UNIVERSIDAD DEL BÍO-BÍO

FACULTAD DE EDUCACIÓN Y HUMANIDADES
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

Análisis de convergencia de un nuevo método de elementos finitos H(div)-conforme para un modelo de Bioconvección

Tesis presentada al programa de Pedagogía en Educación Matemática, para optar al Título de Profesor(a) de Educación Media en Educación Matemática de la Universidad del Bío-Bío.

Matías Ignacio Garrido Valdés
Dalidet Marinoviz Sanhueza Méndez

Chillán, 2022.

Profesor Guía: Eligio Colmenares García
Departamento de Ciencias Básicas
Universidad del Bío-Bío, Chile

Análisis de convergencia de un nuevo método de elementos finitos $\mathbf{H}(\mathrm{div})$-conforme para un modelo de Bioconvección

por

Matías Ignacio Garrido Valdés

Dalidet Marinoviz Sanhueza Méndez

Comisión examinadora:

Dr. Eligio Colmenares García

Profesor guía

Universidad del Bío-Bío, Chile

Dr. Felipe Lepe Araya

Profesor Informante

Universidad del Bío-Bío, Chile

Análisis de convergencia de un nuevo método de elementos finitos H(div)-conforme para un modelo de Bioconvección

Matías Ignacio Garrido Valdés
Dalidet Marinoviz Sanhueza Méndez

Universidad del Bío-Bío.

Enero, 2022.

Agradecimientos

Quiero dar gracias primeramente a Dios por estar siempre presente. Asimismo, estoy muy agradecida con mis padres, Sebastián Sanhueza y Estrella Méndez, por su apoyo emocional, económico y sus sabios consejos, en el transcurso de mi formación docente y personal. De igual forma, agradezco el apoyo de mis hermanos en los momentos de necesidad económica o de salud.

También, estoy agradecida con los profesores que tuve y me apoyaron en el aspecto académico. En particular, quiero agradecer al profesor Celso Vivallo por estar siempre a disposición para ayudarme en las dudas que tuviera. Además, quiero agradecer a mis compañeros y compañeras que estuvieron presentes en el transcurso de la carrera estudiando codo a codo conmigo para los certámenes o test o presentaciones, ya que fueron un apoyo emocional y académico. En particular, agradecer a mi compañero de tesis, Matías, por tener presta disposición para resolver mis dudas y tener la paciencia de explicarme.

Dalidet Sanhueza Méndez.

Quiero empezar este agradecimiento mencionando a las personas más importantes en mi vida, los cuales son mis Padres; Yessica y Víctor. También agradecer a mis abuelos Diego y Lucy, por ser parte de mi crianza y formación como persona. Todos ellos son pilares fundamentales tanto en mi crecimiento profesional como personal.

Continuando los agradecimientos, agradecer a mis amigos de la universidad por los buenos y malos ratos que vivimos, dentro y fuera del aula. Siempre tirando la foca después de los certámenes, riendo y llorando por las notas. Y también a los profesores en especial al profesor Edgardo, que fue un modelo de lo que yo ansío ser como profesor.

Matías Garrido Valdés.

Además, queremos agradecer en conjunto a nuestro profesor guía, Eligio Colmenares García por todo el apoyo, motivación, paciencia, acompañamiento y un sin fin de cualidades más. Debido a su participación, la elaboración de esta tesis fue bastante entretenida e interesante, descubriendo un área nueva relacionada a la matemática.

Finalemente y por último, agradecer al Fondo Nacional de Desarrollo Científico y Tecnológico (FONDECYT 11190241) por prestar el financiamento para el desarrollo de esta tesis, el cual facilitó en gran medida la realización de ésta.

Matías Garrido Valdés y Dalidet Sanhueza Méndez.

Resumen

En este trabajo presentamos y analizamos un método numérico de elementos finitos H(div)-conforme para un modelo de flujos bioconvetivos que describe la hidrodinámica de microorganismos gravitatorios inmersos en un fluido de cultivo viscoso e imcomprensible. El modelo consiste en un sistema tipo Navier-Stokes, para describir la velocidad y la presión del fluido, acoplado a una ecuación de conservación celular para la concentración de microorganismos. El esquema numérico se basa, por un lado, en la técnica de Galerkin discontinuo de penalización interior simétrico y en un enfoque upwind para el término convectivo no lineal de las ecuaciones de Navier-Stokes. Para la ecuación de concentración se emplea un método de elementos finitos primal estándar/conforme. Se utilizan los espacios de elementos de Brezzi-Douglas-Marini (BDM) de orden k para la velocidad, preservándose asi la condición de incompresibilidad del fluido a nivel discreto, elementos discontinuos de orden $k-1$ para aproximar la presión y los elementos finitos de Lagrange de orden k para la concentración. La existencia y unicidad de los resultados son demostrados rigurosamente tanto para el problema continuo, como para el discreto, haciendo uso de los Teoremas de punto fijo de Schauder y Brouwer, respectivamente, y también se derivan las estimaciones a priori óptimas del error de la aproximación.

Palabras clave: Bioconvección, método de elementos finitos, método de Galerkin discontinuo, elementos de divergencia conforme, teoría de punto fijo, análisis del error a priori.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

La convección causada por la concentración de microorganismos inmersos en un fluido se llama Bioconvección. Este fenómeno consiste en un movimiento natural de microorganismos que puede ser causado por diferentes factores externos como la gravedad (gravitaxis), luz (fototaxis), oxígeno o comida (quimiotaxis), gradientes de temperatura o combinaciones de éstas [16]. El estudio de flujos bioconvectivos permite una mejor comprensión de varios procesos biológicos que tienen aplicaciones diversas en investigación bacteriana, el diseño de biorreactores de cultivo celular asi como en la tecnología de biocombustibles de algas, entre muchos otros, con novedosas implicaciones médicas, de bioingeniería y farmacéuticas [3, 12].

Un modelo matemático para describir la hidrodinámica tridimensional de los microorganismos gravitatorios se encuentra en [13, 15]. En estado estacionario, el modelo describe el campo vectorial de velocidad $\mathbf{u} = (u_j)_{1 \leq j \leq 3}$, el campo escalar de presión p y la concentración φ de microorganismos en un fluido cultivo $\mathbf{\Omega} \subseteq \mathrm{R}^3$ mediante el sistema de ecuaciones diferenciales parciales

$$-\mu\Delta\mathbf{u} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\,\mathbf{u} + \nabla p = \boldsymbol{f} - (1+\gamma\varphi)\,\boldsymbol{g} \quad \text{y} \quad \operatorname{div}\mathbf{u} = 0 \quad \text{en} \quad \Omega\,, \tag{1.1a}$$

$$-\operatorname{div}\mathbf{J} = 0 \quad \text{donde} \quad \mathbf{J} = (\mathbf{u} + U\,\mathbf{i}_3)\,\varphi - k\nabla\varphi \quad \text{en} \quad \Omega\,, \tag{1.1b}$$

es decir, un sistema de tipo Navier-Stokes (1.1a) acoplado a una ecuación de conservación celular (1.1b) para el flujo $\mathbf{J}$ de los microorganismos. Aquí, los datos son la viscosidad $\mu > 0$, una fuerza externa distribuida por volumen $\boldsymbol{f}$, el campo vectorial gravitatorio $\boldsymbol{g}$, la constante de la tasa de difusión k, la velocidad media de nadado ascendente de los microorganismos U, el vector unitario en la dirección vertical $\mathbf{i}_3 = (0,0,1)^{\mathrm{t}}$ y la constante $\gamma := \rho_0/\rho_m - 1 > 0$ que depende de la densidad de los microorganismos ρ_0 y de la densidad del fluido de cultivo ρ_m. Mayor precisión en cuanto a hipótesis de regularidad sobre estos datos asi como las condiciones de frontera a considerar se establecen en la Sección 2.1 del capítulo siguiente.

El primer análisis matemático formal del problema de Bioconvección (1.1) fue llevado a cabo en [17]. Allí, los autores muestran existencia de solución para el problema estacionario considerando la velocidad media U lo suficientemente pequeña. Además, se establecen condiciones para la existencia de una solución débil global del problema no estacionario. Posteriormente, [4] generaliza los resultados de [17] considerando el caso en el que la concentración de los microorganismos puede afectar a la viscosidad efectiva del fluido. Demuestran resultados de existencia de soluciones débiles y fuertes en el caso estacionario, también bajo la hipótesis de que el dato U es pequeño. Asimismo, establecen un resultado de unicidad de soluciones débiles. Posteriormente, el análisis de este último trabajo se extiende en [8] para establecer la existencia y unicidad de soluciones periódicas. Por su parte, en [2] se aborda el problema de estimar las tasas de convergencia para el error cuando se utilizan aproximaciones espectrales de Galerkin para el modelo (1.1).

Algunos trabajos que abordan la simulación numérica y/o el análisis de estabilidad de microorganismos gravitacionales en dominios bidimensionales son [6, 11, 14]. Hasta lo que conocemos, los únicos análisis de elementos finitos realizados para el modelo de bioconvección (1.1) son [5] y [23] en los cuales se considera que la concentración es dependiente de la viscosidad. En [5] se propone y analiza un método de elementos finitos primal estándar. Se establecen resultados de existencia (para U suficientemente pequeña) y de unicidad para los problemas continuos y discretos, así como un resultado de convergencia. El desempeño y la precisión de la técnica numérica se ilustran en el caso 2D, incluyendo un ejemplo con datos obtenidos de experimentos en laboratorio. Aquí, los autores utilizan el elemento finito Taylor-Hood de segundo orden para aproximar la velocidad y la presión, mientras que para la concentración se utilizan polinomios cuadráticos a trozos.

Por otra parte, en [23] los autores presentan un método de elementos finitos mixto. Allí, además de las variables físicas originales, los autores introducen el tensor de deformación, el tensor de vorticidad, un tensor de pseudoestrés y una incógnita vectorial que depende de la velocidad del fluido, la concentración de microorganismos y su gradiente, como variables adicionales. Usando un enfoque de punto fijo y combinando el teorema de Lax-Milgram con el teorema clásico de punto fijo de Banach y Brouwer, se establecen la existencia de soluciones para los problemas continuo y discreto (asumiendo U suficientemente pequeña), bajo supuestos de regularidad adecuados, una elección factible de parámetros de penalización y, en el caso discreto, para cualquier familia de subespacios de elementos finitos. Se demuestra una estimación de Céa correspondiente y límites de error óptimos a priori para la solución de Galerkin. Los experimentos numéricos en dos y tres dimensiones ilustran el rendimiento de la técnica y respaldan las tasas de convergencia esperadas.

De acuerdo a lo anterior, inspirados por los trabajos [19, 28], en esta tesis pretendemos desarrollar y analizar un nuevo método de elementos finitos basado en aproximaciones H(div)$-$conformes para simular el fenómeno de Bioconvección que esta descrito por el problema (1.1). En particular, se busca que el método posea mayor flexibilidad respecto a los espacios de elementos finitos y que se preserve la condición de incompresibilidad del fluido a nivel discreto. De este modo, tras reescribir el problema fuerte en una formulación débil estándar, derivamos estimaciones a priori para las soluciones y empleando un enfoque de punto fijo demostramos existencia de soluciones por el teorema de punto fijo de Schauder (para U suficientemente pequeña). Además, la unicidad se establece suponiendo que los datos son suficientemente pequeños.

Se presenta luego un método de elementos finitos discontinuo en las ecuaciones del fluido y un método conforme en la ecuación de concentración. Con mas precisión, procediendo como en como en [28], nos basamos en la técnica de Galerkin discontinio de penalización interior simétrica estándar y un enfoque upwind para formular el esquema discreto asociado con las ecuaciones del fluido. En cuanto a las ecuaciones de concentración, se propone un esquema de elementos finitos conforme. Los subespacios utilizados son los de Brezzi-Douglas-Marini (BDM) de orden k para la velocidad, los cuales producen velocidades discretas con divergencia nula y elementos discontinuos de orden $k-1$ para la presión. Utilizamos los elementos finitos de Lagrange para aproximar la concentración. De forma similar al caso continuo, demostramos resultados de existencia usando el teorema de punto fijo de Brouwer y la unicidad se sigue bajo hipótesis de data pequeã. Finalmente, se lleva a cabo estimaciones de error a priori de manera rigurosa y se establece que éstas son del orden óptimo.

Capítulo 2

El problema modelo

En este capítulo introduciremos y analizaremos la formulación variacional de nuestro problema modelo. Para ello, en la Sección 2.1 primeramente estableceremos notaciones y definiciones preliminares junto con las espacios funcionales con los que trabajaremos. Allí también estableceremos con precisión las hipótesis de regularidad sobre los datos involucrados en el modelo y las condiciones de frontera a considerar. En seguida, en la Sección 2.2, procederemos a escribir el problema en su forma débil y discutiremos las propiedades de estabilidad de las formas involucradas. En la Sección 2.3 derivaremos estimados a priori de soluciones y, tras reescribir el problema débil equivalentemente como un problema de punto fijo, demostraremos existencia de soluciones usando el teorema de Shauder. La unicidad se establecerá en seguida bajo una hipótesis de data pequeña.

2.1. Notaciones y definiciones preliminares

Dominio y espacio de funciones. El modelo que se considerará será en un dominio espacial en tres dimensiones abierto y acotado Ω con frontera poliédrica Γ con un vector exterior unitario normal $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)^{\mathrm{t}}$. Emplearemos la notación estándar para espacios de Lebesgue y Sobolev. En particular, $W^{s,p}(\Omega)\,(s \geq 0)$ representa a las funciones en $L^p(\Omega)\,(p \geq 1)$ cuyas derivadas, en sentido distribucional, hasta el orden s, están en $L^p(\Omega)$, y sus respectivas normas y seminormas son denotadas por $\|\cdot\|_{s,p,\Omega}$ y $|\cdot|_{s,p,\Omega}$, respectivamente. Como es habitual, en el caso $p = 2$, se escribirá $H^s(\Omega) := W^{s,2}(\Omega)$, $\|\cdot\|_{s,\Omega} := \|\cdot\|_{s,2,\Omega}$ y $|\cdot|_{s,\Omega} := |\cdot|_{s,p,\Omega}$.

El clásico espacio de funciones cuadrado integrables con media nula en Ω será denotado por $L^2_0(\Omega)$. Usaremos el subespacio cerrado de $H^1(\Omega)$ dado por

$$\widetilde{H}^1(\Omega) \;:=\; H^1(\Omega) \cap L^2_0(\Omega) \;=\left\{ \psi \in H^1(\Omega) \;: \qquad \int_\Omega \psi = 0 \right\}, \tag{2.1}$$

para el cual, gracias a la desigualdad generalizada de Friedrichs-Poincaré, existe $C_{\mathrm{FP}} > 0$ (dependiendo sólo de Ω y Γ), tal que

$$\|\psi\|_{1,\Omega} \;\leq\; C_{\mathrm{FP}}\, |\psi|_{1,\Omega} \qquad \forall\, \psi \in \widetilde{H}^1(\Omega)\,. \tag{2.2}$$

También definimos los siguientes espacios de Hilbert a valores vectoriales

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{H}(\mathrm{div}\,,\Omega) &:= \left\{ \mathbf{w} \in [L^2(\Omega)]^3 \;: \qquad \mathrm{div}\;\mathbf{w} \in L^2(\Omega) \right\},\\
\boldsymbol{H}_0(\mathrm{div}\,,\Omega) &:= \left\{ \mathbf{w} \in \boldsymbol{H}(\mathrm{div}\,,\Omega) \;: \qquad \mathbf{w}\cdot\mathbf{n} = 0 \quad \text{sobre} \quad \Gamma \right\},\\
\boldsymbol{H}_0(\mathrm{div}^{\,0},\Omega) &:= \left\{ \mathbf{w} \in \boldsymbol{H}_0(\mathrm{div}\,,\Omega) \;: \qquad \mathrm{div}\;\mathbf{w} = 0 \quad \text{en} \quad \Omega \right\}.
\end{aligned}$$

Finalmente, recordamos que la inclusión de Sobolev $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ se cumple para $1 \leq q \leq 6$ cuando $\Omega \subset \mathrm{R}^3$ (en el caso de dos dimensiones, es válido para $1 \leq q < \infty$). En particular, significa que existe una constante positiva $C_{Sob} > 0$, dependiendo sólo sobre el dominio, tal que

$$\|\psi\|_{0,q,\Omega} \;\leq\; C_{\mathrm{Sob}}\|\psi\|_{1,\Omega} \quad \text{para } q \in [1,6]. \tag{2.3}$$

Condiciones de frontera e hipótesis sobre los datos. Para completar el sistema (1.1), consideraremos una condición de no deslizamiento para la velocidad del fluido y que no hay flujo de microorganismos sobre la frontera, es decir,

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \qquad \text{sobre} \quad \Gamma \quad \text{y} \quad \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} \,=\, 0 \qquad \text{sobre} \quad \Gamma\,. \tag{2.4}$$

También suponemos que ningún microorganismo puede salir o entrar del dominio físico. Esto significa que la masa total de microorganismos es conocida, fijada y dada por una constante, concretamente, $\alpha > 0$, es decir,

$$\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \varphi = \alpha\,. \tag{2.5}$$

En cuanto a los datos que aparecen en (1.1), suponemos que la viscosidad μ, la constante γ, la constante de difusión k y la velocidad media de nadado ascendente de los microorganismos U son constantes positivas. Además, como en [4, 5, 17], asumimos que U es suficientemente pequeño de manera que

$$U \,<\, \frac{\kappa}{C_{\mathrm{FP}}^2}\,, \tag{2.6}$$

donde C_{FP} es la constante de Sobolev que aparece en la desigualdad de Friedrichs-Poincaré (2.2).

