UNIVERSIDAD DEL BÍO BÍO

FACULTAD DE EDUCACIÓN Y HUMANIDADES

ESCUELA DE PEDAGOGÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

“De lo intuitivo a lo geométrico: una situación de aprendizaje para experimentar con objetos geométricos en el colegio”

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE PROFESORA DE EDUCACIÓN MEDIA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

TESISTA: SOTO AEDO GERALDINE SOFÍA

PROFESORA GUÍA: PASCUAL PIZARRO SARA DEL CARMEN

CHILLÁN, 2022

TABLA DE CONTENIDOS

AGRADECIMIENTOS

En este espacio quiero agradecer infinitamente a mi profesora guía, Doctora Sara Pascual Pizarro, por su paciencia y comprensión, por alentarme a terminar mi proyecto, porque jamás me dejo sola y gracias a ella hoy puedo concluir esta etapa, por entender incluso cuando yo no podía expresar lo que me pasaba. También agradezco a mis amigos Stefany y Cristian por su apoyo incondicional en todos mis procesos, por acompañarme y sostenerme cuando más los necesite, por motivarme a seguir.

Agradezco a mis padres Héctor y Nancy porque gracias a ellos pude emprender este camino universitario, por sus innumerables esfuerzos para apoyarme y darme todo lo que estaba en sus manos para lograr esta meta, a mis hermanas Roxana y Katherine, que siempre estuvieron presentes, a mi compañero de vida Alexis por siempre estar para mí, por su apoyo incondicional desde el primer día que ingresé a la Universidad y por supuesto a mi pequeña hija Aurora que llegó a poner mi vida al revés, pero siempre será lo mas bello que tengo y el motivo más grande para seguir.

Agradezco al profesor Ivo Basso que confió en mí y me ofreció mi primera ayudantía, siempre tuvo un consejo y palabras motivadoras y siempre nos motivó a mí y a mis compañeros a buscar algo más.

Son tantas las personas que nos acompañan en estos años de Universidad, a las cuales tenemos tanto que agradecer, como la tía del comedor que nos servía calentita la comida todos los días, la tía del negocio que con su carisma nos cambiaba un mal día, el tío auxiliar que reservaba salas y encendía el data y muchos más, a todos ellos gracias por hacer nuestro paso universitario más acogedor.

INTRODUCCIÓN

La relación del alumno con las figuras geométricas cambia a lo largo de su escolarización. Las actividades actuales de los textos y programas que han sido aprobados por el Ministerio de Educación (MINEDUC) no explican el tipo de trabajo que se está realizando sobre los objetos geométricos, si es visualización, medición, deducción (Kuzniak, 2010), o una geometría fragmentada donde “el modelo de referencia es la geometría de Euclides, donde las propiedades se basan en la intuición del espacio” (Kuzniak, 2010). No se da ninguna indicación sobre las actividades a realizar para alcanzar los objetivos, para permitir que los alumnos pasen progresivamente de un reconocimiento perceptivo de los objetos a un estudio mediante el dibujo y los instrumentos de medida, para validar determinadas propiedades. Podemos imaginar que, dependiendo de la tarea, se le pedirá al alumno que trabaje en diferentes enfoques y que el papel de la medición será determinante, pero no tenemos indicación sobre el espacio de trabajo geométrico en los que deben trabajar los alumnos. Por tanto, es muy probable que el conocimiento de los estudiantes sea solo el fruto de la enseñanza que han recibido y del aprendizaje que han extraído de ella. Analizaremos el espacio de trabajo geométrico de las producciones de los estudiantes en situación de resolución de actividades geométricos con el fin de facilitar el aprendizaje de propiedades e iniciar un proceso de validación basado en el razonamiento hipotético-deductivo sobre las actividades geométricas.

Las herramientas teóricas en las que se basa este estudio son las siguientes: paradigmas geométricos definidos por Houdement y Kuzniak (2006) y espacios de trabajo geométricos (ETG) definidos por Kuzniak (2010). En particular, estudiaremos el paso de una “geometría natural” (GI) a una geometría “axiomática natural” (GII), habiendo sido identificada esta como difícil de implementar en las clases mientras que es decisiva para el aprendizaje de los estudiantes (Braconne - Michoux, A. 2008). También nos centraremos en el papel que se les da a los instrumentos de geometría, y en la noción de figura geométrica como objeto teórico. A partir de estos resultados cuestionamos el uso de instrumentos habituales, la producción y reproducción de figuras para las propiedades de aprendizaje en la escuela básica (9-12 años). En la primera parte, presentamos cómo los paradigmas geométricos (Houdement & Kuzniak, 2006) y los espacios de trabajo geométricos (Kuzniak, 2010) son herramientas relevantes para nuestro estudio. A continuación, mostraremos la secuencia de aprendizaje y algunos análisis resultantes de su implementación en clase. Finalmente, concluiremos sobre la naturaleza del conocimiento geométrico construido en los estudiantes.

1. PROBLEMÁTICA DE INVESTIGACIÓN

1.1. Geometría y realidad: de lo intuitivo a lo geométrico

Varios estudios se han centrado en las dificultades que encontrarán los futuros profesores de primaria, en matemáticas y especialmente en geometría, estas dificultades son tanto del orden del conocimiento geométrico teórico como de las concepciones de la enseñanza de la disciplina (Burton, J., Detheux - Jehin, M., & Fagnant, A. 1997). Pero, establecida esta observación, también se puede preguntar el origen de estas dificultades entre los estudiantes. Al analizar la relación de un alumno con la geometría, podemos imaginar encontrar una explicación al fenómeno. La primera comprensión de la geometría utiliza dibujos, identificados por sus formas y una visión icónica (Duval, 2005). El estudiante descubre diferentes lugares del mundo real: se sitúa en relación con el lugar y los objetos del lugar, y coloca los objetos unos sobre otros. Estos aprendizajes espaciales son de gran importancia para los aprendizajes geométricos (Fischbein, E., 1999). Sus interpretaciones que son naturales muchas veces están en conflicto con las actividades geométricas con los objetos materiales (en particular el trazado con instrumentos de figuras en el plano y sólidos en el espacio) en que el proceso de resolución se apoya sobre los objetos en que se está trabajando, y la validación se realiza en el espacio intuitivo, con razonamientos no necesariamente formales.

La enseñanza habitual que se basa en gran medida en las pruebas perceptivas, asigna implícitamente un gran papel a las representaciones espontáneas que los alumnos tienen de espacio. El estudio de estas representaciones ha permitido a los investigadores (Dorier et al.; 2014) revelar la discrepancia entre estas representaciones y las nociones geométricas a las que se apunta los conceptos geométricos. Las limitaciones debidas al tamaño de los espacios, en los que se producen las interacciones habituales de la vida cotidiana, estructuran fuertemente el conocimiento "natural" del espacio en tres representaciones: microespacio (que corresponde a la captación de la realidad), mesoespacio (que corresponde a las situaciones de movimiento en el espacio físico) y el macroespacio (que corresponde a las visiones parcial y global de una construcción intelectual). Según

Brousseau (1980) la representación del espacio resultante de la experiencia extraescolar actual no es homogénea y es muy diferente de la geometría elemental.

Aquí, los alumnos utilizan procedimientos perceptivos que les permitirían tener éxito en el micro espacio, pero no en el meso espacio ¿A qué se debe entonces la sorpresa que muestran la mayoría de los profesores ante el desfase de los resultados esperados? Si la lista de "conocimientos esenciales" y la "progresión del aprendizaje" que completan los programas, especifican que las propiedades de las figuras a conocer se refieren a las longitudes de los lados, los valores de los ángulos, el paralelismo y la perpendicularidad donde las propiedades de las figuras se establecen en casos aislados, la mayoría de las veces validadas por medición y luego generalizadas. Su dominio del modelo real le hace proyectar su conocimiento del espacio geométrico en el espacio sensible sin dificultad, al menos en casos sencillos, y la obviedad que les parece de la solución les impide comprender todos los pasos que deben realizar con las propiedades de los conceptos geométricos y adquirir las habilidades esperadas dentro del espacio geométrico.

1.1.1. La intuición en el aprendizaje de la geometría

Los primeros capítulos de la geometría de los textos de enseñanza comienzan a menudo con la introducción del vocabulario y anotaciones como si se quisiera llegar lo antes posible a formas de decir y de escribir en el rigor de las demostraciones, libre de la intuición aportada por la experiencia espacial que disponen los alumnos. Tener en cuenta la intuición geométrica constituye un poderoso instrumento heurístico por el hecho de que se pueden transferir a los conocimientos geométricos intuiciones procedentes de nuestra relación con el espacio (juegos de cuadros, Douady, 1986, 1994). Según Fischbein, E. (1999) la intuición puede caracterizarse como una toma de contacto inmediata, directa, concreta con su objeto, y realizar al mismo tiempo la comprensión más íntima con su objeto, tomándolo en su esencia y en su singularidad (Kuzniak, A. y Houdement, C. 2006).

Los estudios muestran estar de acuerdo en que la enseñanza de la geometría debe permitir al alumno distinguir el espacio intuitivo y físico del espacio geométrico, que sólo a partir de esta distinción el alumno podrá comprender las preguntas que se plantean en geometría y las respuestas que se pueden llevar a cabo (Laborde, C., 1997). La intuición o "conocimiento repentino, espontaneo, indudable, independiente de toda demostración" es otra primera forma de aprehensión de un problema, ella puede funcionar como un motor determinante para la transición entre el espacio intuitivo y el espacio geométrico. Según Kuzniak, (2010) en nuestra concepción, la intuición puede evolucionar gracias a un conjunto de experiencias y en consecuencia de conocimientos a posteriori. La contradicción no es aparente: es necesario ver la intuición estructurada al nivel del individuo en un conjunto de capas que se superponen y hacen olvidar las primeras intuiciones.

Pluvinage (1997) en uno de sus trabajos realizados en Francia, permitió identificar el tipo de razonamiento basado en la intuición que utilizan los niños de la escuela primaria. En ello también observó que el razonamiento en la clase que se enseña, a menudo mediante un trabajo con figuras particulares, trata de situar la prueba sobre un ejemplo, haciéndola transferible. En la ejecución de estas investigaciones, propuso el siguiente problema a alumnos de segundo y cuarto nivel (de 10 a 11 años), cuya realización podía poner en práctica varias respuestas.

En este esbozo hecho a mano están dibujados:

- *Un rectángulo ABCD*
- *Un círculo de centro en A pasando por D*

El círculo corta al lado AB en el punto E.

¿Qué longitud tiene el segmento EB?

Aclara como obtuviste tu respuesta

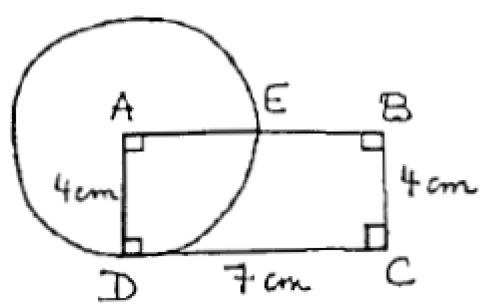


Figura 1. Ejemplo experimentado por Pluvinage (1997).

El análisis de las respuestas de los alumnos, por parte de los investigadores, les llevó a observar quienes daban una preferencia a responder con argumentos. Se trataba también, de una gestión exploratoria que permita construir un indicio de convicción y acercarse a la elaboración de la argumentación.

Dentro de las respuestas, se destacan tres tipos: las que se refieren al modelo matemático, las que provienen de la medición (uso de regla graduada) y las establecidas por la percepción visual. Los resultados que se obtuvieron con alumnos de 11 años (colegio en Francia) fueron: respuestas matemáticas 18%, respuestas físicas 28%, respuestas perceptivas 52%, otras respuestas 2%. A partir de este experimento se reveló que la percepción impulsa un tipo de razonamiento, sin embargo, puede promover un tipo de razonamiento incorrecto (Pluvinage, 1997).

1.1.2. La experiencia en el aprendizaje de la geometría

Kuzniak, A. y Houdement, C. (2006) nos enseñan que la experiencia permite acercar la geometría. Las primeras actividades geométricas en el mundo permiten a los alumnos experimentar la observación, de la experiencia de observar regularidades para identificar invariantes operativas y esto, desde el jardín de infancia, también observan la importancia de dar rienda suelta a los comentarios de los alumnos durante los experimentos geométricos. Por ejemplo, dados los triángulos rectangulares isósceles, se pide a los niños de 4 a 6 años que construyan cuadrados utilizando 2 piezas. Además de descubrir que dos triángulos isósceles forman un cuadrado, los alumnos observan que dos o más triángulos pueden formar un rombo o un polígono y que todos los polígonos se componen de varios triángulos (pero no necesariamente isósceles rectángulos) Las actividades de estos estudiantes muestran que están desarrollando relaciones lógico-matemáticas. Las invariantes operativas aligeran la actividad de los estudiantes y sirven de trampolín para los nuevos procedimientos. La investigación de DeBlois (1997) muestra que es necesario repetir la operación de suma cuando se cambia el orden de los números. Las propiedades de las operaciones son invariantes operacionales que a veces son difíciles de construir para los estudiantes. El experimento de Janvier (1997) con alumnos de 15 años muestra cómo, a través de la anticipación y manipulación, la experiencia de contar terrones de azúcar no sólo para construir un significado a la fórmula del volumen de un prisma recto, sino también a reconocer la conmutatividad y la asociatividad de la multiplicación. Así, las actividades geométricas podrían contribuir a la experiencia de las representaciones mentales, una cuestión importante (Davis, 1997) y un apoyo a la anticipación como actividad matemática para los alumnos.

En el aula, solemos ofrecer actividades geométricas en determinados momentos y aritméticas otras veces, según Perrin-Glorian (2014) pocas veces reflexionamos sobre la contribución de la primera área matemática a la segunda. Sabemos sobre las dificultades de los estudiantes en la resolución de problemas aritméticos, pero sobre la contribución de la geometría a las actividades matemáticas, Perrin-Glorian (2014) nos señala que algunas actividades geométricas parecen especialmente interesantes para familiarizar a los alumnos con una actividad matemática. Una actividad que pueden utilizarse para resolver problemas aritméticos: razonar a partir de experiencias inmediatas, validar retroalimentación del entorno, anticipando un resultado creando representaciones mentales, actuando para reconocer invariantes operativas, interpretación mediante el desarrollo de un vocabulario.

Para Perrin-Glorian, hacer una experiencia en geometría en un primer momento sería intentar comprobar materialmente lo que se avanza con plegados, particiones y construcciones con regla y compás que constituyen la base del momento experimental en la escuela, donde la naturaleza de la experiencia geométrica va a depender de objetos sobre los cuales se ejerce (Perrin-Glorian, M-J. Mathe, A-C. y Leclercq, R., 2013). Este momento de estudio se desarrolla en un espacio mensurable, gracias a la percepción o a instrumentos. Considerando que nunca se tiene acceso directo a los objetos matemáticos y que, en consecuencia, el conocimiento matemático es siempre referido a alguna experiencia tangible. En el centro de las preocupaciones de las investigaciones didácticas está la cuestión de la experiencia y su relación con el conocimiento matemático.

