realización en una fina cuadrícula de un cuadrado unitario un campo aleatorio Tukey-hh con $h_l = 0,2$ y $h_r = 0,4$, con $h_l = h_r = 0,2$ y además, con $h_l = 0,2$ y $h_r = 0,4$ respectivamente. La segunda columna de la Figura 4.1 muestra los histogramas asociados y finalmente en la tercera columna comparamos la correlación $\rho_{T_{h_l, h_r}}(\mathbf{h})$ con la correlación del campo aleatorio gaussiano "padre" $\rho(\mathbf{h}) = \mathcal{GW}_{0,3,1,4}(\mathbf{h})$. La correlación Wendland generalizada admite forma compacta, una característica interesante desde el punto de vista computacional, que es heredada por los campos aleatorios *two - piece* que es $\mathcal{GW}_{\alpha, \psi, \gamma}(\mathbf{h}) = 0$ implica $\rho_{T_{h_l, h_r}}(\mathbf{h}) = 0$.

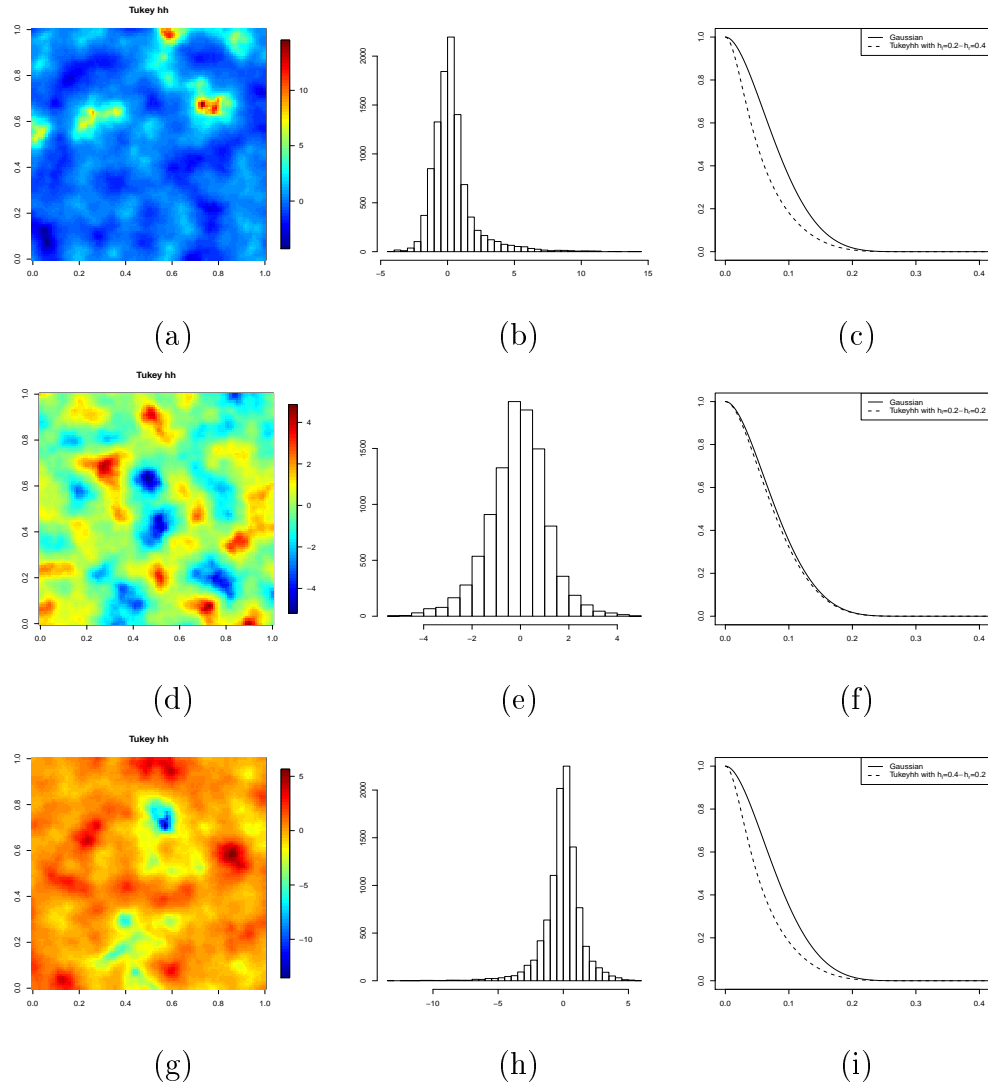


Figura 4.1: Primera columna: una realización (de arriba a abajo) de un Tukey-hh con $T_{0,2,0,4}$, $T_{0,2,0,2}$ y $T_{0,4,0,2}$ campos aleatorios. Segunda columna: histogramas asociados. Tercera columna: Asociada a las funciones de correlación $\rho_{T_{h_l, h_r}}(\mathbf{h})$ en la ecuación (4.7) Versus la función de correlacion gaussiana "padre" $\mathcal{GW}_{\alpha, \psi, \gamma}(\mathbf{h})$ (4.12) con $\alpha = 0,3$, $\psi = 1$ y $\gamma = 4$.

Se puede obtener una versión simplificada de Tukey-hh en la Ecuación (4.7) suponiendo que $T_{h_l, h_r}^*(\mathbf{s}_i) \perp T_{h_l, h_r}^*(\mathbf{s}_j)$, $i \neq j$. Bajo este supuesto, T_{h_l, h_r}^* sigue siendo un campo aleatorio con distribución marginal Tukey-hh pero, en este caso, se puede demostrar que la función de correlación resultante exhibe una discontinuidad en el origen y, como consecuencia, el RF no es continuo en media cuadrática. Una versión no continua en media cuadrática se puede obtener del campo aleatorio Tukey-hh en la ecuación (4.7) introduciendo un efecto pepita (*Nugget effect*). En nuestra construcción se puede introducir fácilmente un efecto pepita eligiendo una función de correlación discontinua del campo aleatorio gaussiano subyacente reemplazando $\rho(\mathbf{h})$ por $\rho^*(\mathbf{h}) = (1 - \tau^2)\rho(\mathbf{h}) + \tau^2 I(\mathbf{h} = \mathbf{0})$ donde $0 \leq \tau^2 < 1$ representa el efecto pepita subyacente. La figura 2 (parte inferior de izquierda a derecha) muestra dos realizaciones del campo aleatorio de Tukey-hh con $h_l = 0,4$ y $h_r = 0,3$ bajo la correlación subyacente anterior $\mathcal{GW}_{0,3,0,4}(\mathbf{h})$ considerando o no un efecto pepita $\tau^2 = 0,2$. Se puede apreciar claramente el impacto del efecto pepita en la realización en la parte derecha.

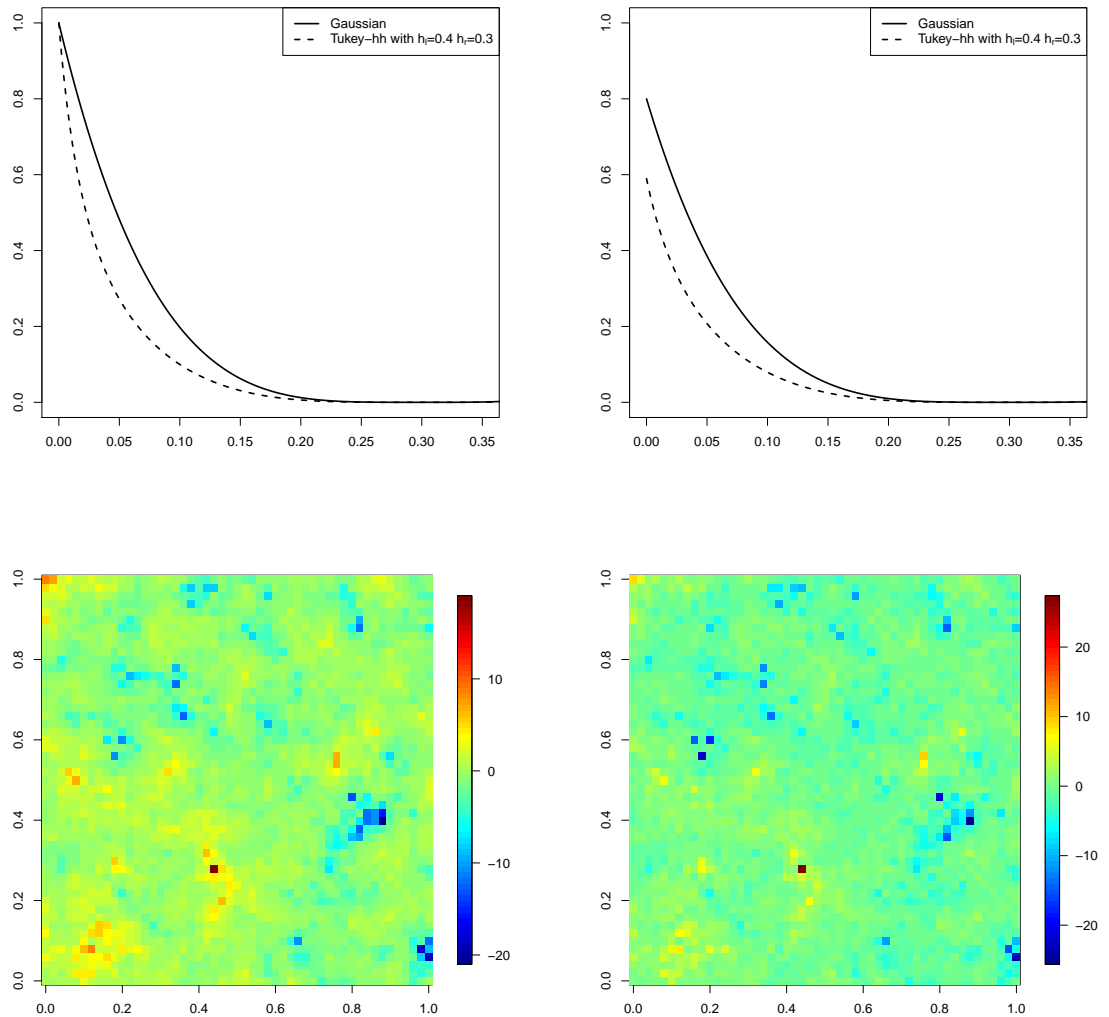


Figura 4.2: Parte superior izquierda: la función de correlación del campo aleatorio Tukey-hh (la función de correlación es $\mathcal{GW}_{0,3,0,4}(\mathbf{h}) = \rho(\mathbf{h}) = (1 - \|\mathbf{h}\|/0,3)^4_+$) cuando $h_l = 0,4$ y $h_r = 0,3$. Parte superior derecha: las funciones de correlación del campo aleatorio Tukey-hh bajo la configuración anterior cuando la función de correlación subyacente es $\rho(\mathbf{h}) = 1$ si $\mathbf{h} = 0$ y $\rho(\mathbf{h}) = (1 - \tau^2)(1 - \|\mathbf{h}\|/0,3)^4_+$ si $\mathbf{h} \neq 0$ con $\tau^2 = 0,2$.

El siguiente teorema da una expresión explícita de forma cerrada para el pdf de la variable aleatoria del vector $\mathbf{T}_{h_l, h_r}^* = (T_{h_l, h_r}^*(\mathbf{s}_1), \dots, T_{h_l, h_r}^*(\mathbf{s}_n))^T$.

Theorem 4.4. *Sea \mathbf{T}_{h_l, h_r}^* , $h_l, h_r \in [0, 1/2)$ un vector aleatorio Tukey-hh con función de correlación subyacente $\rho(\mathbf{h})$. Luego:*

$$f_{\mathbf{T}_{h_l, h_r}^*}(\mathbf{t}) = \sum_{\ell \in \{-1, +1\}^n} \frac{\prod_{i=1}^m \tau_{h_l}^{-1}(t_i)}{\prod_{i=1}^m t_i (1 + W(h_l t_i^2))} \frac{\prod_{j=m+1}^n \tau_{h_r}^{-1}(t_j)}{\prod_{j=m+1}^n t_j (1 + W(h_r t_j^2))} \cdot \phi(D(\ell) \cdot \tau(h, \mathbf{t}), \mathbf{0}, R_n) I_{\prod_{i=1}^m (-\infty, 0)^i \prod_{j=1}^{n-m} (0, \infty)^j} (t_1, \dots, t_n) \quad (4.14)$$

donde $I_A(x)$ denota la función indicadora del conjunto A , $R_n = [\rho(s_i - s_j)]_{i,j=1}^n$, y la matriz diagonal $D(\ell) = \text{Diag}\{\ell_1, \dots, \ell_n\}$, con $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_n) \in \{-1, +1\}^n$, $\tau_h^{-1}(\mathbf{t}) = \text{sign}(\mathbf{t}) \left(\frac{W(ht^2)}{h} \right)^{-1/2}$, $\tau(h, \mathbf{t}) = \left(\frac{W(ht_1^2)}{h}^{-1/2}, \dots, \frac{W(ht_n^2)}{h}^{-1/2} \right)^T$, donde $h \in \{h_l, h_r\}$.