La norma $\|\cdot\|$, sin subíndices, se usará para denotar la norma natural de un elemento o de un operador en cualquier espacio producto. Eventualmente denotaremos por C a cualquier constante genérica y positiva que, a menos que se especifique, será independiente de cualquier parámetro de malla y de datos.

2.2. El modelo de flujos bioconvectivos y su forma débil

Para empezar, observe que después de desarrollar (1.1b), la ecuación de concentración celular toma la forma $-\kappa\Delta\varphi + \mathbf{u}\cdot\nabla\varphi + U\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_3} = 0$ en Ω. Por lo tanto, el hecho que una eventual solución φ satisfaciendo esta ecuación diferencial parcial sea única salvo una constante aditiva, nos motiva a definir la concentración auxiliar $\varphi_\alpha := \varphi - \alpha$, que acorde con la restricción de masa total (2.5) satisface

$$\int_\Omega \varphi_\alpha = 0. \tag{2.7}$$

Luego, reemplazando $\varphi = \varphi_\alpha + \alpha$ en (1.1) se tiene que

$$\begin{aligned} -\mu\Delta\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})\,\mathbf{u} + \nabla p = \boldsymbol{f}_\alpha - (1+\gamma\varphi_\alpha)\,\boldsymbol{g} \quad \text{en} \quad \Omega\,, \\ -\kappa\Delta\varphi_\alpha + \mathbf{u}\cdot\nabla\varphi_\alpha + U\frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial x_3} = 0 \quad \text{en} \quad \Omega\,, \end{aligned} \tag{2.8}$$

donde $\boldsymbol{f}_\alpha := \boldsymbol{f} - g\gamma\alpha\,\mathbf{i}_3$. A su vez, las condiciones de frontera (2.4) se reducen a

$$\mathbf{u} = \mathbf{0}\,, \qquad \text{y} \qquad \kappa\frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial\mathbf{n}} - n_3U\varphi_\alpha = n_3U\alpha \qquad \text{sobre} \quad \Gamma\,. \tag{2.9}$$

Para simplificar la notación, en adelante omitiremos los subíndices respecto a α y, sin que esto genere confusión, volvemos a renombrar $\boldsymbol{f} := \boldsymbol{f}_\alpha$ y $\varphi := \varphi_\alpha$. De acuerdo a esto, (2.7)-(2.9) son equivalentes al siguiente sistema de EDP's (con concentración auxiliar): Encontrar $\mathbf{u}$, p y φ tal que

$$\begin{aligned} -\mu\Delta\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})\,\mathbf{u} + \nabla p = \boldsymbol{f} - (1+\gamma\varphi)\,\boldsymbol{g}\,, \quad \text{y} \quad \operatorname{div}\mathbf{u} = 0 \quad \text{en} \quad \Omega, \\ -\kappa\Delta\varphi + \mathbf{u}\cdot\nabla\varphi + U\frac{\partial\varphi}{\partial x_3} = 0 \quad \text{en} \quad \Omega, \quad \text{con} \quad \int_\Omega \varphi = 0\,, \\ \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{y} \quad \kappa\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}} - n_3U\varphi = n_3U\alpha \quad \text{sobre} \quad \Gamma\,. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Es claro, que una eventual solución p para (2.10) tiene que pertencer a $L^2_0(\Omega)$ (ver [9], por ejemplo) y por la última condición de la segunda fila de (2.10) la concentración auxiliar φ tiene que pertenecer al espacio $\widetilde{H}^1(\Omega) = H^1(\Omega) \cap L^2_0(\Omega)$ (ver (2.1)). Tomando esto en cuenta, para derivar la formulación variacional estándar de (2.10), simplemente multiplicamos las ecuaciones en (2.10) por funciones test apropiadas $\mathbf{v} \in [H^1_0(\Omega)]^3$, $q \in L^2_0(\Omega)$ y $\psi \in \widetilde{H}^1(\Omega)$, integramos sobre el dominio, luego usamos fórmulas de integración por partes en los términos de difusión y tras incorporar las condiciones de frontera (2.9), obtenemos la siguiente formulación débil: Encontrar $(\mathbf{u}, p, \varphi) \in [H^1_0(\Omega)]^3 \times L^2_0(\Omega) \times \widetilde{H}^1(\Omega)$ tal que

$$\begin{aligned} \mathscr{A}^S(\mathbf{u},\mathbf{v}) \,+\, \mathscr{C}^S(\mathbf{u};\mathbf{u},\mathbf{v}) \,-\, \mathscr{B}^S(\mathbf{v},p) &= \mathscr{F}^S(\varphi;\mathbf{v}), \\ \mathscr{B}^S(\mathbf{u},q) &= 0\,, \\ \mathscr{A}^C(\varphi,\psi) \,+\, \mathscr{C}^C(\mathbf{u};\varphi,\psi) &= \mathscr{F}^C(\psi), \end{aligned} \tag{2.11}$$

para todo $(\mathbf{v}, q, \psi) \in [H^1_0(\Omega)]^3 \times L^2_0(\Omega) \times \widetilde{H}^1(\Omega)$. Donde las formas bilineales $\mathscr{A}^S(\cdot,\cdot) : [H^1_0(\Omega)]^3 \times [H^1_0(\Omega)]^3 \to \mathbb{R}$ y $\mathscr{A}^C(\,\cdot,\cdot) : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ están definidas por

$$\mathscr{A}^S(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \mu \int_\Omega \nabla\mathbf{u} : \nabla\mathbf{v} \quad \text{y} \quad \mathscr{A}^C(\varphi,\psi) = \kappa \int_\Omega \nabla\varphi \cdot \nabla\psi \,-\, U \int_\Omega \varphi \frac{\partial\psi}{\partial x_3}, \tag{2.12}$$

respectivamente, $\mathscr{C}^S : [H^1_0(\Omega)]^3 \times [H^1_0(\Omega)]^3 \times [H^1_0(\Omega)]^3 \to \mathbb{R}$ y $\mathscr{C}^C : [H^1_0(\Omega)]^3 \times H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ están dadas por

$$\mathscr{C}^S(\mathbf{w};\mathbf{u},\mathbf{v}) = \int_\Omega (\nabla\mathbf{u})\mathbf{w} \cdot \mathbf{v}\,, \quad \text{y} \quad \mathscr{C}^C(\mathbf{w};\varphi,\psi) = \int_\Omega (\mathbf{w} \cdot \nabla\varphi)\,\psi\,, \tag{2.13}$$

respectivamente, y la forma $\mathscr{B}^S : [H^1_0(\Omega)]^3 \times L^2_0(\Omega) \to \mathbb{R}$ es

$$\mathscr{B}^S(\mathbf{v},q) = \int_\Omega q \,\mathrm{div}\;\mathbf{v}\,. \tag{2.14}$$

A su vez, con respecto a las formas del lado derecho en (2.11), para una función dada $\phi \in \widetilde{H}^1(\Omega)$, la forma $\mathscr{F}^S(\phi;\,\cdot\,) \,:\, [H^1(\Omega)]^d \longrightarrow \mathbb{R}$ y la forma $\mathscr{F}^C : H^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ son los funcionales definidos por

$$\mathscr{F}^S(\phi;\mathbf{v}) = \int_\Omega \big(\boldsymbol{f} - (1+\gamma\phi)\boldsymbol{g}\big)\cdot\mathbf{v} \quad \text{y} \quad \mathscr{F}^C(\psi) \,=\, U\alpha\int_\Gamma n_3\psi\,. \tag{2.15}$$

El siguiente lema establece las propiedades principales de las formas (2.12)-(2.15).

Lema 2.2.1. *(a) Las formas $\mathscr{A}^S(\cdot,\cdot) : [H_0^1(\Omega)]^3 \times [H_0^1(\Omega)]^3 \to \mathbb{R}$ y $\mathscr{A}^C(\,\cdot,\cdot) : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ definidas en (2.12) son acotadas y coercivas.*

(b) La forma $\mathscr{B}^S : [H_0^1(\Omega)]^3 \times L_0^2(\Omega) \to \mathbb{R}$ definida en (2.14) es acotada y satisface la condición inf-sup

$$\sup_{\substack{\mathbf{v}\in[H_0^1(\Omega)]^d\\ \mathbf{v}\neq\mathbf{0}}} \frac{\mathscr{B}^S(\mathbf{v},q)}{\|\mathbf{v}\|_{1,\Omega}} \,\geq\, \beta\,\|q\|_{0,\Omega} \qquad \forall\, q \in L_0^2(\Omega)\,. \tag{2.16}$$

(c) $\mathscr{C}^S : [H_0^1(\Omega)]^3 \times [H_0^1(\Omega)]^3 \times [H_0^1(\Omega)]^3 \to \mathbb{R}$ y $\mathscr{C}^C : [H_0^1(\Omega)]^3 \times H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ (cf. (2.13)), las formas trilineales son acotadas. Más aún, $\mathscr{C}^S$ y $\mathscr{C}^C$ satisfacen la propiedad anti-simétrica

$$\mathscr{C}^S(\mathbf{w};\mathbf{u},\mathbf{v}) \,=\, -\mathscr{C}^S(\mathbf{w};\mathbf{v},\mathbf{u}) \quad y \quad \mathscr{C}^C(\mathbf{w};\varphi,\psi) \,=\, -\mathscr{C}^C(\mathbf{w};\psi,\varphi) \tag{2.17}$$

para todo $\mathbf{w} \in \boldsymbol{H}_0(\mathrm{div}^{\,0},\Omega)$, $\mathbf{u},\mathbf{v} \in [H^1(\Omega)]^d$ y $\varphi,\psi \in H^1(\Omega)$.

(d) Las formas $\mathscr{F}^S(\phi;\,\cdot\,) \,:\, [H^1(\Omega)]^d \longrightarrow \mathbb{R}$ (ϕ dada en $H^1(\Omega)$) y $\mathscr{F}^C : H^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ (cf. (2.15)) son acotadas.

Demostración. (a) Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$\left|\mathscr{A}^S(\mathbf{u},\mathbf{v})\right| \,\leq\, \mu\,\|\mathbf{u}\|_{1,\Omega}\,\|\mathbf{v}\|_{1,\Omega} \quad \text{y} \quad \left|\mathscr{A}^C(\varphi,\psi)\right| \,\leq\, (\kappa+U)\,\|\varphi\|_{1,\Omega}\,\|\psi\|_{1,\Omega}\,, \tag{2.18}$$

para todo $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in [H^1(\Omega)]^3$ y $\varphi, \psi \in H^1(\Omega)$. La elipticidad de $\mathscr{A}^S$ se desprende de la desigualdad de Poincaré en $[H_0^1(\Omega)]^3$. En efecto,

$$\mathscr{A}^S(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \,\geq\, \mu\, |\mathbf{v}|_{1,\Omega}^2 \,\geq\, \mu\, C_{\mathrm{FP}}^{-2} \|\mathbf{v}\|_{1,\Omega}^2 \quad \forall\, \mathbf{v} \in [H_0^1(\Omega)]^d. \tag{2.19}$$

En cuanto a la forma $\mathscr{A}^C$, esta es fácil de chequear por la desigualdad de Friedrichs-Poincaré (2.2) en $\widetilde{H}^1(\Omega)$, las desigualdades de Cauchy-Schwarz y de Young, obteniendo que

$$\mathscr{A}^C(\psi, \psi) \,=\, \kappa \|\nabla \psi\|_{0,\Omega}^2 - U \int_\Omega \psi\, \frac{\partial \psi}{\partial x_3} \geq\, \kappa C_{\mathrm{FP}}^{-2}\, \|\psi\|_{1,\Omega}^2 \,-\, \frac{1}{2} U \Big(\|\psi\|_{0,\Omega}^2 \,+\, \|\nabla \psi\|_{0,\Omega}^2 \Big)\,.$$

Por lo tanto, como $\|\psi\|_{1,\Omega}^2 = \|\psi\|_{0,\Omega}^2 + \|\nabla \psi\|_{0,\Omega}^2$ y gracias a la hipótesis (2.6), se sigue que $\mathscr{A}^C$ es $\widetilde{H}^1(\Omega)-$coerciva con constante $\kappa C_{\mathrm{FP}}^{-2} - \frac{1}{2} U > 0$. Más precisamente,

$$\mathscr{A}^C(\psi, \psi) \,\geq \Big(\kappa C_{\mathrm{FP}}^{-2} - \frac{1}{2} U \Big) \|\psi\|_{1,\Omega}^2 \quad \forall\, \psi \in \widetilde{H}^1(\Omega)\,. \tag{2.20}$$

(b) Es fácil ver que por las desigualdades de Cauchy-Schwarz y Young que

$$\Big| \mathscr{B}^S(q, \mathbf{v}) \Big| \,\leq\, \|q\|_{0.\Omega}\, \|\mathrm{div}\ \mathbf{v}\|_{0,\Omega} \,\leq\, C\, \|q\|_{0,\Omega}\, \|\mathbf{v}\|_{1,\Omega} \qquad \forall\, q \in L_0^2(\Omega),\, \forall\, \mathbf{v} \in [H^1(\Omega)]^3\,, \tag{2.21}$$

y entonces $\mathscr{B}^S$ es acotada. La condición inf-sup (2.16) es una propiedad bastante conocida que proviene del hecho de que el operador de divergencia es un isomorfismo desde $\boldsymbol{X}$ en $L_0^2(\Omega)$ (y por lo tanto, es sobreyectivo), donde $\boldsymbol{X}$ representa el núcleo de $\mathscr{B}^S$, que es,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{X} \;&=\Big\{ \mathbf{v} \in [H_0^1(\Omega)]^d : \quad \mathscr{B}^S(\mathbf{v}, q) \,=\, 0\,,\ \forall q \in L_0^2(\Omega) \Big\} \\ &= \Big\{ \mathbf{v} \in [H_0^1(\Omega)]^d : \quad \mathrm{div}\ \mathbf{v} \,=\, 0 \Big\}\,. \end{aligned} \tag{2.22}$$

Esto puede consultarse en [25, Corolario I.2.4] y omitimos mayores detalles.

(c) Por las desigualdades de Hölder y Sobolev (ver (2.3)), se deduce que

$$\left|\mathscr{C}^S(\mathbf{w};\mathbf{u},\mathbf{v})\right| \leq \|\mathbf{w}\|_{0,4,\Omega}\|\nabla\mathbf{u}\|_{0,\Omega}\|\mathbf{v}\|_{0,4,\Omega} \leq C_{\text{Sob}}\,\|\mathbf{w}\|_{1,\Omega}\,\|\mathbf{u}\|_{1,\Omega}\,\|\mathbf{v}\|_{1,\Omega}\,, \tag{2.23}$$

$$\left|\mathscr{C}^C(\mathbf{w};\varphi,\psi)\right| \;\leq\; \|\mathbf{w}\|_{0,q,\Omega}\,\|\nabla\varphi\|_{0,\Omega}\,\|\psi\|_{0,q',\Omega} \leq C_{\text{Sob}}\,\|\mathbf{w}\|_{1,\Omega}\,\|\varphi\|_{1,\Omega}\,\|\psi\|_{1,\Omega}\,, \tag{2.24}$$

para todo $\mathbf{w},\mathbf{u},\mathbf{v} \in [H^1(\Omega)]^d$ y $\varphi,\psi \in H^1(\Omega)$. Por otro lado, la propiedad anti-simétrica (2.17), la cual demostramos tras usar una integración por partes y el hecho que $\mathbf{w} \in \boldsymbol{H}_0(\mathrm{div}^{\,0},\Omega)$.