Sin embargo, situaciones de enseñanza que apuntan a la experiencia, el pensamiento o los intereses de los alumnos, teniendo en cuenta la manipulación de los objetos y la observación de los fenómenos inducidos, que permitan una construcción progresiva del conocimiento sobre la dialéctica intuición/experiencia, no siempre están presentes. Ciertos enunciados son dados en forma cerrada «mostrar que» seguido de una propiedad que resulta evidente a los alumnos, genera que la actividad geométrica se convierte para los estudiantes en un juego incomprensible y estéril.

Si bien la intuición es determinante en la elaboración de la concepción geométrica, también puede constituirse en un obstáculo. Zykova, (1969); Kabanova-Meller, (1970); Burger y Shaughnessy, (1986); Fuys, Geddes y Tischler, (1988), testimonian que las concepciones limitadas de los alumnos se explican por la costumbre de aprender ejemplos particulares y considerar como elemento esencial particularidades no esenciales, pero comunes. En el proceso de la transición del espacio físico al espacio geométrico, se constata también que los alumnos pueden tener dificultades para aplicar una definición que conocen si tienen una imagen visual específica asociada a este concepto. Esto ayudaría a explicar la resistencia de los alumnos a las relaciones jerárquicas entre las particularidades de los cuadriláteros, por ejemplo; las imágenes asociadas a cada figura funcionan cognitivamente no como casos particulares, sino como modelos generales (Fischbein, 1999).

1.1.3. La deducción en el aprendizaje de la geometría

La investigación en didáctica de las matemáticas (Berthelot y Salin, 2001) así como la experiencia de los profesores subrayan una ruptura entre la geometría de la escuela básica, en la que la validación de las propiedades de las figuras se realiza mediante procedimientos materiales con la ayuda de instrumentos, que llamaremos geometría física, y la geometría de la escuela secundaria donde la validación se realiza mediante demostraciones que implica la manipulación de las declaraciones, que llamaremos geometría teórica. (Coutat, 2005), puso a prueba la capacidad de estudiantes de 14 años para reconocer y distinguir propiedades geométricas y distinguirlas entre ellas. Las pruebas revelaron que los alumnos tenían dificultades para distinguir una propiedad de su recíproco, así como para identificar los datos (restricciones) y la conclusión en la afirmación. Los estudios concluyeron que la comprensión de una propiedad va más allá del simple conocimiento de las palabras, debe tener en cuenta la articulación entre los conceptos y objetos geométricos. Coutat (2006) basa su investigación sobre la enseñanza de las propiedades geométricas con alumnos de 12-13 años. La hipótesis de trabajo que plantea es que la enseñanza de las propiedades debe permitir a los alumnos trabajar en la relación entre las restricciones de los datos y la conclusión para que los utilicen más adecuadamente en un paso deductivo.

La deducción permite alcanzar nueva información a partir de las ya adquiridas, sin recurso a la experiencia o a cualquier otra fuente exterior se basa en el razonamiento y permite reorganizar las contribuciones de la experiencia (Kuzniak, A. y Houdement, C. 2006).

En nuestra investigación, llamamos propiedades al conjunto de enunciados matemáticos, en los que establece la necesidad matemática de una formulación-conclusión de los enunciados elegidos como hipótesis. Estas afirmaciones están en el centro de los pasos de la deducción y, por tanto, en el razonamiento deductivo, por lo que nos centraremos en este tipo de declaraciones, con el objetivo de proponer un análisis del concepto de propiedades con la perspectiva de desarrollar posibles recursos que permitan la reinversión de las propiedades en un paso deductivo.

1.1.4. El paso de una geometría física a una geometría teórica

El énfasis en las figuras geométricas y los medios para las formas en las que pueden cambiar deberían ayudar a la geometría física y a los conceptos geométricos de base de la geometría teórica. Si las figuras son clases determinadas por un conjunto de propiedades a partir de objetos básicos como puntos, rectas, segmentos etc. éstas deben ser también abstracciones para la construcción de conceptos geométricos. De hecho, las propiedades deberían aparecer como una necesidad para realizar una figura con los instrumentos al menor costo para satisfacer la demanda, éstas se controlan con los instrumentos y más tarde por las hipótesis. Actividades que no sólo permiten elegir conceptos y aplicarlos correctamente sino también reducir la información a lo necesario y suficiente para comprender y tratar una situación tendiente hacia una estructuración de los conocimientos (Guzmán, I., 2009). Una tal estrategia según Perrin-Glorian (Dorier et al.; 2014) debería ayudar a la transición de la geometría física a la geometría teórica, pero también podría ayudar a hacer más operativos los conceptos geométricos en la resolución de problemas geométricos.

Perrin-Glorian (2014) nos señala que estas situaciones que tienen en cuenta el desarrollo cognitivo de desarrollo de los alumnos, deben integrarse en la enseñanza ordinaria de la geometría de forma coherente y no yuxtaponiendo a la práctica ordinaria tratándolos como excepciones lúdicas. Para ello, agrega Perrin-Glorian (2014), no basta con el conocimiento de los conocimientos que se van a enseñar, por un lado, y, por otra parte, es necesario tener una práctica docente eficaz. Es necesario ser capaz de utilizar los conocimientos geométricos para crear las condiciones didácticas para el aprendizaje por parte de los alumnos o, al menos, para poder comprender entender y gestionar estas condiciones.

Además, el tratamiento de esos problemas en los que el paso por la geometría teórica interviene en la modelización de un problema de geometría física, más allá del espacio delimitado por el papel o la pantalla del computador, y donde la figura puede relacionarse tanto con el mundo físico como con la geometría teórica (Perrin-Glorian et al., 2013), la estrategia de progresión se refiere a la evolución conjunta de la visión de las figuras ("superficies", "líneas") y a los instrumentos adaptados a esta visión. La elección de las condiciones del juego se realiza para favorecer la progresión de los conocimientos de los alumnos, pero también es necesario fijar los nuevos conocimientos a medida que van surgiendo, de modo que puedan utilizarse para definir las condiciones para un nuevo juego. Así, los alumnos deberán controlar las propiedades de una figura con ayuda de los instrumentos, ser capaces de trazar figuras complejas en papel en blanco o cuadriculado a partir de un modelo, hacer una descripción o un programa de construcción, hacer deducciones y probar las afirmaciones de sus observaciones sobre construcciones.

Para la validación de las propiedades de las figuras debe distinguir entre la simple percepción a partir de la verificación de las propiedades con los instrumentos a las demostraciones que implica la manipulación de las formulaciones.

Así, parecen surgir tres etapas: el reconocimiento perceptivo de las formas y la introducción de un vocabulario para designarlas, la identificación de propiedades que se verifican o se producen con la deducción de axiomas y teoremas. Según Perrin-Glorian (2014), es la transición de la segunda a la tercera que a menudo se identifica una ruptura mientras que la transición de la primera a la segunda etapa parece ser poco cuestionada y aprender a utilizar los instrumentos a menudo se considera como la adquisición de una técnica de manipulación.

Algunos autores califican esta transición como un paso «de una geometría de observación a una geometría de deducción» y se expresa en los programas de enseñanza básica como «pasar de la identificación perceptiva de figuras y configuraciones a su caracterización por propiedades» donde menudo se nombra el espacio de las representaciones gráficas al espacio intermedio entre el espacio físico y el espacio geométrico.

El objetivo de este de este trabajo es ayudar a los alumnos de 9-12 años a la continuidad de esta evolución y proponer algunos hitos de aproximación a la geometría teórica.

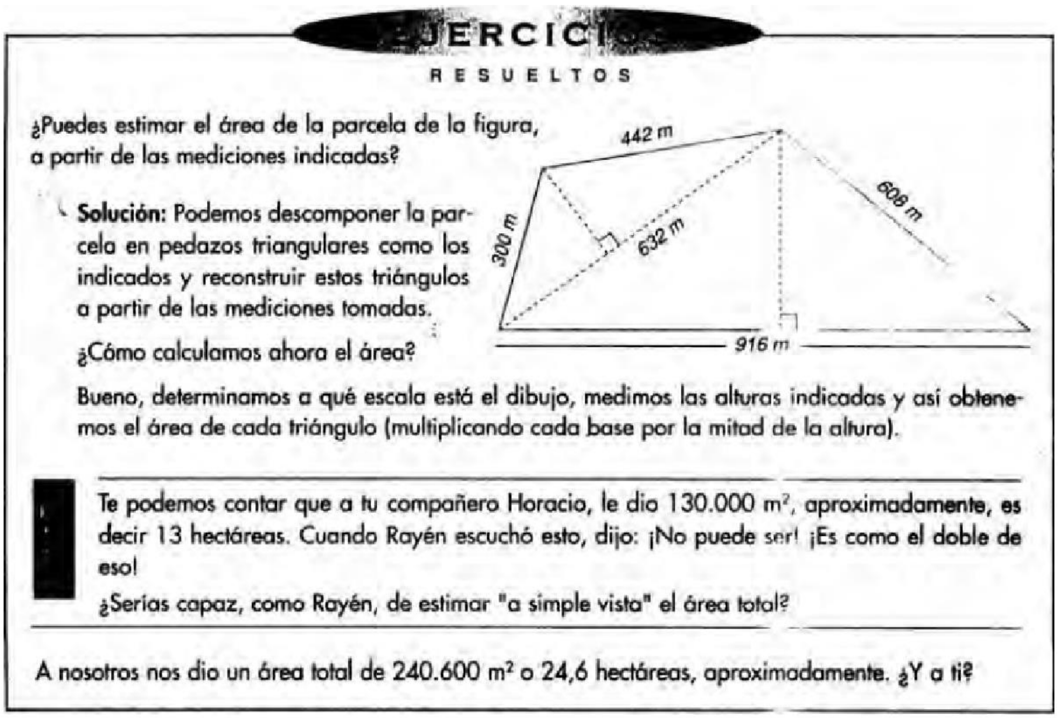
1.2. Elecciones de la enseñanza de la geometría en Chile

En Chile, Guzmán (2009) nos señala que las clases de geometría no toman en cuenta actividades cognitivas, se centran más en figuras simples, presentan sus dibujos y características en forma discursiva privilegiando así, por tradición, las actividades de medición:

> *"las actividades de construcciones geométricas son fundamentales en el aprendizaje de la geometría, pero en general la enseñanza de la geometría en Chile no le ha dado el énfasis suficiente, privilegiando actividades no necesariamente geométricas como las mediciones con instrumentos" (Guzmán, I. 2009).*

Para ilustrar el cambio radical de enfoque que existe entre Chile y Francia, Castella, C y Guzmán, I. (2003) presenta un ejercicio extraído de un libro de segundo medio de Ramón González-Andrade (2002) que da al principio del capítulo sobre figuras semejantes. De la solución que entrega el texto (Figura 2) ella constata en distintos niveles de escolaridad chilena un método que se basa sobre la realización efectiva de medidas que es considerado como lícito y alentador. En relación a los colegios franceses, prosigue su análisis, estos han considerado este método para la clase de quinto descartándolo de los niveles superiores que propone resoluciones completamente teóricas. Lo cual es coherente con el espíritu de los textos oficiales y de estudio del sistema francés que insisten desde quinto el aprendizaje de la demostración frente a toda pregunta geométrica. Del enfoque chileno ilustra esto como una de las grandes diferencias en la comparación que hace con el punto de vista francés.

¿Cómo podemos calcular el área ahora?
Bien, determinamos la escala del dibujo, medimos las alturas indicadas y con eso obtenemos el área de cada triángulo (multiplicando cada base por la mitad de la altura).



EJERCICIOS RESUELTOS

¿Puedes estimar el área de la parcela de la figura, a partir de las mediciones indicadas?

Solución: Podemos descomponer la parcela en pedazos triangulares como los indicados y reconstruir estos triángulos a partir de las mediciones tomadas.

¿Cómo calculamos ahora el área?

Bueno, determinamos a qué escala está el dibujo, medimos las alturas indicadas y así obtenemos el área de cada triángulo (multiplicando cada base por la mitad de la altura).

Te podemos contar que a tu compañero Horacio, le dio 130.000 m², aproximadamente, es decir 13 hectáreas. Cuando Rayén escuchó esto, dijo: ¡No puede ser! ¡Es como el doble de eso!

¿Serías capaz, como Rayén, de estimar "a simple vista" el área total?

A nosotros nos dio un área total de 240.600 m² o 24,6 hectáreas, aproximadamente. ¿Y a ti?

Figura 2. Enfoque sobre la práctica de las medidas (González-Andrade, 2002)

De la Figura 2 se observa que el ejercicio es completado por la indicación siguiente:

Podemos decirte, que mientras usted reflexionaba, Alfonso explicó su problema a su amiga Rayen y le pidió tomar otra medida del terreno: una diagonal, <u>Alfonso volvió con este dato: 632 m</u>. ¿Hizo bien? ¿Podemos ayudarle ahora si no podíamos antes?

Según la autora, la solución comienza de manera clásica por proponer una descomposición de la figura a partir de las indicaciones dadas en el enunciado. Pero lo más sorprenderte para un lector francés está por venir. En efecto, los autores del texto proponen medir sobre el dibujo las alturas faltantes, y sobre este análisis ella agrega:

"En Chile, se concede mucha importancia a las dimensiones heurísticas de la actividad matemática. Por lo demás, si los resultados son utilizados en ejercicios estrictamente matemáticos, los alumnos igual son confrontados a situaciones espaciales poco modelizables, integrando la realización de mediciones (enfoque en Francia reservado a los Físicos), en las cuales los conocimientos matemáticos muestran su eficacia para los problemas de la vida diaria, profesional o salida de otras disciplinas científicas. El acento es puesto sobre la necesidad de vincular las matemáticas a las prácticas sociales (Castella, C. y Guzmán, I. 2003)"

De manera completamente institucional, con rúbricas explícitas y precisas de los programas, Castella nos señala que la enseñanza chilena se interesa en los vínculos de las matemáticas con las artes, la historia, pero también en los desarrollos recientes de las matemáticas (ejemplo: contribución de Descartes, teorema de Fermat-Weyl). En otras palabras, ella constata con ejemplos concretos el enfoque de la enseñanza geométrica chilena como un ejemplo de la geometría física coherente y casi asumida.

Por otro lado, la división de los textos de ejercicios y problemas en sub-preguntas demasiado detalladas convierte al alumno en un obrero especializado que solo tiene que realizar tareas fragmentarias cuya coherencia no percibe y que no le deja una participación suficientemente grande a la iniciativa, la inventiva o el dominio de la complejidad.

En resumen, podemos decir que, desde el punto de vista de los paradigmas geométricos, en la escuela primaria, los estudiantes trabajan espontáneamente en GI. Las propiedades de las figuras (triángulos, cuadriláteros circunferencia) que conocen se establecen a partir de generalizaciones, suelen por costumbre y uso repetido tener un carácter teórico, haciendo que el estudiante se deslice desde GI hacia un GII de manera fragmentado (GII / GI). Pero este desplazamiento no está garantizado, los alumnos no tienen realmente la oportunidad de distinguir entre los dibujos que observan o que producen y los objetos teóricos representados y que se cuestionan al abordar la clasificación. Esto atestigua la dificultad de gestionar la transición de GI a GII (Braconne - Michoux, A. 2008). Podríamos decir que las diferentes actividades geométricas que se encuentran en la escuela primaria son: basadas en una geometría GII fragmentada, un espacio de trabajo que aparece en los libros de texto y que tiene como objetivo cumplir con lo anterior, teniendo en cuenta que los alumnos comienzan trabajar en GI y un espacio de trabajo personal ETP que claramente se enmarca dentro de GI. Pero el pasaje entre GI y GII nunca se hace explícito y el dibujo puede tener la condición de figura, sin el conocimiento del alumno.