Tenga en cuenta que, utilizando el Teorema 4.4, es evidente que los métodos basados en la verosimilitud el campo aleatorio Tukey-hh son poco prácticos desde el punto de vista computacional, incluso para un conjunto de datos relativamente pequeño. Por lo tanto, del Teorema 4.4, la función de densidad de probabilidad bivariada del vector $(T_{h_l, h_r}^*(\mathbf{s}_i), T_{h_l, h_r}^*(\mathbf{s}_j))^T$ puede ser obtenido como:

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{T}_{h_l, h_r}^*}^{i,j}(t_i, t_j) &= \frac{\tau_{h_l}^{-1}(t_i) \tau_{h_l}^{-1}(t_j)}{t_i t_j (1 + W(h_l t_i^2)) (1 + W(h_l t_j^2))} \phi(\tau_{h_l}^{-1}(t_i), \tau_{h_l}^{-1}(t_j), \mathbf{0}, R_2) I_{(-\infty, 0) \times (-\infty, 0)}(t_i, t_j) \\ &+ \frac{\tau_{h_l}^{-1}(t_i) \tau_{h_r}^{-1}(t_j)}{t_i t_j (1 + W(h_l t_i^2)) (1 + W(h_r t_j^2))} \phi(\tau_{h_l}^{-1}(t_i), \tau_{h_r}^{-1}(t_j), \mathbf{0}, R_2) I_{(-\infty, 0) \times [0, \infty)}(t_i, t_j) \\ &+ \frac{\tau_{h_r}^{-1}(t_i) \tau_{h_l}^{-1}(t_j)}{t_i t_j (1 + W(h_r t_i^2)) (1 + W(h_l t_j^2))} \phi(\tau_{h_r}^{-1}(t_i), \tau_{h_l}^{-1}(t_j), \mathbf{0}, R_2) I_{[0, \infty) \times (-\infty, 0)}(t_i, t_j) \\ &+ \frac{\tau_{h_r}^{-1}(t_i) \tau_{h_r}^{-1}(t_j)}{t_i t_j (1 + W(h_r t_i^2)) (1 + W(h_r t_j^2))} \phi(\tau_{h_r}^{-1}(t_i), \tau_{h_r}^{-1}(t_j), \mathbf{0}, R_2) I_{[0, \infty) \times [0, \infty)}(t_i, t_j), \end{aligned} \quad (4.15)$$

donde $R_2 = [\rho(\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_j)]_{i,j=1}^2$ es la matriz de correlación bivariada asociada al función de correlación subyacente $\rho(\mathbf{h})$. Tenga en cuenta que, cuando $\rho(\mathbf{h}) = 0$,

$f_{\mathbf{T}_{hl,hr}^*}^*(t_i, t_j)$ se puede escribir como el producto de dos variables aleatorias independientes de Tukey- h . Por lo tanto, correlación de pares cero implica independencia por pares, como en el caso gaussiano. La figura (4.3) muestra los gráficos de contorno de la ecuación (4.15) cuando $\nu = 3, 9$ y $\rho(\mathbf{h}) = 0, 2, 0, 9$. Resulta que la distribución bivariada de Tukey- hh no es elíptica y cuando h_l y h_r tienden a cero, las gráficas de contorno tienden hacia una forma elíptica. Finalmente, la densidad bivariada del proceso \mathbf{T}_{h_l, h_r} se obtiene fácilmente

$$f_{\mathbf{T}_{hl,hr}^*}(t_i, t_j) = \frac{1}{\sigma^2} f_{\mathbf{T}_{hl,hr}^*}^* \left(\frac{t_i - \mu_i}{\sigma}, \frac{t_j - \mu_j}{\sigma} \right). \quad (4.16)$$

y la densidad condicional del proceso \mathbf{T}_{h_l, h_r} es

$$f_{\mathbf{T}_{hl,hr}^* | \mathbf{T}_{hl,hr}^*}(t_i | t_j) = 2 \cdot f_{\mathbf{T}_{hl,hr}^*}(t_i, t_j) - f_{\mathbf{T}_{hl,hr}^*}(t_i) - f_{\mathbf{T}_{hl,hr}^*}(t_j) \quad (4.17)$$

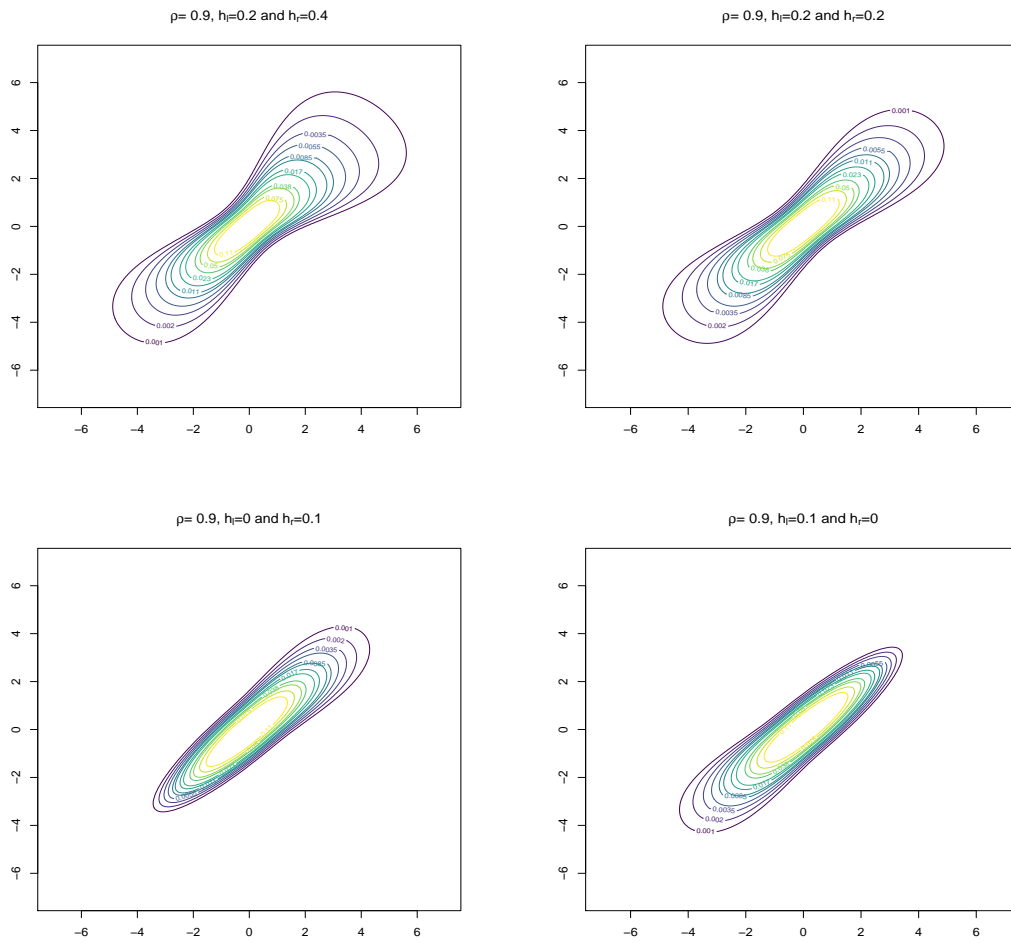


Figura 4.3: Gráficas de contorno de la distribución bivariada del campo aleatorio Tukey- hh (4.15) cuando $\rho(\mathbf{h}) = 0,9$, $h_l = 0,2, 0,1, 0$ y $h_r = 0,4, 0,2, 0,1, 0$.

4.2. Estimación y Predicción de campos aleatorios Tukey- hh

Para el Predictor Lineal Óptimo supondremos una media conocida, correlación, los parámetros h_l y h_r del campo aleatorio Tukey- hh , el predictor en una ubicación desconocida $\mathbf{s}(0)$ que es dada por la ecuación (6), teniendo entonces:

$$\widehat{t(\mathbf{s}_0)} = \mu(\mathbf{s}_0) + \mathbf{c}^T R^{-1}(\mathbf{T} - \boldsymbol{\mu}) \quad (4.18)$$

donde $\boldsymbol{\mu} = (\mu(\mathbf{s}_1), \dots, \mu(\mathbf{s}_l))^T$, $\mathbf{c} = [\rho_{T_{h_l, h_r}^*}(\mathbf{s}_0, \mathbf{s}_i)]_{i=1}^n$ y $R = [\rho_{T_{h_l, h_r}^*}(\mathbf{s}_i, \mathbf{s}_j)]_{i,j=1}^n$. En la práctica la media y la matriz de covarianza son desconocidas y deben estimarse. El error cuadrático medio asociado, está dado por:

$$MSE(\widehat{t(\mathbf{s}_0)}) = \sigma_*^2(1 - \mathbf{c}^T R^{-1} \mathbf{c}). \quad (4.19)$$

El predictor no puede evaluarse ya que $\mu(\mathbf{s})$ y $\rho_{T_{h_l, h_r}^*}(\mathbf{h})$ son desconocidos. Por esta razón, sugerimos utilizar una estimación complementaria para ambas usando el Verosimilitud por parejas ponderadas y Verosimilitud compuesta ponderada. Tenga en cuenta que, a partir del teorema (1), el predictor gaussiano óptimo puede ser visto como un caso especial de (22) cuando $h_l, h_r \rightarrow 0$.

4.3. Rendimiento de la estimación de verosimilitud compuesta.

Para proceder con la simulación, consideramos los puntos $\mathbf{s}_i \in A = [0, 1]^2$, $i = 1, \dots, N$. Concretamente, usando la descomposición de Cholesky, realizamos 1000 simulaciones de un campo aleatorio Tukey- hh , en sitios de ubicación espacial $N = 500$ distribuidos uniformemente en el cuadrado unitario.

Consideramos $\sigma^2 = 1$ y establecemos $\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}$ con $\boldsymbol{\beta} = (\beta_0, \beta_1)^T$ las covariables constantes $\beta_0 = 0,5$, $\beta_1 = -0,25$ donde \mathbf{X} es una matriz de $N \times 2$ con la primera columna el vector unitario y la segunda columna una realización independiente e idénticamente distribuida a partir de $U(0, 1)$. Además, establecemos $h_l = 0,1, 0,2, 0,3$ y $h_r = 0,1, 0,3$ para el Tukey- hh . Como modelo de correlación paramétrica isotrópica subyacente, consideramos el modelo en la ecuación (4.13) con $\alpha = 0,05$ y $\delta = 4$ donde se asume que δ es conocido y fijo. En la estimación *wpl* consideramos dos criterios para la función de peso de corte, utilizando vecindades $n_{ij} = 4, 8, 12$ y distancias máximas $d_{ij} = 0,05, 0,1, 0,15$. El cuadro 4.1 muestra el

sesgo y el MSE de las estimaciones de wpl .

Como comentario general, las estimaciones son insesgadas y para cada modelo no hay diferencias significativas entre los diferentes métodos de funciones de peso para la estimación wpl , pero aún así se puede observar que los menores MSE se obtienen al utilizar vecindades. Como un ejemplo concreto, cuando $h_l = 0,3$ y $h_r = 0,1$ en la Figura 4.4 muestra los diagramas de caja de las diferencias de estimaciones de wpl con el valor real para la estimación de los parámetros de Tukey- hh RF, respectivamente.

De la misma manera, se realiza el mismo estudio, esta vez utilizando la verosimilitud-logarítmica compuesta de pesos. En donde, el cuadro 4.2 muestra el sesgo y el MSE de las estimaciones de wpl y ejemplo cuando $h_l = 0,3$ y $h_r = 0,1$ la figura 4.5 muestra los diagramas de caja de las diferencias de estimaciones de wcl con el valor real para la estimación de los parámetros de Tukey- hh RF, respectivamente.