(d) Sea $\phi \in \widetilde{H}^1(\Omega)$ dado. Entonces, usando las desigualdades de Cauchy-Schwarz, triangular y Hölder obtenemos que

$$\left|\mathscr{F}^S(\phi;\mathbf{v})\right| \leq \Big\{\,\|\boldsymbol{f}\|_{0,\Omega} \,+\, \big(|\Omega|^{1/2} + \gamma\|\phi\|_{0,\Omega}\big)\|\boldsymbol{g}\|_{\infty,\Omega}\Big\}\|\mathbf{v}\|_{1,\Omega}\,. \tag{2.25}$$

A su vez, para el funcional $\mathscr{F}^C$, se sigue por la desigualdad de Cauchy-Schwarz y de trazas que

$$\left|\mathscr{F}^C(\psi)\right| \leq U\alpha|\Gamma|^{1/2}\|\psi\|_{1,\Omega}\,. \tag{2.26}$$

□

Despúes de lo demostrado en el Lema 2.2.1, estamos en posición de dar inicio al buen planteamiento del problema.

2.3. Buen planteamiento de la formulación débil

Notar que gracias a la condición inf-sup (2.16) que satisface la forma bilineal $\mathscr{B}^S(\cdot,\cdot)$, y establecida en el Lema 2.2.1, se sigue que el problema (2.11) es equivalente al siguiente problema reducido al núcleo $\boldsymbol{X}$ (definido en (2.22)): Encontrar $(\mathbf{u},\varphi) \in$

$\boldsymbol{X} \times \widetilde{H}^1(\Omega)$ tal que

$$\begin{aligned} \mathscr{A}^S(\mathbf{u},\mathbf{v}) + \mathscr{C}^S(\mathbf{u};\mathbf{u},\mathbf{v}) &= \mathscr{F}^S(\varphi;\mathbf{v}), \\ \mathscr{A}^C(\varphi,\psi) + \mathscr{C}^C(\mathbf{u};\varphi,\psi) &= \mathscr{F}^C(\psi)\,, \end{aligned} \tag{2.27}$$

para todo $(\mathbf{v},\psi) \in \boldsymbol{X} \times \widetilde{H}^1(\Omega)$. Para abordar el análisis de solubilidad de este problema, comenzamos por derivar las estimaciones a priori de las soluciones (Sección 2.3.1) con el fin de emplear después un enfoque de punto fijo adecuado que nos permita establecer resultados de existencia y unicidad (Sección 2.3.2).

2.3.1. Estimaciones a priori y enfoque de punto fijo

Teorema 2.3.1. *Asumiendo que* (2.6) *se satisface, entonces cualquier solución* $(\mathbf{u},\varphi)$ *de* (2.27) *cumplen las estimaciones a priori*

$$\|\mathbf{u}\|_{1,\Omega} \le C_1(\mu,\alpha,\kappa,U,\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}) \qquad y \qquad \|\varphi\|_{1,\Omega} \le C_2(\alpha,\kappa,U)\,, \tag{2.28}$$

donde

$$C_1(\mu,\alpha,\kappa,U,\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}) = \mu^{-1}C_{\mathrm{FP}}^2\Big\{\|\boldsymbol{f}\|_{0,\Omega} + \Big(|\Omega|^{1/2} + \gamma C_2(\alpha,\kappa,U)\Big)\|\boldsymbol{g}\|_{\infty,\Omega}\Big\}\,, \tag{2.29}$$

y

$$C_2(\alpha,\kappa,U) = \Big(\kappa C_{\mathrm{FP}}^{-2} - \frac{1}{2}U\Big)^{-1} U\alpha|\Gamma|^{1/2}. \tag{2.30}$$

Demostración. Basta ver que si $(\mathbf{u},\varphi)$ es una solución de (2.27) entonces al tomar $\mathbf{v} = \mathbf{u}$ y $\psi = \varphi$ allí, luego usando que $\mathscr{C}^S(\mathbf{u};\mathbf{u},\mathbf{u}) = 0$ y $\mathscr{C}^C(\mathbf{u};\varphi,\varphi) = 0$ según la propiedad (2.17) de las formas trilineales $\mathscr{C}^S$ y $\mathscr{C}^C$, encontramos que

$$\mathscr{A}^S(\varphi;\mathbf{u},\mathbf{u}) = \mathscr{F}^S(\varphi;\mathbf{u}) \quad \text{y} \quad \mathscr{A}^C(\varphi,\varphi) = \mathscr{F}^C(\varphi)\,. \tag{2.31}$$

Ahora, usando la elipticidad de $\mathscr{A}^C$ (cf. (2.20)) y la cota de $\mathscr{F}^C$ (cf. (2.26)) en la segunda ecuación de (2.31), obtenemos que

$$\Big(\kappa C_{\mathrm{FP}}^{-2} - \frac{1}{2}U\Big)\|\varphi\|_{1,\Omega}^2 \,\leq\, |\mathscr{F}^C(\varphi)| \,\leq\, U\alpha|\Gamma|^{1/2}\|\varphi\|_{1,\Omega}\,,$$

y tras simplificar y usar la suposición (2.6), tenemos

$$\|\varphi\|_{1,\Omega} \,\leq\, U\alpha|\Gamma|^{1/2}\Big(\kappa C_{\mathrm{FP}}^{-2} - \frac{1}{2}U\Big)^{-1},$$

que da la estimación deseada en (2.28) para φ. A su vez, utilizando ahora la coercividad de la forma bilineal $\mathscr{A}^S$ así como la cota para $\mathscr{F}^S$ (ver (2.19) y (2.25), respectivamente), encontramos a partir de la primera ecuación de (2.31) que

$$\mu\, C_{\mathrm{FP}}^{-2}\|\mathbf{u}\|_{1,\Omega}^2 \,\leq\, \Big|\mathscr{F}^S(\varphi;\mathbf{u})\Big| \leq \Big\{\, \|\boldsymbol{f}\|_{0,\Omega} \,+\, \big(|\Omega|^{1/2} + \gamma\|\varphi\|_{0,\Omega}\big)\|\boldsymbol{g}\|_{\infty,\Omega}\Big\}\|\mathbf{u}\|_{1,\Omega}\,.$$

Por lo tanto, la estimación deseada para $\mathbf{u}$ simplemente se obtiene después de simplificar y utilizar la cota del estimado a priori ya obtenido para φ.

$\square$

A continuación, consideraremos una versión linealizada y desacoplada del problema (2.27) definida como: Dado $(\mathbf{w},\phi) \in \boldsymbol{X} \times \widetilde{H}^1(\Omega)$, encontrar $(\mathbf{u},\varphi) \in \boldsymbol{X} \times \widetilde{H}^1(\Omega)$ tal que

$$\begin{aligned} \mathscr{A}^S(\mathbf{u},\mathbf{v}) \,+\, \mathscr{C}^S(\mathbf{w};\mathbf{u},\mathbf{v}) \;&=\; \mathscr{F}^S(\phi;\mathbf{v}), \\ \mathscr{A}^C(\varphi,\psi) \,+\, \mathscr{C}^C(\mathbf{w};\varphi,\psi) \;&=\; \mathscr{F}^C(\psi)\,, \end{aligned} \tag{2.32}$$

o equivalentemente,

$$\mathscr{A}(\mathbf{w};(\mathbf{u},\varphi),(\mathbf{v},\psi)) \,=\, \mathscr{F}(\phi;(\mathbf{v},\psi)) \quad \forall\,(\mathbf{v},\psi) \in\, \boldsymbol{X} \,\times\, \widetilde{H}^1(\Omega). \tag{2.33}$$

donde,

$$\mathscr{A}(\mathbf{w};(\mathbf{u},\varphi),(\mathbf{v},\psi)) \,=\, \mathscr{A}^S(\mathbf{u},\mathbf{v}) + \mathscr{C}^S(\mathbf{w};\mathbf{u},\mathbf{v}) + \mathscr{A}^C(\varphi,\psi) + \mathscr{C}^C(\mathbf{w};\varphi,\psi) \quad (2.34)$$

y

$$\mathscr{F}(\phi;(\mathbf{v},\psi) \,=\, \mathscr{F}^S(\phi;\mathbf{v}) \,+\, \mathscr{F}^C(\psi)\,, \quad (2.35)$$

para todo $(\mathbf{v},\psi) \in \boldsymbol{X} \times \widetilde{H}^1(\Omega)$. En segundo lugar, consideremos el operador solución asociado al problema (2.33),

$$\begin{aligned} \mathscr{L} \,:\, \boldsymbol{X} \times \widetilde{H}^1(\Omega) \quad &\longrightarrow \quad \boldsymbol{X} \times \widetilde{H}^1(\Omega) \\ (\mathbf{w},\phi) \quad &\longmapsto \quad (\mathbf{u},\varphi) := \mathscr{L}(\mathbf{w},\phi)\,, \end{aligned} \quad (2.36)$$

donde, $(\mathbf{u},\varphi)$ corresponde a la solución del problema (2.33) (o, equivalentemente, al problema (2.32)). Se deduce entonces que cualquier solución del problema (2.27) es un punto fijo del operador $\mathscr{L}$. En otras palabras, tenemos la siguiente equivalencia crucial

$$(\mathbf{u},\varphi) \text{ es solución a } (2.27) \qquad \Longleftrightarrow \qquad (\mathbf{u},\varphi) = \mathscr{L}(\mathbf{u},\varphi)\,. \quad (2.37)$$

Ciertamente, primero tenemos que comprobar que el operador $\mathscr{L}$ efectivamente está bien definido. Ese es el objetivo del siguiente resultado.

Lema 2.3.2. *Bajo las hipótesis del Teorema 2.3.1, el operador $\mathscr{L}$ está bien definido.*

Demostración. Sea $(\mathbf{w},\phi)$ dado en $\boldsymbol{X} \times \widetilde{H}^1(\Omega)$. Entonces, por definición de $\mathscr{A}(\mathbf{w};\cdot,\cdot)$ (cf. (2.34)), la desigualdad triangular, las cotas (2.18) de las formas $\mathscr{A}^S$ y $\mathscr{A}^C$, y los estimados (2.23) y (2.24) para las formas trilineales $\mathscr{C}^S(\mathbf{w};\cdot,\cdot)$ y $\mathscr{C}^C(\mathbf{w};\cdot,\cdot)$, respectivamente, y la desigualdad de Cauchy-Schwarz, encontramos que

$$\begin{aligned}
\big|\mathscr{A}(\mathbf{w};(\mathbf{u},\varphi),(\mathbf{v},\psi))\big| &\leq \big|\mathscr{A}^S(\mathbf{u},\mathbf{v})\big| \,+\, \big|\mathscr{C}^S(\mathbf{w};\mathbf{u},\mathbf{v})\big| \,+\, \big|\mathscr{A}^C(\varphi,\psi)\big| \,+\, \big|\mathscr{C}^C(\mathbf{w};\varphi,\psi)\big| \\
&\leq \mu\|\mathbf{u}\|_{1,\Omega}\|\mathbf{v}\|_{1,\Omega} \,+\, C_{\mathrm{Sob}}\|\mathbf{w}\|_{1,\Omega}\|\mathbf{u}\|_{1,\Omega}\|\mathbf{v}\|_{1,\Omega} \,+\, (\kappa+U)\|\varphi\|_{1,\Omega}\|\psi\|_{1,\Omega} \\
&\qquad\qquad + C_{\mathrm{Sob}}\|\mathbf{w}\|_{1,\Omega}\|\varphi\|_{1,\Omega}\|\psi\|_{1,\Omega} \\
&\leq 2\,\text{máx}\{\,\mu,\kappa+U,C_{\mathrm{Sob}}\|\mathbf{w}\|_{1,\Omega}\,\}\Big(\|\mathbf{u}\|_{1,\Omega}\|\mathbf{v}\|_{1,\Omega} \,+\|\varphi\|_{1,\Omega}\|\psi\|_{1,\Omega}\Big) \\
&\leq \|\mathscr{A}\|\,\|(\mathbf{u},\varphi)\|\,\|(\mathbf{v},\psi)\|\,,
\end{aligned}$$

y entonces $\mathscr{A}$ es acotada en $\boldsymbol{X}\times\widetilde{H}^1(\Omega)$ con constante $\|\mathscr{A}\| := 2\,\text{máx}\{\,\mu,\kappa{+}U,C_{\mathrm{Sob}}\|\mathbf{w}\|_{1,\Omega}\,\}$. A su vez, por la elipticidad de las formas $\mathscr{A}^S$ y $\mathscr{A}^C$ (cf. (2.19) y (2.20), respectivamente), y propiedades de anti-simetría (2.17) de las formas $\mathscr{C}^S$ y $\mathscr{C}^C$, se deduce que

$$\mathscr{A}(\mathbf{w};(\mathbf{v},\psi),(\mathbf{v},\psi)) \,\geq\, \mu C_{\mathrm{FP}}^{-2}\,\|\mathbf{v}\|_{1,\Omega}^2 \,+\, \Big(\kappa C_{\mathrm{FP}}^{-2} - \frac{1}{2}U\Big)\|\psi\|_{1,\Omega}^2 \,\geq\, \alpha_{\mathscr{A}}\,\|(\mathbf{v},\psi)\|^2\,, \tag{2.38}$$

y por tanto, la forma bilineal $\mathscr{A}$ es coerciva sobre $\boldsymbol{X}\times\widetilde{H}^1(\Omega)$ con constante

$$\alpha_{\mathscr{A}} = \text{mín}\Big\{\,\mu C_{\mathrm{FP}}^{-2},\,\kappa C_{\mathrm{FP}}^{-2} - \frac{1}{2}U\,\Big\} \,>0\,, \tag{2.39}$$

la cual es positiva gracias a la hipótesis (2.6). Finalmente, tenemos que $\mathscr{F}\in\big(\boldsymbol{X}\times\widetilde{H}^1(\Omega)\big)'$. Efectivamente, utilizando la definición de $\mathscr{F}(\phi;\cdot)$ (cf. (2.35)), los acotamientos (2.25) y (2.26) para los funcionales $\mathscr{F}^S(\phi;\cdot)$ y $\mathscr{F}^C$, respectivamente, deducimos que

$$\begin{aligned}
&\big|\mathscr{F}(\phi;(\mathbf{v},\psi))\big| \leq \big|\mathscr{F}^S(\phi;\mathbf{v})\big| \,+\, \big|\mathscr{F}^C(\psi)\big| \\
&\quad\leq \Big\{\,\|\boldsymbol{f}\|_{0,\Omega} \,+\, \big(|\Omega|^{1/2}+\gamma\|\phi\|_{0,\Omega}\big)\|\boldsymbol{g}\|_{\infty,\Omega}\Big\}\|\mathbf{v}\|_{1,\Omega} \,+\, U\alpha|\Gamma|^{1/2}\|\psi\|_{1,\Omega} \,\leq\, \|\mathscr{F}\|\,\|(\mathbf{v},\psi)\|\,,
\end{aligned}$$

donde $\|\mathscr{F}\| = \sqrt{2}\,\text{máx}\big\{\|\boldsymbol{f}\|_{0,\Omega} \,+\, \big(|\Omega|^{1/2}+\gamma\|\phi\|_{0,\Omega}\big)\|\boldsymbol{g}\|_{\infty,\Omega},\,U\alpha|\Gamma|^{1/2}\big\}$. De esta manera, de acuerdo al Lema de Lax-Milgram (ver [24, Lemma 1.4], por ejemplo), para cualquier $(\mathbf{w},\phi)\in\boldsymbol{X}\times\widetilde{H}^1(\Omega)$, existe una única $(\mathbf{u},\varphi)\in\boldsymbol{X}\times\widetilde{H}^1(\Omega)$ solución a (2.32) o, equivalentemente, tal que $\mathscr{L}(\mathbf{w},\phi) = (\mathbf{u},\varphi)$. Esto nos muestra que el operador $\mathscr{L}$ está bien definido.

$\square$

2.3.2. Existencia y unicidad de la solución

En esta sección proporcionamos el resultado de existencia de soluciones al problema (2.27) que, según (2.37), es equivalente a probar que el operador $\mathscr{L}$ tiene un punto fijo. Para ello, verificaremos las hipótesis del teorema del punto fijo de Schauder, el cual recordaremos como sigue (ver, e.g. [7, Thm. 9.12-1(b)]).