1.3. Pregunta de investigación

¿Qué tipo de enfoque basándose en qué tipos de tareas podemos hacer trabajar a los estudiantes de modo de facilitarles la transición de la geometría física (GI) a la geometría teórica (GII) en la resolución de problemas de geometría?

1.4. Objetivo de la investigación

Proponer actividades geométricas de construcción que permita a los alumnos pasar progresivamente de un reconocimiento perceptivo de los objetos geométricos a un estudio mediante la figura y los instrumentos geométricos para validar determinadas propiedades

2. MARCO TEÓRICO

2.1. Tipos de geometrías para el aprendizaje

Para distinguir entre varios tipos de actividades, que se agrupan rápidamente bajo el término de geometría, Alain Kuzniak y Catherine Houdement (2006), sobre la base de los trabajos de Gonseth, distinguen diferentes tipos de geometrías:

Geometría I *la geometría perceptiva*

La que se aborda en el jardín infantil y al principio de la escuela básica. El niño aprende a orientarse en el espacio, identificar las propiedades y distinguir los criterios (grande, pesado, ancho, lejano, plano, puntiagudo, etc.), reconocer objetos, patrones y situaciones geométricas. Las actividades que se agrupan bajo este término de geometría se refieren a objetos materiales, utiliza instrumentos de trazado o de medida y tiene objetivos prácticos, incluso teóricos, pero luego finalizados por la práctica. Tiene por fuente de validación la realidad, el mundo sensible. Incluye los tres aspectos, intuición, experiencia, deducción, pero la deducción se ejerce prioritariamente sobre objetos materiales con ayuda de la percepción y de la manipulación de instrumentos.

Una vez que reconocen objetos, patrones y situaciones geométricas poco a poco, se le lleva a reproducirlos o completarlos, esencialmente a mano alzada. Para empezar a utilizar un vocabulario específico. Debe ser capaz de ver que una propiedad es verdadera, o para poder construir un gráfico. Obsérvese que incluso una acción tan sencilla como reconocer un cuadrado es el resultado de proceso de aprendizaje. Al principio, algunos alumnos sólo reconocerán un cuadrado si está en una posición prototípica. Este reconocimiento global e intuitivo se contrapone a un reconocimiento analítico que implica la identificación consciente de propiedades (lados de la misma longitud, ángulos rectos).

Geometría II *La geometría instrumentada*

De la enseñanza básica donde el alumno aprende a manipular instrumentos matemáticos para construir líneas, comparar líneas, hacer mediciones y mostrar los resultados. Ya no basta con ver, hay que poder demostrar la verdad de un resultado: midiendo, utilizando un instrumento, una comparación, una superposición, etc. Por lo tanto, hacemos un llamado, aunque a menudo sea implícitamente, a las propiedades geométricas o axiomática natural que se refiere a objetos ideales y a las relaciones entre estos objetos, sobre los que se han colocado axiomas y se han establecido teoremas. En esta geometría, la fuente de validación se funda sobre las leyes hipotético-deductivas en un sistema axiomático lo más preciso posible.

Geometría III: *La geometría deductiva*

En la enseñanza media se introduce una diferencia importante: ya no basta con mostrar o ver el resultado, es necesario saber demostrarlo matemáticamente utilizando propiedades o cálculos. Cabe señalar que los nuevos programas sugieren la introducción de la geometría deductiva, o al menos del razonamiento, en el liceo, para preparar la transición entre los dos tipos de geometría, se lleva a los alumnos a superar la dimensión perceptiva e instrumental para razonar sólo sobre propiedades y relaciones. Por ejemplo, el uso de la regla y el compás para dibujar un triángulo, conociendo la longitud de sus lados, moviliza el conocimiento de las propiedades del triángulo y la definición del círculo. El objetivo es realizar razonamientos sencillos utilizando las propiedades de las formas habituales o de la simetría axial.

Encontramos tanto Houdement y Kuzniak (2006), como por Berthelot y Salin (2001) la mirada puesta en las figuras y el uso de los instrumentos, que es, como han demostrado numerosos trabajos cuando hablan de colegios, una de las dificultades importantes encontradas en la enseñanza de la geometría. Para profundizar en la cuestión de la continuidad del aprendizaje, analizamos la relación entre la figura y los instrumentos en la resolución de problemas de construcción.

2.1.1. La relación de las figuras con los instrumentos en el trazado geométrico

El paso de una visión de la forma a una visión por los subelementos rectas y puntos es denominado por Duval (2005) la descomposición dimensional de formas. Los alumnos captan inicialmente las formas por su superficie, elementos de dimensión 2 (2D). Luego estas superficies son descompuestas y percibidas por los elementos de menor dimensión, los lados y las rectas de dimensión 1 (1D), para terminar por los vértices y los puntos, elementos de dimensión 0 (0D). Esto teniendo en cuenta la evolución de la visión por un cambio de mirada de las figuras geométricas, es objeto de estudio de las obras de Duval y Godin (2006) y Offre, Perrin - Glorian y Verbaere (2006).

> *La figura en geometría es un todo en el que se combinan hipótesis, que proporcionan propiedades, con una representación visual.* (Duval, 2005).

Su investigación estudia cómo el uso de instrumentos clásicos (reglas, escuadra) influye en la percepción de figuras geométricas al acompañar la descomposición dimensional de formas. Uno de sus resultados es que la elección de los instrumentos puestos a disposición durante una actividad de reproducción de figura influye en la aprehensión de la figura y la percepción de las propiedades topológicas de los elementos 1D en la figura a reproducir. Sin embargo, el uso de los instrumentos no es sencillo y debe tenerse en cuenta en la secuencia de aprendizaje. La toma en cuenta del conocimiento instrumental en conexión con el conocimiento conceptual aparece a través de la génesis instrumental, proceso de construcción de un instrumento por parte de un sujeto. Rabardel (1995) define esta génesis como un proceso de instrumentalización, centrándose en el surgimiento y evolución de patrones sociales de uso. Así, el trabajo específico en **instrumentos de construcción** (Duval & Godin, 2006) puede permitir trabajar en propiedades geométricas.

En el contexto de la geometría, las herramientas o instrumentos de construcción permiten identificar invariantes. Las invariantes corresponden a las propiedades geométricas asociadas con las construcciones, al igual que la regla tiene la propiedad de alineación. Apropiarse de un instrumento de construcción como la regla puede llevar al usuario a apropiarse del concepto de alineación, y pasar de una visión de la forma de una figura geométrica, visión 2D, a una visión por las líneas que la componen, elementos 1D.

Según Kuzniak, la definición de figura depende del paradigma geométrico de referencia.

En Geometría I, se trata de un dibujo o una figura geométrica real. Esta formulación se refiere a dos aspectos: el contexto hace que los dibujos deban ser interpretados de manera geométrica (no se trata de arte, de física), pero por otra parte estos objetos no son objetos ideales, ellos son reales: los trazados o segmentos tienen un espesor, las herramientas de construcción son verdaderas herramientas con su fricción, su desgaste, su imperfección, sus panas o fallas. En Geometría II, la distancia a lo real, la importancia de la definición se vuelve esencial. La figura no existe sin un texto que la defina y que fije sus límites. En Geometría II, el único objeto físico es el dibujo, pero un dibujo como lo formula Fischbein (1993) introduce la idea del concepto figura para darse cuenta de la noción de figura. Varios autores hacen la distinción entre dibujo y figura

En Geometría III, la figura corresponde a un subconjunto de puntos del espacio, para algunos se trata incluso de todo conjunto finito de puntos. Ella es también una reificación de una idea abstracta asociada a espacios de dimensión a lo menos 2. Ella puede entonces felizmente guiar la intuición del geómetra.

Laborde y Capponi (1995) analizaron el uso del Software en la validación de construcciones geométricas dan la siguiente definición de figura tomada de Parzysz (1988) y citada por Tanguay (2010)

> *La figura geométrica es el objeto geométrico descrito por el texto que la define, una idea, una creación del espíritu mientras que el dibujo es una representación.* (Laborde y Capponi, 1994).

En el caso del ambiente papel-lápiz, los instrumentos tradicionales de construcción son los utilizados en una hoja de papel inmersa en el microespacio. A los instrumentos clásicos de geometría, podemos añadir todos los objetos utilizables para la realización material de estas figuras, como los modelos y las plantillas desplazables e incluso las tijeras y la goma y finalmente un referencial teórico que dependerá de la geometría utilizada. Estos problemas no tendrán la misma función en Geometría I que en Geometría II. El razonamiento se basa en una experiencia al menos mental de desplazamiento, colocación y corte de figuras, pero cualquiera que sea la experiencia material realizada, la finalidad se vuelve teórica para la elaboración de la figura particular, que se construye planteando a continuación la generalidad del método.

2.1.2. Modelización del razonamiento geométrico utilizando tipos de geometrías

Durante la resolución de una actividad, estos diferentes paradigmas se pueden movilizar de forma conjunta. Braconne - Michoux, (2008) se interesó en la articulación entre los paradigmas GI y GII. Este trabajo se basa en la ruptura de Van Hiele (1958), cercana a la de Houdement y Kuzniak (2006), del razonamiento en geometría. Van Hiele (1958) define 5 niveles de pensamiento geométrico en la evolución del conocimiento de un estudiante.

En el nivel 0 (N0), llamado nivel de visualización, el estudiante identifica los objetos geométricos por su forma general.

En el nivel 1 (N1), nivel de análisis, los estudiantes asocian propiedades con objetos geométricos. Sin embargo, estas propiedades no están relacionadas entre sí. Estos vínculos aparecen en el nivel 2 (N2),

El nivel 2 (N2), llamado deducción informal, pero todavía no permiten que los objetos se vinculen entre sí.

En el nivel 3 (N3), deducción formal, se forman conexiones y los estudiantes pueden organizar algunas deducciones formales.

El último nivel (N4), nivel de rigor, correspondería al estado de conocimiento del matemático experto.

Esta concepción de la evolución del pensamiento geométrico que sube las pendientes de la abstracción y de la generalización por las estructuras, da cuenta del pasaje hacia las matemáticas evolucionadas definidas entre otros por Tall (1995)[1].

Utilizando el trabajo de Van Hiele (1958) junto con los paradigmas geométricos de Houdement y Kuzniak (2006), Braconne - Michoux (2008) aporta la articulación GI / GII. Por lo tanto, muestra que el nivel de análisis (N1) puede considerarse como una “zona de mosaico” entre los paradigmas GI y GII. Así, el nivel de análisis se divide en dos niveles: GI-N1 y GII-N1. Estos resultados se basan en el análisis del estado del dibujo y la reflexión del alumno. En el paradigma GI, el dibujo es objeto de estudio y la validación es perceptual

[1] Citado por Kuzniak (2007)

o incluso instrumentada. En el paradigma GII, la figura se convierte en objeto de estudio y la validación se organiza en torno a las propiedades. Sin embargo, en el nivel de análisis, el dibujo se acerca al concepto de figura (GII) pero las propiedades permanecen independientes entre sí (GI). Por lo tanto, la articulación (GI / GII) se puede trabajar basándose en el nivel de análisis N1 de Van Hiele,

2.2. Espacio de trabajo geométrico

El concepto de **espacio de trabajo geométrico**, según Perrin-Glorian, M. y Mangiate, C. (2016) está estrechamente relacionado con el de contrato didáctico en teoría de situaciones didácticas (Brousseau, 1998) y la relación personal/institucional con el conocimiento en la teoría antropológica del didáctico. Permite cuestionar las relaciones entre los paradigmas geométricos desde el punto de vista de los individuos que practican la geometría e incluso de las instituciones que esperan y legitiman ciertas prácticas (Perrin-Glorian, M. y Mangiate, C., 2016).

Espacios de trabajo geométricos (ETG) Kuzniak (2010) permiten trabajar el proceso de evolución de la mirada de las figuras geométricas y el proceso de apropiación de propiedades. Modelizan la actividad matemática al resolver un problema utilizando dos planos. Un primer plano que contiene los objetos materiales, todos los instrumentales y el sistema de referencia teórico, se denomina plano epistemológico. El segundo nivel es el cognitivo, se asocia al conocimiento geométrico en su implementación. Estos dos planos se enriquecen gracias a tres procesos de génesis: instrumentos, figurativo y discursivo. Estas tres génesis son los soportes para tres tipos de enfoques: un proceso de descubrimiento, un proceso de validación y un proceso de modelización (figuras 3 y 4) (Kuzniak, A. y Richard, P. (2014).

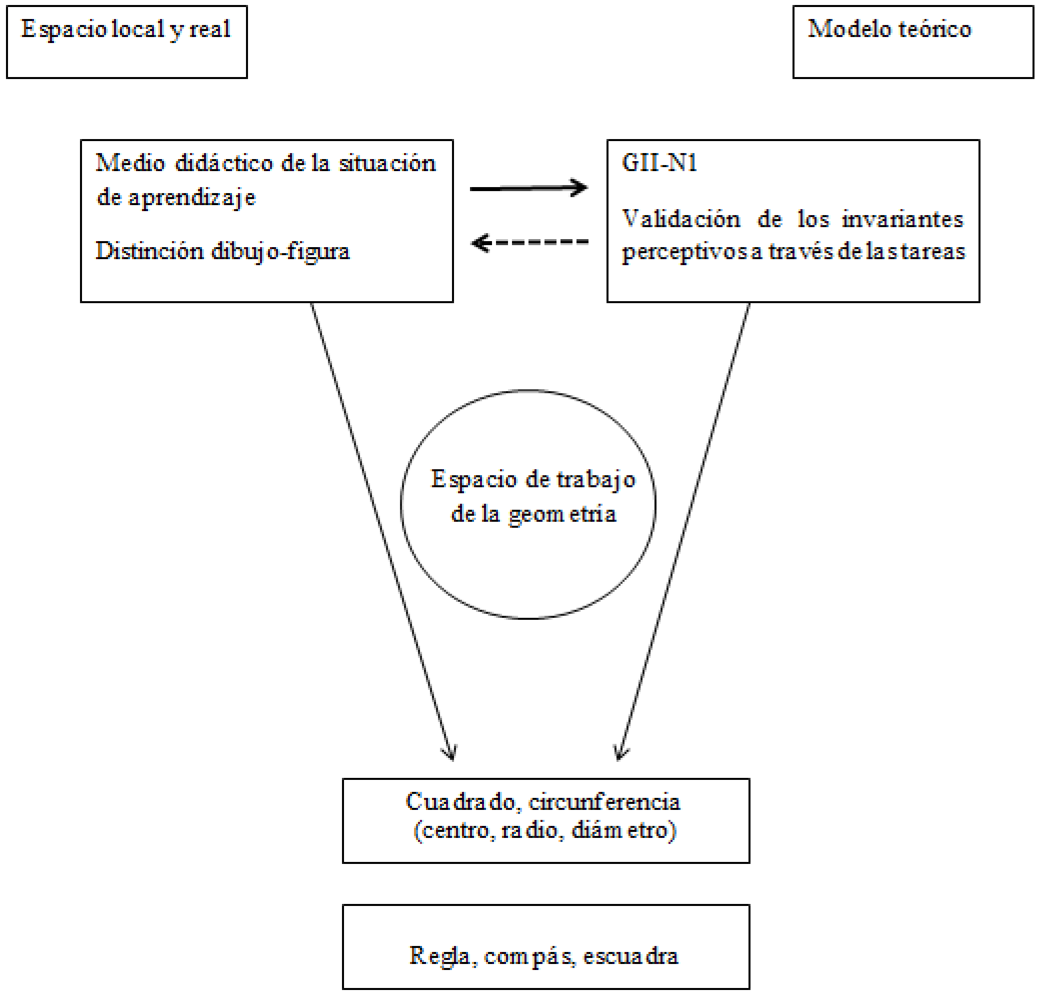


Figura 3. ETG plano epistemológico

El cambio de estatus de la figura es uno de los puntos más visibles en la evolución del ETG. El juego sobre la figura se articula sobre el vínculo espacio-modelo en el ETG y sobre la relación entre lo espacial y lo teórico: precisar la gestión de esta interacción es el objetivo del enfoque cognitivo de Duval. Para eso, él introduce un trabajo específico, aún un juego, sobre los registros de representación semiótica que son el registro figural y el registro discursivo. El conocimiento del juego entre estos dos registros es ciertamente uno de las puestas de aprendizaje de la Geometría II.