		$h_l = 0,1$				$h_l = 0,2$				$h_l = 0,3$			
		$h_r = 0,1$		$h_r = 0,3$		$h_r = 0,1$		$h_r = 0,3$		$h_r = 0,1$		$h_r = 0,3$	
		Bias	MSE	Bias	MSE	Bias	MSE	Bias	MSE	Bias	MSE	Bias	MSE
$\hat{\beta}_0$	n=4	0.002828	0.011481	0.002497	0.010758	0.002552	0.010768	0.002445	0.010703	0.002456	0.010749	0.002502	0.010548
	n=8	0.002853	0.011558	0.002859	0.010867	0.002718	0.010834	0.002867	0.010845	0.002771	0.010858	0.002957	0.010732
	n=12	0.002760	0.011492	0.003035	0.010826	0.002805	0.010804	0.002995	0.010816	0.002851	0.010818	0.003011	0.010737
	m=0.05	0.003279	0.017767	0.003875	0.015197	0.003747	0.015249	0.003765	0.015147	0.003813	0.015204	0.003893	0.014942
	m=0.10	0.003279	0.015421	0.004069	0.012618	0.003851	0.012552	0.003986	0.012603	0.003855	0.012552	0.004013	0.012503
	m=0.15	0.003895	0.014135	0.004245	0.012036	0.003955	0.011941	0.004036	0.012058	0.003947	0.011998	0.004051	0.011983
$\hat{\beta}_1$	n=4	0.001356	0.003685	-0.000052	0.004643	0.000237	0.004330	-0.000463	0.004862	-0.000198	0.004455	-0.000731	0.004979
	n=8	0.001071	0.004461	-0.001146	0.005745	-0.000850	0.005418	-0.001741	0.005965	-0.001102	0.005531	-0.002089	0.006101
	n=12	0.001372	0.004918	-0.001120	0.006374	-0.000618	0.006073	-0.001666	0.006604	-0.001027	0.006173	-0.002067	0.006718
	m=0.05	0.001721	0.004291	0.000215	0.005745	0.000255	0.005375	-0.000192	0.005999	-0.000086	0.005466	-0.000309	0.006186
	m=0.10	0.001316	0.005596	-0.001749	0.006757	-0.001065	0.006418	-0.002081	0.007011	-0.001479	0.006503	-0.002338	0.007116
	m=0.15	0.001633	0.006182	-0.001366	0.007416	-0.000671	0.007026	-0.001796	0.007629	-0.000851	0.007094	-0.002091	0.007725
$\hat{\alpha}$	n=4	-0.000651	0.000036	-0.000829	0.000037	-0.000830	0.000037	-0.000830	0.000037	-0.000828	0.000037	-0.000819	0.000037
	n=8	-0.000864	0.000035	-0.001116	0.000036	-0.001118	0.000036	-0.001110	0.000036	-0.001120	0.000036	-0.001102	0.000036
	n=12	-0.000950	0.000038	-0.001323	0.000038	-0.001311	0.000038	-0.001312	0.000038	-0.001315	0.000038	-0.001305	0.000038
	m=0.05	-0.001127	0.000052	-0.001230	0.000050	-0.001235	0.000050	-0.001231	0.000050	-0.001240	0.000050	-0.001234	0.000050
	m=0.10	-0.001216	0.000046	-0.001576	0.000042	-0.001562	0.000042	-0.001572	0.000042	-0.001564	0.000042	-0.001561	0.000042
	m=0.15	-0.001321	0.000047	-0.001774	0.000044	-0.001758	0.000044	-0.001767	0.000044	-0.001754	0.000044	-0.001757	0.000044
$\hat{\sigma}^2$	n=4	0.007862	0.017172	0.004004	0.018141	0.002130	0.017249	0.004319	0.019331	0.002334	0.018171	0.004727	0.020357
	n=8	0.009032	0.018575	0.005065	0.018736	0.002542	0.017685	0.005373	0.020049	0.002841	0.018635	0.005901	0.021096
	n=12	0.010056	0.018662	0.004791	0.019211	0.002357	0.017995	0.005114	0.020520	0.002452	0.018880	0.005545	0.021556
	m=0.05	0.005536	0.025791	0.003225	0.025217	0.000481	0.024431	0.004251	0.026988	0.001066	0.025793	0.005382	0.028362
	m=0.10	0.011076	0.023779	0.004711	0.021470	0.002120	0.020399	0.005366	0.023039	0.002298	0.021430	0.005868	0.024243
	m=0.15	0.011330	0.022148	0.005946	0.020564	0.003242	0.019453	0.006414	0.022079	0.003698	0.020506	0.006866	0.023236
\hat{h}_l	n=4	-0.006868	0.001804	-0.005705	0.001846	-0.006212	0.003393	-0.006301	0.003538	-0.006962	0.005462	-0.007035	0.005688
	n=8	-0.007045	0.001940	-0.005646	0.001977	-0.005937	0.003599	-0.006132	0.003735	-0.006753	0.005680	-0.006968	0.005870
	n=12	-0.007135	0.002003	-0.005891	0.002011	-0.006294	0.003650	-0.006545	0.003784	-0.007160	0.005758	-0.007492	0.005926
	m=0.05	-0.007739	0.002380	-0.006938	0.002339	-0.007893	0.004406	-0.008144	0.004596	-0.009560	0.006996	-0.009861	0.007235
	m=0.10	-0.007595	0.002389	-0.006698	0.002186	-0.007426	0.003989	-0.007758	0.004148	-0.008826	0.006239	-0.009179	0.006441
	m=0.15	-0.007922	0.002391	-0.006527	0.002161	-0.007148	0.003930	-0.007447	0.004078	-0.008248	0.006143	-0.008594	0.006371
\hat{h}_r	n=4	-0.009089	0.001853	-0.011865	0.005135	-0.008716	0.001705	-0.011762	0.005221	-0.008632	0.001728	-0.011621	0.005281
	n=8	-0.009577	0.002015	-0.012597	0.005363	-0.009092	0.001816	-0.012445	0.005455	-0.009009	0.001841	-0.012322	0.005525
	n=12	-0.009840	0.002074	-0.012501	0.005462	-0.009066	0.001868	-0.012327	0.005540	-0.008986	0.001891	-0.012237	0.005612
	m=0.05	-0.011647	0.002393	-0.015183	0.006606	-0.010646	0.002145	-0.015169	0.006713	-0.010581	0.002172	-0.015110	0.006790
	m=0.10	-0.011355	0.002324	-0.013506	0.006104	-0.009620	0.002083	-0.013366	0.006209	-0.009539	0.002108	-0.013259	0.006286
	m=0.15	-0.011120	0.002286	-0.013315	0.006137	-0.009723	0.002099	-0.013227	0.006218	-0.009658	0.002123	-0.013144	0.006295

Cuadro 4.1: Sesgo (Bias) y MSE cuando estimamos con wpl un campo aleatorio Tukey- hh , esto es $\mu + \sigma T_{h_l, h_r}^*$, con $\mu = 0$, $\sigma^2 = 1$, para distintos valores de h_l y h_r , y diferentes valores de vecindades ($n = 4, 8, 12$) y distancias máximas ($m = 0,05, 0,10, 0,15$). Con función de correlación Wendland generalizada subyacente $\mathcal{GW}_{\alpha, 0, 4}(\mathbf{h}) = (1 - \|\mathbf{h}\|/\alpha)_+^4$ con $\alpha = 0,05$.

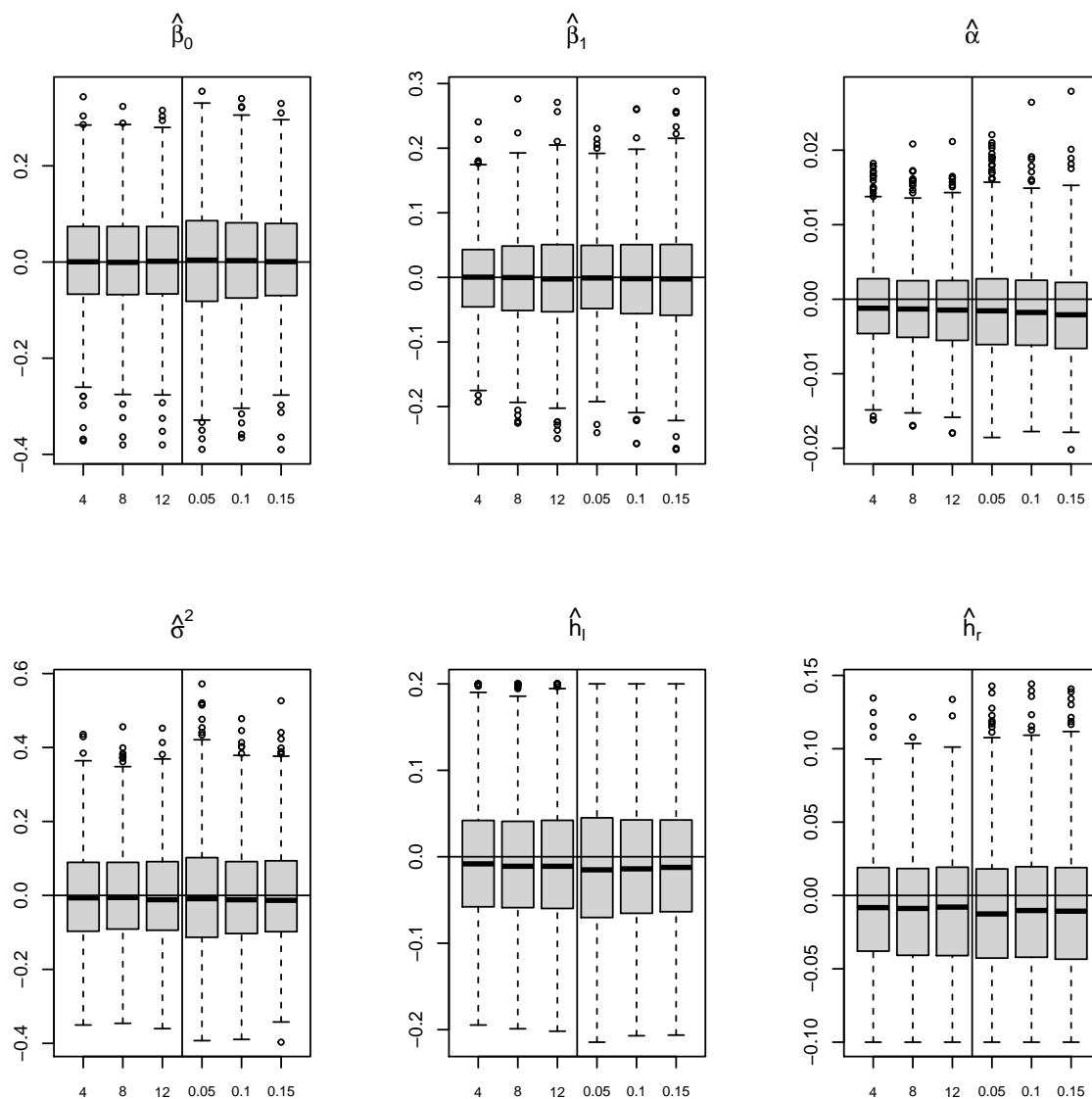


Figura 4.4: Diagramas de caja de los parámetros estimados $\beta_0 = 0,5$, $\beta_1 = -0,25$, $\alpha = 0,05$, $\sigma^2 = 1$, $h_l = 0,3$ y $h_r = 0,1$ menos sus respectivos valores reales (de izquierda a derecha) cuando se estima con *wpl* el campo aleatorio Tukey–*hh* que es $\mu + \sigma T_{h_l, h_r}^*$, con vecindades 4, 8 y 12, y distancia máxima 0.05, 0.10 y 0.15 respectivo.