Teorema 2.3.3. *Sea B un subconjunto cerrado y convexo de un espacio de Banach X y sea $L : B \longrightarrow B$ un operador continuo tal que $\overline{L(B)}$ es compacto. Entonces L tiene al menos un punto fijo.*

Para empezar, definimos el subconjunto cerrado y convexo de $\boldsymbol{X} \times \widetilde{H}^1(\Omega)$ dado por

$$B = \Big\{(\mathbf{w},\phi) \in \boldsymbol{X} \times \widetilde{H}^1(\Omega): \quad \|\mathbf{w}\|_{1,\Omega} \leq C_1(\mu,\alpha,\kappa,U,\boldsymbol{f},\boldsymbol{g})\,, \quad \|\phi\|_{1,\Omega} \leq C_2(\alpha,\kappa,U)\Big\}, \tag{2.40}$$

donde $C_1(\mu,\alpha,\kappa,U,\boldsymbol{f},\boldsymbol{g})$ y $C_2(\alpha,\kappa,U)$ están definidas por (2.29) y (2.30), respectivamente. Observe que el Lema 2.3.2 establece que para cualquier $(\mathbf{w},\phi) \in B$ existe un único $(\mathbf{u},\varphi) \in \boldsymbol{X} \times \widetilde{H}^1(\Omega)$ satisfaciendo $\mathscr{L}(\mathbf{w},\phi) = (\mathbf{u},\varphi)$. Más aún veremos que el operador $\mathscr{L}$ en realidad mapea la bola B en sí misma. En efecto, según la definición de $\mathscr{L}$ (ver (2.32)-(2.33)), si $\mathscr{L}(\mathbf{w},\phi) = (\mathbf{u},\varphi)$ es porque

$$\begin{aligned} \mathscr{A}^S(\mathbf{u},\mathbf{v}) + \mathscr{C}^S(\mathbf{w};\mathbf{u},\mathbf{v}) &= \mathscr{F}^S(\phi;\mathbf{v}), \\ \mathscr{A}^C(\varphi,\psi) + \mathscr{C}^C(\mathbf{w};\varphi,\psi) &= \mathscr{F}^C(\psi)\,. \end{aligned} \tag{2.41}$$

En consecuencia, tomando $\mathbf{v} = \mathbf{u}$ en la primera ecuación de (2.41), procediendo similarmente como en Teorema 2.3.1 y usando que $\|\phi\|_{1,\Omega} \leq C_2(\alpha,\kappa,U)$ encontramos que

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}\|_{1,\Omega} &\leq \mu^{-1}\, C_{\mathrm{FP}}^2 \Big\{ \|\boldsymbol{f}\|_{0,\Omega} + \big(|\Omega|^{1/2} + \gamma\,\|\phi\|_{0,\Omega}\big)\|\boldsymbol{g}\|_{\infty,\Omega}\Big\} \\ &\leq \mu^{-1}\, C_{\mathrm{FP}}^2 \Big\{ \|\boldsymbol{f}\|_{0,\Omega} + \big(|\Omega|^{1/2} + \gamma\, C_2(\alpha,\kappa,U)\big)\|\boldsymbol{g}\|_{\infty,\Omega}\Big\} \,=\, C_1(\mu,\alpha,\kappa,U,\boldsymbol{f},\boldsymbol{g})\,. \end{aligned} \tag{2.42}$$

A su vez, tomando $\psi = \varphi$ en la segunda ecuación de (2.41) y procediendo nuevamente tal como en el Teorema 2.3.1, deducimos inmediatamente que

$$\|\varphi\|_{1,\Omega} \,\leq\, U\alpha|\Gamma|^{1/2}\Big(\kappa\, C_{\mathrm{FP}}^{-2} - \frac{1}{2}U\Big)^{-1} \,=\, C_2(\alpha,\kappa,U)\,.$$

Como consecuencia, $(\mathbf{u},\varphi) = \mathscr{L}(\mathbf{w},\phi) \in B$ y por lo tanto

$$\mathscr{L}(B) \subseteq B\,. \tag{2.43}$$

Ahora, veremos que el operador $\mathscr{L}$ es localmente Lipschitz continuo en $\boldsymbol{X}\times\widetilde{H}^1(\Omega)$. Más precisamente, mostraremos que para $(\mathbf{w},\phi)\,,\,(\widetilde{\mathbf{w}},\widetilde{\phi}) \in B$, existe una constante $C_{\mathrm{LIP}} > 0$, tal que

$$\|\mathscr{L}(\mathbf{w},\phi) - \mathscr{L}(\widetilde{\mathbf{w}},\widetilde{\phi})\| \,\leq C_{\mathrm{Lip}}\,\|(\mathbf{w},\phi) \,-\, (\widetilde{\mathbf{w}},\widetilde{\phi})\|\,. \tag{2.44}$$

Para empezar, se tiene que para cualquier $(\mathbf{w},\phi)\,,(\widetilde{\mathbf{w}},\widetilde{\phi}) \in B$, el Lema 2.3.2 garantiza la existencia de $(\mathbf{u},\varphi) = \mathscr{L}(\mathbf{w},\phi)$ y $(\widetilde{\mathbf{u}},\widetilde{\varphi}) = \mathscr{L}(\widetilde{\mathbf{w}},\widetilde{\phi})$ en $\boldsymbol{X}\times\widetilde{H}^1(\Omega)$ cumpliendo

$$\mathscr{A}(\mathbf{w};(\mathbf{u},\varphi),(\mathbf{v},\psi)) \,=\, \mathscr{F}(\phi;(\mathbf{v},\psi)) \quad \forall\,(\mathbf{v},\psi) \in \boldsymbol{X}\times\widetilde{H}^1(\Omega), \tag{2.45}$$

$$\mathscr{A}(\widetilde{\mathbf{w}};(\widetilde{\mathbf{u}},\widetilde{\varphi}),(\mathbf{v},\psi)) \,=\, \mathscr{F}(\widetilde{\phi};(\mathbf{v},\psi)) \quad \forall\,(\mathbf{v},\psi) \in \boldsymbol{X}\times\widetilde{H}^1(\Omega). \tag{2.46}$$

Usando la elipticidad de la forma bilineal $\mathscr{A}(\mathbf{w};\cdot,\cdot)$ (cf. (2.38), su linealidad y la relación (2.45) con $\mathbf{v} = \mathbf{u} - \widetilde{\mathbf{u}}$ y $\psi = \varphi - \widetilde{\varphi}$, encontramos

$$\begin{aligned}
\alpha_{\mathscr{A}} \, \|\mathscr{L}(\mathbf{w}, \phi) - \mathscr{L}(\widetilde{\mathbf{w}}, \widetilde{\phi})\|^2 &= \alpha_{\mathscr{A}} \, \|(\mathbf{u} - \widetilde{\mathbf{u}}, \varphi - \widetilde{\varphi})\|^2 \\
&\leq \mathscr{A}(\mathbf{w}; (\mathbf{u} - \widetilde{\mathbf{u}}, \varphi - \widetilde{\varphi}), (\mathbf{u} - \widetilde{\mathbf{u}}, \varphi - \widetilde{\varphi})) \\
&= \mathscr{A}(\mathbf{w}; (\mathbf{u}, \varphi), (\mathbf{u} - \widetilde{\mathbf{u}}, \varphi - \widetilde{\varphi})) - \mathscr{A}(\mathbf{w}; (\widetilde{\mathbf{u}}, \widetilde{\varphi}), (\mathbf{u} - \widetilde{\mathbf{u}}, \varphi - \widetilde{\varphi})) \\
&= \mathscr{F}(\phi; (\mathbf{u} - \widetilde{\mathbf{u}}, \varphi - \widetilde{\varphi})) - \mathscr{A}(\mathbf{w}; (\widetilde{\mathbf{u}}, \widetilde{\varphi}), (\mathbf{u} - \widetilde{\mathbf{u}}, \varphi - \widetilde{\varphi}))\,.
\end{aligned} \tag{2.47}$$

A continuación, sumando y restando $\mathscr{F}(\widetilde{\phi}; (\mathbf{u} - \widetilde{\mathbf{u}}, \varphi - \widetilde{\varphi}))$ en (2.47), combinando términos, usando el hecho que $\mathscr{F}(\widetilde{\phi}; (\mathbf{u} - \widetilde{\mathbf{u}}, \varphi - \widetilde{\varphi})) = \mathscr{A}(\widetilde{\mathbf{w}}; (\widetilde{\mathbf{u}}, \widetilde{\varphi}), (\mathbf{u} - \widetilde{\mathbf{u}}, \varphi - \widetilde{\varphi})$ (según (2.46)), y luego la definición de $\mathscr{F}$ y $\mathscr{A}$ y despúes simplificando, deducimos que

$$\begin{aligned}
\alpha_{\mathscr{A}} \, &\|\mathscr{L}(\mathbf{w}, \phi) - \mathscr{L}(\widetilde{\mathbf{w}}, \widetilde{\phi})\|^2 = \alpha_{\mathscr{A}} \, \|(\mathbf{u} - \widetilde{\mathbf{u}}, \varphi - \widetilde{\varphi})\|^2 \\
&\leq \mathscr{F}(\phi; (\mathbf{u} - \widetilde{\mathbf{u}}, \varphi - \widetilde{\varphi}) - \mathscr{F}(\widetilde{\phi}; (\mathbf{u} - \widetilde{\mathbf{u}}, \varphi - \widetilde{\varphi})) \\
&\quad + \mathscr{A}(\widetilde{\mathbf{w}}; (\widetilde{\mathbf{u}}, \widetilde{\varphi}), (\mathbf{u} - \widetilde{\mathbf{u}}, \varphi - \widetilde{\varphi})) + \mathscr{A}(\mathbf{w}; (\widetilde{\mathbf{u}}, \widetilde{\varphi}), (\mathbf{u} - \widetilde{\mathbf{u}}, \varphi - \widetilde{\varphi})) \\
&= \mathscr{F}^S(\phi; \mathbf{u} - \widetilde{\mathbf{u}}) - \mathscr{F}^S(\widetilde{\phi}; \mathbf{u} - \widetilde{\mathbf{u}}) + \mathscr{C}^S(\widetilde{\mathbf{w}} - \mathbf{w}; \widetilde{\mathbf{u}}, \mathbf{u} - \widetilde{\mathbf{u}}) + \mathscr{C}^C(\widetilde{\mathbf{w}} - \mathbf{w}; \widetilde{\varphi}, \varphi - \widetilde{\varphi})\,.
\end{aligned} \tag{2.48}$$

Pero, según la definición de $\mathscr{F}^S$ (cf. (2.15)), tenemos a partir de la desigualdad de Hölder que

$$\mathscr{F}^S(\phi; \mathbf{u} - \widetilde{\mathbf{u}}) - \mathscr{F}^S(\widetilde{\phi}; \mathbf{u} - \widetilde{\mathbf{u}}) = \gamma \int_\Omega (\widetilde{\phi} - \phi) \boldsymbol{g} \cdot (\mathbf{u} - \widetilde{\mathbf{u}}) \leq \gamma \|\boldsymbol{g}\|_{\infty,\Omega} \|\widetilde{\phi} - \phi\|_{0,\Omega} \|\mathbf{u} - \widetilde{\mathbf{u}}\|_{0,\Omega}$$

y utilizando esta estimación junto con (2.23) y (2.24) en (2.48) se deduce que

$$\begin{aligned}\alpha_{\mathscr{A}}\,\|\mathscr{L}(\mathbf{w},\phi)-\mathscr{L}(\widetilde{\mathbf{w}},\widetilde{\phi})\|^2 &= \alpha_{\mathscr{A}}\,\|(\mathbf{u}-\widetilde{\mathbf{u}},\varphi-\widetilde{\varphi})\|^2\\ &\le \Big(\gamma\|\boldsymbol{g}\|_{\infty,\Omega}\|\widetilde{\phi}-\phi\|_{0,\Omega}+\|\widetilde{\mathbf{w}}-\mathbf{w}\|_{0,4,\Omega}\|\nabla\widetilde{\mathbf{u}}\|_{0,\Omega}+\|\widetilde{\mathbf{w}}-\mathbf{w}\|_{0,4,\Omega}\|\nabla\widetilde{\varphi}\|_{0,\Omega}\Big)\\ &\qquad\times\|(\mathbf{u}-\widetilde{\mathbf{u}},\varphi-\widetilde{\varphi})\|\,.\end{aligned} \tag{2.49}$$

Luego, simplificando deducimos que

$$\|\mathscr{L}(\mathbf{w},\phi)-\mathscr{L}(\widetilde{\mathbf{w}},\widetilde{\phi})\|\le\alpha_{\mathscr{A}}^{-1}\Big(\gamma\|\boldsymbol{g}\|_{\infty,\Omega}+\|\nabla\widetilde{\mathbf{u}}\|_{0,\Omega}+\|\nabla\widetilde{\varphi}\|_{0,\Omega}\Big)\|(\mathbf{w}-\widetilde{\mathbf{w}},\phi-\widetilde{\phi})\|\,. \tag{2.50}$$

La propiedad de Lipschitz continuidad (2.44) del operador $\mathscr{L}$ entonces se deduce utilizando el hecho de que $(\widetilde{\mathbf{u}},\widetilde{\varphi})\in B$ (según (2.43)) y por lo tanto se cumple que $\|\nabla\widetilde{\mathbf{u}}\|_{0,\Omega}\le\|\widetilde{\mathbf{u}}\|_{1,\Omega}\le C_1(\mu,\alpha,\kappa,U,\boldsymbol{f},\boldsymbol{g})$ y $\|\nabla\widetilde{\varphi}\|_{0,\Omega}\le\|\widetilde{\varphi}\|_{1,\Omega}\le C_2(\alpha,\kappa,U)$. La constante de continuidad de Lipschitz resultando esta definida entonces como

$$C_{\mathrm{Lip}}\;=\;\alpha_{\mathscr{A}}^{-1}\Big(\gamma\|\boldsymbol{g}\|_{\infty,\Omega}+C_1(\mu,\alpha,\kappa,U,\boldsymbol{f},\boldsymbol{g})+C_2(\alpha,\kappa,U)\Big)\,. \tag{2.51}$$

En este punto estamos en condiciones de sintetizar y establecer las principales propiedades del operador $\mathscr{L}$ (cf. (2.36)).

Teorema 2.3.4. *Bajo las hipótesis del Teorema 2.3.1, sea* $\mathscr{L}:\boldsymbol{X}\times\widetilde{H}^1(\Omega)$ *el operador definido por* (2.36) *y sea* B *la bola en* $\boldsymbol{X}\times\widetilde{H}^1(\Omega)$ *dada por* (2.40)*, entonces* $\mathscr{L}(B)\subseteq B$*,* $\mathscr{L}$ *es localmente Lipschitz continuo y, además,* $\overline{\mathscr{L}(B)}$ *es compacta.*

Demostración. Sólo queda por demostrar que $\overline{\mathscr{L}(B)}$ es compacta. En efecto, cualquier sucesión $\{(\mathbf{w}_k,\phi_k)\}_{k\ge1}$ en B es claramente acotada en $\boldsymbol{X}\times\widetilde{H}^1(\Omega)$ y así podemos extraer de ella una sub-sucesión $\{(\mathbf{w}_k^{(1)},\phi_k^{(1)})\}_{k\ge1}$ débilmente convergente $\boldsymbol{X}\times\widetilde{H}^1(\Omega)$. Es decir, existe un único $(\mathbf{w},\phi)\in\boldsymbol{X}\times\widetilde{H}^1(\Omega)$ tal que $(\mathbf{w}_k^{(1)},\phi_k^{(1)})\rightharpoonup(\mathbf{w},\phi)$ cuando

$k \to \infty$. De este modo, si denotamos

$$(\mathbf{u}_k^{(1)}, \varphi_k^{(1)}) := \mathscr{L}(\mathbf{w}_k^{(1)}, \phi_k^{(1)}) \quad \text{y} \quad (\mathbf{u}, \phi) := \mathscr{L}(\mathbf{w}, \phi)\,,$$

y procediendo exactamente como en (2.47)-(2.49) con $(\mathbf{w}_k^{(1)}, \phi_k^{(1)})$ y $(\mathbf{w}, \phi)$ en lugar de $(\mathbf{w}, \phi)$ y $(\widetilde{\mathbf{w}}, \widetilde{\phi})$, respectivamente, y $(\mathbf{u}_k^{(1)}, \varphi_k^{(1)})$ y $(\mathbf{u}, \varphi)$ en lugar de $(\mathbf{u}, \varphi)$ y $(\widetilde{\mathbf{u}}, \widetilde{\varphi})$, deducimos que

$$\begin{aligned}
&\alpha_{\mathscr{A}}\, \|\mathscr{L}(\mathbf{w}_k^{(1)}, \phi_k^{(1)}) - \mathscr{L}(\mathbf{w}, \phi)\|^2 = \alpha_{\mathscr{A}}\, \|(\mathbf{u}_k^{(1)} - \mathbf{u}, \varphi_k^{(1)} - \varphi)\|^2 \\
&\quad \le \Big(\gamma \|\boldsymbol{g}\|_{\infty,\Omega} \|\phi - \phi_k^{(1)}\|_{0,\Omega} + \|\mathbf{w} - \mathbf{w}_k^{(1)}\|_{0,4,\Omega} \|\nabla \mathbf{u}\|_{0,\Omega} + \|\mathbf{w} - \mathbf{w}_k^{(1)}\|_{0,4,\Omega} \|\nabla \varphi\|_{0,\Omega} \Big) \\
&\qquad\qquad \times \|(\mathbf{u}_k^{(1)} - \mathbf{u}, \varphi_k^{(1)} - \varphi)\|\,,
\end{aligned}$$

y simplificando

$$\begin{aligned}
&\|\mathscr{L}(\mathbf{w}_k^{(1)}, \phi_k^{(1)}) - \mathscr{L}(\mathbf{w}, \phi)\| \\
&\quad \le \alpha_{\mathscr{A}}^{-1} \Big(\gamma \|\boldsymbol{g}\|_{\infty,\Omega} \|\phi - \phi_k^{(1)}\|_{0,\Omega} + \big(\|\nabla \mathbf{u}\|_{0,\Omega} + \|\nabla \varphi\|_{0,\Omega} \big) \|\mathbf{w} - \mathbf{w}_k^{(1)}\|_{0,4,\Omega} \Big)\,.
\end{aligned}$$

El teorema de Rellich-Kondrachov (cf. [1, Thm. 6.3]), garantiza que

$$\|\phi - \phi_k^{(1)}\|_{0,\Omega} \xrightarrow{k\to\infty} 0 \quad \text{y} \quad \|\mathbf{w} - \mathbf{w}_k^{(1)}\|_{0,4,\Omega} \xrightarrow{k\to\infty} 0.$$

Por lo tanto, $\|\mathscr{L}(\mathbf{w}_k^{(1)}, \phi_k^{(1)}) - \mathscr{L}(\mathbf{w}, \phi)\| \xrightarrow{k\to\infty} 0$, es decir, la sucesión $\{\mathscr{L}(\mathbf{w}_k^{(1)}, \phi_k^{(1)})\}_{k\ge 1}$ es fuertemente convergente a $\mathscr{L}(\mathbf{w}, \phi)$. Esto muestra que $\overline{\mathscr{L}(B)}$ es compacto.