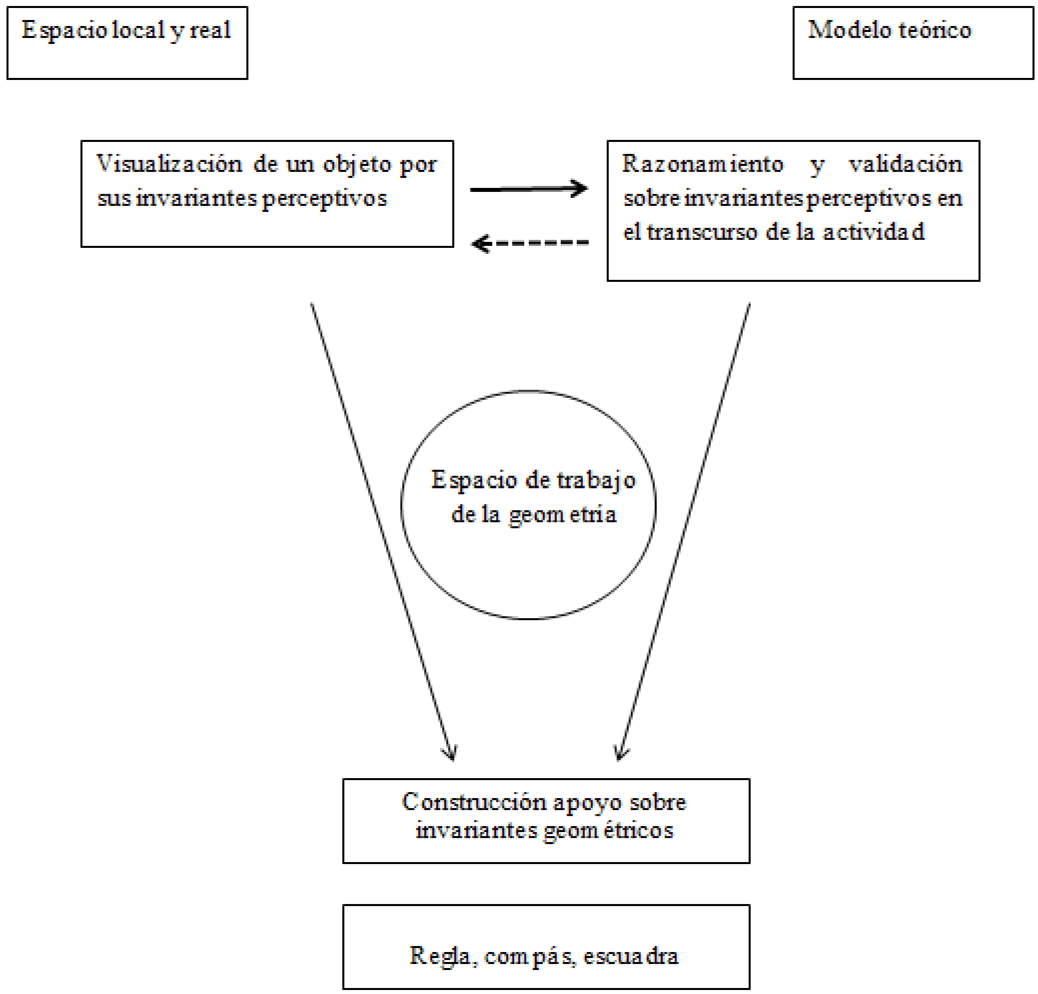


Figura 4. ETG plano cognitivo

Nuestras expectativas con respecto a la evolución de aprendizaje en la visión de las figuras geométricas, implica que los dibujos se ven como representaciones particulares de figuras geométricas y las figuras geométricas como una construcción mental que se apoya en dibujos, propiedades, textos. La evolución de esta visión puede basarse en el instrumento de construcción para identificar los invariantes o las propiedades geométricas. La articulación de estos dos procesos define el proceso de descubrimiento. La apropiación del concepto de figura se basa también en la apropiación de propiedades, lo que remite al discursivo-teórico. Estas dos génesis constituyen el proceso de modelización.

3. METODOLOGÍA

El objetivo de nuestra investigación es proponer actividades de construcción que permita a los alumnos pasar progresivamente de un reconocimiento perceptivo de los objetos geométricos a un estudio mediante la figura y los instrumentos geométricos para validar determinadas propiedades. Para este propósito utilizamos tareas que se centren en el significado geométrico de la reproducción de una figura compleja, que constituye la forma de partida de hacer que el alumno la descomponga en el espacio geométrico como un conjunto de trazados y propiedades. El estudiante debe analizar la figura compleja, pero este análisis no solo consiste en descomponer la figura inicial, vista inicialmente como un todo, en componentes elementales (rectas, segmentos, circunferencias, semicircunferencias, puntos), sino también debe reproducir los trazados auxiliares necesarios para la construcción de estos componentes elementales.

La secuencia didáctica se presenta en tres sesiones de aprendizaje dedicada a la reproducción de figuras. Se trata de la reproducción de figuras en dos tipos de soportes, el papel cuadriculado y el papel normal, por lo que se requieren habilidades y conocimientos específicos. Este tipo de actividad ofrece la oportunidad de hacer un buen uso del vocabulario específico y de los enfoques de medición y trazado de figuras simples. Para estudiar los diferentes enfoques relativos al concepto de propiedad geométrica, se pone en marcha una situación didáctica que retoma el trabajo del currículo MINEDUC (2019), donde el conocimiento del uso de instrumentos del trabajo entorno papel-lápiz está vinculada al conocimiento conceptual adquirido de su experiencia. Estas actividades tienen como objetivo discutir colectivamente los objetos trabajados en el correspondiente grupo de trabajo. Cada tarea, dentro de las fases organizadas está asociada a un objetivo de aprendizaje matemático. Así, dentro de la situación de aprendizaje se configuran tres tipos de actividades: actividades de reproducción, actividades de construcción y actividades de validación.

La investigación se centra en analizar las producciones de los estudiantes, quienes trabajaran en nuestra propuesta didáctica, en este proceso, los estudiantes deberán ser capaces de identificar figuras auxiliares necesarias para construir una superfigura como la

rosa de ocho pétalos y escribir un procedimiento que permita construir la rosa con la ayuda de regla y compás.

En nuestro estudio, como **una figura** no se limitará solamente a un trazado con los instrumentos de geometría habituales en el entorno papel y lápiz que se da a los dibujos (Duval y Godin, 2006); sino también a aquellas formas que puedan obtenerse por un conjunto de formas mediante la yuxtaposición o por la superposición de ciertas sub-partes del espacio con ciertas relaciones. A los instrumentos clásicos de geometría, tendremos que añadir todos los objetos físicos utilizables para la realización de estas figuras, como regla y compás e incluso el papel cuadriculado para una justificación teórica. Esto nos hace volver sobre las relaciones entre espacio sensible y espacio geométrico y sobre las relaciones entre objetos materiales y objetos geométricos definidos por Kuzniak (2006), que en este trabajo haremos a partir de la reproducción de la rosa de ocho pétalos.

3.1. Sujetos de estudio y contexto educacional

El diseño didáctico se aplicó a 34 estudiantes de séptimo año de Enseñanza Básica del Colegio Concepción (San Carlos) perteneciente a la Corporación Educacional Colegio Concepción - Ñuble. Después de haber conversado con la profesora del curso, la intervención se hizo en octubre 2019 como parte integrante de las actividades del curso, y referido a los contenidos y habilidades del currículo:

> *"los estudiantes deben construir objetos geométricos de manera manual y/o con software educativo: líneas como las perpendiculares, las paralelas, las bisectrices y alturas en triángulos y cuadriláteros. Puntos como el punto medio, el centro de gravedad, el centro del círculo inscrito y del circunscrito de un triángulo".* (MINEDUC, 2016)

Para desarrollar la actividad en la clase utilizamos tres horas pedagógicas de 45 minutos cada una: dos horas para las fases de estudio y descripción de la figura, y una hora para la construcción de la figura y la redacción de un programa de construcción que permita su reproducción. La profesora a cargo del curso estuvo presente durante toda la actividad acompañando la conducción de nuestra clase. Los estudiantes trabajaron de forma individual y al finalizar cada una de las fases de la actividad se realizaba una puesta en común, guiada por la profesora a cargo, donde los estudiantes comunicaban sus resultados, argumentando las elecciones realizadas durante la actividad.

3.2. La situación didáctica: rosa de 8 pétalos

Estudio de la figura: Se trata de observar esta figura con gran atención e identifique las figuras geométricas elementales que contiene. Asignar el nombre que le corresponde a cada una.

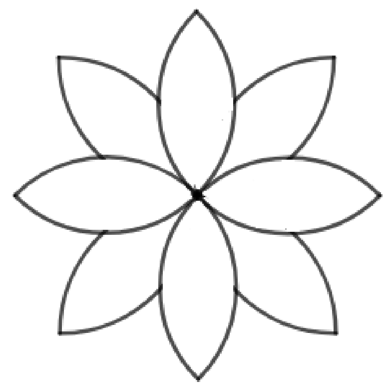
Reproducción de la figura: Se trata de construir esta figura utilizando los instrumentos adecuados.

Programa de construcción: Debe describir las diferentes etapas de la construcción que realizó.

REPRODUCCIÓN DE FIGURAS COMPLEJAS

Analizar una figura geométrica, realizar hipótesis de construcción, verificar las hipótesis, utilizar los instrumentos de geometría.

➔ **DESCUBRIMIENTO**

Observe esta ***"rosa de los vientos"***[2] *1. Rehacer las huellas y trazados que fueron borradas después que sirvieron para la construcción de esta figura.* *2. Reprodúzcalas en papel cuadriculado.* *3. Reprodúzcalas en papel blanco (no cuadriculado).*	

a) Desarrollo de la actividad en la clase

b) Organización de las fases

3 sesiones:

- 2 sesiones para el estudio y la descripción de la figura;
- 1 sesión para la construcción de la figura.

Para cada una de las fases describimos a continuación la secuencia de las tareas:

[2] La rosa de ocho pétalos también se denomina como *rosa de los vientos*.

FASE 1: Estudio de la figura

Se dispone de un modelo de la rosa, en gran formato, para mostrar en la pizarra y también fotocopias de cada una de las siguientes figuras:

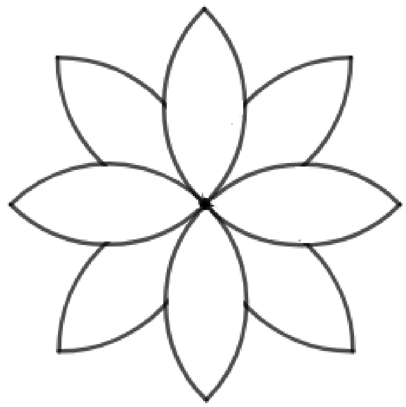


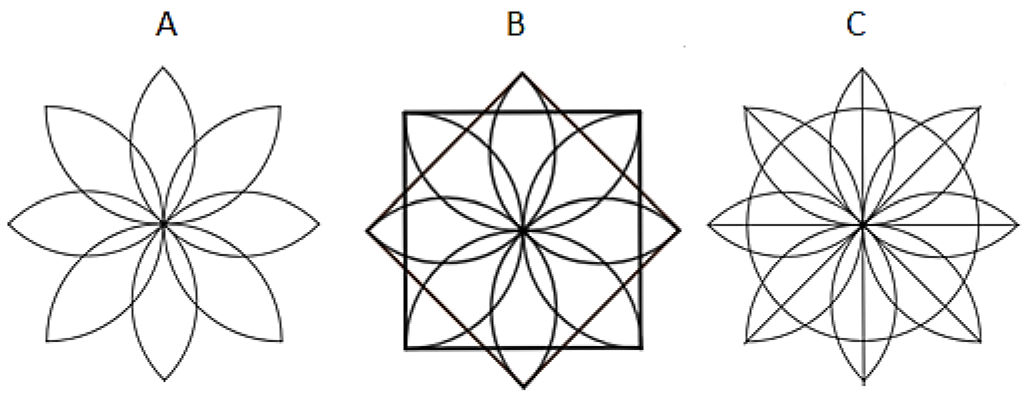
Figura 6. La rosa de 8 pétalos presentada en la pizarra

Se muestra en la pizarra un dibujo de gran dimensión (tamaño) que represente la rosa de 8 pétalos. Se da un tiempo para que los alumnos observen la figura para luego pedirles que la reproduzcan y preguntarles lo que han observado. Privilegiando las observaciones que llevan al modo de construcción posible.

Solicitar a los alumnos reproducir esta rosa. Una primera respuesta de los alumnos es, probablemente, construir una rosa de seis pétalos utilizando el compás puesto que esta figura les resulta familiar y ya la han construido como aprendizajes previos

Mostrar las producciones y solicitarles a los alumnos que las comenten. La observación de “cambio” entre proposiciones y modelo deben llevar varias hipótesis de construcción. Discutirlas, argumentarlas por intentos de construcción con el propósito de confirmarlas o invalidarlas.

FASE 2: Descripción de la figura



Se distribuyen fotocopias de la figura A sobre las cuales los alumnos pueden rehacer las huellas y/o trazos borrados de la construcción que consideren necesarias. Si los alumnos permanecen bloqueados, se distribuyen fotocopias de las figuras B o C que deben permitir entregarles algunas pistas de la construcción de las huellas que fueron borradas. En la figura B, los dos cuadrados concéntricos y congruentes, base de la construcción, y sus posiciones relativas; y en la figura C, los cuatro diámetros que divide al disco en ocho ángulos centrales iguales.

Las figuras desempeñan un doble rol: por una parte, son esquemas que representan la situación real de una rosa con 8 pétalos; por otra parte, son figuras sobre las cuales se razona y a las que se somete a transformaciones que es necesario controlar con propiedades geométricas. Son las propiedades geométricas supuestas las que permiten identificar en el modelo geométrico de 8 circunferencias pertinentes que permiten rehacer las huellas borradas después que sirvieron para la construcción de la figura.

A partir de las observaciones de los alumnos, concluir que:

- para la figura B, los dos cuadrados son del mismo tamaño, el mismo centro, “desplazado” (por el profesor: rotación en un octavo de un giro completo);
- para la figura C, dos diámetros de la circunferencia son perpendiculares y los otros comparten cada ángulo recto en dos ángulos iguales.