		$h_l = 0,1$				$h_l = 0,2$				$h_l = 0,3$			
		$h_r = 0,1$		$h_r = 0,3$		$h_r = 0,1$		$h_r = 0,3$		$h_r = 0,1$		$h_r = 0,3$	
		Bias	MSE	Bias	MSE	Bias	MSE	Bias	MSE	Bias	MSE	Bias	MSE
$\hat{\beta}_0$	n=4	0.000665	0.009706	0.001421	0.009420	0.002013	0.009653	0.001564	0.009210	0.002107	0.009480	0.001661	0.008950
	n=8	0.000054	0.009702	0.002185	0.009965	0.002382	0.010069	0.002211	0.009849	0.002605	0.009976	0.002324	0.009655
	n=12	0.000213	0.009885	0.002573	0.010139	0.002645	0.010207	0.002585	0.010074	0.002786	0.010154	0.002649	0.009927
	m=0.05	0.000398	0.013540	0.002602	0.013822	0.003541	0.014255	0.002739	0.013506	0.003907	0.013915	0.003256	0.013006
	m=0.10	0.000140	0.011789	0.003844	0.012165	0.003858	0.012177	0.003818	0.012057	0.004045	0.012116	0.003905	0.011850
m=0.15	-0.000340	0.011396	0.004199	0.011847	0.003988	0.011773	0.003973	0.011813	0.003888	0.011814	0.003951	0.011719	
$\hat{\beta}_1$	n=4	-0.000698	0.003582	0.000142	0.003790	0.000067	0.003558	-0.000295	0.003986	-0.000258	0.003651	-0.000595	0.004106
	n=8	-0.000175	0.004434	-0.000974	0.004628	-0.000710	0.004357	-0.001517	0.004855	-0.001148	0.004479	-0.001893	0.004995
	n=12	-0.000212	0.005112	-0.001004	0.005261	-0.000718	0.004958	-0.001592	0.005468	-0.001150	0.005079	-0.001993	0.005594
	m=0.05	-0.000443	0.004350	0.000431	0.004643	0.000408	0.004351	0.000119	0.004872	0.000145	0.004457	-0.000085	0.005015
	m=0.10	-0.000649	0.005555	-0.001520	0.005631	-0.001226	0.005291	-0.002082	0.005868	-0.001517	0.005421	-0.002282	0.006006
m=0.15	-0.000224	0.006782	-0.001278	0.006635	-0.000662	0.006267	-0.001792	0.006855	-0.000988	0.006382	-0.002114	0.006947	
$\hat{\alpha}$	n=4	-0.000877	0.000033	-0.000561	0.000036	-0.000562	0.000036	-0.000545	0.000036	-0.000555	0.000036	-0.000533	0.000036
	n=8	-0.001313	0.000034	-0.000954	0.000036	-0.000949	0.000036	-0.000948	0.000036	-0.000947	0.000036	-0.000939	0.000036
	n=12	-0.001512	0.000038	-0.001200	0.000038	-0.001204	0.000038	-0.001193	0.000038	-0.001191	0.000038	-0.001182	0.000038
	m=0.05	-0.001113	0.000049	-0.000890	0.000051	-0.000903	0.000051	-0.000878	0.000051	-0.000895	0.000051	-0.000855	0.000051
	m=0.10	-0.001679	0.000043	-0.001482	0.000043	-0.001482	0.000043	-0.001471	0.000043	-0.001475	0.000042	-0.001463	0.000043
m=0.15	-0.001840	0.000046	-0.001721	0.000044	-0.001710	0.000044	-0.001712	0.000044	-0.001721	0.000044	-0.001703	0.000044	
$\hat{\sigma}^2$	n=4	-0.001352	0.014404	0.002205	0.016281	0.000993	0.015675	0.002350	0.017327	0.001079	0.016498	0.002559	0.018221
	n=8	-0.000298	0.015177	0.003240	0.017147	0.001199	0.016279	0.003314	0.018264	0.001367	0.017120	0.003559	0.019190
	n=12	-0.000099	0.015656	0.003077	0.017971	0.000890	0.016874	0.003191	0.019108	0.001111	0.017734	0.003447	0.020068
	m=0.05	-0.003625	0.019069	0.000227	0.022880	-0.001772	0.022498	0.000799	0.024365	-0.001532	0.023624	0.001616	0.025609
	m=0.10	0.000466	0.018113	0.002774	0.020263	0.000352	0.019324	0.003215	0.021673	0.000533	0.020247	0.003817	0.022761
m=0.15	0.002757	0.018098	0.004930	0.019933	0.002353	0.018911	0.005218	0.021337	0.002629	0.019191	0.005653	0.022466	
\hat{h}_l	n=4	-0.005711	0.001514	-0.004754	0.001593	-0.005198	0.002943	-0.005124	0.003061	-0.005792	0.004777	-0.005673	0.004928
	n=8	-0.006411	0.001632	-0.005068	0.001756	-0.005268	0.003213	-0.005443	0.003326	-0.005971	0.005130	-0.006064	0.005291
	n=12	-0.006712	0.001719	-0.005475	0.001836	-0.005918	0.003340	-0.006057	0.003463	-0.006750	0.005333	-0.006830	0.005495
	m=0.05	-0.006552	0.001862	-0.005662	0.001998	-0.006600	0.003804	-0.006532	0.003957	-0.007892	0.006143	-0.007791	0.006353
	m=0.10	-0.007388	0.001870	-0.006374	0.002010	-0.007212	0.003682	-0.007355	0.003827	-0.008398	0.005844	-0.008658	0.006035
m=0.15	-0.007792	0.001915	-0.006415	0.002071	-0.007008	0.003776	-0.007275	0.003911	-0.008173	0.005937	-0.008380	0.006152	
\hat{h}_r	n=4	-0.007030	0.001502	-0.009885	0.004545	-0.007192	0.001498	-0.009637	0.004612	-0.007083	0.001519	-0.009478	0.004659
	n=8	-0.007978	0.001686	-0.011585	0.004841	-0.008288	0.001624	-0.011397	0.004916	-0.008184	0.001648	-0.011264	0.004971
	n=12	-0.008036	0.001785	-0.011886	0.005027	-0.008539	0.001708	-0.011680	0.005098	-0.008440	0.001730	-0.011534	0.005159
	m=0.05	-0.008089	0.001805	-0.012554	0.005908	-0.008608	0.001882	-0.012373	0.005982	-0.008482	0.001914	-0.012128	0.006022
	m=0.10	-0.009127	0.001898	-0.012853	0.005728	-0.009116	0.001922	-0.012685	0.005809	-0.008991	0.001952	-0.012538	0.005873
m=0.15	-0.009145	0.002030	-0.013134	0.005895	-0.009527	0.002013	-0.012960	0.006005	-0.009438	0.002038	-0.012840	0.006073	

Cuadro 4.2: Sesgo (Bias) y MSE cuando estimamos con wcl un campo aleatorio Tukey- hh , esto es $\mu + \sigma T_{h_l, h_r}^*$, con $\mu = 0$, $\sigma^2 = 1$, para distintos valores de h_l y h_r , y diferentes valores de vecindades ($n = 4, 8, 12$) y distancias máximas ($m = 0,05, 0,10, 0,15$). Con función de correlación Wendland generalizada subyacente $\mathcal{GW}_{\alpha, 0,4}(\mathbf{h}) = (1 - \|\mathbf{h}\|/\alpha)_+^4$ con $\alpha = 0,05$.

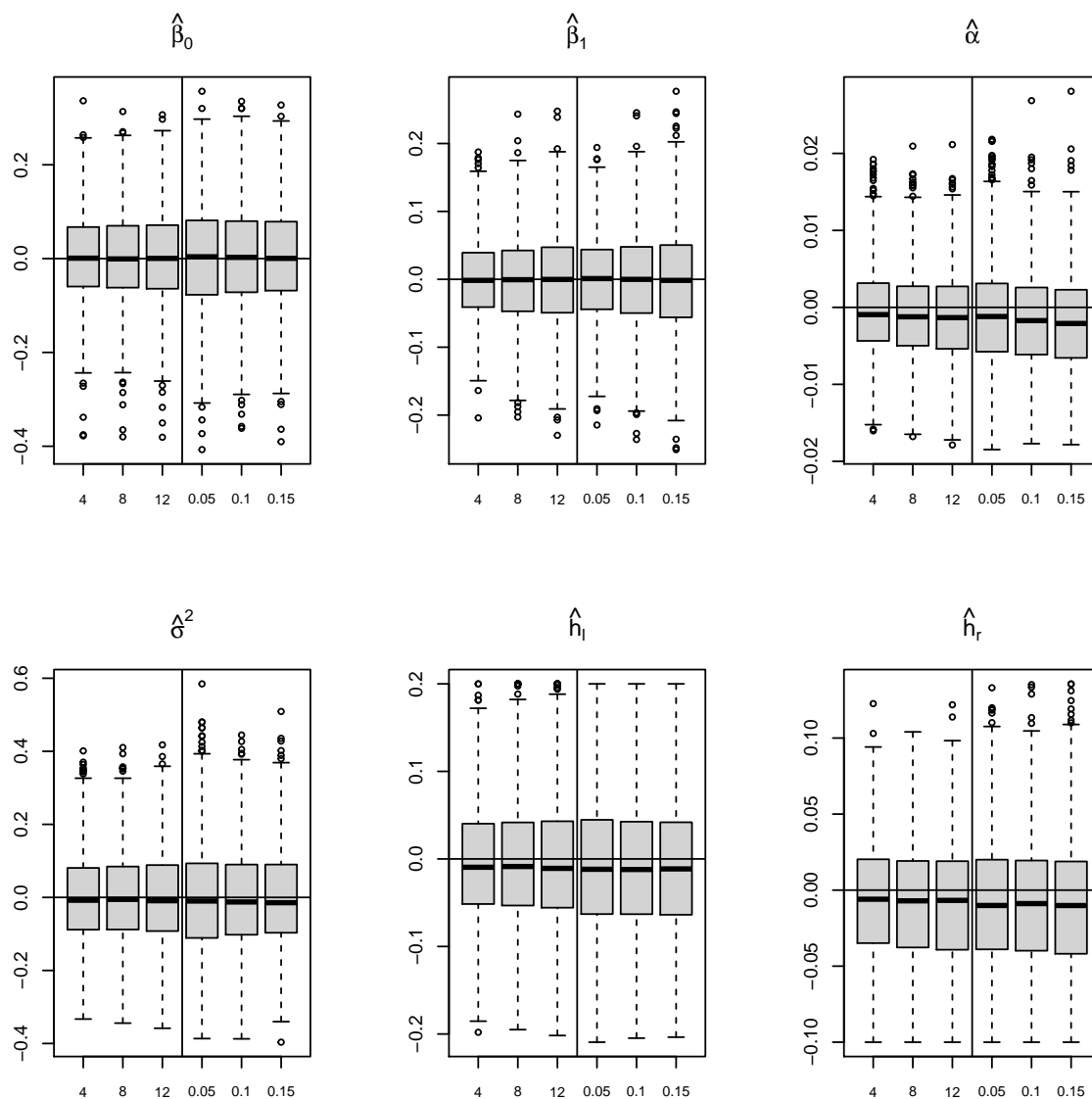


Figura 4.5: Diagramas de caja de los parámetros estimados $\beta_0 = 0,5$, $\beta_1 = -0,25$, $\alpha = 0,05$, $\sigma^2 = 1$, $h_l = 0,3$ y $h_r = 0,1$ menos sus respectivos valores reales (de izquierda a derecha) cuando se estima con *wcl* el campo aleatorio Tukey–*hh* que es $\mu + \sigma T_{h_l, h_r}^*$, con vecindades 4, 8 y 12, y distancia máxima 0.05, 0.10 y 0.15 respectivo.

Capítulo 5

Conclusiones

En este capítulo, nos centraremos en las principales conclusiones en relación con, nuestra investigación, y específicamente al proceso de modelado utilizando el modelo Tukey-*hh*.

5.1. Conclusiones

En esta investigación, se ha propuesto una nueva clase de campo aleatorio no gaussiano para la modelización de observaciones espaciales con dominio continuo que pueden presentar asimetría y/o colas pesadas, características que muchas veces presentan las observaciones en fenómenos naturales o contextos reales, que no se ajustan al marco gaussiano más clásico.

Específicamente, propusimos un proceso aleatorio en base a una transformación de un campo aleatorio gaussiano que se ajuste a características que muchas veces el proceso gaussiano no puede ajustar de manera natural. Basado en la distribución Tukey $g - h$ propuesta por Xua y Genton en el 2017. Nuestro modelo es llamado campo aleatorio Tukey- hh y es una generalización del campo aleatorio tukey- h , este último también propuesto por los mismos autores el 2017.

Uno de los principales beneficios de trabajar con los campos aleatorios Tukey- hh es que pueden modelar tanto asimetría y/o colas pesadas, por lo tanto puede tener un mejor ajuste al modelar observaciones en contextos reales. Por otro lado, nuestro modelo admite un inverso explícito, por lo que, pudimos aplicar métodos de verosimilitud compuesta sin mucho esfuerzo, para esto obtuvimos la distribución bivariada y la compuesta.

Un importante beneficio al usar la estimación de verosimilitud compuesta junto con la nueva propuesta de pesos ponderados basados en vecinos más cercanos, permite realizar estimaciones para grandes conjuntos de datos y mejorar la agilidad computacional con respecto a los pesos simétricos basados en distancias. Este avance es muy beneficioso para trabajar con grandes cantidades de observaciones espaciales, obteniendo buenas simulaciones, estimaciones y predicciones obteniendo una baja carga computacional y una alta eficiencia estadística.

Para la predicción, calculamos la función de covarianza con el fin de aplicar el método de interpolación Kriging, en específico, utilizamos la predicción lineal óptima en el sentido cuadrático medio. Además, estudiamos las propiedades de segundo orden asociadas y en el caso estacionario, las propiedades geométricas.

Con respecto a las propiedades geométricas, una desventaja obtenida es que nuestro proceso no es diferenciable en media cuadrática cuando los parámetros h_l y h_r son diferentes, lo que conlleva a que, cuando son diferentes, la función de correlación caiga bruscamente, esto se debe a que la derivada de la función no cumple con los criterios de convergencia.