$\square$

Enunciamos ahora el resultado principal de esta sección.

Teorema 2.3.5. *Asumiendo* (2.6)*, existe una solución* $(\mathbf{u}, \varphi)$ *al problema* (2.27)*. Además, si los datos son lo suficientemente pequeños como para que la constante* $C_{\mathrm{Lip}} < 1$ *(cf.* (2.51)*), entonces la solución es única.*

Demostración. Basta con ver que, en virtud del Lema 2.3.2, la relación (2.43) y el Teorema 2.3.5 tenemos que el operador $\mathscr{L} : B \longrightarrow B$ satisface las condiciones del teorema del punto fijo de Shauder (cf. Teorema 2.3.3) y por lo tanto $\mathscr{L}$ tiene al menos un punto fijo, $(\mathbf{u}, \varphi) \in B \subseteq \boldsymbol{X} \times \widetilde{H}^1(\Omega)$. A su vez, gracias a la equivalencia (2.37), $(\mathbf{u}, \varphi)$ corresponde a una solución del problema (2.27).
Adicionalmente, si suponemos que $(\mathbf{u}, \varphi)$ y $(\widetilde{\mathbf{u}}, \widetilde{\varphi})$ son dos soluciones del problema (2.27) o, equivalentemente, son puntos fijos del mapeo $\mathscr{L}$, entonces a partir de la propiedad de continuidad de Lipschitz de $\mathscr{L}$ (cf. ver (2.44)) allí, se tiene que

$$\|(\mathbf{u}, \varphi) - (\widetilde{\mathbf{u}}, \widetilde{\varphi})\| = \|\mathscr{L}(\mathbf{u}, \varphi) - \mathscr{L}(\widetilde{\mathbf{u}}, \widetilde{\varphi})\| \leq C_{\mathrm{Lip}} \|(\mathbf{u}, \varphi) - (\widetilde{\mathbf{u}}, \widetilde{\varphi})\| \,.$$

Usando la definición de C_{Lip} (cf. (2.51), concluimos entonces que para datos suficientemente pequeños como para que

$$C_{\mathrm{Lip}} \;=\; \alpha_{\mathscr{A}}^{-1} \Big(\gamma \|\boldsymbol{g}\|_{\infty,\Omega} + C_1(\mu, \alpha, \kappa, U, \boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}) + C_2(\alpha, \kappa, U) \Big) \;<\; 1, \tag{2.52}$$

la solución es única. □

La existencia de la presión p solución al problema (2.11) es estándar y se deduce esencialmente de la condición inf-sup (2.16). Omitimos más detalles y referimos al lector a [9, Teorema 1.4].

Capítulo 3

Problema modelo discreto

3.1. Discretización de elementos finitos

En esta sección, presentamos y analizamos el esquema discreto que proponemos para el problema (2.11), el cual está basado en aproximaciones de Galerkin discontinuo para el fluido y aproximación conforme para la concentración. De este modo, tras introducir algunas notaciones y definiciones preliminares en la Sección 3.1.1, estableceremos y analizaremos el esquema propuesto a lo largo de la Sección 3.1.2.

3.1.1. Preliminares

Sea $\mathcal{T}_h$ una partición regular de Ω, constituida por tetrahedros K (K sería un triángulo si el caso fuese 2D) con vector normal unitario saliente $\mathbf{n}_K$ y diametro h_K. Como es habitual, el tamaño de la malla está definido como $h := \max\limits_{K \in \mathcal{T}_h} h_K$. Para simplificar, asumiremos que la intersección de dos elementos es vacía o un vértice, o un lado/cara. Denotaremos

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_h^i &:= \{e \,:\, e \text{ es lado/cara interior}\}\,,\\ \mathcal{E}_h^b &:= \{e \,:\, e \text{ es lado/cara frontera}\}\,,\\ \mathcal{E}_h &:= \mathcal{E}_h^i \cup \mathcal{E}_h^b\,.\end{aligned}$$

Además, se denotará por h_e la longitud/diámetro máximo de cualquier $e \in \mathcal{E}_h$. A continuación, se presentan los operadores de saltos y promedio que se utilizarán en las secciones siguientes. En primer lugar, sea $e \in \mathcal{E}_h^i$ un lado/cara común de dos elementos vecinos $K^+, K^- \in \mathcal{T}_h$ satisfaciendo $e = \partial K^+ \cap \partial K^-$, y sea $\mathbf{n}_e^\pm$ el vector normal unitario saliente de e en $K^\pm$. Si ψ y $\mathbf{v}$ son funciones escalares o vectoriales a trozos suficientemente regulares en $\mathcal{T}_h$, respectivamente, denotamos por $\psi^\pm$ y $\mathbf{v}^\pm$ sus trazas tomadas desde el interior de $K^\pm$. Definimos entonces el salto $[\![\,\cdot\,]\!]$ actuando sobre ψ y $\mathbf{v}$ como

$$[\![\psi]\!] = \begin{cases} \psi^+\mathbf{n}_e^+ \,+\, \psi^-\mathbf{n}_e^-\,, & e \in \mathcal{E}_h^i \\ \\ \psi\,\mathbf{n}\,, \quad e \in \mathcal{E}_h^b \end{cases} \qquad \text{y} \qquad [\![\mathbf{v}]\!] = \begin{cases} \mathbf{v}^+ \otimes \mathbf{n}_e^+ \,+\, \mathbf{v}^- \otimes \mathbf{n}_e^-\,, & e \in \mathcal{E}_h^i \\ \\ \mathbf{v} \otimes \mathbf{n} \quad e \in \mathcal{E}_h^b\,, \end{cases}$$

donde $\mathbf{n}$ es el vector normal unitario saliente a $\partial\Omega$. A su vez, para cualquier función (escalar, vectorial o tensorial) suficientemente regular y a trozos η definimos su promedio a través de $e \in \mathcal{E}_h^i$ como $\{\{\,\eta\,\}\} = \frac{1}{2}\big(\eta^+ \,+\, \eta^-\big)$ y $\{\{\eta\}\} = \eta$ si $e \in \mathcal{E}_h^b$.
Para $r \geq 0$, consideramos el espacio de Sobolev a trozos

$$H^r(\mathcal{T}_h) \,=\, \Big\{\, \phi \in L^2(\Omega) \,: \quad \phi\big|_K \,\in\, H^r(K) \quad \forall\, K \in \mathcal{T}_h \,\Big\}\,, \tag{3.1}$$

y las normas dependientes de parámetros de la malla

$$\begin{aligned} \|\psi_h\|^2_{1,\mathcal{T}_h} &= \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \|\nabla_h \psi\|^2_{0,K} + \sum_{e\in\mathcal{E}_h} \frac{a_0}{h_e} \| [\![\psi]\!] \|^2_{0,e} \quad \forall\, \psi \in H^1(\mathcal{T}_h)\,, \\ \|\psi_h\|^2_{2,\mathcal{T}_h} &= \|\psi_h\|^2_{1,\mathcal{T}_h} + \sum_{K\in\mathcal{T}_h} h_K^2 |\psi|^2_{2,K} \quad \forall\, \psi \in H^2(\mathcal{T}_h)\,, \end{aligned} \tag{3.2}$$

donde $\nabla_h(\,\cdot\,)$ es el operador gradiente discreto y a_0 es un parámetro fijo a ser definido mas adelante (ver ecuación (3.7) y párrafo que procede). Una desigualdad inversa (ver [28, Sección 3.3.1]) permite garantizar la existencia de una constante $C > 0$, independientemente del tamaño de la malla, tal que:

$$\|\psi_h\|_{2,\mathcal{T}_h} \leq C\, \|\psi_h\|_{1,\mathcal{T}_h} \quad \forall\, \psi_h \in H^2(\mathcal{T}_h)\,. \tag{3.3}$$

Además, recordamos la versión discontinua de la inclusión de Sobolev (2.3) (ver e.g., [10, 30]): se garantiza la existencia de $\widetilde{C}_{Sob} > 0$ tal que

$$\|\psi\|_{0,q,\Omega} \leq \widetilde{C}_{Sob} \|\psi\|_{1,\mathcal{T}_h} \quad \forall\, \psi \in H^1(\mathcal{T}_h)\,, \quad \text{donde} \quad \begin{cases} q \geq 1 & \text{si } d = 2\,, \\ q \in [1,6] & \text{si } d = 3, \end{cases} \tag{3.4}$$

la cual es útil para probar estimaciones discretas y propiedades de estabilidad de las formas que definen el problema discreto que se definirá a continuación en la Sección 3.1.2. Las respectivas versiones vectoriales de (3.1)-(3.4) se extienden de forma natural.

3.1.2. Esquema de elementos finitos

Para una aproximación de orden $k \geq 1$ y una malla $\mathcal{T}_h$ sobre Ω como en la sección 3.1.1, Sea $P_k(K)$ el espacio local de polinomios de grado $\leq k$ sobre K. Entonces, consideramos los siguientes espacios de dimensión finita

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{V}_h &= \left\{ \mathbf{v}_h \in \boldsymbol{H}_0(\mathrm{div}\,;\Omega) : \quad \mathbf{v}_h\big|_K \in [P_k(K)]^d, \quad \forall\, K \in \mathcal{T}_h \right\}, \\
Q_h &= \left\{ q_h \in L_0^2(\Omega) : \quad q_h\big|_K \in P_{k-1}(K), \quad \forall\, K \in \mathcal{T}_h \right\}, \\
W_h &= \left\{ \psi_h \in C(\overline{\Omega}) \cap L_0^2(\Omega) : \quad \psi_h\big|_K \in P_k(K), \quad \forall\, K \in \mathcal{T}_h \right\}.
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

Notar que $\boldsymbol{V}_h$ es el espacio BDM de divergencia conforme [20] y $W_h \subseteq \widetilde{H}^1(\Omega)$ es el espacio clásico de elementos finitos de Lagrange de grado k con media nula en Ω. De esta forma, basado en los espacio discretos (3.5), proponemos el siguiente método de elementos finitos de Galerkin discontinuo para el problema (2.11): Encontrar $(\mathbf{u}_h, p_h, \varphi_h) \in \boldsymbol{V}_h \times Q_h \times W_h$, tal que

$$
\begin{aligned}
\mathscr{A}_h^S(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + \mathscr{C}_h^S(\mathbf{u}_h; \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) - \mathscr{B}^S(\mathbf{v}_h, p_h) &= \mathscr{F}^S(\varphi_h, \mathbf{v}_h), \\
\mathscr{B}^S(\mathbf{u}_h, q_h) &= 0\,, \\
\mathscr{A}^C(\varphi_h, \psi_h) + \mathscr{C}^C(\mathbf{u}_h; \varphi_h, \psi_h) &= \mathscr{F}^C(\psi_h),
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

para todo $(\mathbf{v}_h, p_h, \psi_h) \in \boldsymbol{V}_h \times Q_h \times W_h$. Donde, la forma bilineal discreta $\mathscr{A}_h^S$ que consideramos se basa en el método de penalización interior [18] y está dado por

$$
\begin{aligned}
\mathscr{A}_h^S(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) = \mu \int_\Omega \nabla_h \mathbf{u}_h : \nabla_h \mathbf{v}_h &- \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e \mu\ \{\{\nabla \mathbf{u}_h\}\} : [\![\mathbf{v}_h]\!] \\
- \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e \mu\ \{\{\nabla \mathbf{v}_h\}\} : [\![\mathbf{u}_h]\!] &+ \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \frac{a_0}{h_e} \int_e \mu [\![\mathbf{u}_h]\!] : [\![\mathbf{v}_h]\!]\,,
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

donde a_0 es el parámetro que debe ser tomado lo suficientemente grande para que la forma bilineal $\mathscr{A}_h^S$ sea coerciva (ver [18] para más detalles). A su vez, la forma discreta vinculada al término convectivo no lineal, basado en un enfoque upwind

[27], está definida por

$$\mathscr{C}_h^S(\mathbf{w}_h;\mathbf{u}_h,\mathbf{v}_h) = \int_\Omega (\mathbf{w}_h\cdot\nabla_h)\mathbf{u}_h\cdot\mathbf{v}_h + \frac{1}{2}\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\int_{\partial K\setminus\Gamma}(\mathbf{w}_h\cdot\mathbf{n}_K - |\mathbf{w}_h\cdot\mathbf{n}_K|)\big(\mathbf{u}_h^e - \mathbf{u}_h\big)\cdot\mathbf{v}_h, \tag{3.8}$$

donde $\mathbf{u}_h^e$ representa la traza de $\mathbf{u}_h$, tomada desde el exterior de K. Las formas bilineales $\mathscr{B}^S$ y $\mathscr{A}^C$ están definidas por (2.14) y (2.12). Y la forma trilineal $\mathscr{C}^C$ está dada por (2.13), como en el caso continuo.