FASE 3: Construcción de la figura

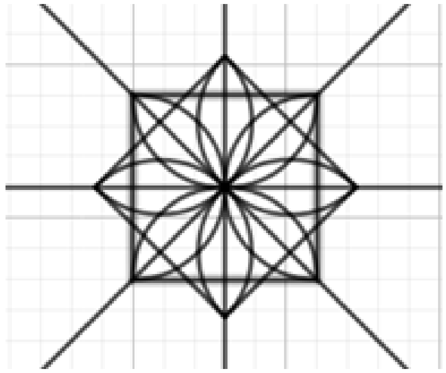
El juego consiste en reproducir la figura (encontrar estrategias de construcción) solamente con regla y compas, sobre una hoja blanca, inducidas respectivamente por las figuras B y C. Se debe dejar las huellas de la construcción. Cada una de las estrategias debe ser descrita por una sucesión de instrucciones creando un programa de construcción para la rosa de 8 pétalos.
Cuando los alumnos han terminado, la validación se basa en la confrontación de la figura trazada por el alumno con la figura inicial.

3.3. Análisis "a priori"

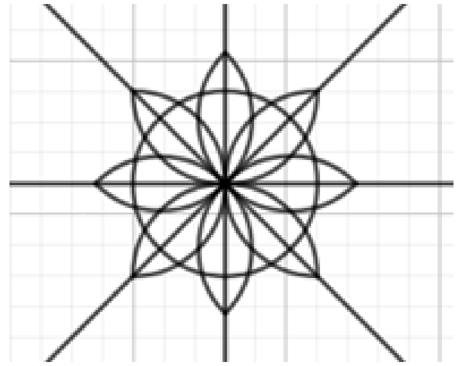
3.3.1. La transición de paradigma esperado de la secuencia de enseñanza

Las actividades tienen como objetivo trabajar las propiedades geométricas de una figura compuesta. Las propiedades que buscamos pueden ser propiedades de perpendicularidad o paralelismo, o el reconocimiento de figuras habituales como el cuadrado o la circunferencia, propiedades que se pueden abordar a través del proceso de evolución de la mirada de las figuras geométricas y el proceso de apropiación de propiedades. Para ello hemos optado por utilizar la tarea: la rosa de ocho pétalos. En estas actividades, los alumnos deben realizar una construcción a partir del dibujo dado, con la instrucción de que en su construcción deben observar las figuras B y C, que están dadas con ayuda de un papel cuadriculado. Cada una de las figuras sugiere un método de construcción de la rosa de los vientos.

Las figuras que se proponen como ayuda deben permitir a los alumnos percibir estas líneas intermedias. La presentación en papel cuadriculado facilita la tarea de trazado.



Modelo B



Modelo C

Desde un punto de vista didáctico, el modelo B requiere el trazado de dos cuadrados congruentes y concéntricos. El primero podrá inscribirse en un cuadrado siguiendo las líneas de la cuadrícula. El segundo se puede trazar siguiendo también las líneas de la cuadrícula y en relación que sus mediatrices sean los ejes de simetría del primero. La dificultad aparecerá dependiendo del tamaño de la cuadrícula, del tamaño del lado del cuadrado o si los vértices no están en los vértices[3] de la rosa. Los semicírculos que forman la rosa tienen como centro los vértices de los cuadrados.

Para el modelo C, la construcción de dos rectas perpendiculares (adicionales a los dos ejes perpendiculares de la cuadrícula), que contienen a vértices opuestos de la rosa se cruzan en un nodo, no debería ser un problema. La bisectriz del ángulo recto se traza a lo largo de la diagonal del cuadrado. *A continuación, queda por trazar una circunferencia centrada en el punto intersección de estas rectas. Los arcos de circunferencia están centrados en el punto de intersección de la circunferencia con estas rectas trazadas*. Esta instrucción representa un fuerte cambio en el contrato didáctico, porque la validación ya no se basa en una superposición de la reproducción sobre el modelo, es decir que los alumnos no pueden reproducir solo una forma (elemento 2D) sino una figura con sus propiedades.

La resolución de esta actividad pasa por la identificación de los invariantes del - dibujo - modelo para identificar las propiedades de la figura. Las observaciones resultantes de los

[3] Entenderemos por vértices de la rosa a los 8 puntos de cada pétalo más distantes del centro de la rosa.

pasos principales de las dos estrategias de construcción, con regla y compás solamente, en papel cuadriculado deberían permitir identificar las relaciones entre los objetos que persisten invariantes. Entonces, el objetivo es reproducir estas invariantes utilizando los instrumentos disponibles. Como el objetivo final es reproducir también se puede asociar con la deconstrucción, es decir, identificar la secuencia ordenada de acciones utilizadas para reproducir una representación de un objeto geométrico. La validación de la reproducción se basa en el control de las propiedades que se comportan de manera similar durante el uso de los instrumentos. El trabajo sobre estos instrumentos debería permitir centrarse en las relaciones entre elementos 1D o incluso 0D y no más en las formas (elementos 2D) a reproducir, como se observa en Coutat (2012).

El paradigma apropiado para nuestra secuencia es el nivel GII-N1. La percepción y la sensibilidad permanecen presentes, y el razonamiento esperado se basa en la identificación de propiedades y su reproducción.

3.3.2. Dificultades de los estudiantes para reproducir la rosa de 8 pétalos

Algunas elecciones didácticas podrían presentar dificultades a los alumnos para reproducir la rosa de 8 pétalos. Pero la razón de estas elecciones son las siguientes:

a) **Relativa a la figura**: la rosa de ocho pétalos puede ser confundida con la rosa de seis pétalos, que es más frecuentemente representada en los textos escolares, y cuyos alumnos podrían conocer la construcción. Por otra parte, entre las figuras A, B y C, es posible que alguna de ellas no le sea útil a los estudiantes debido a su complejidad, para la figura A el estudiante debe interpretar las semicircunferencias necesarias para la construcción de la rosa, pero esta imagen puede resultar insuficiente para interpretar todas las figuras necesarias para la construcción de la rosa. La figura B es mucho más ilustrativa y entrega bastante información, a partir de esta imagen el estudiante debe interpretar: dos cuadrados insertos en la figura y extraer regularidades como congruencia, figuras concéntricas, vértices de los cuadrados y vértices de la rosa (coinciden), simetría en la posición de estos cuadrados, conjeturar sobre la circunferencia implícita (aquella de centro el centro de los cuadrados y diámetro cualquier diagonal de estos cuadrados). La figura C puede resultar más compleja para el alumno, si se observa con detención, la diferencia con la figura A es la inserción de cuatro rectas (dos perpendiculares y dos bisectrices) y una circunferencia de centro el centro de la rosa, pero es complejo deducir regularidades entre elementos de la circunferencia y elementos de la rosa, como el diámetro, por ejemplo, y resulta más complejo aun con los cuadrados implícitos que contiene.

b) Relativas a la presentación de la actividad y la organización del trabajo: los alumnos observan una figura que se presenta en el pizarrón. Por consiguiente, no tienen la posibilidad de verla de cerca, medir o comparar sus longitudes, hacer ensayos con un compás con el fin de buscar centros de circunferencias, determinar radios, comparaciones. Todas sus eventuales proposiciones o afirmaciones solo pueden basarse en la utilización de informaciones iniciales puramente visuales, sin ningún otro medio de control.

c) Relativas a la puesta en ejecución de los conocimientos previos de los alumnos: las interpretaciones que pueden hacer los alumnos de las figuras A, B o C y la deducción de regularidades puede presentar dificultades a los alumnos, en que también deben hacer uso de un razonamiento matemático. Estas regularidades son importantes y sirven como directrices de construcción de la rosa, intuir los trazados o huellas de la construcción y que fueron borradas.

Estas elecciones podrían tener por objetivo llevar a los alumnos **a reconocer la imposibilidad de reproducir una tal rosa sin un análisis previo y profundo de la figura**. Estas elecciones nos parecen poco justificables: la probable diferencia entre las impresiones visuales, sin descripción ni medida posible, conducirán a un dibujo inexacto no satisfactorio para los alumnos. Se prevé también un cierto bloqueo por parte de algunos alumnos, en esas situaciones, se debe ser cuidadoso en lo que conviene decir o hacer para desbloquear.

3.3.3. Estrategias de construcción para reproducir la rosa de 8 pétalos

Proporcionamos dos estrategias de construcción, solamente con regla y compas, sobre una hoja blanca, inducidas respectivamente por las figuras B y C, que contienen elementos en común (unidades figurales). Uno de estos elementos es una circunferencia inicial. Se dejan las huellas de la construcción y cada una de las estrategias debe ser descrita por una sucesión de instrucciones, que será una propuesta de programa de construcción. Para el programa que produce la figura B, la rosa de 8 pétalos resulta inscrita en esta circunferencia inicial de diámetro las diagonales de estos cuadrados y centro el centro común de los cuadrados concéntricos. En el otro programa que produce la figura C, la rosa de 8 pétalos no resulta estar inscrita en la circunferencia inicial.

Fase 1: Estudio de la figura

Las figuras que identificamos que son necesarias para la construcción de la rosa pueden variar, ya que identificamos dos procedimientos para su construcción, en un primer caso para la figura B se puede señalar semicircunferencias, rectas perpendiculares, punto medio y cuadrado y para la figura C circunferencia, semicircunferencia, rectas perpendiculares.

Fase 2: Descripción de la figura

En esta fase es importante reconstruir los trazados auxiliares que han sido borrados en la construcción de la rosa de 8 pétalos, a partir de las figuras identificadas en la fase 1. En el caso de la figura B se trata de dibujar los cuadrados de la forma que sea necesario para lograr la construcción y en la figura C, analizar por donde se debe trazar la circunferencia, vinculando elementos claves de la rosa.

Fase 3: Construcción de la figura

Proporcionamos dos estrategias de construcción, solamente con regla y compas, sobre una hoja blanca, inducidas respectivamente por las figuras B y C. Para cada una de ellas, se examina la relación entre los instrumentos utilizados para la reproducción en la figura, el modo de aprehensión de la figura subyacente y las propiedades geométricas implícitamente aplicadas como; la equidistancia de los vértices de la rosa del centro, pues son puntos de la misma circunferencia cuyo centro es el de la rosa, la perpendicularidad de las rectas iniciales y la de sus bisectrices que garantizan la simetría de la figura, las semicircunferencias que producen los 8 pétalos simétricos, ejes de simetría. Los conceptos previos para esta actividad son la circunferencia, el cuadrado, la perpendicularidad, la noción de equidistancia.

3.3.4. Estrategia de construcción inducida por la figura B.

Para construir la figura B, con regla y compás se trazan dos rectas perpendiculares; luego una circunferencia de radio cualquiera centrada en el punto de intersección de las dos rectas y un cuadrado inscrito en la circunferencia cuyos vértices son los puntos de intersección de las dos rectas con la circunferencia (B1, figura 7). Posteriormente, se trazan las dos bisectrices de las rectas anteriores (B2, figura 7) y el cuadrado de vértices los puntos de intersección de estas dos bisectrices con la circunferencia (B3, figura 7).

Finalmente, se trazan las ocho semicircunferencias centradas en los puntos medios de los lados de los dos cuadrados y que pasan por el centro de la circunferencia inicial (B4, figura 7).

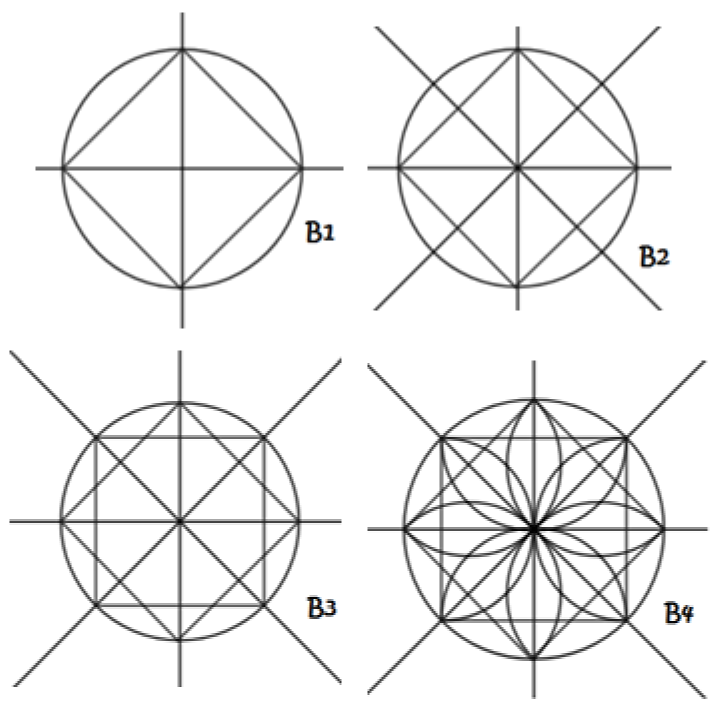


Figura 7. Construcción Figura B

3.3.5. Estrategia de construcción inducida por la figura C.

Para construir la figura C, con regla y compás se trazan dos rectas perpendiculares y las dos bisectrices de estas dos rectas. Luego se traza una circunferencia de radio cualquiera centrada en el punto de intersección de las cuatro rectas y se marcan los ochos puntos de intersección de esta circunferencia con las cuatro rectas anteriores C1, figura 8).

Finalmente, se trazan las ocho semicircunferencias, centradas en cada uno de los ocho puntos anteriores y que pasan por el centro de la circunferencia inicial, donde los dos extremos de cada una estas semicircunferencias estén sobre una de las cuatro rectas iniciales (C2 y C3, figura 8).

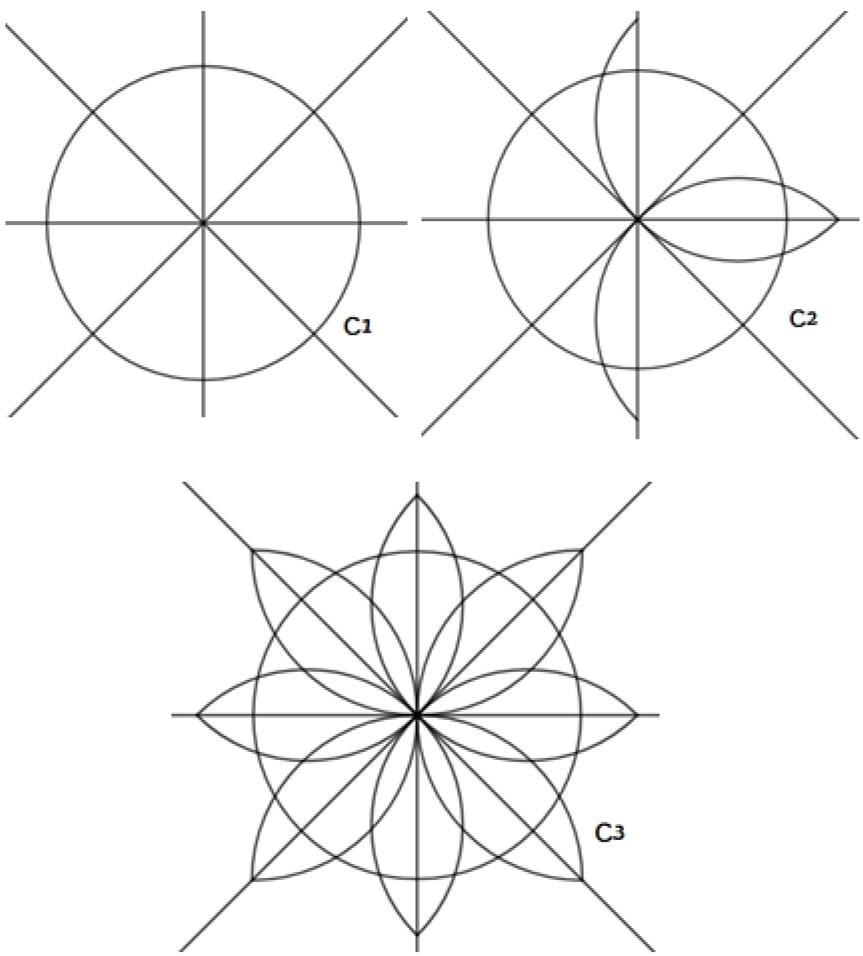


Figura 8. Construcción Figura C.