Finalmente, podemos decir que el campo aleatorio Tukey- hh es bastante versátil y fácil de extrapolar a dominios procesos espacio-temporales. Además, que sus parámetros no se limitan a un espacio paramétrico discreto.

Para futuras investigaciones, se puede aplicar el modelo a una implementación real con el fin de modelar y predecir, valores observados de los más diversos contextos, estos pueden ser climatológicos, mineros, ciencias ambientales, o salud pública, entre otros.

Capítulo 6

Bibliografía

En el presente capítulo, exponemos la lista de referencias utilizadas en la investigación.

- Abrahamsen, P. (1997), *A review of gaussian random fiels and correlation functions* Oslo, Noruega: Norwegian Computing Center.
- Alegria, A., Caro, S., Bevilacqua, M., Porcu E., and Clarke J. (2017), *Estimating covariance functions of multivariate skew-gaussian random fields on the sphere. Spatial Statistics*, 22, 388-402.
- Allcroft, D., and Glasbey, C. (2003), *A latent Gaussian Markov random field model for spatio-temporal rainfall disaggregation. Journal of the Royal Statistical Society, C* 52, 487-498.
- Azzalini, A., and Capitanio, A. (2014), *The Skew-Normal and Related Families*. New York: United States of America by Cambridge University Press.
- Bachoc, F. (2014). *Asymptotic analysis of the role of spatial sampling for covariance parameter estimation of gaussian processes. Journal of Multivariate Analysis*, 125. 1 - 35.
- Banerjee, S., B. P. Carlin, and A. E. Gelfand (2014). *Hierarchical modeling and analysis for spatial data (second ed.)*. Boca Raton: FL: CRC Press.
- Bardossy, A. (2006), *Copula-based geostatistical models for groundwater quality parameters. Water Resour. Res.* 42.
- Bevilacqua, M., Gaetan, C., Mateu, J., and Porcu, E. (2012), *Estimating space and space-time covariance functions: a weighted composite likelihood approach. Journal of the American Statistical Association*, 107(497), 268-280.
- Bevilacqua, M., and Gaetan, C. (2015), *Comparing composite likelihood methods based on pairs for spatial Gaussian random fields. Statistics and Computing*, 25(5), 877-892.
- Bevilacqua, M., and Morales-Oñate, V. (2018), *GeoModels: A Package for Geostatistical Gaussian and non Gaussian Data Analysis*. R package version 1.0.3-4. URL: <https://vmoprojs.github.io/GeoModels-page/>
- Bevilacqua, M., T. Faouzi, R. Furrer, and E. Porcu. (2019a), *Estimation and prediction using generalized wendland functions under fixed domain asymptotics. The Annals of Statistics*, 47, 828-856.
- Bevilacqua M., Caamaño-Carrillo C., Gaetan C. (2019b), *On modelling positive continuous data with spatio-temporal dependence. arXiv:1808.03829*.

- Bevilacqua M., Caamaño-Carrillo C., Arellano-Valle RB., Morales-Oñate V. (2020), *Non-Gaussian geostatistical modeling using (skew) t processes*. *Scand J Statist*, 1-34.
- Bevilacqua, M., C. Caamaño-Carrillo, y E. Porcu (2020). *Unifying compactly supported and matern covariance functions in spatial statistics*. *ArXiv e-prints*.
- Bochner, S. (1955). *Harmonic Analysis and the Theory of Probability*. Berkeley and Los Angeles: University of California Press.
- Caragea and Smith (2006). *Asymptotic properties of computationally efficient alternative estimators for a class of multivariate normal models*, 1417-1440
- Cressie, N. A. C. (1993). *Statistics for spatial data revised edition*. Nueva York, Estados Unidos: Wiley.
- De Oliveira, V., Kedem, B., and Short, D. A. (1997), *Bayesian prediction of transformed Gaussian random fields*. *Journal of the American Statistical Association*, 92, 1422-1433.
- De Oliveira, V. (2006), *On optimal point and block prediction in log-gaussian random fields*. *Scandinavian Journal of Statistics*, 33, 523-540.
- Eidsvik, J., Shaby, B., Reich, B., Wheeler, M. and Niemi J. (2013), *Estimation and prediction with block composite likelihoods*. *Journal of computational Graphics and Statistics*, 23(2), 295-315.
- Gelfand, A. E., y Schliep, E. M. (2016). *Spatial statistics and gaussian processes: A beautiful marriage*. *Spatial Statistics*, 18, 86 - 104.
- Gneiting, T. (2002), *Compactly Supported Correlation Functions*. *Journal of Multivariate Analysis*, 83, 493-508.
- Goerg, G. M. (2015), *The Lambert Way to Gaussianize Heavy-Tailed Data with the Inverse of Tukeys h Transformation as a Special Case*. *The Scientific World Journal*, 2015, 116.
- Gradshteyn, I. and I. Ryzhik (2007). *Table of Integrals, Series, and Products (7 ed.)*. Academic Press.
- Heagerty, P., and Lele, S., (1998), *A composite likelihood approach to binary spatial data*. *Journal of the American Statistical Association*, 93(443), 1099-1111.

- Kazianka, H., and Pilz, J. (2010), *Copula-based geostatistical modeling of continuous and discrete data including covariates. Stochastic Environmental Research and Risk Assessment*, 24, 661-673.
- Lindsay, B. (1988) *Composite Likelihood Methods. Contemporary Mathematics*, 80, 221-239.
- Ma, C. (2010b). *Elliptically contoured random fields in space and time. Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* , 43 (16).
- Marchenko, Y. V., and Genton, M. G. (2010), *Multivariate Log-Skew-Elliptical Distributions with Applications to Precipitation Data. Environmetrics*, 21, 318-340.
- Masarotto, G., and Varin, C. (2012), *Gaussian copula marginal regression. Electronic Journal of Statistics*, 6, 1517-1549.
- Matheron, G. (1962). *Principles of geostatistics. Economic Geology*, 1246-1266.
- Morgenthaler, S., and Tukey, J. W. (2000), *Fitting Quantiles: Doubling, HR, HQ, and HHH Distributions. Journal of Computational and Graphical Statistics*, 9(1), 180-195.
- North, G. R., Wang, J., and Genton, M. G. (2011), *Correlation Models for Temperature fields. Journal of Climate*, 24, 5850-5862.
- R Development Core Team (2012), *R: A Language and Environment for Statistical Computing. R Foundation for Statistical Computing*, Vienna, Austria. ISBN 3-900051-07-0, URL: <http://www.R-project.org> .
- Stein, M. (1999), *Interpolation of Spatial Data. Some Theory of Kriging*. New York: Springer-Verlag.
- Stein M., Chi Z. and Welty L. (2004), *Approximating likelihoods for large spatial data sets. Journal of the Royal Statistical Society B*, 66(2), 275-296.
- Veccia, A. V. (1988), *Estimation and Model Identification for Continuous Spatial Processes. Royal Statistical society*
- Varin, C., Reid, N., and Firth, D. (2011), *An Overview of Composite Likelihood Methods. Statistica Sinica*, 21, 5-42.
- Varin, C. and P., Vidoni. (2005), *A note on composite likelihood inference and model selection. Biometrika* 52, 519-528.

- Wallin, J., and Bolin, D. (2015), *Geostatistical Modelling using Non-Gaussian Matern Fields*. *Scandinavian Journal of Statistics*, 42, 872-890.
- Xua, G., and Genton, M.G. (2017), *Tukey g-and-h random fields*. *Journal of the American Statistical Association*, 112, 1236-1249.
- Zareifard, H., Khaledi, M. J., Rivaz, F., and Vahidi-Asl, M.Q. (2018), *Modeling skewed spatial data using a convolution of Gaussian and log-Gaussian processes*. *Bayesian Analysis*, 13(2), 531-557.
- Zhu, X., and Genton, M. G. (2012), *Short-Term Wind Speed Forecasting for Power System Operations*. *International Statistical Review*, 80, 2-23.
- Zhang H. and El-Shaarawi A. (2010), *On spatial skew-gaussian processes and applications*. *Environmetrics*, 21(1), 33-47.

Capítulo 7

Apéndice A

En el presente capítulo, otorgaremos un suplemento o adjunto de investigación, que contiene información de ayuda para la mejor comprensión de la tesis y proporciona información esencial sobre el proceso de investigación.

7.1. Prueba Lema 4.1

Demostración. Por definición, tenemos:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(T_{h_l, h_r}^*(\mathbf{s}_i)T_{h_l, h_r}^*(\mathbf{s}_j)) &= \mathbb{E} \left[G(\mathbf{s}_i)G(\mathbf{s}_j)e^{\frac{h_r(G(\mathbf{s}_i))^2}{2} + \frac{h_r(G(\mathbf{s}_j))^2}{2}} \right] + \mathbb{E} \left[G(\mathbf{s}_i)G(\mathbf{s}_j)e^{\frac{h_l(G(\mathbf{s}_i))^2}{2} + \frac{h_l(G(\mathbf{s}_j))^2}{2}} \right] \\
 &+ \mathbb{E} \left[G(\mathbf{s}_i)G(\mathbf{s}_j)e^{\frac{h_r(G(\mathbf{s}_i))^2}{2} + \frac{h_l(G(\mathbf{s}_j))^2}{2}} \right] + \mathbb{E} \left[G(\mathbf{s}_i)G(\mathbf{s}_j)e^{\frac{h_l(G(\mathbf{s}_i))^2}{2} + \frac{h_r(G(\mathbf{s}_j))^2}{2}} \right] \\
 &= \frac{1}{2\pi(1-\rho^2(\mathbf{h}))^{1/2}} \int_{\mathbb{R}_+^2} g_i g_j e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2(\mathbf{h}))} [g_i^2 + g_j^2 - 2\rho(\mathbf{h})g_i g_j]} e^{\frac{h_r g_i^2}{2} + \frac{h_r g_j^2}{2}} dg_i dg_j \\
 &+ \frac{1}{2\pi(1-\rho^2(\mathbf{h}))^{1/2}} \int_{\mathbb{R}_-^2} g_i g_j e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2(\mathbf{h}))} [g_i^2 + g_j^2 - 2\rho(\mathbf{h})g_i g_j]} e^{\frac{h_l g_i^2}{2} + \frac{h_l g_j^2}{2}} dg_i dg_j \\
 &+ \frac{1}{2\pi(1-\rho^2(\mathbf{h}))^{1/2}} \int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_-} g_i g_j e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2(\mathbf{h}))} [g_i^2 + g_j^2 - 2\rho(\mathbf{h})g_i g_j]} e^{\frac{h_r g_i^2}{2} + \frac{h_l g_j^2}{2}} dg_i dg_j \\
 &+ \frac{1}{2\pi(1-\rho^2(\mathbf{h}))^{1/2}} \int_{\mathbb{R}_- \times \mathbb{R}_+} g_i g_j e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2(\mathbf{h}))} [g_i^2 + g_j^2 - 2\rho(\mathbf{h})g_i g_j]} e^{\frac{h_l g_i^2}{2} + \frac{h_r g_j^2}{2}} dg_i dg_j \\
 &= A_1 + A_2 + A_3 + A_4. \tag{7.1}
 \end{aligned}$$

Tomando la primera integral A_1 de la suma de (7.1) y usando (3.462.1) de Gradshteyn y Ryzhik el 2007, obtenemos