3.1.3. Estimadores discretos y propiedades de estabilidad

A continuación, presentamos algunas propiedades de las formas que definen la formulación discreta (3.6) y que son necesarias para el análisis respectivo. Sus demostraciones se pueden encontrar en los trabajos relacionados anteriores [10, 21, 28, 29] y por lo tanto las omitimos.

$$\Big|\mathscr{A}_h^S(\mathbf{u}_h,\mathbf{v}_h)\Big| \le \widetilde{C}_{\mathscr{A}^S}\,\|\mathbf{u}_h\|_{1,\mathcal{T}_h}\,\|\mathbf{v}_h\|_{1,\mathcal{T}_h} \qquad \forall\,\mathbf{u}_h,\mathbf{v}_h\in\boldsymbol{V}_h\,, \tag{3.9}$$

$$\Big|\mathscr{A}_h^S(\mathbf{u},\mathbf{v}_h)\Big| \le \widehat{C}_{\mathscr{A}^S}\,\|\mathbf{u}\|_{2,\mathcal{T}_h}\,\|\mathbf{v}_h\|_{1,\mathcal{T}_h} \qquad \forall\,\mathbf{u}\in[H^2(\mathcal{T}_h)]^n \quad \forall\,\mathbf{v}_h\in\boldsymbol{V}_h\,, \tag{3.10}$$

$$\Big|\mathscr{B}^S(\mathbf{v}_h,q)\Big| \le \widetilde{C}_{\mathscr{B}^S}\,\|\mathbf{v}_h\|_{1,\mathcal{T}_h}\,\|q\|_{0,\Omega} \qquad \forall\,\mathbf{v}_h\in\boldsymbol{V}_h \quad \forall\,q\in L_0^2(\Omega)\,, \tag{3.11}$$

$$\Big|\mathscr{C}_h^S(\mathbf{w}_h;\mathbf{u}_h,\mathbf{v}_h)\Big| \le \widetilde{C}_{\mathscr{C}^S}\,\|\mathbf{w}_h\|_{1,\mathcal{T}_h}\,\|\mathbf{u}_h\|_{1,\mathcal{T}_h}\,\|\mathbf{v}_h\|_{1,\mathcal{T}_h} \qquad \forall\,\mathbf{w}_h,\mathbf{u}_h,\mathbf{v}_h\in\boldsymbol{V}_h\,, \tag{3.12}$$

$$\Big|\mathscr{C}^C(\mathbf{w}_h;\varphi_h,\psi_h)\Big| \le \widetilde{C}_{\mathscr{C}^C}\,\|\mathbf{w}_h\|_{1,\mathcal{T}_h}\,\|\varphi_h\|_{1,\Omega}\,\|\psi_h\|_{1,\Omega} \qquad \forall\,\mathbf{w}_h\in\boldsymbol{V}_h \quad \forall\,\varphi_h,\psi_h\in W_h\,. \tag{3.13}$$

Además, se sabe que para un parámetro suficientemente grande a_0, la forma bilineal $\mathscr{A}_h^S$ es coerciva (ver [18, 24] para más detalles). Más precisamente, existe una constante positiva $\widetilde{\alpha}_S$ que es independiente de h tal que

$$\mathscr{A}_h^S(\mathbf{v}_h,\mathbf{v}_h) \ge \widetilde{\alpha}_S\|\mathbf{v}_h\|_{1,\mathcal{T}_h}^2 \quad \forall\,\mathbf{v}_h\in\boldsymbol{V}_h. \tag{3.14}$$

Por otro lado, dado que $W_h \subseteq \widetilde{H}^1(\Omega)$, se sigue inmediatamente la continuidad y la elipticidad de la forma bilineal $\mathscr{A}^C$, pero aplicada al subespacio W_h. Es decir,

$$\left|\mathscr{A}^C(\varphi_h, \psi_h)\right| \leq (\kappa + U)\|\varphi_h\|_{1,\Omega}\,\|\psi_h\|_{1,\Omega} \quad \forall\, \varphi_h, \psi_h \in W_h\,, \tag{3.15}$$

y además se tiene que

$$\mathscr{A}^C(\psi_h, \psi_h) \geq \widetilde{\alpha}_C\|\psi_h\|^2_{1,\Omega} \quad \forall\, \psi_h \in W_h\,. \tag{3.16}$$

Respecto a la forma bilineal $\mathscr{B}^S$, recordamos de [26] la condición inf-sup discreta: existe una constante $\widetilde{\beta} > 0$ independiente h, tal que

$$\sup_{\substack{\mathbf{v}_h \in \boldsymbol{V}_h \\ \mathbf{v}_h \neq \mathbf{0}}} \frac{\mathscr{B}^S(\mathbf{v}_h, q_h)}{\|v_h\|_{1,\mathcal{T}_h}} \geq \widetilde{\beta}\,\|q_h\|_{0,\Omega} \qquad \forall\, q_h \in Q_h\,. \tag{3.17}$$

Como en el caso continuo, definimos el Kernel discreto $\boldsymbol{X}_h$ de la forma bilineal $\mathscr{B}^S$ como

$$\begin{aligned} \boldsymbol{X}_h \;&= \Big\{\mathbf{v}_h \in \boldsymbol{V}_h : \quad \mathscr{B}^S(\mathbf{v}_h, q_h) = 0\,,\ \forall\, q_h \in Q_h\Big\} \\ &= \Big\{\mathbf{v}_h \in \boldsymbol{V}_h : \quad \operatorname{div}\,\mathbf{v}_h = 0 \quad \text{en} \quad \Omega\Big\}\,, \end{aligned} \tag{3.18}$$

donde la última igualdad se deduce del hecho de que $\boldsymbol{V}_h \subset \boldsymbol{H}_0(\operatorname{div};\Omega)$ y $\operatorname{div}\,\boldsymbol{V}_h \subset Q_h$ (ver [22]). Esta particularidad implica que $\boldsymbol{X}_h \subset \boldsymbol{H}_0(\operatorname{div}^0;\Omega)$. Por cierto, según [22, 28] deducimos que

$$\mathscr{C}^S_h(\mathbf{w}_h; \mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) = \frac{1}{2}\sum_{e \in \mathcal{E}^i_h}\int_e |\mathbf{w}_h \cdot \mathbf{n}_e|\,|[\![\mathbf{v}_h]\!]| \geq 0 \quad \forall\, \mathbf{w}_h \in \boldsymbol{H}_0(\operatorname{div}^0;\Omega)\,, \forall\, \mathbf{v}_h \in \boldsymbol{V}_h\,. \tag{3.19}$$

Obsérvese además que la forma convectiva $\mathscr{C}^S_h$ no es lineal en su primer argumento. Sin embargo, satisface la siguiente propiedad de Lipschitz continuidad: Para todo

$\mathbf{w}_h, \widetilde{\mathbf{w}}_h, \mathbf{u}_h \in [H^2(\mathcal{T}_h)]^d$ y $\mathbf{v}_h \in \boldsymbol{V}_h$, existe una constante positiva $\widetilde{C}_{S,\mathrm{LIP}}$, independiente del tamaño de la malla, tal que

$$\left|\mathscr{C}_h^S(\mathbf{w}_h;\mathbf{u}_h,\mathbf{v}_h) - \mathscr{C}_h^S(\widetilde{\mathbf{w}}_h;\mathbf{u}_h,\mathbf{v}_h)\right| \leq \widetilde{C}_{S,\mathrm{LIP}}\|\mathbf{w}_h - \widetilde{\mathbf{w}}_h\|_{1,\mathcal{T}_h}\|\mathbf{u}_h\|_{1,\mathcal{T}_h}\|\mathbf{v}_h\|_{1,\mathcal{T}_h}\,, \tag{3.20}$$

En cuanto a la forma $\mathscr{F}^S$ definida en (2.15) usando las desigualdades de Cauchy-Swarchz, Hölder y la de Sobolev discreta (3.4), encontramos fácilmente para todo $\psi_h \in W_h$ y $v_h \in \boldsymbol{V}_h$, que

$$\left|\mathscr{F}^S(\phi_h,\mathbf{v}_h)\right| \leq \widetilde{C}_{\mathrm{sob}}\,\left[\|f\|_{0,\Omega} + \left(|\Omega|^{1/2} + \gamma\,\|\phi_h\|_{0,\Omega}\right)\|\boldsymbol{g}\|_{\infty,\Omega}\right]\|\mathbf{v}_h\|_{1,\mathcal{T}_h}\,. \tag{3.21}$$

Por su parte, respecto al $\mathscr{F}^C$, dado que $W_h \subseteq \widetilde{H}^1(\Omega)$ se sigue de (2.26) que

$$\left|\mathscr{F}^C(\psi_h)\right| \leq U\,\alpha\,|\Gamma|^{1/2}\|\psi_h\|_{1,\Omega} \qquad \forall \psi_h \in W_h\,. \tag{3.22}$$

3.2. Buen planteamiento del problema discreto

En esta sección adaptamos el análisis desarrollado en la sección 2.3 del Capítulo 2 para demostrar que el problema (3.6) está bien planteado.

3.2.1. Estimados a priori y enfoque de punto fijo discreto

Comenzamos observando que, análogamente al caso continuo, debido a la condición inf-sup discreta (3.17), el problema (3.6) es equivalente al problema reducido: Encontrar $(\mathbf{u}_h, \varphi_h) \in \boldsymbol{X}_h \times W_h$, tal que:

$$\begin{aligned} \mathscr{A}_h^S(\mathbf{u}_h,\mathbf{v}_h) \,+\, \mathscr{C}_h^S(\mathbf{u}_h;\mathbf{u}_h,\mathbf{v}_h) &= \mathscr{F}^S(\varphi_h,\mathbf{v}_h), \\ \mathscr{A}^C(\varphi_h,\psi_h) \,+\, \mathscr{C}^C(\mathbf{u}_h;\varphi_h,\psi_h) &= \mathscr{F}^C(\psi_h)\,, \end{aligned} \tag{3.23}$$

para todo $(\mathbf{v}_h, \psi_h) \in \boldsymbol{X}_h \times W_h$. En consecuencia, en lo que sigue nos centramos en analizar el problema (3.23).

Comenzamos derivando las correspondientes estimaciones a priori para las soluciones discretas.

Teorema 3.2.1. *Asumiendo que* (2.6) *se satisface y que el parámetro de penalización a_0 (cf.* (3.7) *y* (3.14)*) es lo suficientemente grande, entonces cualquier solución* $(\mathbf{u}_h, \varphi_h)$ *de* (3.23)*. cumple las siguientes estimaciones a priori*

$$\|\mathbf{u}_h\|_{1,\mathcal{T}_h} \leq \widetilde{C}_1(\mu,\alpha,\kappa,U,\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}) \qquad y \qquad \|\varphi_h\|_{1,\Omega} \leq C_2(\alpha,\kappa,U)\,, \tag{3.24}$$

donde

$$\widetilde{C}_1(\mu,\alpha,\kappa,U,\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}) = \frac{\widetilde{C}_{sob}}{\widetilde{\alpha}_S}\Big\{\|\boldsymbol{f}\|_{0,\Omega} + \Big(|\Omega|^{1/2} + \gamma\,\widetilde{C}_2(\alpha,\kappa,U)\Big)\|\boldsymbol{g}\|_{\infty,\Omega}\Big\}\,, \tag{3.25}$$

y $C_2(\alpha,\kappa,U)$ *está definida como en* (2.30)

Demostración. Suponiendo que $(\mathbf{u}_h, \varphi_h)$ es una solución de (3.23) y testeando en esta ecuación por $(\mathbf{v}_h, \psi_h) = (\mathbf{u}_h, \varphi_h)$ se obtiene

$$\begin{aligned} \mathscr{A}_h^S(\mathbf{u}_h,\mathbf{u}_h) + \mathscr{C}_h^S(\mathbf{u}_h;\mathbf{u}_h,\mathbf{u}_h) &= \mathscr{F}^S(\phi_h,\mathbf{u}_h), \\ \mathscr{A}^C(\varphi_h,\psi_h) + \mathscr{C}^C(\mathbf{u}_h;\varphi_h,\varphi_h) &= \mathscr{F}^C(\varphi_h)\,. \end{aligned} \tag{3.26}$$

Como la forma trilineal $\mathscr{C}_h^S$ (cf. (3.19)) posee la propiedad de no negatividad y $\mathscr{C}^C$ es antisimétrica, esto nos dice que

$$\mathscr{C}_h^S(\mathbf{u}_h;\mathbf{u}_h,\mathbf{u}_h) \geq 0 \quad \text{y} \quad \mathscr{C}^C(\mathbf{u}_h;\varphi_h,\varphi_h) = 0\,. \tag{3.27}$$

Además de lo mencionado anteriormente y haciendo uso de la coercividad de las formas bilineales $\mathscr{A}_h^S$ y $\mathscr{A}^C$ (cf. (3.14) y (3.16)), y la continuidad de $\mathscr{F}^S$ y $\mathscr{F}^C$ (cf.

(3.21)-(3.22)) obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned}
\widetilde{\alpha}_S \|\mathbf{u}_h\|_{1,\mathcal{T}_h}^2 &\leq \widetilde{C}_{\text{sob}}\Big\{\|\boldsymbol{f}\|_{0,\Omega} + \Big(|\Omega|^{1/2} + \gamma\|\phi_h\|_{1,\Omega}\Big)\|\boldsymbol{g}\|_{\infty,\Omega}\Big\}\, \|\mathbf{u}_h\|_{1,\mathcal{T}_h}\,, \\
\Big(\kappa C_{\text{FP}}^{-2} - \tfrac{1}{2}U\Big)\|\varphi_h\|_{1,\Omega}^2 &\leq U\alpha|\Gamma|^{1/2}\,\|\varphi_h\|_{1,\Omega}\,.
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Simplificando en la segunda desigualdad de (3.28), se tiene

$$\|\varphi_h\|_{1,\Omega} \leq \Big(\kappa C_{\text{FP}}^{-2} - \frac{1}{2}U\Big)^{-1} U\alpha|\Gamma|^{1/2}\,, \tag{3.29}$$

lo cual da la estimación para φ_h. En consecuencia, usando esta cota para φ_h en la primera desigualdad de (3.28) se obtiene inmediatamente la cota para u_h, es decir,

$$\|\mathbf{u}_h\|_{1,\mathcal{T}_h} \leq \frac{\widetilde{C}_{\text{sob}}}{\widetilde{\alpha}_S}\Big\{\|\boldsymbol{f}\|_{0,\Omega} + \Big(|\Omega|^{1/2} + \gamma\|\phi_h\|_{1,\Omega}\Big)\|\boldsymbol{g}\|_{\infty,\Omega}\Big\}. \tag{3.30}$$

Finalmente, se obtienen las constantes $\widetilde{C}_1(\mu,\alpha,\kappa,U,\boldsymbol{f},\boldsymbol{g})$ como en (3.25) y $C_2(\alpha,\kappa,U)$ tal como en el caso continuo (ver eq. (2.30)).

□

A continuación, procedemos de manera semejante al problema continuo considerando la versión linealizada y desacoplada (3.23) definida como: Dado $(\mathbf{w}_h,\phi_h) \in \boldsymbol{X}_h \times W_h$, encontrar $(\mathbf{u}_h,\varphi_h) \in \boldsymbol{X}_h \times W_h$ satisfaciendo

$$\begin{aligned}
\mathscr{A}_h^S(\mathbf{u}_h,\mathbf{v}_h) + \mathscr{C}_h^S(\mathbf{w}_h;\mathbf{u}_h,\mathbf{v}_h) &= \mathscr{F}^S(\phi_h;\mathbf{v}_h), \\
\mathscr{A}^C(\varphi_h,\psi_h) + \mathscr{C}^C(\mathbf{w}_h;\varphi_h,\psi_h) &= \mathscr{F}^C(\psi_h)\,,
\end{aligned} \tag{3.31}$$

o equivalentemente,

$$\mathscr{A}_h(\mathbf{w}_h;(\mathbf{u}_h,\varphi_h),(\mathbf{v}_h,\psi_h)) = \mathscr{F}(\phi_h;(\mathbf{v}_h,\psi_h)) \quad \forall\,(\mathbf{v}_h,\psi_h) \in \boldsymbol{X}_h \times W_h\,, \tag{3.32}$$

donde

$$\begin{aligned} \mathscr{A}_h(\mathbf{w}_h;(\mathbf{u}_h,\varphi_h),(\mathbf{v}_h,\psi_h)) \; &= \; \mathscr{A}_h^S(\mathbf{u}_h,\mathbf{v}_h) \,+\, \mathscr{C}_h^S(\mathbf{w}_h;\mathbf{u}_h,\mathbf{v}_h) \\ &\quad + \mathscr{A}^C(\varphi_h,\psi_h) \,+\, \mathscr{C}^C(\mathbf{w}_h;\varphi_h,\psi_h) \end{aligned} \tag{3.33}$$

y

$$\mathscr{F}(\phi_h;(\mathbf{v}_h,\psi_h)) \,=\, \mathscr{F}^S(\phi_h;\mathbf{v}_h) \,+\, \mathscr{F}^C(\psi_h)\,, \tag{3.34}$$

para todo $(\mathbf{v}_h,\psi_h) \in \boldsymbol{X}_h \times W_h$. Siguiendo el ánalisis, definimos el operador solución asociado al problema discreto (3.32), dado por

$$\begin{aligned} \mathscr{L}_h \,:\, \boldsymbol{X}_h \times W_h \quad &\longrightarrow \quad \boldsymbol{X}_h \times W_h \\ (\mathbf{w}_h,\phi_h) \quad &\longmapsto \quad (\mathbf{u}_h,\varphi_h) := \mathscr{L}_h(\mathbf{w}_h,\phi_h)\,, \end{aligned} \tag{3.35}$$

siendo $(\mathbf{u}_h,\varphi_h)$ la solución del problema (3.32) (o, equivalentemente, al problema (3.31)). Se concluye que la solución del problema (3.23) corresponde a un punto fijo del operador $\mathscr{L}_h$. Expresado de otra manera, tenemos la siguiente equivalencia

$$(\mathbf{u}_h,\varphi_h)\,\text{es solución de (3.23)} \qquad \Longleftrightarrow \qquad (\mathbf{u}_h,\varphi_h) = \mathscr{L}_h(\mathbf{u}_h,\varphi_h). \tag{3.36}$$

Lo primero para analizar la existencia de un punto fijo de $\mathscr{L}_h$ es cerciorarse de que éste este bien definido sobre $\boldsymbol{X}_h \times W_h$. Establecemos este hecho a continuación.