Para realizar los trazados correspondientes a las figuras B y C, el papel cuadriculado es el adecuado para simplificar la construcción de las rectas perpendiculares y sus bisectrices.

Ambas construcciones tienen en común las dos rectas perpendiculares y sus respectivas bisectrices (o sea cuatro rectas) y una circunferencia inicial de centro el punto intersección de estas rectas. Luego hay una diferencia en los elementos utilizados para la construcción de ambas figuras. La figura B utiliza dos cuadrados congruentes y concéntricos, cuyos puntos medios de cada lado sirven de centro de las 8 semicircunferencias de diámetro el lado de cada cuadrado. Por su parte la construcción de la figura C, no utiliza estos cuadrados si no que directamente construye las 8 semicircunferencias centradas en los puntos de intersección de las cuatro rectas con la circunferencia inicial. En la construcción de la figura B, la rosa de 8 pétalos resulta inscrita en la circunferencia inicial, que no es el caso para la figura C. Sin embargo, la construcción de la figura C contiene dos cuadrados implícitos cuyos lados son tangentes a la circunferencia inicial y resultan ser los diámetros de las 8 semicircunferencias (Figura 9).

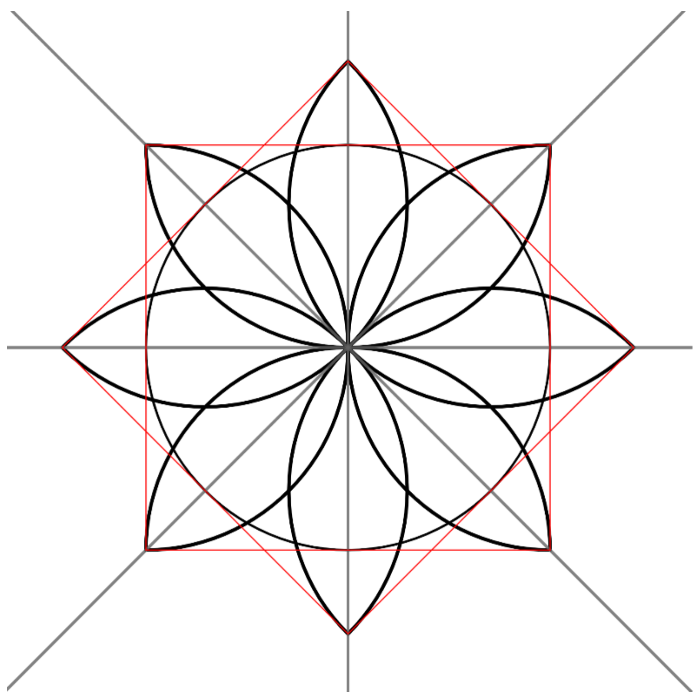


Figura 9. Cuadrados implícitos en la construcción de la figura C.

4. ANÁLISIS Y RESULTADOS DE LOS DATOS

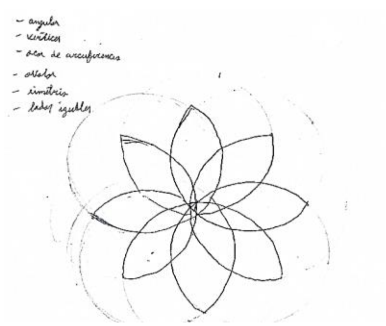
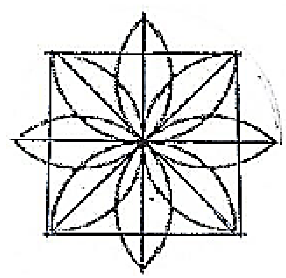
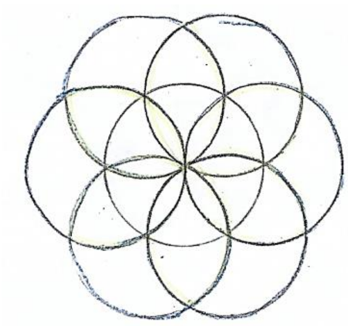
Nos centramos en el análisis de los procedimientos de los alumnos durante la resolución de una actividad en la clase con el objetivo de modelizar el tratamiento del trabajo de los alumnos mediante ETG (Kuzniak, 2010).

La situación didáctica fue realizada de forma individual por 34 alumnos y para el análisis hemos seleccionado 11 actividades desarrolladas por los alumnos. Esta selección se debe a que algunas producciones son muy parecidas y para organización de este trabajo hemos dejado las que consideramos estudiar en mayor profundidad.

4.1. Análisis a posteriori

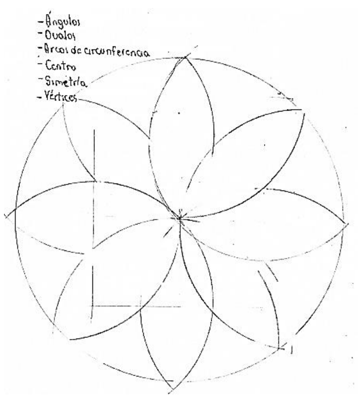
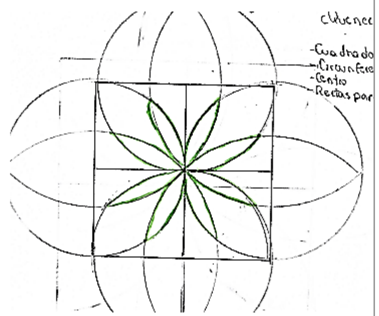
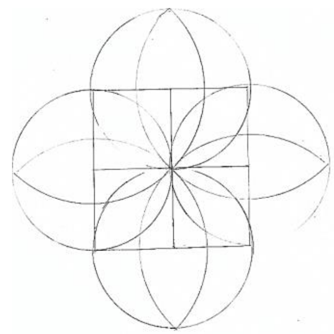
Este análisis lo organizamos en tablas para facilitar su comprensión, son cuatro tablas, una para cada ETG personal que se ha identificado. En ellas se muestra el trabajo realizado por los alumnos en las tres fases de la actividad.

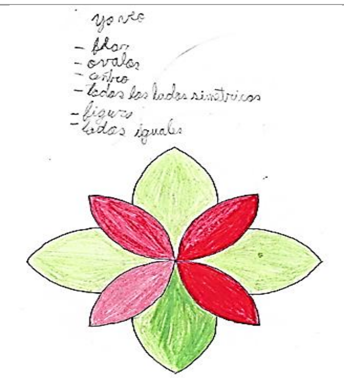
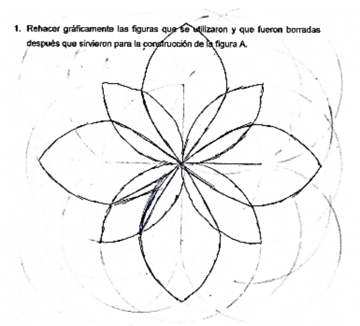
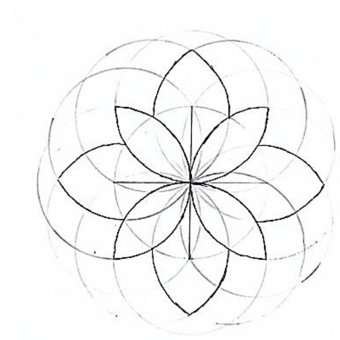
Tabla 1: Análisis de las producciones de los estudiantes para ETG GI/N0

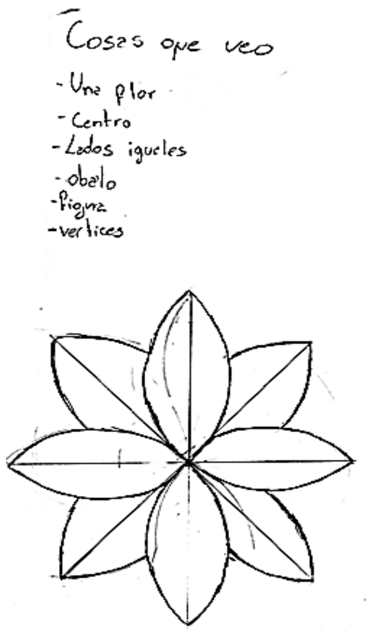
[4]**NIVEL DE APRENDIZAJE GI/ N0**			
Producciones de los estudiantes			**Análisis de las producciones**
FASE 1*	**FASE 2**	**FASE 3**	
 *Transcripción texto del estudiante:* *-ángulos* *-vértices* *-arco de circunferencia* *-óvalos* *-simetría* *-lados iguales*			Mirada sobre el dibujo: Los estudiantes descomponen la figura compleja en figuras simples (circunferencia, arcos), segmentos (lados iguales) y puntos (vértices). Uso de los instrumentos: Construcciones a mano alzada, uso de los instrumentos de construcción sin identificar propiedades geométricas. Percepción de las relaciones: No se dan cuenta de las relaciones en la figura modelo. Formas de validación: comparar una sucesión de dibujos, modelo y dibujos construidos. El estudiante ha construido una rosa de seis pétalos (imagen en FASE 3), esta construcción pudo ser una guía para el estudiante en la construcción pero que no lo conduce al diseño de la rosa de ocho pétalos. Su espacio de trabajo geométrico es visual, sin apoyo de propiedades geométricas. El estudiante no logra comprender los modelos de construcción B o C.

* Las producciones de los estudiantes en Fase 1 son un primer acercamiento en la reproducción de la rosa.

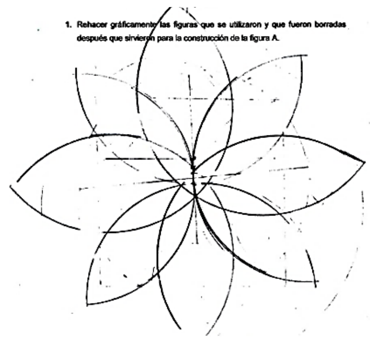
Tabla 2: Análisis de las producciones de los estudiantes para ETG GI/N1

NIVEL DE APRENDIZAJE GI/ N1			
Producciones de los estudiantes			**Análisis de las producciones**
FASE 1	**FASE 2**	**FASE 3**	
 *Transcripción texto del estudiante:* *-ángulos* *-óvalos* *-arcos de circunferencia* *-centro* *-simetría* *-vértices*			Mirada sobre el dibujo: Los estudiantes descomponen la figura compleja en figuras simples (circunferencia, arcos), segmentos (lados iguales) y puntos (vértices). Uso de los instrumentos: utilizan los instrumentos para explorar el modelo. Percepción de las relaciones: identifican relaciones entre las figuras necesarias para la construcción de la rosa, pero no expresan propiedades. Formas de validación: identificación de invariantes entre los dibujos. El estudiante ha identificado el cuadrado como una de las figuras necesarias para construir la rosa de 8 pétalos, reconoce rectas paralelas y señala el centro de la circunferencia, como un punto clave para la construcción de la rosa. El estudiante hace una cronología de los trazados, para los cuales utiliza la medida, desde aquí se puede decir que el estudiante se moviliza en geometría I. Si bien obtiene una rosa de 8 pétalos, el estudiante no verifica la forma y simetría de los pétalos, es decir son pétalos

			de igual forma, pero de diferente tamaño, esto sucede debido a que su construcción se apoya solo en un cuadrado y no en los dos cuadrados concéntricos (modelo B). Esto se produce porque las figuras básicas no corresponden a las características de las figuras prototípicas: posiblemente el alumno no reconoce un cuadrado rotado.
 *Transcripción texto del estudiante:* *Yo veo:* *-flor* *-óvalos* *-centro* *-todos los lados simétricos* *-figura* *-lados iguales*			El estudiante utiliza elementos cotidianos para referirse a las figuras necesarias para la construcción de la rosa, no destaca las propiedades de las figuras y como lo hizo en todas las fases. Construyo una rosa de 8 pétalos pero asimétrica, esto sucedió ya que faltó la construcción de otro par de rectas perpendiculares.

<table>
<tr>
<td>


Transcripción texto del estudiante:

Cosas que veo:
-una flor
-centro
-lados iguales
-óvalo
-figura
-vértices
</td>
<td>