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \frac{1}{2\pi(1-\rho^2(\mathbf{h}))^{1/2}} \int_{\mathbb{R}_+} g_j e^{-\frac{[1-(1-\rho^2(\mathbf{h}))h_r]g_j^2}{2(1-\rho^2(\mathbf{h}))}} \left[\int_{\mathbb{R}_+} g_i e^{\left[-\frac{[1-(1-\rho^2(\mathbf{h}))h_r]g_i^2}{2(1-\rho^2(\mathbf{h}))} + \frac{\rho(\mathbf{h})g_i g_j}{(1-\rho^2(\mathbf{h}))} \right]} dg_i \right] dg_j \\
 &= \frac{1}{2\pi(1-\rho^2(\mathbf{h}))^{1/2}} \left[\frac{(1-\rho^2(\mathbf{h}))}{1-(1-\rho^2(\mathbf{h}))h_r} \right] \int_{\mathbb{R}_+} g_j e^{-\left[\frac{[1-(1-\rho^2(\mathbf{h}))h_r]}{2(1-\rho^2(\mathbf{h}))} - \frac{\rho^2(\mathbf{h})}{4(1-\rho^2(\mathbf{h}))[1-(1-\rho^2(\mathbf{h}))h_r]} \right] g_j^2} \\
 &\times D_{-2} \left(-\frac{\rho(\mathbf{h})g_j}{\sqrt{(1-\rho^2(\mathbf{h}))[1-(1-\rho^2(\mathbf{h}))h_r]}} \right) dg_j \tag{7.2}
 \end{aligned}$$

donde $D_n(x)$ es la función del cilindro parabólico. Luego, considerando (9.240) de Gradshteyn y Ryzhik el 2007:

$$\begin{aligned}
 D_{-2} \left(-\frac{\rho(\mathbf{h})g_j}{\sqrt{(1-\rho^2(\mathbf{h}))[1-(1-\rho^2(\mathbf{h}))h_r]}} \right) &= e^{-\frac{\rho^2(\mathbf{h})g_j^2}{4(1-\rho^2(\mathbf{h}))[1-(1-\rho^2(\mathbf{h}))h_r]}} \\
 &\times {}_1F_1 \left(1; \frac{1}{2}; \frac{\rho^2(\mathbf{h})g_j^2}{2(1-\rho^2(\mathbf{h}))[1-(1-\rho^2(\mathbf{h}))h_r]} \right) \\
 &+ \frac{\sqrt{2\pi}\rho(\mathbf{h})g_j}{2\sqrt{(1-\rho^2(\mathbf{h}))[1-(1-\rho^2(\mathbf{h}))h_r]}} e^{-\frac{\rho^2(\mathbf{h})g_j^2}{4(1-\rho^2(\mathbf{h}))[1-(1-\rho^2(\mathbf{h}))h_r]}} \\
 &\times {}_1F_1 \left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}; \frac{\rho^2(\mathbf{h})g_j^2}{2(1-\rho^2(\mathbf{h}))[1-(1-\rho^2(\mathbf{h}))h_r]} \right). \tag{7.3}
 \end{aligned}$$

combinando las ecuaciones (7.3) y la integral de (7.5) y usando (7.621.4) de Gradshteyn y Ryzhik el 2007, obtenemos

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \frac{(1 - \rho^2(\mathbf{h}))^{1/2}}{2\pi[1 - (1 - \rho^2(\mathbf{h}))h_r]} \int_{\mathbb{R}_+} g_j e^{-\frac{[1 - (1 - \rho^2(\mathbf{h}))h_r]g_j^2}{2(1 - \rho^2(\mathbf{h}))}} {}_1F_1\left(1; \frac{1}{2}; \frac{\rho^2(\mathbf{h})g_j^2}{2(1 - \rho^2(\mathbf{h}))h_r}\right) dg_j \\
 &+ \frac{\sqrt{2\pi}\rho(\mathbf{h})}{4\pi[1 - (1 - \rho^2(\mathbf{h}))h_r]^{3/2}} \int_{\mathbb{R}_+} g_j^2 e^{-\frac{[1 - (1 - \rho^2(\mathbf{h}))h_r]g_j^2}{2(1 - \rho^2(\mathbf{h}))}} {}_1F_1\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}; \frac{\rho^2(\mathbf{h})g_j^2}{2(1 - \rho^2(\mathbf{h}))h_r}\right) dg_j \\
 &= \frac{(1 - \rho^2(\mathbf{h}))^{3/2}}{2\pi[1 - (1 - \rho^2(\mathbf{h}))h_r]^2} {}_2F_1\left(1, 1; \frac{1}{2}; \frac{\rho^2(\mathbf{h})}{[1 - (1 - \rho^2(\mathbf{h}))h_r]^2}\right) \\
 &+ \frac{\rho(\mathbf{h})(1 - \rho^2(\mathbf{h}))^{3/2}}{4[1 - (1 - \rho^2(\mathbf{h}))h_r]^3} {}_2F_1\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}; \frac{3}{2}; \frac{\rho^2(\mathbf{h})}{[1 - (1 - \rho^2(\mathbf{h}))h_r]^2}\right). \tag{7.4}
 \end{aligned}$$

Luego, usando la transformación de Euler y la identidad ${}_2F_1\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}; \frac{3}{2}; x\right) = (1 - x)^{-3/2}$, obtenemos

$$A_1 = \frac{[1 - (1 - \rho^2(\mathbf{h}))h_r]}{2\pi[(1 - h_r)^2 - \rho^2(\mathbf{h})h_r^2]^{3/2}} {}_2F_1\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{\rho^2(\mathbf{h})}{[1 - (1 - \rho^2(\mathbf{h}))h_r]^2}\right) + \frac{\rho(\mathbf{h})}{4[(1 - h_r)^2 - \rho^2(\mathbf{h})h_r^2]^{3/2}} \tag{7.5}$$

De forma similar, A_2 , A_3 y A_4 de (7.1), es dado por

$$\begin{aligned}
 A_2 &= \frac{[1 - (1 - \rho^2(\mathbf{h}))h_l]}{2\pi[(1 - h_l)^2 - \rho^2(\mathbf{h})h_l^2]^{3/2}} {}_2F_1\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{\rho^2(\mathbf{h})}{[1 - (1 - \rho^2(\mathbf{h}))h_l]^2}\right) + \frac{\rho(\mathbf{h})}{4[(1 - h_l)^2 - \rho^2(\mathbf{h})h_l^2]^{3/2}} \\
 A_3 &= -\frac{([1 - (1 - \rho^2(\mathbf{h}))h_l][1 - (1 - \rho^2(\mathbf{h}))h_r])^{1/2}}{2\pi[1 - h_r - h_l - (1 - \rho^2(\mathbf{h}))h_r h_l]^{3/2}} {}_2F_1\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{\rho^2(\mathbf{h})}{[1 - (1 - \rho^2(\mathbf{h}))h_r][1 - (1 - \rho^2(\mathbf{h}))h_l]}\right) \\
 &+ \frac{\rho(\mathbf{h})}{4[1 - h_r - h_l - (1 - \rho^2(\mathbf{h}))h_r h_l]^{3/2}} \\
 A_4 &= -\frac{([1 - (1 - \rho^2(\mathbf{h}))h_l][1 - (1 - \rho^2(\mathbf{h}))h_r])^{1/2}}{2\pi[1 - h_r - h_l - (1 - \rho^2(\mathbf{h}))h_r h_l]^{3/2}} {}_2F_1\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{\rho^2(\mathbf{h})}{[1 - (1 - \rho^2(\mathbf{h}))h_r][1 - (1 - \rho^2(\mathbf{h}))h_l]}\right) \\
 &+ \frac{\rho(\mathbf{h})}{4[1 - h_r - h_l - (1 - \rho^2(\mathbf{h}))h_r h_l]^{3/2}} \tag{7.6}
 \end{aligned}$$

Finalmente, combinando las ecuaciones (7.5) y (7.6), obtenemos $\mathbb{E}(T_{h_l, h_r}^*(\mathbf{s}_i)T_{h_l, h_r}^*(\mathbf{s}_j))$. \square

7.2. Prueba Teorema 4.3

Demostración. Si G es un proceso gaussiano débilmente estacionario con correlación $\rho(h)$, entonces por (4.11) es sencillo ver que T_{h_l, h_r}^* también es débilmente estacionario porque tanto la media como la varianza dadas por (4.8) y (4.9), no dependen de la ubicación espacial s . Los puntos (b) y (c) se pueden mostrar usando las relaciones entre las propiedades geométricas de un proceso estacionario y la correlación asociada. Específicamente, la continuidad en media cuadrática y la

diferenciabilidad en media cuadrática es m veces de T_{h_l, h_r}^* , es equivalente a la continuidad y diferenciabilidad de $2m$ veces de $\rho_{T_{h_l, h_r}^*}(\mathbf{h})$ cuando $h = 0$, respectivamente (Stein, 1999).

Cuando $h = 0$ la función de correlación gaussiana $\rho(\mathbf{h}) = 1$. Es fácil demostrar que en la ecuación (4.11) la $\mathbb{E}(T_{h_l, h_r}^*(\mathbf{s}_i)T_{h_l, h_r}^*(\mathbf{s}_j))$ es igual a $\frac{1}{2}[(1 - 2h_r)^{3/2} + (1 - 2h_l)^{3/2}]$. Si restamos el cuadrado de $\mathbb{E}(T_{h_l, h_r}^*(\mathbf{s}))$ dada por la ecuación (4.8), podemos establecer que $Cov(T_{h_l, h_r}^*(\mathbf{s})) = Var(T_{h_l, h_r}^*(\mathbf{s}))$, de modo que, al ser un campo aleatorio débilmente estacionario, es igual a 1 cuando $h \rightarrow 0$, concluyendo que el campo aleatorio T_{h_l, h_r}^* es continuo en media cuadrática.

Sabemos que la función de correlación del tukey- hh depende de la función hipergeométrica. Para la diferenciabilidad en media cuadrática, G debe ser m -veces diferenciable en media cuadrática. Usando iterativamente la n -ésima derivada de la función ${}_2F_1$ con respecto a x :

$${}_2F_1^{(n)}(a, b; c; x) = \frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n} {}_2F_1(a + n, b + n; c + n; x), \quad n = 1, 2, \dots \quad (7.7)$$

y aplicando la condición de convergencia $c + n > b + a + 2n$. En nuestro caso, usamos la ${}_2F_1^{(n)}(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; x)$ se puede demostrar que $\rho_{T_{h_l, h_r}^*}(\mathbf{h})|_{\mathbf{h}=\mathbf{0}} = \infty$ si $n > 1,5$ y como consecuencia, T_{h_l, h_r}^* no es m -veces diferenciable en media cuadrática, bajo esta condición.

Para el punto d). Si h_r y h_l son iguales, es fácil mostrar que la $\mathbb{E}(T_{h_l, h_r}^*(\mathbf{s}_i)T_{h_l, h_r}^*(\mathbf{s}_j))$ de el lema 4.1 es igual a $\frac{\rho(\mathbf{h})}{[(1-h)^2 - h^2 \rho^2(\mathbf{h})]^{3/2}}$ y por definición de covarianza, tenemos que coincide con la función de correlación dada por la ecuación (4.3). Analizando la ecuación que representa la función de correlación del campo aleatorio Tukey- h , podemos simplificarla como:

$$\rho_{T_h^*}(\mathbf{h}) = \frac{a \cdot \rho(\mathbf{h})}{[b + c \cdot \rho^2(\mathbf{h})]^{3/2}} \quad (7.8)$$

donde $a = (1 - 2h)^{3/2}$, $b = (1 - h)^2$ y $c = -h^2$, valores escalares. Es fácil ver que $\rho_{T_h^*}(\mathbf{h})$ es infinitamente diferenciable. Por ejemplo, la segunda derivada es

$$\frac{\partial^2 \rho_{T_h^*}(\mathbf{h})}{\partial \mathbf{h}^2} = \frac{a(-9bc\rho(\mathbf{h})\rho'(\mathbf{h})^2 + 6c^2\rho^3(\mathbf{h})\rho'(\mathbf{h})^2 + b^2\rho''(\mathbf{h}) - bc\rho^2(\mathbf{h})\rho''(\mathbf{h}) - 2c^2\rho^4(\mathbf{h})\rho''(\mathbf{h}))}{(b + c\rho^2(\mathbf{h}))^{7/2}} \quad (7.9)$$

considerando que $\rho(\mathbf{h})$ es infinitamente diferenciable, a medida que aumenta el grado de derivación de $\rho_{T_h^*}(\mathbf{h})$, la expresión crece en longitud, pero esto no impide

que sea infinitamente diferenciable, por lo que T_{h_l, h_r}^* es m -veces diferenciable en media cuadrática.

Para la primera parte del punto e) es fácil demostrar que $\rho_{T_{h_l, h_r}^*}(\mathbf{h})$ es convexo con respecto a $\rho(\mathbf{h})$ entre 0 y 1 ya que la segunda derivada de $\rho_{T_{h_l, h_r}^*}(\mathbf{h})$ con respecto a $\rho(\mathbf{h})$ es positiva, entonces $\rho_{T_{h_l, h_r}^*}(\mathbf{h}) \leq \rho(\mathbf{h})$. Para la segunda parte del punto e) si $h_l, h_r \rightarrow 0$ podemos determinar que la $\mathbb{E}(T_{h_l, h_r}^*(\mathbf{s}_i)T_{h_l, h_r}^*(\mathbf{s}_j))$ resulta $\rho(\mathbf{h})$, de la misma forma, la media y la varianza del campo aleatorio Tukey- hh dadas por las ecuaciones (4.8) y (4.9) dan 0 y 1 respectivamente. Con estos resultados, al calcular el $\rho_{T_{h_l, h_r}^*}(\mathbf{h})$ resulta $\rho(\mathbf{h})$.