Lema 3.2.2. *Bajo las hipótesis del Teorema 3.2.1, el operador $\mathscr{L}_h$ está bien definido.*

Demostración. Sea $(\mathbf{w}_h,\phi_h)$ dado en $\boldsymbol{X}_h \times W_h$. Haciendo uso de la definición de $\mathscr{A}_h(\mathbf{w}_h;\cdot,\cdot)$ (cf. (3.33)) y desigualdad triangular

$$\begin{aligned} \left|\mathscr{A}_h(\mathbf{w}_h;(\mathbf{u}_h,\varphi_h),(\mathbf{v}_h,\psi_h))\right| \; &\leq \left|\mathscr{A}_h^S(\mathbf{u}_h,\mathbf{v}_h)\right| \,+\, \left|\mathscr{C}_h^S(\mathbf{w}_h;\mathbf{u}_h,\mathbf{v}_h)\right| \\ &\quad + \left|\mathscr{A}^C(\varphi_h,\psi_h)\right| \,+\, \left|\mathscr{C}^C(\mathbf{w}_h;\varphi_h,\psi_h)\right|, \end{aligned}$$

usando las cotas para $\mathscr{A}_h^S$ y $\mathscr{A}^C$, definidas en (3.9) y (3.15) y los estimados (3.12) y (3.13) de las formas $\mathscr{C}_h^S(\mathbf{w}_h;\cdot,\cdot)$ y $\mathscr{C}^C(\mathbf{w}_h;\cdot,\cdot)$

$$\begin{aligned}\Big|\mathscr{A}_h(\mathbf{w}_h;(\mathbf{u}_h,\varphi_h),(\mathbf{v}_h,\psi_h))\Big| \leq\ & \widetilde{C}_{\mathscr{A}^S}\,\|\mathbf{u}_h\|_{1,\mathcal{T}_h}\,\|\mathbf{v}_h\|_{1,\mathcal{T}_h} \ + \widetilde{C}_{\mathscr{C}^S}\,\|\mathbf{w}_h\|_{1,\mathcal{T}_h}\,\|\mathbf{u}_h\|_{1,\mathcal{T}_h}\,\|\mathbf{v}_h\|_{1,\mathcal{T}_h} \\ & + (\kappa+U)\|\varphi\|_{1,\Omega}\|\psi\|_{1,\Omega} \,+\, \widetilde{C}_{\mathscr{C}^C}\,\|\mathbf{w}_h\|_{1,\mathcal{T}_h}\,\|\varphi_h\|_{1,\Omega}\,\|\psi_h\|_{1,\Omega}\,,\end{aligned}$$

y mediante la desigualdad de Cauchy-Schwarz, llegamos a lo siguiente

$$\begin{aligned}&\leq 2\,\text{máx}\{\,\widetilde{C}_{\mathscr{A}^S},\kappa+U,\widetilde{C}_{\mathscr{C}^C}\,\|\mathbf{w}_h\|_{1,\mathcal{T}_h}\,,\widetilde{C}_{\mathscr{C}^S}\,\|\mathbf{w}_h\|_{1,\mathcal{T}_h}\,\}\,\Big(\|\mathbf{u}_h\|_{1,\mathcal{T}_h}\,\|\mathbf{v}_h\|_{1,\mathcal{T}_h} \ + \|\varphi_h\|_{1,\Omega}\|\psi_h\|_{1,\Omega}\Big) \\ &\leq \|\mathscr{A}_h\|\,\|(\mathbf{u}_h,\varphi_h)\|\,\|(\mathbf{v}_h,\psi_h)\|\,,\end{aligned}$$

en consecuencia, $\mathscr{A}_h$ es acotado en $\boldsymbol{X}_h\times W_h$ con constante

$$\|\mathscr{A}_h\| := 2\,\text{máx}\{\,\widetilde{C}_{\mathscr{A}^S},\kappa+U,\widetilde{C}_{\mathscr{C}^C}\,\|\mathbf{w}_h\|_{1,\mathcal{T}_h}\,,\widetilde{C}_{\mathscr{C}^S}\,\|\mathbf{w}_h\|_{1,\mathcal{T}_h}\,\}\,.$$

De manera similar al problema continuo, se prueba la elipticidad de $\mathscr{A}_h$. En efecto, sea $(\mathbf{v}_h,\psi_h)\in\ \boldsymbol{X}_h\times W_h$, utilizando la definición de $\mathscr{A}_h$ (cf. (3.33)), se obtiene:

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(\mathbf{w}_h;(\mathbf{v}_h,\psi_h),(\mathbf{v}_h,\psi_h)) \ &= \mathscr{A}_h^S(\mathbf{v}_h,\mathbf{v}_h) \,+\, \mathscr{C}_h^S(\mathbf{w}_h;\mathbf{v}_h,\mathbf{v}_h) \\ &\quad + \mathscr{A}^C(\psi_h,\psi_h) \,+\, \mathscr{C}^C(\mathbf{w}_h;\psi_h,\psi_h)\,.\end{aligned} \tag{3.37}$$

Utilizando la elipticidad de las formas $\mathscr{A}_h^S$ y $\mathscr{A}^C$ (cf. (3.14) y (3.16), respectivamente), la propiedad de no negatividad de $\mathscr{C}_h^S$ (cf. (3.19)) y la característica de anti simetría de $\mathscr{C}^C$ (cf. (3.27)) se deduce que

$$\mathscr{A}_h(\mathbf{w}_h;(\mathbf{v}_h,\psi_h),(\mathbf{v}_h,\psi_h)) \,\geq\, \widetilde{\alpha}_S\,\|\mathbf{v}_h\|_{1,\mathcal{T}_h}^2 \,+\, \widetilde{\alpha}_C\,\|\psi_h\|_{1,\Omega}^2 \,\geq\, \widetilde{\alpha}_{\mathscr{A}}\,\|(\mathbf{v}_h,\psi_h)\|^2\,, \tag{3.38}$$

lo cual permite determinar que la forma bilineal $\mathscr{A}_h$ es coerciva sobre $\boldsymbol{X}_h\times W_h$ con la constante

$$\widetilde{\alpha}_{\mathscr{A}} = \text{mín}\left\{\widetilde{\alpha}_C\,,\,\widetilde{\alpha}_{\mathscr{A}}\right\} > 0\,, \tag{3.39}$$

que es positiva debido a la hipótesis (2.6). Para finalizar, debemos probar que $\mathscr{F} \in \big(\boldsymbol{X}_h \times W_h\big)'$. Empleando la definición de $\mathscr{F}(\phi_h;\cdot)$(cf. (3.34)) y la desigualdad triangular tenemos que

$$\left|\mathscr{F}(\phi_h;(\mathbf{v}_h,\psi_h))\right| \leq \left|\mathscr{F}^S(\phi_h;\mathbf{v}_h)\right| + \left|\mathscr{F}^C(\psi_h)\right|.$$

Luego, usando los acotamientos de los funcionales $\mathscr{F}^S(\phi_h;\cdot)$ y $\mathscr{F}^C$ (cf. (3.21) y (3.22), respectivamente), deducimos que

$$\left|\mathscr{F}(\phi;(\mathbf{v},\psi))\right| \leq \widetilde{C}_{\text{sob}}\,\left[\|f\|_{0,\Omega} + \left(|\Omega|^{1/2} + \gamma\,\|\phi_h\|_{0,\Omega}\right)\|\boldsymbol{g}\|_{\infty,\Omega}\right]\|\mathbf{v}_h\|_{1,\mathcal{T}_h} + U\alpha|\Gamma|^{1/2}\|\psi\|_{1,\Omega}\,.$$

Por lo tanto, queda demostrado que $\mathscr{F}_h$ está acotado, es decir,

$$\left|\mathscr{F}(\phi_h;(\mathbf{v}_h,\psi_h))\right| \leq \|\mathscr{F}_h\|\,\|(\mathbf{v}_h,\psi_h)\|\,,$$

donde $\|\mathscr{F}_h\| = \sqrt{2}\,\text{máx}\left\{\widetilde{C}_{\text{sob}}\,\left[\|f\|_{0,\Omega} + \left(|\Omega|^{1/2} + \gamma\,\|\phi_h\|_{0,\Omega}\right)\|\boldsymbol{g}\|_{\infty,\Omega}\right],\,U\alpha|\Gamma|^{1/2}\right\}$. Concluimos, por el Lema de Lax-Milgram (por ejemplo, ver [24, Lema 1.4]), se garantiza que para $(\mathbf{w}_h,\phi_h) \in \big(\boldsymbol{X}_h \times W_h\big)$, existe una única $(\mathbf{u}_h,\varphi_h) \in \big(\boldsymbol{X}_h \times W_h\big)$ solución a (3.31) o, de igual forma se cumple que $\mathscr{L}_h(\mathbf{w}_h,\phi_h) = (\mathbf{u}_h,\varphi_h)$. Esto nos muestra que el operador $\mathscr{L}_h$ está bien definido. $\square$

Enfatizamos acá que si bien las constantes $\|\mathscr{A}_h\|$ y $\|\mathscr{F}_h\|$ definidas en la demostración del teorema anterior dependen de $\mathbf{w}_h$ y ϕ_h (las cuales a su vez dependen de h) éstas podrían acotarse por datos, usando los estimados del Teorema 3.2.1 una vez restringido el operador $\mathscr{L}_h$ en una bola discreta apropiada tal como se hizo en el caso continuo en donde finalmente se demostrará el buen planteamiento del problema.

3.2.2. Existencia y unicidad de la solución discreta

Esta sección tiene la finalidad de probar existencia de solución al problema (3.23), o bien, verificar que el operador $\mathscr{L}_h$ tiene un punto fijo. Para ello, dado que el operador está planteado sobre un espacio discreto, será suficiente con comprobar las hipótesis del Teorema del punto fijo de Brouwer [7, Teorema 9.9-2], que recordamos a continuación y enunciamos de la manera siguiente.

Teorema 3.2.3. *Sea $L_h : B_h \longrightarrow B_h$, continuo sobre un conjunto convexo y compacto B_h, entonces L_h tiene al menos un punto fijo.*

Primeramente, en virtud de los estimados a priori derivados en el Teorema 3.2.1 definimos

$$B_h = \left\{ (\mathbf{w}_h, \phi_h) \in \boldsymbol{X}_h \times W_h : \quad \|\mathbf{w}_h\|_{1,\mathcal{T}_h} \leq \widetilde{C}_1(\mu, \alpha, \kappa, U, \boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}), \quad \|\phi_h\|_{1,\Omega} \leq \widetilde{C}_2(\alpha, \kappa, U) \right\}, \tag{3.40}$$

el cual es claramente un subconjunto cerrado y convexo de $\boldsymbol{X}_h \times W_h$ con las constantes $\widetilde{C}_1(\mu, \alpha, \kappa, U, \boldsymbol{f}, \boldsymbol{g})$ y $C_2(\alpha, \kappa, U)$ predefinidas en (3.25) y (2.30), respectivamente. Luego, tomando en consideración que el Lema 3.2.2 señala que para cualquier $(\mathbf{w}_h, \phi_h) \in B_h$ existe un único $(\mathbf{u}_h, \varphi_h) \in \boldsymbol{X}_h \times W_h$ que cumple $\mathscr{L}_h(\mathbf{w}_h, \phi_h) = (\mathbf{u}_h, \varphi_h)$ y haciendo uso de la definición de $\mathscr{L}_h$ (ver (3.31)-(3.32)), se tiene que

$$\begin{aligned} \mathscr{A}_h^S(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + \mathscr{C}_h^S(\mathbf{w}_h; \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) &= \mathscr{F}^S(\phi_h; \mathbf{v}_h), \\ \mathscr{A}^C(\varphi_h, \psi_h) + \mathscr{C}^C(\mathbf{w}_h; \varphi_h, \psi_h) &= \mathscr{F}^C(\psi_h). \end{aligned} \tag{3.41}$$

A continuación, haciendo $\mathbf{v}_h = \mathbf{u}_h$ en la primera ecuación de (3.41), utilizando que

$\|\phi_h\|_{1,\Omega} \leq C_2(\alpha,\kappa,U)$ y siguiendo de manera ánaloga al Teorema 3.2.1, se obtiene

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}_h\|_{1,\mathcal{T}_h} &\leq \frac{\widetilde{C}_{\text{sob}}}{\widetilde{\alpha}_S}\Big\{\|\boldsymbol{f}\|_{0,\Omega} + \Big(|\Omega|^{1/2} + \gamma\,\|\phi_h\|_{0,\Omega}\Big)\|\boldsymbol{g}\|_{\infty,\Omega}\Big\} \\ &\leq \frac{\widetilde{C}_{\text{sob}}}{\widetilde{\alpha}_S}\Big\{\|\boldsymbol{f}\|_{0,\Omega} + \Big(|\Omega|^{1/2} + \gamma\,C_2(\alpha,\kappa,U)\Big)\|\boldsymbol{g}\|_{\infty,\Omega}\Big\} = \widetilde{C}_1(\mu,\alpha,\kappa,U,\boldsymbol{f},\boldsymbol{g})\,.\end{aligned}$$

Por otro lado, al tomar $\psi_h = \varphi_h$ en la segunda ecuación de (3.41) y usando un procedimiento similar al anterior, se deduce que

$$\|\varphi_h\|_{1,\Omega} \leq U\alpha|\Gamma|^{1/2}\Big(\kappa C_{\text{FP}}^{-2} - \frac{1}{2}U\Big)^{-1} = C_2(\alpha,\kappa,U)\,.$$

En definitiva, $(\mathbf{u}_h,\varphi_h) = \mathscr{L}_h(\mathbf{w}_h,\phi_h) \in B_h$ y por consiguiente, se comprueba así que $\mathscr{L}_h$ mapea la bola B_h en si misma, es decir,

$$\mathscr{L}_h(B_h) \subseteq B_h\,. \tag{3.42}$$

Acto seguido, analizaremos que el operador $\mathscr{L}_h$ es Lipschitz continuo en la bola B_h, lo cual implica la continuidad requerida para $\mathscr{L}_h$ en dicho subespacio. Particularmente, demostraremos que para cualquier $(\mathbf{w}_h,\phi_h)\,,(\widetilde{\mathbf{w}}_h$ y $\widetilde{\phi}_h)$ en B_h, existe $\widetilde{C}_{\text{LIP}} > 0$, donde se cumple lo siguiente

$$\|\mathscr{L}_h(\mathbf{w}_h,\phi_h) - \mathscr{L}_h(\widetilde{\mathbf{w}}_h,\widetilde{\phi}_h)\| \leq \widetilde{C}_{\text{Lip}}\,\|(\mathbf{w}_h,\phi_h) - (\widetilde{\mathbf{w}}_h,\widetilde{\phi}_h)\|\,. \tag{3.43}$$

Como $(\mathbf{w}_h,\phi_h)\,,(\widetilde{\mathbf{w}}_h,\widetilde{\phi}_h) \in B_h$, nuevamente el Lema 3.2.2 garantiza la existencia de $(\mathbf{u}_h,\varphi_h) = \mathscr{L}_h(\mathbf{w}_h,\phi_h)$ y $(\widetilde{\mathbf{u}}_h,\widetilde{\varphi}_h) = \mathscr{L}_h(\widetilde{\mathbf{w}}_h,\widetilde{\phi}_h)$ en $\boldsymbol{X}_h \times W_h$, satisfaciendo

$$\mathscr{A}_h(\mathbf{w}_h;(\mathbf{u}_h,\varphi_h),(\mathbf{v}_h,\psi_h)) = \mathscr{F}(\phi_h;(\mathbf{v}_h,\psi_h)) \quad \forall\,(\mathbf{v}_h,\psi_h) \in \boldsymbol{X}_h \times W_h, \tag{3.44}$$

$$\mathscr{A}_h(\widetilde{\mathbf{w}}_h;(\widetilde{\mathbf{u}}_h,\widetilde{\varphi}_h),(\mathbf{v}_h,\psi_h)) = \mathscr{F}(\widetilde{\phi}_h;(\mathbf{v}_h,\psi_h)) \quad \forall\,(\mathbf{v}_h,\psi_h) \in \boldsymbol{X}_h \times W_h. \tag{3.45}$$

Usando la elipticidad de la forma bilineal $\mathscr{A}_h(\mathbf{w};\cdot,\cdot)$ (cf. (3.38), su linealidad en la primera componente y la relación (3.44) con $\mathbf{v}_h = \mathbf{u}_h - \widetilde{\mathbf{u}}_h$, $\psi_h = \varphi_h - \widetilde{\varphi}_h$, encontramos

$$\begin{aligned}
\widetilde{\alpha}_{\mathscr{A}} \, \|\mathscr{L}_h(\mathbf{w}_h, \phi_h) - \mathscr{L}_h(\widetilde{\mathbf{w}}_h, \widetilde{\phi}_h)\|^2 &= \widetilde{\alpha}_{\mathscr{A}} \, \|(\mathbf{u}_h - \widetilde{\mathbf{u}}_h, \varphi_h - \widetilde{\varphi}_h)\|^2 \\
&\leq \mathscr{A}_h(\mathbf{w}_h; (\mathbf{u}_h - \widetilde{\mathbf{u}}_h, \varphi_h - \widetilde{\varphi}_h), (\mathbf{u}_h - \widetilde{\mathbf{u}}_h, \varphi_h - \widetilde{\varphi}_h)) \\
&= \mathscr{A}_h(\mathbf{w}_h; (\mathbf{u}_h, \varphi_h), (\mathbf{u}_h - \widetilde{\mathbf{u}}_h, \varphi_h - \widetilde{\varphi}_h)) - \mathscr{A}_h(\mathbf{w}_h; (\widetilde{\mathbf{u}}_h, \widetilde{\varphi}_h), (\mathbf{u}_h - \widetilde{\mathbf{u}}_h, \varphi_h - \widetilde{\varphi}_h)) \\
&= \mathscr{F}(\phi_h; (\mathbf{u}_h - \widetilde{\mathbf{u}}_h, \varphi_h - \widetilde{\varphi}_h)) - \mathscr{A}_h(\mathbf{w}_h; (\widetilde{\mathbf{u}}_h, \widetilde{\varphi}_h), (\mathbf{u}_h - \widetilde{\mathbf{u}}_h, \varphi_h - \widetilde{\varphi}_h)) \,.
\end{aligned} \tag{3.46}$$