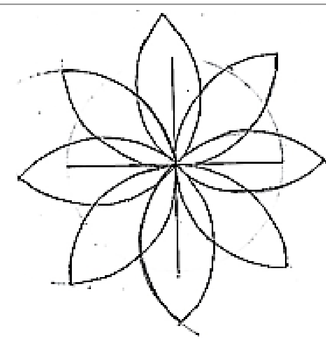
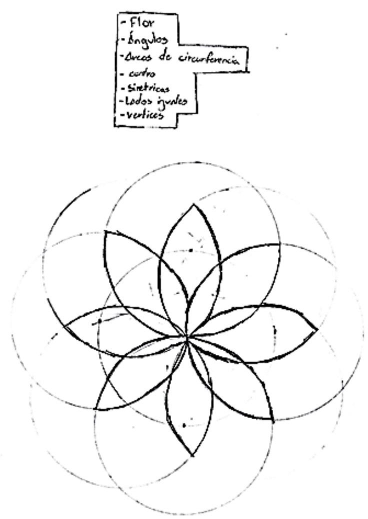
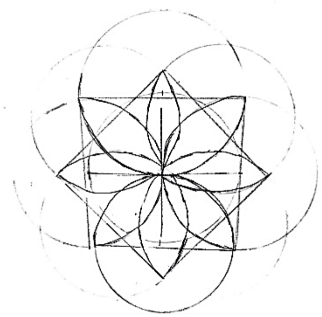
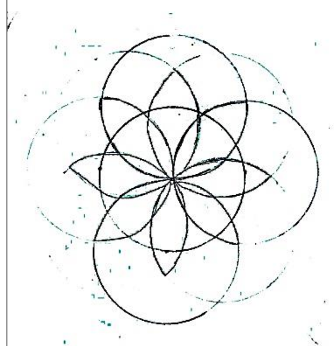
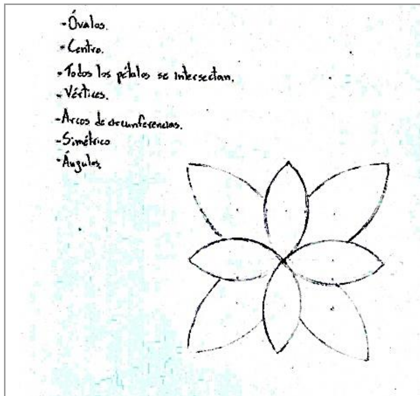
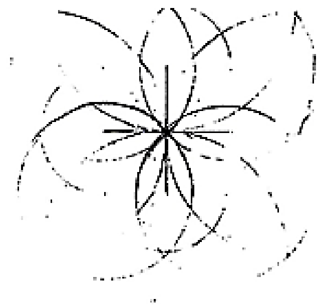
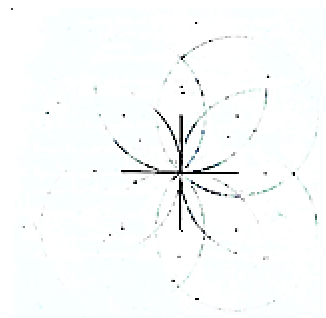
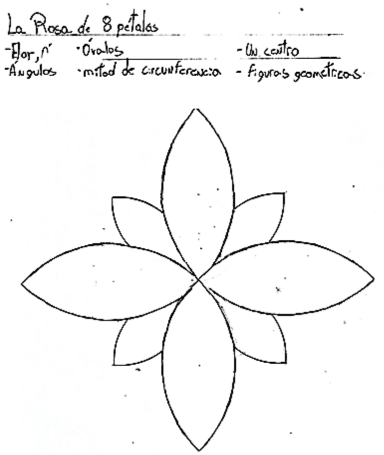
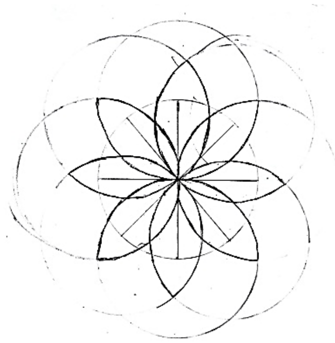
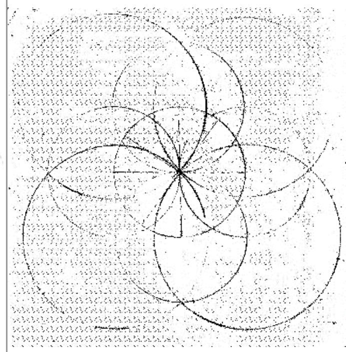
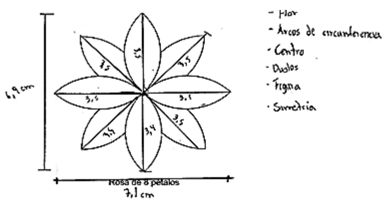
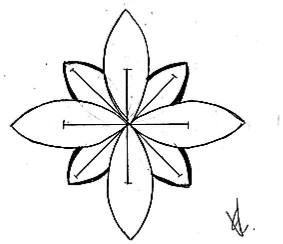
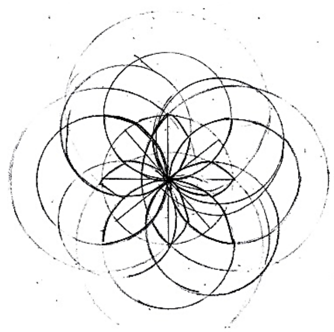
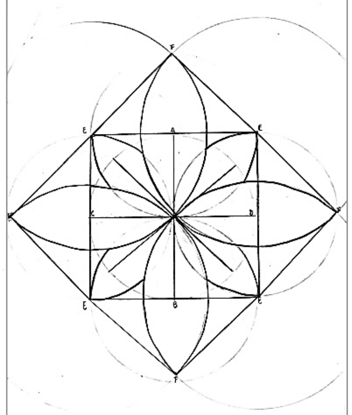
</td>
<td>

</td>
<td>El estudiante construye la rosa de 8 pétalos con ayuda del papel cuadriculado para validar las propiedades de las rectas perpendiculares, sin embargo, al utilizar papel en blanco los pétalos que construyen resultan asimétricos, esto se debe a que en su programa de construcción señala como primer paso hacer una circunferencia y luego una “cruz”, lo cual no asegura que las rectas sean perpendiculares y mucho menos que correspondan al diámetro de la circunferencia. Se percibe una especie de adivinanza en la construcción de los pétalos de la rosa, ya que no utiliza los instrumentos para identificar puntos medios.</td>
</tr>
</table>

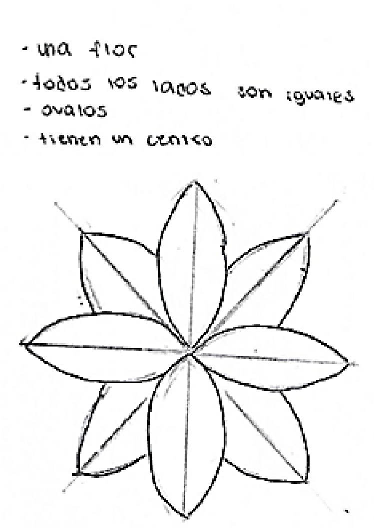
Tabla 3: Análisis de las producciones de los estudiantes para ETG GI/N1 hacia GII

NIVEL DE APRENDIZAJE GI / N1 HACIA GII			
Producciones de los estudiantes			**Análisis de las producciones**
FASE 1	**FASE 2**	**FASE 3**	
 *Transcripción texto del estudiante:* *-flor* *-ángulos* *-arcos de circunferencia* *-centro* *-simétricas* *-lados iguales* *-vértices*			<u>Mirada sobre el dibujo:</u> Los estudiantes descomponen la figura compleja en figuras simples (circunferencia), segmentos (lados iguales) y puntos (vértices). <u>Uso de los instrumentos:</u> utilizan los instrumentos para producir figuras usando las propiedades. <u>Percepción de las relaciones:</u> su construcción no tiene relaciones internas consigo mismas, sino relaciones con el modelo. <u>Formas de validación:</u> identificar los invariantes de la figura modelo y la figura construida. En su construcción se observa que los pétalos de la rosa son asimétricos, esto se debe a que el estudiante construye una circunferencia y marca 4 puntos a mano alzada, que le permiten construir 4 pétalos de la rosa, luego construye los otros 4 pétalos ubicando el compás en un punto de la primera circunferencia que sea punto medio del pétalo, sin embargo, este punto medio lo construye a tanteo. Su técnica podría llegar a construir la rosa si construye dos diámetros perpendiculares que le permitirían ubicar con exactitud los puntos y usar los instrumentos para determinar puntos medios.

 *Transcripción texto del estudiante:* *-óvalos* *-centro* *-todos los pétalos se intersectan* *-vértices* *-arcos de circunferencia* *-simétrico* *-ángulos*			La estudiante domina elementos de la circunferencia como radio y centro. Construye puntos que proyecta sean los vértices de un cuadrado, sin embargo obtiene pétalos no simétricos, posiblemente por no distinguir la propiedad de congruencia de ambos cuadrados.

 *Transcripción texto del estudiante:* *La Rosa de 8 pétalos* *-flor - óvalos - un centro* *-ángulos -mitad de circunferencia -figuras geométricas*			El estudiante construye una circunferencia la cual divide en 8 partes iguales, construye una rosa con pétalos asimétricos, tanto en el papel cuadriculado como en el papel en blanco. Es importante destacar que el estudiante en su programa de construcción señala nombrar el centro de la circunferencia y las intersecciones de las rectas con la circunferencia, sin embargo, su lenguaje es cotidiano e insiste en construir cuatro pétalos pequeños y cuatro pétalos grandes, esto sucede porque no ha identificado las figuras necesarias para construir la rosa.

  *Transcripción texto del estudiante:* *-flor* *-arcos de circunferencia* *-centro* *-óvalos* *-figura* *-simetría*			La estudiante en su primer acercamiento con la rosa ha tomado algunas medidas métricas, a pesar de esto su construcción resulta con pétalos asimétricos. Ha construido dos cuadrados concéntricos, pero no congruentes, esto se debe a un error en la construcción de las semicircunferencias, ya que primero construyen cuatro pétalos y para crear los otros cuatro los utilizan como base. Falta conocimiento de propiedades geométricas como el punto medio, la estudiante debería reordenar los pasos de su procedimiento para construir la rosa señalada.

<table>
<tr>
<td>

Transcripción texto del estudiante:

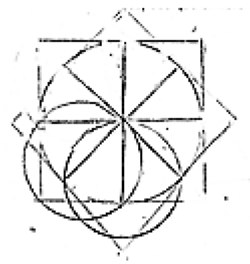
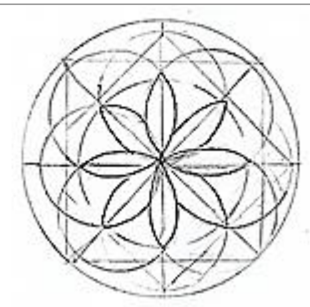
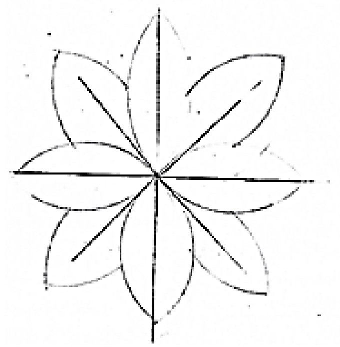
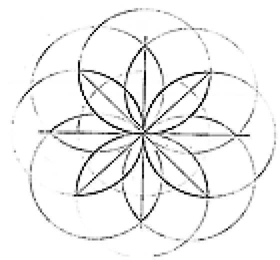
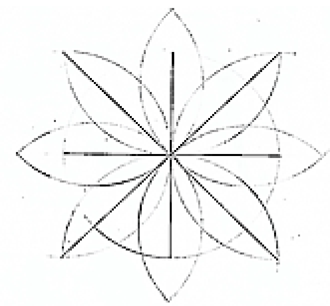
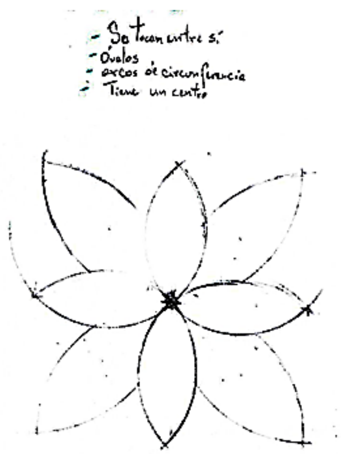
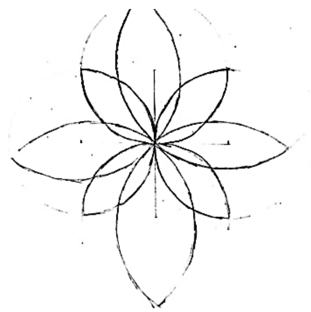
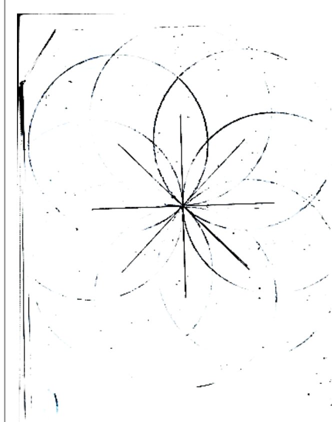
-una flor
-todos los lados son iguales
-óvalos
-tienen un centro</td>
<td></td>
<td></td>
<td>La estudiante en fase 2 ha identificado circunferencias y cuadrados como elementos principales para la construcción de la rosa.
Para construir la rosa, la estudiante construye dos pares de rectas perpendiculares, luego construye un cuadrado y un rombo donde las rectas perpendiculares ya construidas resultan diagonales de los cuadrados, luego construye dos circunferencias, una inscrita en el cuadrado y otra circunscrita a las figuras construidas, finalmente en cada recta construye una circunferencia, para construir los 8 pétalos. En este procedimiento si bien la estudiante reconoce todas las figuras necesarias para construir la rosa no identifica las relaciones entre ellas.</td>
</tr>
</table>

Tabla 4: Análisis de las producciones de los estudiantes para ETG GII/N1

NIVEL DE APRENDIZAJE GII/N1			
Producciones de los estudiantes			**Análisis de las producciones**
FASE 1	**FASE 2**	**FASE 3**	
- Arcos de circunferencia - lados simétricos - Un centro - Una flor - Ovalos - Vertices - angulos  *Transcripción texto del estudiante:* *-arcos de circunferencia* *-lados simétricos* *-un centro* *-una flor*			Mirada sobre el dibujo: Los estudiantes descomponen la figura compleja en figuras (circunferencia), líneas (lados iguales) y puntos (vértices). Uso de los instrumentos: usan los instrumentos para explorar el modelo y luego se reemplaza por el uso de propiedades. Percepción de las relaciones: Formas de validación: comparación de las invariantes de la figura modelo y la figura construida. El estudiante confunde rectas paralelas con rectas perpendiculares. El método de construcción redactado por el estudiante es similar al presentado en el análisis a priori para la figura C. El estudiante construye la rosa haciendo primero un par de rectas perpendiculares y luego hace una circunferencia de centro la intersección de estas rectas. Las rectas perpendiculares con la circunferencia construida intersectan en cuatro puntos, en esos 4 puntos construye 4 semicircunferencias que le permiten crear cuatro pétalos, une esos pétalos con rectas en diagonal y en la intersección de esas rectas con la primera circunferencia construida que son 4

-óvalos *-vértices* *-ángulos*			construye otras 4 semicircunferencias creando así los 4 pétalos que faltaban, el estudiante destaca usar siempre la misma abertura del compás, En los pasos redactados por el estudiante es importante destacar el lenguaje que utiliza, primero escribió choque y en el resto del texto habla de intersección, esto da muestra de que en primer lugar utiliza un lenguaje cotidiano, pero a medida que se apoya en propiedades visuales y geométricas y el uso de las herramientas utiliza un lenguaje matemático adecuado.
 *Transcripción texto del estudiante:* *-se tocan entre sí* *-óvalos* *-arcos de circunferencia* *-tiene un centro*			El estudiante en fase 1 y 2 construye rosas con pétalos asimétricos, en fase 3 se puede observar que los pétalos son simétricos, en su programa de construcción señala que se debe construir una recta horizontal de cualquier medida y luego una simetral, esto quiere decir que es una recta perpendicular que dimidia la recta ya construida, a la intersección de esas dos rectas nombra A, luego construye dos rectas diagonales que se intersectan en el punto A, la estudiante se ha asegurado de que la medida de todas las rectas que ha construido sea la misma, para construir la rosa ubica el compás en la recta y el lápiz en el punto A y hace una circunferencia, repite el paso con todas las rectas construidas.

4.2. Resultados

4.2.1. Los ETG personales construidos por estudiantes

El análisis del trabajo de estos 11 individuos nos lleva a identificar cuatro ETG personales en el pasaje de lo intuitivo a lo geométrico. Las principales acciones de los estudiantes considerados se encuentran en el análisis a priori. Para identificar estos ETG, caracterizamos las tres fases de la actividad a través de los procesos de resolución de los estudiantes. La mirada al dibujo del modelo compuesto nos habla de lo figural de los alumnos. La caracterización del uso instrumental se basa en el análisis de los instrumentos y propiedades de la circunferencia (radio, centro) y de la simetría movilizado por los estudiantes. La percepción de las relaciones entre los círculos y el cuadrilátero y su validación para concluir la reproducción nos informa sobre el discurso argumentativo. Cada perfil se nombra especificando el estado supuesto de cada construcción para esa actividad. Concluimos sobre el paradigma de ETG personal tratando de definir el pasaje de lo intuitivo a lo geométrico en base a los tres enfoques asociados.