Finalmente, para el punto f) si cambiamos h_l por h_r y h_r por h_l , la $\mathbb{E}(T_{h_l, h_r}^*(\mathbf{s}_i)T_{h_l, h_r}^*(\mathbf{s}_j))$, $\mathbb{E}(T_{h_l, h_r}^*(\mathbf{s}))$ y $Var(T_{h_l, h_r}^*(\mathbf{s}))$ no cambia. Por lo tanto, $\rho_{T_{h_l, h_r}^*}(\mathbf{h}) = \rho_{T_{h_r, h_l}^*}(\mathbf{h})$.

Observación: En base a varios resultados numéricos obtenidos en simulaciones, estimaciones y evaluaciones obtenidas, se observa que $\rho_{T_{h_l, h_r}^*}(\mathbf{h}) \leq \rho(\mathbf{h})$ \square

7.3. Prueba Teorema 4.4

Demostración. Considerando $T^* = (T^*(s_1), \dots, T^*(s_n))^T$, donde $z = (z(s_1), \dots, z(s_n))^T \sim N_n(0, R_n)$. Además, considere las matrices diagonales $D(\boldsymbol{\ell}) = \text{diag}\{\ell_1, \dots, \ell_n\}$, con $\boldsymbol{\ell} \in \{-1, 1\}^n$, que son tales que $D(\boldsymbol{\ell})^2$ es la matriz de identidad. Ya que $D(\boldsymbol{\ell}) \circ \tau(h, \mathbf{t})$ (el producto de dos componentes) con $\tau(h, \mathbf{t}) = \left(\left(\frac{W(ht_1^2)}{h} \right)^{1/2}, \dots, \left(\frac{W(ht_n^2)}{h} \right)^{1/2} \right)^T$ donde $h \in \{h_l, h_r\}$, entonces tenemos

$$F_{T^*}(\mathbf{t}) = P_v(T^* \leq \mathbf{t}) = \sum_{\boldsymbol{\ell} \in \{-1, +1\}^n} \Phi_n(D(\boldsymbol{\ell}) \circ \tau(h, \mathbf{t}); \mathbf{0}, R_n) \quad (7.10)$$

Por lo tanto, al usar

$$\begin{aligned} \frac{\partial^n \Phi_n(D(\boldsymbol{\ell}) \circ \tau(h, \mathbf{t}); \mathbf{0}, R_n)}{\partial t_1, \dots, \partial t_n} &= D(\boldsymbol{\ell}) \cdot \phi_n(D(\boldsymbol{\ell}) \circ \tau(h, \mathbf{t}); \mathbf{0}, R_n) \\ &\cdot \frac{\partial^n \tau(h, \mathbf{t})}{\partial t_1, \dots, \partial t_n} I_m \prod_{i=1}^m (-\infty, 0)^i \prod_{j=1}^{n-m} (0, \infty)^j (t_1, \dots, t_n) \end{aligned} \quad (7.11)$$

donde $I(A)$ denota la función indicadora del conjunto (A) , con m componentes negativos y $n - m$ componentes positivos del vector \mathbf{t} .

$$\frac{\partial^n \tau(h, \mathbf{t})}{\partial t_1, \dots, \partial t_n} = \tau(h, \mathbf{t}) \{ \text{diag}(t_1, \dots, t_n) [1 + h \cdot \text{diag}(\tau(h, t_1), \dots, \tau(h, t_n)) \tau(h, \mathbf{t})] \}^{-1} \quad (7.12)$$

Encontramos que la densidad conjunta de T^* .

$$f_{T_{h_l, h_r}^*}(\mathbf{t}) = D(\boldsymbol{\ell}) \circ \tau(h, \mathbf{t}) \{ \text{diag}(t_1, \dots, t_n) [1 + h \cdot \text{diag}(\tau(h, t_1), \dots, \tau(h, t_n)) \tau(h, \mathbf{t})] \}^{-1} \cdot \phi_n(D(\boldsymbol{\ell}) \circ \tau(h, \mathbf{t}); \mathbf{0}, R_n) \quad (7.13)$$

$$f_{T_{h_l, h_r}^*}(\mathbf{t}) = \sum_{\boldsymbol{\ell} \in \{-1, +1\}^n} \frac{\prod_{i=1}^m \tau_{h_l}^{-1}(t_i)}{\prod_{i=1}^m t_i (1 + W(h_l t_i^2))} \frac{\prod_{j=m+1}^n \tau_{h_r}^{-1}(t_j)}{\prod_{j=m+1}^n t_j (1 + W(h_r t_j^2))} \cdot \phi_n(D(\boldsymbol{\ell}) \circ \tau(h, \mathbf{t}), \mathbf{0}, R_n) I_{\prod_{i=1}^m (-\infty, 0)^i \prod_{j=1}^{n-m} (0, \infty)^j}(\mathbf{t}_1, \dots, \mathbf{t}_n) \quad (7.14)$$

donde $I_A(x)$ denota la función indicadora del conjunto A , $R_n = [\rho(s_i - s_j)]_{i,j=1}^n$, y las matrices diagonales $D(\boldsymbol{\ell}) = \text{Diag}\{\ell_1, \dots, \ell_n\}$, con $\boldsymbol{\ell} = (\ell_1, \dots, \ell_n) \in \{-1, +1\}^n$, $\tau_h^{-1}(\mathbf{t}) = \text{sign}(\mathbf{t}) \left(\frac{W(ht^2)}{h} \right)^{-1/2}$, $\tau(h, \mathbf{t}) = \left(\frac{W(ht_1^2)}{h}^{-1/2}, \dots, \frac{W(ht_n^2)}{h}^{-1/2} \right)^T$, donde $h \in \{h_l, h_r\}$.

□

Capítulo 8

Apéndice B

En el presente capítulo, otorgaremos todos los códigos de R para obtener las simulaciones y estimaciones computacionales que se han empleado en esta investigación.

La estimación y predicción de nuestro modelo, tanto el campo aleatorio Tukey-*h* y Tukey-*hh*, ya se encuentran actualizados y disponibles en el paquete de desarrollo de R, `GeoModels` (Bevilacqua y Morales-Oñate, 2018).

`GeoModels` es un paquete de R, desarrollado para realizar simulación, estimación (verosimilitud completa y compuesta a parejas dependiendo del modelo) y predicción para el análisis de campos aleatorios Gaussianos y no Gaussianos en contextos espaciales, espacio-temporales y bivariados. A diferencia de otros paquetes para Estadística Espacial, `GeoModels` permite escoger dentro de una amplia familia de funciones de covarianza para contextos Euclidianos y en la esfera.

8.1. Simulación variable aleatorio Tukey-*hh*

A continuación, mostramos el código R utilizado

```
n=1000000
hl=0.4
hr=0.2
mu=0
sigma=1

tukeyhh=function(hl,hr,mu,sigma,n){
x<-rnorm(n)
y=NULL
for(i in 1:n)
if(x[i]<0){y[i]=x[i]*exp(0.5*hl*(x[i])^2)}
else{y[i]=x[i]*exp(0.5*hr*(x[i])^2)}
return(mu+sigma*y)
}

t_hh=tukeyhh(hl,hr,mu,sigma,n)

mean(t_hh)
mean_t=(hr-hl)/(sqrt(2*pi)*(1-hl)*(1-hr))
mean_t

var(t_hh)
var_t=0.5*(1-2*hl)^(-3/2)+0.5*(1-2*hr)^(-3/2)-(mean_t)^2
var_t

plot(density(t_hh))
```


8.2. Contorno Tukey-*hh*

A continuación, mostramos el código R utilizado

```

rm(list_=_ls())
require(cubature)
require(hypergeo)
require(mvtnorm)
require(fMultivar)
require(pbivnorm)
require(viridisLite)
library(mnormt)
library(corpcor)
funct_pdf_=_function(y, rho, hl, hr){
  c1=c2=1
  y1_=_y[1]
  y2_=_y[2]
  if(y1!=0&y2!=0&hl>0&hr>0){
    y_1_=_sign(y1)*(VGAM::lambertW(hl*y1*y1)/(hl))^(1/2)
    y_2_=_sign(y2)*(VGAM::lambertW(hr*y2*y2)/(hr))^(1/2)
    c1_=_c1/(y1*(1+VGAM::lambertW(hl*y1*y1)))
    c2_=_c2/(y2*(1+VGAM::lambertW(hr*y2*y2)))
    dens_=_c1*c2*dmvnorm(c(y_1, y_2), _c(0,0), _matrix(c(1, rho, rho, 1), 2, 2))
  }
  if(hl==0&hr>0&y2>0&y1<0){
    y_1_=_y1
    y_2_=_sign(y2)*(VGAM::lambertW(hr*y2*y2)/(hr))^(1/2)
    c1_=_c1
    c2_=_c2/(y2*(1+VGAM::lambertW(hr*y2*y2)))
    dens_=_c1*c2*dmvnorm(c(y_1, y_2), _c(0,0), _matrix(c(1, rho, rho, 1), 2, 2))
  }
  if(hl==0&hr>0&y2>0&y1>0){
    y_1_=_sign(y1)*(VGAM::lambertW(hr*y1*y1)/(hr))^(1/2)
    y_2_=_sign(y2)*(VGAM::lambertW(hr*y2*y2)/(hr))^(1/2)
    c1_=_c1/(y1*(1+VGAM::lambertW(hr*y1*y1)))
    c2_=_c2/(y2*(1+VGAM::lambertW(hr*y2*y2)))
    dens_=_c1*c2*dmvnorm(c(y_1, y_2), _c(0,0), _matrix(c(1, rho, rho, 1), 2, 2))
  }
  if(hl==0&hr>0&y2<0&y1>0){
    y_1_=_sign(y1)*(VGAM::lambertW(hr*y1*y1)/(hr))^(1/2)
    y_2_=_y2
  }
}

```

```

c1_u=(y_1/(y1*(1+VGAM::lambertW(hr*y1*y1))))
c2_u=1
dens_u=c1*c2*dmvnorm(c(y_1,y_2),c(0,0),matrix(c(1,rho,rho,1),2,2))
}
if(hl==0&hr>0&y2<0&y1<0){
y_1_u=y1
y_2_u=y2
c1_u=1
c2_u=1
dens_u=c1*c2*dmvnorm(c(y_1,y_2),c(0,0),matrix(c(1,rho,rho,1),2,2))
}
if(hl>0&hr==0&y1<0&y2<0){
y_1_u=sign(y1)*(VGAM::lambertW(hl*y1*y1)/(hl))^(1/2)
y_2_u=sign(y2)*(VGAM::lambertW(hl*y2*y2)/(hl))^(1/2)
c1_u=(y_1/(y1*(1+VGAM::lambertW(hl*y1*y1))))
c2_u=(y_2/(y2*(1+VGAM::lambertW(hl*y2*y2))))
dens_u=c1*c2*dmvnorm(c(y_1,y_2),c(0,0),matrix(c(1,rho,rho,1),2,2))
}
if(hl>0&hr==0&y1<0&y2>0){
y_1_u=sign(y1)*(VGAM::lambertW(hl*y1*y1)/(hl))^(1/2)
y_2_u=y2
c1_u=(y_1/(y1*(1+VGAM::lambertW(hl*y1*y1))))
c2_u=1
dens_u=c1*c2*dmvnorm(c(y_1,y_2),c(0,0),matrix(c(1,rho,rho,1),2,2))
}
if(hl>0&hr==0&y1>0&y2<0){
y_1_u=y1
y_2_u=sign(y2)*(VGAM::lambertW(hl*y2*y2)/(hl))^(1/2)
c1_u=1
c2_u=(y_2/(y2*(1+VGAM::lambertW(hl*y2*y2))))
dens_u=c1*c2*dmvnorm(c(y_1,y_2),c(0,0),matrix(c(1,rho,rho,1),2,2))
}
if(hl>0&hr==0&y1>0&y2>0){
y_1_u=y1
y_2_u=y2
c1_u=1
c2_u=1
dens_u=c1*c2*dmvnorm(c(y_1,y_2),c(0,0),matrix(c(1,rho,rho,1),2,2))
}
if(hl==0&hr==0){