Visualización / sin propiedades. Este perfil se refiere a un estudiante observado. El estudiante dibuja circunferencias para explorar el modelo, pero esta exploración no está basada en sus propiedades, por esto no puede identificar las propiedades geométricas de la figura y reinvertirlas en su construcción. Cuando este estudiante intenta reproducir la figura, utiliza el compás dibujando una circunferencia en el plano, luego dibuja otras circunferencias, ahora ubicando el compás en un punto de la circunferencia construida y la punta del lápiz en el centro y repite el paso, las circunferencias obtenidas no tienen las mismas relaciones que tiene la figura modelo, esta reproducción de la rosa coincide con la dificultad relativa a la figura vista en el análisis a priori. El proceso de descubrimiento sigue siendo perceptual y no instrumentado, el enfoque de modelización utiliza una percepción del dibujo y no una visión de figura, su proceso de validación compara una sucesión de dibujos - modelo y dibujo - construidos. Su ETG personal se ubica en el paradigma GI-N0 porque consideran los objetos geométricos por su aspecto general movilizando una visión 2D, desprovista de propiedades.

Sin instrumentos / con enlaces intuitivos. Tres estudiantes observados corresponden a este perfil. Los estudiantes asociados con este perfil no usan mucho las propiedades de la circunferencia (radio, centro) en su exploración, solo reconocen un cuadrado, por tanto, identifican ciertas invariantes de la figura del modelo, las cuales no son suficiente para reproducir estas relaciones en su construcción. El proceso de descubrimiento es perceptual, pero en base a instrumentos, lo que les permite enriquecer su análisis de la figura considerando los elementos que la componen. El enfoque de modelación les permite identificar relaciones sin poder expresar propiedades. Finalmente, su proceso de validación se basa en la identificación de invariantes entre los dos dibujos. Dado que su utilización de instrumentos es más avanzada que el perfil anterior, consideramos que la ETG de este perfil se encuentra en el paradigma GI-N1.

Instrumentos / sin propiedades. Cinco estudiantes están asociados con este perfil. Realizan la construcción de la circunferencia (radio, centro) con el compás al principio de su exploración, logran identificar las relaciones entre las circunferencias y los cuadriláteros, sin embargo, se encuentran con dificultades para usar las propiedades de la circunferencia, de las rectas perpendiculares, los cuadriláteros y puntos medios, gran partes de las construcciones dan como resultado pétalos asimétricos, esto surge porque su construcción no tiene relaciones internas consigo misma, sino relaciones con el modelo de la figura. Los estudiantes son incapaces de desprenderse de los vínculos perceptivos del modelo para transformarlos en relaciones entre objetos geométricos de la misma figura. Los estudiantes no consideran las propiedades independientemente del modelo, es por ello que consideramos que este ETG trabaja en el paradigma GI- N1.

Instrumentos / con propiedades. Dos estudiantes está definido por este perfil. Los estudiantes establecieron un procedimiento específico, en ambos casos su método de construcción se asemeja al presentado en el análisis a priori para la figura C. Utilizan propiedades de la circunferencia, de las rectas perpendiculares, se apoyan en los instrumentos. Los estudiantes utilizan las rectas perpendiculares como inicio en su construcción y luego construyen una circunferencia con centro esta intersección. La construcción de la circunferencia es muy avanzada, al igual que el uso de propiedades, el compás es utilizado en una primera exploración y luego se reemplaza por el uso de propiedades (rectas perpendiculares, simetría, punto medio). La construcción figurativa parece basarse mas en los elementos del espacio real que en las relaciones que pueden tener entre ellos. El proceso de descubrimiento demuestra una reflexión de instrumentos sobre la figura. El enfoque de modelización utiliza una visión de dibujo por sus propiedades. El proceso de validación se basa en la comparación de las invariantes de la figura - modelo y la figura construida. Para estos estudiantes, el paradigma asociado con su ETG es el paradigma GII-N1.

Hemos identificado cuatro ETG personales, para tres paradigmas. El paradigma GI-N0 está asociado a un ETG en que las diferentes fases aún están en construcción. El paradigma GI-N1 está asociado con dos ETG, para este paradigma, las fases también están en construcción, pero se están comenzando a poner en práctica el espacio de trabajo geométrico ETG, los alumnos encuentran dificultades, ya sea en lo figurativo y la distinción del dibujo y la figura, o en la aplicación de propiedades con una dificultad en el uso de la circunferencia (radio, centro). Estas diferentes dificultades implican una reflexión bastante perceptual e instrumentada donde las propiedades son perceptivas e incluso no identificadas. Finalmente, el último paradigma es el paradigma al que apunta el ETG apropiado, GII-N1, estos estudiantes supieron utilizar las diferentes fases para identificar las propiedades de la figura, reinvertirlas en su reproducción y validar su producción. El análisis de los procedimientos de los estudiantes mediante los ETG permite identificar que las diferentes fases de la actividad son los elementos impulsores de la evolución de sus ETG personales hacia un nivel GII-N1 y que estas génesis se enriquecen entre sí.

5. CONCLUSIONES

El propósito de la situación didáctica que pusimos en marcha fue iluminarnos sobre las posibles aportaciones de aprendizaje de trabajo sobre las propiedades geométricas al final de enseñanza básica (10-12 años). El ETG apropiado correspondiente a la actividad presentada se basa en tres fases. La de exploración figurativa que apunta a una visión de dibujos por sus propiedades y no por su forma, se basa en la descomposición dimensional y la evolución de la visión hacia la figura. La descripción de la figura apunta a una apropiación del uso de los instrumentos para identificar invariantes y validar una construcción que se utilizan a lo largo de la fase. La construcción y argumentación apunta a una validación que se fundamenta en las propiedades geométricas de las figuras propuestas. El paradigma ETG apropiado está en el nivel GII-N1. Los diversos análisis de los alumnos observados muestran que el uso de la rosa de 8 pétalos y sus características específicas para un primer aprendizaje de las propiedades sí repercute en el conocimiento de los alumnos. Es a través de la culminación de las tres fases que el paradigma GII-N1 es efectivamente el paradigma en el que los estudiantes resuelven la actividad. Sería interesante cuestionar los efectos a largo plazo del uso de figuras complejas para las propiedades de aprendizaje y, en particular, la introducción del paradigma GII con el trabajo de demostración. Esta introducción en ningún caso tendría como objetivo una aproximación al paradigma GII, pero facilitaría el pasaje de lo intuitivo a lo geométrico en específico en torno a la explotación del paradigma GI-N1. Esto probablemente tendría un impacto posterior de transitar en el objetivo de un trabajo sobre el paradigma GII-N1.

BIBLIOGRAFÍA

BERTHELOT, R. & SALIN M.-H. (2001) L'enseignement de la géométrie au début du collège. Comment peut-on concevoir le passage de la géométrie du constat à la géométrie déductive. Petit x, 56, 5-34.

BRACONNE - MICHOUX, A. (2008). Evolución de concepciones y argumentación en geometría entre estudiantes: paradigmas y niveles de van Hiele en la articulación CM2-6e. Tesis doctoral, Universidad Paris Diderot - Paris 7, Francia.

BROUSSEAU G. (1980) Problèmes de didactique des décimaux. Recherches en didactique des mathématiques. Vol 1/1, 1980 et Vol 2/1, 1981.

BROUSSEAU, G. (1998) Théorie des situations didactiques. Grenoble : La Pensée Sauvage.

BURTON, J., DETHEUX - JEHIN, M. & FAGNANT, A. (1997). Comment les enseignants évaluent-ils la géométrie au premier degré secondaire. Liège: Service de Pédagogie expérimentale de l'Université.

CASTELA, C. & GUZMAN, I. (2003). Comparación de la Enseñanza de la Geometría en los Sistemas Escolares Chileno y Francés. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 18, 295 - 301.

COUTAT, S. (2005). Connaître et reconnaitre les théorèmes. Petit x, 67, 12-32.

COUTAT, S. (2006). Intégration de la géométrie dynamique pour favoriser la liaison école primiare-collège : Une ingénierie au collège pour la notion de propriété. Thèse de l'université Joseph Fourier de Grenoble.

DeBLOIS, L. (1997). Trois élèves en difficulté devant des situations de réunion et de complément d'ensembles. Educational Studies in Mathematics, 34 (1), 67-96.

DE SAUSSURE, F. (1913/1995) Cours de linguistique générale. Payot.

DORIER, J-L. (2014) *MATH-ECOLE*. *Numéro spécial* : *Enseignement* de la *géométrie*. Éditorial. 3.

DOUADY, R. (1986) Jeux de cadres et dialectique outil-objet. Recherches en didactique des mathématiques, Vol. 7.2, 5-31.

DOUADY, R. (1994) Ingénierie didactique et évolution du rapport au savoir. Repères-IREM n° 15, 37-61.

DUVAL, R. (2005) Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie: Développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. Annales de didactique et de sciences cognitives, Vol. 10,5-53.

DUVAL, R. & GODIN, M. (2006) Les changements de regard nécessaires sur les figures. Grand N, 76, 7-27.

FISCHBEIN, E. (1999) Intuitions and Schemata in Mathematical Reasoning. Educational Studies in Mathematics 38, 11-50.

GONZALEZ-ANDRADE, R. (2002), Citado por Castela, C. & Guzmán, I. (2003). Comparación de la Enseñanza de la Geometría en los Sistemas Escolares Chileno y Francés.

GUZMÁN, I. (2009) Actividades Geométricas en la enseñanza. Análisis desde el punto de vista cognitivo. N° 19, 22-33. SSN :1815-0640.

HOUDEMENT, Ch. & KUZNIAK, A. (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. Annales de didactique et de sciences cognitives, 11, 175 - 193. Halshs-00858709

JANVIER, C. (1997). Grandeur et mesure : la place des formules à partir de l'exemple du volume. Bulletin AMQ, 37 (3), 28-41.

KUZNIAK, A. (2010). Un ensayo sobre la naturaleza del trabajo geométrico al final de la educación obligatoria en Francia. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 15, 73-93.

KUZNIAK, A. (2011). El espacio de trabajo matemático y sus orígenes. Anales de Didáctica y Ciencias Cognitivas, 16, 9-24.

KUZNIAK, A. & RICHARD, PR, (2014). Espacios de trabajo de matemáticas. Puntos de vista y perspectivas. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 17 (Número Especial TOMO I), págs. 29-39.

LABORDE, C. (1997) La multiplicité des contrats dans l'usage de la figure. Bulletin d'information de l'IREM de Rennes.

LABORDE C. (1998) Relationship between the spacial and theorical in geometry: the role of computer dynamic representations in problem solving. In IFIP TC3/WG3.1; 26-31 october 1997, Grenoble, France.

LABORDE, C. & CAPPONI, B. (1995) Modélisation à double sens. In Actes de la 8ème École d'été de Didactique des mathématiques. Éditions IREM de Clermont-Ferrand.

MINEDUC (2016). Programa de Estudio Séptimo Básico. Chile.

MINEDUC (2016). Programa de Estudio Primer Año Medio. Chile.

OFFRE, B., PERRIN-GLORIAN, M. J., & VERBAERE, O. (2006). Usage des instruments et des propriétés géométriques en fin de CM2. *Petit* x, 72, 6-39.

PARZYSZ, B. (1988) 'Knowing' vs 'seeing'. Problems of the plane representation of space geometry figures. Educational Studies in Mathematics, vol XIX, 9-92.

PERRIN-GLORIAN, M-J. MATHE, A-C. & LECLERCQ, R. (2013). Comment peut-on penser la continuite de L´enseignement de la géométrie de 6 a 15 ans? Reperes - IREM N° 90.

PERRIN-GLORIAN, M-J. (2014). Articulation entre langage et traitement des figures dans la résolution d´un problème de construction en géométrie. Spirale - Revue de recherches en éducation,n°54.

PERRIN-GLORIAN, M-J. & MANGIANTE-ORSOLA, C. (2016). Ingenierie didactique de developpement en geometrie au cycle 3 dans le cadre du Lea Valenciennes-Denain. Actes du séminaire national de l`ARDM.

PIERRARD, A. (2004) Apprendre à écrire des textes de présentation de figures géométriques. Lire-écrire à l'école, n°20,

http://www.crdp.acgrenoble.fr/lireetecrire/spip.php?article39

PLUVINAGE, F. (1997). Los objetos matemáticos en la adquisición del razonamiento. Investigaciones en Matemática Educativa Volumen II.

RABARDEL, P. (1995). Hombres y tecnologías. Un acercamiento cognitivo a los instrumentos contemporáneos. París, Francia: Armand Colin.

TANGUAY, D. (2010) La géométrie : au carrefour du sensible et de l'intelligible. Éditions Bande Didactique, coll. (Parenthèse), Montréal.

VAN HIELE, .PM, VAN HIELE - GELDOF, D. (1958). Un método de iniciación a la geometría en la escuela secundaria. Informe sobre métodos de iniciación a la geometría, en Freudenthal, H., Learning and Understanding in Mathematics, a Tribute to Richard Skemp, 27-47.

VENANT, F & VENANT, P (2014) La technologie au service d´une situation-problème: exemple de la rosace à huit branches. Grand N n°93, pp. 59-91.

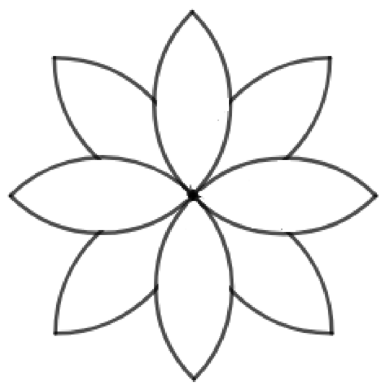
ANEXOS

Situación didáctica

Tema: Construcciones Geométricas

Objetivo: Descomponer la rosa de 8 pétalos, identificando las figuras elementales que la componen.

I Estudio de la figura



Rosa de 8 pétalos

1. Observe esta figura con mucha atención e identifica las partes que la componen para poder reproducirla, y asigna el nombre que corresponde a cada una de estas partes.
2. Utilizando regla y compás reproduce ahora la figura de la rosa de 8 pétalos.

II Descripción de la figura

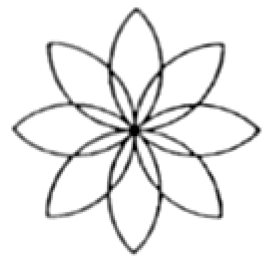


Figura A

1. Utilizando la figura A) representa gráficamente las figuras que se utilizaron para construir la rosa de 8 pétalos.

III Construcción de la figura

1. En una hoja de papel cuadriculado (que el profesor les entregará) construir la rosa de 8 pétalos con el procedimiento de su preferencia, luego haz el mismo procedimiento en una hoja en blanco.
2. Escribir un programa de construcción que le permita a un compañero de otro curso reproducir la rosa de 8 pétalos.

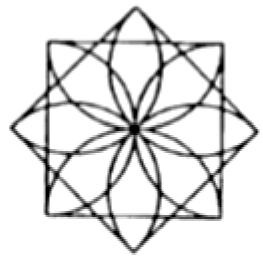


Figura B

Utilizando la representación de la figura B) representa gráficamente las figuras que se utilizaron para construir la rosa de 8 pétalos.

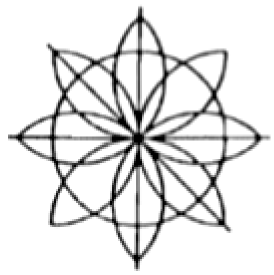


Figura C

Utilizando la representación de la figura C) representa gráficamente las figuras que se utilizaron para construir la rosa de 8 pétalos.

Trabajo de los estudiantes en la experimentación