```

```

y_1_ = y1
y_2_ = y2
c1_ = 1
c2_ = 1
dens_ = c1*c2*dmvnorm(c(y_1,y_2),c(0,0),matrix(c(1,rho,rho,1),2,2))
}
if(y1<0&y2==0&h1!=0){
y_1_ = sign(y1)*(VGAM::lambertW(h1*y1*y1)/(h1))^(1/2)
y_2_ = 0
c1_ = (y_1_/(y1*(1+VGAM::lambertW(h1*y1*y1))))
c2_ = 1
dens_ = c1*c2*dmvnorm(c(y_1,y_2),c(0,0),matrix(c(1,rho,rho,1),2,2))
}
if(y1>0&y2==0&hr!=0){
y_1_ = sign(y1)*(VGAM::lambertW(hr*y1*y1)/(hr))^(1/2)
y_2_ = 0
c2_ = (y_1_/(y1*(1+VGAM::lambertW(hr*y1*y1))))
c1_ = 1
dens_ = c1*c2*dmvnorm(c(y_1,y_2),c(0,0),matrix(c(1,rho,rho,1),2,2))
}
if(y1==0&y2<0&h1!=0){
y_1_ = 0
y_2_ = sign(y2)*(VGAM::lambertW(h1*y2*y2)/(h1))^(1/2)
c1_ = 1
c2_ = (y_2_/(y2*(1+VGAM::lambertW(h1*y2*y2))))
dens_ = c1*c2*dmvnorm(c(y_1,y_2),c(0,0),matrix(c(1,rho,rho,1),2,2))
}
if(y1==0&y2>0&hr!=0){
y_1_ = 0
y_2_ = sign(y2)*(VGAM::lambertW(hr*y2*y2)/(hr))^(1/2)
c1_ = 1
c2_ = (y_2_/(y2*(1+VGAM::lambertW(hr*y2*y2))))
dens_ = c1*c2*dmvnorm(c(y_1,y_2),c(0,0),matrix(c(1,rho,rho,1),2,2))
}
if(y1==0&y2==0){
y_1_ = 0
y_2_ = 0
dens_ = dmvnorm(c(y_1,y_2),c(0,0),matrix(c(1,rho,rho,1),2,2))
}
return(dens)

```

```

}
biv_Tukeyhh_pdf=function(y1,y2,rho,h1,hr){
  if(y1>0&y2>0)res=funct_pdf(c(y1,y2),rho,hr,hr)
  if(y1>0&y2<0)res=funct_pdf(c(y1,y2),rho,hr,h1)
  if(y1<0&y2>0)res=funct_pdf(c(y1,y2),rho,h1,hr)
  if(y1<0&y2<0)res=funct_pdf(c(y1,y2),rho,h1,h1)
  if(y1<0&y2==0)res=funct_pdf(c(y1,y2),rho,h1,h1)
  if(y1>0&y2==0)res=funct_pdf(c(y1,y2),rho,hr,hr)
  if(y1==0&y2<0)res=funct_pdf(c(y1,y2),rho,h1,h1)
  if(y1==0&y2>0)res=funct_pdf(c(y1,y2),rho,hr,hr)
  if(y1==0&y2==0)res=funct_pdf(c(y1,y2),rho,h1,hr)
  if(h1>0&hr==0&y1>0&y2<0)res=funct_pdf(c(y1,y2),rho,h1,h1)
  if(h1==0&hr>0&y2<0&y1>0)res=funct_pdf(c(y1,y2),rho,hr,hr)
  if(h1==0&hr>0&y2<0&y1<0)res=funct_pdf(c(y1,y2),rho,0,h1)
  return(res)
}

biv_tukey_hh_vec<-Vectorize(biv_Tukeyhh_pdf,c("y1","y2"))

xx=seq(-7,7,0.1)

ll=c(0.001,0.002,0.0035,0.0055,0.0085,0.011,0.017,0.023,0.038,0.05,0.075,0.11)

#####
#example1
#####

rho=0.9
hl=0.
hr=0.
#y1=2
#y2=2
#biv_Tukeyhh_pdf(y1,y2,rho,h1,hr)

BB_tp_tukeyhh=outer(xx,xx,biv_tukey_hh_vec,rho=rho,h1=hl,hr=hr)
#pdf("cont1h.pdf")
contour(xx,xx,BB_tp_tukeyhh,col=viridis(n=12),levels=ll,main=bquote(paste(
#dev.off()

```

8.3. Correlación Tukey-hh

A continuación, mostramos el código R utilizado

```

corr.tukeyhh<-function(hl,hr,rho,x){
x1=1-(1-rho^2)*hr
x2=(1-hr)^2-(rho*hr)^2
y1=1-(1-rho^2)*hl
y2=(1-hl)^2-(rho*hl)^2
g=1-hl-hr+(1-rho^2)*hl*hr
h1=sqrt(1-rho^2/(x1^2))+(rho/x1)*asin(rho/x1)
h2=sqrt(1-rho^2/(y1^2))+(rho/y1)*asin(rho/y1)
h3=sqrt(1-rho^2/(x1*y1))+sqrt(rho^2/(x1*y1))*asin(sqrt(rho^2/(x1*y1)))
p1=x1*h1/(2*pi*(x2)^(3/2))+rho/(4*(x2)^(3/2))
p2=y1*h2/(2*pi*(y2)^(3/2))+rho/(4*(y2)^(3/2))
p3=-(x1*y1)^(1/2)*h3/(2*pi*(g)^(3/2))+rho/(4*(g)^(3/2))
mean_t=(hr-hl)/(sqrt(2*pi)*(1-hl)*(1-hr))
var_t=0.5*(1-2*hl)^(-3/2)+0.5*(1-2*hr)^(-3/2)-(mean_t)^2
return((p1+p2+2*p3-mean_t^2)/var_t)}

a=0.3
tau=0.2
cex=2.5
x=seq(0,4,0.001)
#rho=exp(-x*a) # exponential correlation
rho=(1-tau)*(1-x/a)^4 # 0 veces diff
#rho=(1-x/a)^5*(1+5*(x/a))*I(x<a) # 1 veces diff
#rho=(1-x/a)^7*(1+(5+2)*(x/a)+(x/a)^2*(5^2+4*5+3)/3)*I(x<a) # 2 veces diff

cex=2.5
plot(x,rho,cex=cex,type="l",ylim=c(0,1),xlim=c(0,0.4),xlab="",ylab="",lty=1,lwd=2)
lines(x,corr.tukeyhh(0.4,0.1,rho,x),lty=2,cex=cex,lwd=2)
lines(x,corr.tukeyhh(0.4,0.2,rho,x),lty=3,cex=cex,lwd=2)
lines(x,corr.tukeyhh(0.4,0.3,rho,x),lty=4,cex=cex,lwd=2)
lines(x,corr.tukeyhh(0.4,0.4,rho,x),lty=5,cex=cex,lwd=2)
lines(x,corr.tukeyhh(0.1,0.4,rho,x),lty=6,cex=cex,lwd=2)
legend("topright",c(expression(paste("Gaussian")),
expression(paste("Tukey-hh with ",h[1],"=0.4",h[r],"=0.1")),
expression(paste("Tukey-hh with ",h[1],"=0.4",h[r],"=0.2")),
expression(paste("Tukey-hh with ",h[1],"=0.4",h[r],"=0.3"))),

```

```
expression(paste("Tukey-hh with ",h[l],"=0.4",h[r],"=0.4")),  
expression(paste("Tukey-hh with ",h[l],"=0.1",h[r],"=0.4"))),  
lty=c(1,2,3,4,5,6),lwd=c(2,2,2,2,2,2))
```

```
carpeta<-"C:/Users"  
setwd(carpeta)  
dir()
```

```
pdf("ccc_nug.pdf")  
cex=2.5  
plot(x,rho,cex=cex,type="l",ylim=c(0,1),xlim=c(0,0.35),xlab="",ylab="",lty=1,lwd=2)  
lines(x,corr.tukeyhh(0.4,0.3,rho,x),lty=2,cex=cex,lwd=2)  
legend("topright",c(expression(paste("Gaussian")),  
expression(paste("Tukey-hh with ",h[l],"=0.4 ",h[r],"=0.3"))),  
lty=c(1,2),lwd=c(2,2))  
dev.off()
```

8.4. Simulación, estimación y predicción campo aleatorio Tukey- hh usando verosimilitud por parejas ponderadas

A continuación, mostramos el código R utilizado para la simulación estimación y predicción de un campo aleatorio Tukey- hh . En el código se utiliza el método de estimación por verosimilitud por parejas ponderadas. Para la estimación verosimilitud computa ponderada, sólo hay que cambiar desde `fit1` hasta `fit6`, `likelihood="Marginal"` por `likelihood="Conditional"`

```
rm(list=ls())
library(devtools)
install_github("vmoprojs/GeoModels")
library(GeoModels)
library(fields)
library(spam)

#####
##### Examples of spatial RFs CON COVARIABLES #####
#####

model="Tukeyh2"
corrmodel <- "GenWend_Matern"
# Define the spatial-coordinates of the points:

NN=500
coords=cbind(runif(NN),runif(NN))
#x=y=seq(0,1,0.04);coords=as.matrix(expand.grid(x,y));nrow(coords)
a0=rep(1,NN)
a1=runif(NN,-1,1)
X=cbind(a0,a1)
# Set the covariance model's parameters:
#primer ejemplo con h_l=0.1 y h_r=0.1

tail1=0.1   #h_r  0.1 0.3
tail2=0.1   #h_l  0.1 0.2  0.3

mean <- 0.5
mean1<- -0.25
```

*Simulación, estimación y predicción campo aleatorio Tukey-hh usando
verosimilitud por parejas ponderadas*

80

```

sill <- 1
nugget <- 0

power2=4      #delta
c_supp <- 0.2 #alpha
smooth=0      #0,1

konst=(gamma(2*smooth+power2+1)/gamma(power2))^(1/(1+2*smooth))
scale_mat=c_supp/konst
scale_mat*konst

param=list(nugget=nugget,mean=mean,mean1=mean1,
scale=scale_mat,sill=sill,power2=1/power2,smooth=smooth,tail1=tail1,tail2=tail2)

k=1

set.seed(8)
I=20;

optimizer="Nelder-Mead"#"nlminb"#"Nelder-Mead"#"

res1=res2=res3=res4=res5=res6=NULL
while(k<=1000){
data <- GeoSim(coordx=coords,corrmodel=corrmodel,X=X, param=param,model=model,sp

##### composite likelihood #####

lower1<-list(mean=-I, mean1=-I,scale=0,sill=0,tail1=0,tail2=0);
upper1<-list(mean=I, mean1=I,scale=I,sill=I,tail1=0.5,tail2=0.5);

fixed<-list(nugget=nugget,power2=1/power2,smooth=smooth)
start<-list(mean=mean,mean1=mean1,
scale=scale_mat,sill=sill,tail1=tail1,tail2=tail2)
fit1 <- GeoFit(data=data,coordx=coords,corrmodel=corrmodel,X=X,
neighb=4,likelihood="Marginal",type="Pairwise",optimizer=optimizer,
start=start,fixed=fixed, model = model,lower=lower1,upper=upper1)

```



```
fit2 <- GeoFit(data=data,coordx=coords,corrmodel=corrmodel,X=X,
neighb=8,likelihood="Marginal",type="Pairwise",optimizer=optimizer,
start=start,fixed=fixed, model = model,lower=lower1,upper=upper1)
```

```
fit3 <- GeoFit(data=data,coordx=coords,corrmodel=corrmodel,X=X,
neighb=12,likelihood="Marginal",type="Pairwise",optimizer=optimizer,
start=start,fixed=fixed, model = model,lower=lower1,upper=upper1)
```

```
fit4 <- GeoFit(data=data,coordx=coords,corrmodel=corrmodel,X=X,
maxdist=0.05,likelihood="Marginal",type="Pairwise",optimizer=optimizer,
start=start,fixed=fixed, model = model,lower=lower1,upper=upper1)
```

```
fit5 <- GeoFit(data=data,coordx=coords,corrmodel=corrmodel,X=X,
maxdist=0.1,likelihood="Marginal",type="Pairwise",optimizer=optimizer,
start=start,fixed=fixed, model = model,lower=lower1,upper=upper1)
```

```
fit6 <- GeoFit(data=data,coordx=coords,corrmodel=corrmodel,X=X,
maxdist=0.15,likelihood="Marginal",type="Pairwise",optimizer=optimizer,
start=start,fixed=fixed, model = model,lower=lower1,upper=upper1)
```

```
if(fit1$convergence=="Successful"&&fit2$convergence=="Successful"&&fit3$convergence==
&&fit4$convergence=="Successful"&&fit5$convergence=="Successful"&&fit6$convergence=="
{
```

```
res1=rbind(res1,fit1$param)
res2=rbind(res2,fit2$param)
res3=rbind(res3,fit3$param)
res4=rbind(res4,fit4$param)
res5=rbind(res5,fit5$param)
res6=rbind(res6,fit6$param)
```

```
print(fit1)
print(k)
k=k+1
}
}
```

82 *Simulación, estimación y predicción campo aleatorio Tukey-hh usando
verosimilitud por parejas ponderadas*

```
res<-cbind(res1,res2,res3,res4,res5,res6)  
write.table(res, file = "hl01hr01.txt", row.names = FALSE)
```