Posteriormente, sumando convenientemente cero y combinando términos

$$\begin{aligned}
&\widetilde{\alpha}_{\mathscr{A}} \, \|\mathscr{L}_h(\mathbf{w}_h, \phi_h) - \mathscr{L}_h(\widetilde{\mathbf{w}}_h, \widetilde{\phi}_h)\|^2 \\
&\quad \leq \Big[\mathscr{F}(\phi_h; (\mathbf{u}_h - \widetilde{\mathbf{u}}_h, \varphi_h - \widetilde{\varphi}_h)) - \mathscr{F}(\widetilde{\phi}_h; (\mathbf{u}_h - \widetilde{\mathbf{u}}_h, \varphi_h - \widetilde{\varphi}_h))\Big] \\
&\qquad + \Big[\mathscr{F}(\widetilde{\phi}_h; (\mathbf{u}_h - \widetilde{\mathbf{u}}_h, \varphi_h - \widetilde{\varphi}_h)) - \mathscr{A}_h(\mathbf{w}_h; (\widetilde{\mathbf{u}}_h, \widetilde{\varphi}_h), (\mathbf{u}_h - \widetilde{\mathbf{u}}_h, \varphi_h - \widetilde{\varphi}_h))\Big] \,.
\end{aligned}$$

Luego, aplicando $\mathscr{F}(\widetilde{\phi}_h; (\mathbf{u}_h - \widetilde{\mathbf{u}}_h, \varphi_h - \widetilde{\varphi}_h)) = \mathscr{A}_h(\widetilde{\mathbf{w}}_h; (\widetilde{\mathbf{u}}_h, \widetilde{\varphi}_h), (\mathbf{u}_h - \widetilde{\mathbf{u}}_h, \varphi_h - \widetilde{\varphi}_h)$ (según (3.45)), y asimismo la definición de $\mathscr{F}$ y $\mathscr{A}_h$ y por último simplificando, obtenemos que

$$\begin{aligned}
&\widetilde{\alpha}_{\mathscr{A}} \, \|\mathscr{L}_h(\mathbf{w}_h, \phi_h) - \mathscr{L}_h(\widetilde{\mathbf{w}}_h, \widetilde{\phi}_h)\|^2 \\
&\quad \leq \mathscr{F}^S(\phi_h; \mathbf{u}_h - \widetilde{\mathbf{u}}_h) - \mathscr{F}^S(\widetilde{\phi}_h; \mathbf{u}_h - \widetilde{\mathbf{u}}_h) + \mathscr{C}_h^S(\widetilde{\mathbf{w}}_h; \widetilde{\mathbf{u}}_h, \mathbf{u}_h - \widetilde{\mathbf{u}}_h) \\
&\qquad - \mathscr{C}_h^S(\mathbf{w}_h; \widetilde{\mathbf{u}}_h, \mathbf{u}_h - \widetilde{\mathbf{u}}_h) + \mathscr{C}^C(\widetilde{\mathbf{w}}_h - \mathbf{w}_h; \widetilde{\varphi}_h, \varphi_h - \widetilde{\varphi}_h) \,.
\end{aligned} \tag{3.47}$$

A continuación, acotaremos el funcional $\mathscr{F}^S$ a partir de su definición (cf. (2.15)), usando la desigualdad de Hölder, y Sobolev discreta (3.4) se cumple que

$$\begin{aligned}&\mathscr{F}^S(\phi_h;\mathbf{u}_h-\widetilde{\mathbf{u}}_h)-\mathscr{F}^S(\widetilde{\phi}_h;\mathbf{u}_h-\widetilde{\mathbf{u}}_h)=\gamma\int_\Omega\left(\widetilde{\phi}_h-\phi_h\right)\boldsymbol{g}\cdot(\mathbf{u}_h-\widetilde{\mathbf{u}}_h)\\&\leq\widetilde{C}_{sob}\,\gamma\,\|\boldsymbol{g}\|_{\infty,\Omega}\|\widetilde{\phi}_h-\phi_h\|_{0,\Omega}\|\mathbf{u}_h-\widetilde{\mathbf{u}}_h\|_{1,\mathcal{T}_h}\,.\end{aligned}\tag{3.48}$$

Ahora acotamos las formas trilineales $\mathscr{C}_h^S(\widetilde{\mathbf{w}}_h;\cdot,\cdot)$, $\mathscr{C}_h^S(\mathbf{w}_h;\cdot,\cdot)$ y $C^C(\widetilde{\mathbf{w}}_h-\mathbf{w}_h;\,\cdot)$, utilizando la desigualdad mencionada en (3.20) y la cota (3.13)

$$\begin{aligned}&\mathscr{C}_h^S(\widetilde{\mathbf{w}}_h;\widetilde{\mathbf{u}}_h,\mathbf{u}_h-\widetilde{\mathbf{u}}_h)-\mathscr{C}_h^S(\mathbf{w}_h;\widetilde{\mathbf{u}}_h,\mathbf{u}_h-\widetilde{\mathbf{u}}_h)+\mathscr{C}^C(\widetilde{\mathbf{w}}_h-\mathbf{w}_h;\widetilde{\varphi}_h,\varphi_h-\widetilde{\varphi}_h)\\&\leq\ \widetilde{C}_{S,\mathrm{LIP}}\|\widetilde{\mathbf{w}}_h-\mathbf{w}_h\|_{1,\mathcal{T}_h}\|\widetilde{\mathbf{u}}_h\|_{1,\mathcal{T}_h}\|\mathbf{u}_h-\widetilde{\mathbf{u}}_h\|_{1,\mathcal{T}_h}\\&\qquad+\widetilde{C}_{\mathscr{C}^C}\,\|\widetilde{\mathbf{w}}_h-\mathbf{w}_h\|_{1,\mathcal{T}_h}\,\|\widetilde{\varphi}_h\|_{1,\Omega}\,\|\varphi_h-\widetilde{\varphi}_h\|_{1,\Omega}\ .\end{aligned}\tag{3.49}$$

Ahora, sumando (3.48) y (3.49) resulta

$$\begin{aligned}\widetilde{\alpha}_{\mathscr{A}}\,\|\mathscr{L}_h(\mathbf{w}_h,\phi_h)-\mathscr{L}_h(\widetilde{\mathbf{w}}_h,\widetilde{\phi}_h)\|^2&\leq\widetilde{C}_{sob}\,\gamma\,\|\boldsymbol{g}\|_{\infty,\Omega}\|\widetilde{\phi}_h-\phi_h\|_{0,\Omega}\|\mathbf{u}_h-\widetilde{\mathbf{u}}_h\|_{1,\mathcal{T}_h}\\&+\widetilde{C}_{S,\mathrm{LIP}}\|\widetilde{\mathbf{w}}_h-\mathbf{w}_h\|_{1,\mathcal{T}_h}\|\widetilde{\mathbf{u}}_h\|_{1,\mathcal{T}_h}\|\mathbf{u}_h-\widetilde{\mathbf{u}}_h\|_{1,\mathcal{T}_h}\\&+\widetilde{C}_{\mathscr{C}^C}\,\|\widetilde{\mathbf{w}}_h-\mathbf{w}_h\|_{1,\mathcal{T}_h}\,\|\widetilde{\varphi}_h\|_{1,\Omega}\,\|\varphi_h-\widetilde{\varphi}_h\|_{1,\Omega}\,.\end{aligned}$$

Luego, factorizamos, utilizando en está última desigualdad que $\|\mathbf{w}_h-\widetilde{\mathbf{w}}_h\|_{1,\mathcal{T}_h}\leq\|(\mathbf{w}_h,\phi_h)-(\widetilde{\mathbf{w}}_h,\widetilde{\phi}_h)\|$ y $\|\varphi_h-\widetilde{\varphi}_h\|_{1,\mathcal{T}_h}\leq\|(\mathbf{w}_h,\phi_h)-(\widetilde{\mathbf{w}}_h,\widetilde{\phi}_h)\|$, y simplificando términos comunes, se llega a

$$\begin{aligned}&\widetilde{\alpha}_{\mathscr{A}}\,\|\mathscr{L}_h(\mathbf{w}_h,\phi_h)-\mathscr{L}_h(\widetilde{\mathbf{w}}_h,\widetilde{\phi}_h)\|\\&\leq\text{máx}\left\{\widetilde{C}_{sob}\,\gamma\,\|\boldsymbol{g}\|_{\infty,\Omega}\,,\ \widetilde{C}_{S,\mathrm{LIP}}\,\|\widetilde{\mathbf{u}}_h\|_{1,\Omega}\,,\ \widetilde{C}_{\mathscr{C}^C}\,\|\widetilde{\varphi}_h\|_{1,\Omega}\right\}\|(\mathbf{w}_h,\phi_h)-(\widetilde{\mathbf{w}}_h,\widetilde{\phi}_h)\|\,.\end{aligned}$$

La propiedad de Lipschitz continuidad (3.43) del operador $\mathscr{L}_h$ entonces se deduce utilizando el hecho de que $(\widetilde{\mathbf{u}}_h,\widetilde{\varphi}_h)\in B_h$ (según (3.42)) y por lo tanto $\|\widetilde{\mathbf{u}}_h\|_{1,\mathcal{T}_h}\leq$

$\widetilde{C}_1(\mu, \alpha, \kappa, U, \boldsymbol{f}, \boldsymbol{g})$ y $\|\widetilde{\varphi}_h\|_{1,\Omega} \leq C_2(\alpha, \kappa, U)$, con lo cual

$$\begin{aligned}
&\widetilde{\alpha}_{\mathscr{A}} \, \|\mathscr{L}_h(\mathbf{w}_h, \phi_h) - \mathscr{L}_h(\widetilde{\mathbf{w}}_h, \widetilde{\phi}_h)\| \\
&\leq \text{máx}\left\{ \widetilde{C}_{sob}\, \gamma \, \|\boldsymbol{g}\|_{\infty,\Omega} \, , \, \widetilde{C}_{S,\mathrm{LIP}} \, \widetilde{C}_1(\mu, \alpha, \kappa, U, \boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}) \, , \, \widetilde{C}_{\mathscr{C}C} \, C_2(\alpha, \kappa, U) \right\} \\
&\qquad\qquad \times \|(\mathbf{w}_h, \phi_h) - (\widetilde{\mathbf{w}}_h, \widetilde{\phi}_h)\|.
\end{aligned}$$

Finalmente, llegamos a que

$$\|\mathscr{L}_h(\mathbf{w}_h, \phi_h) - \mathscr{L}_h(\widetilde{\mathbf{w}}_h, \widetilde{\phi}_h)\| \leq \widetilde{C}_{\mathrm{Lip}} \|(\mathbf{w}_h, \phi_h) - (\widetilde{\mathbf{w}}_h, \widetilde{\phi}_h)\| \, , \tag{3.50}$$

donde

$$\widetilde{C}_{\mathrm{Lip}} = \widetilde{\alpha}_{\mathscr{A}}^{-1} \, \text{máx}\left\{ \widetilde{C}_{sob}\, \gamma \, \|\boldsymbol{g}\|_{\infty,\Omega} \, , \, \widetilde{C}_{S,\mathrm{LIP}} \, \widetilde{C}_1(\mu, \alpha, \kappa, U, \boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}) \, , \, \widetilde{C}_{\mathscr{C}C} \, C_2(\alpha, \kappa, U) \right\} \, , \tag{3.51}$$

es claramente independiente de h. En virtud de (3.42) y (3.50) se concluye que el operador $\mathscr{L}_h : B_h \longrightarrow B_h$ es continuo y se cumplen las hipótesis del Teorema 3.2.3. Estamos entonces en posición de establecer el resultado principal de la sección.

Teorema 3.2.4. *Bajo las hipótesis del Teorema 3.2.1, el problema* (3.31) *tiene al menos una solución. Aún más, si los datos son lo suficientemente pequeños como para que la constante de Lipschitz continuidad* $\widetilde{C}_{\mathrm{Lip}}$ (3.51) *satisfaga* $\widetilde{C}_{\mathrm{Lip}} < 1$ *entonces la solución es única.*

Demostración. Se sabe que $\mathscr{L}_h : B_h \longrightarrow B_h$ y además cumple con las condiciones del Teorema 3.2.3, podemos asegurar por lo menos la existencia de un punto fijo, es decir, una solución al problema (3.31). Para probar unicidad supondremos que existe otra solución distinta.

Sean $(\mathbf{u}_h, \varphi_h)$ y $(\widetilde{\mathbf{u}}_h, \widetilde{\varphi}_h)$ soluciones de (3.31), por lo tanto son puntos fijos del operador $\mathscr{L}_h$, luego usando la Lipschitz continuidad se llega a que:

$$\|(\mathbf{u}_h,\varphi_h)-(\widetilde{\mathbf{u}}_h,\widetilde{\varphi}_h)\| = \|\mathscr{L}_h(\mathbf{u}_h,\varphi_h)-\mathscr{L}_h(\widetilde{\mathbf{u}}_h,\widetilde{\varphi}_h)\| \leq \widetilde{C}_{\mathrm{Lip}}\|(\mathbf{u}_h,\varphi_h)-(\widetilde{\mathbf{u}}_h,\widetilde{\varphi}_h)\|\,,$$

ordenando y agrupando:

$$(1-\widetilde{C}_{\mathrm{Lip}})\|(\mathbf{u}_h,\varphi_h)-(\widetilde{\mathbf{u}}_h,\widetilde{\varphi}_h)\| \leq 0\,.$$

Como $(\mathbf{u}_h,\varphi_h)\neq(\widetilde{\mathbf{u}}_h,\widetilde{\varphi}_h)$ por suposición $\|(\mathbf{u}_h,\varphi_h)-(\widetilde{\mathbf{u}}_h,\widetilde{\varphi}_h)\|\geq 0$, pero si $\widetilde{C}_{\mathrm{Lip}}<1$ se puede asegurar que

$$\|(\mathbf{u}_h,\varphi_h)-(\widetilde{\mathbf{u}}_h,\widetilde{\varphi}_h)\| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\mathbf{u}_h,\varphi_h)=(\widetilde{\mathbf{u}}_h,\widetilde{\varphi}_h)\,,$$

esto quiere decir que la solución es única para $\widetilde{C}_{\mathrm{Lip}}<1$, o dicho de otra forma, para datos lo suficientemente pequeños de manera que

$$\widetilde{C}_{\mathrm{Lip}} = \widetilde{\alpha}_{\mathscr{A}}^{-1}\,\text{máx}\left\{\widetilde{C}_{sob}\,\gamma\,\|\boldsymbol{g}\|_{\infty,\Omega}\,,\,\widetilde{C}_{S,\mathrm{LIP}}\,\widetilde{C}_1(\mu,\alpha,\kappa,U,\boldsymbol{f},\boldsymbol{g})\,,\,\widetilde{C}_{\mathscr{C}C}\,C_2(\alpha,\kappa,U)\right\} < 1.$$

$\square$

Capítulo 4

Análisis del error a priori

En esta sección nos concentraremos en estudiar los errores de aproximación

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{2,\mathcal{T}_h}, \qquad \|p - p_h\|_{0,\Omega} \qquad \text{y} \qquad \|\varphi - \varphi_h\|_{1,\Omega}$$

donde $(\mathbf{u}, p, \varphi)$ es la solución débil del problema de Bioconvección (2.11) estudiado en el Capítulo 2 y $(\mathbf{u}_h, p_h, \varphi_h)$ corresponde a la respectiva aproximación numérica que provee el método DG-primal (3.6) descrito y analizado en el Capítulo 3. Comenzaremos en concertar algunos preliminares en la Sección 4.1, en donde demostraremos una propiedad de ortogonalidad de Galerkin que será clave en la estimaciones del error a priori que se llevarán a cabo en la Sección 4.2.

4.1. Preliminares

Partimos con el siguiente resultado establece una propiedad de consistencia que debe satisfacer el esquema discreto (3.6).

Lema 4.1.1. *Sea $k \geq 1$. Suponga que la solución continua $(\mathbf{u}, p, \varphi)$ de (2.11) posee* *la regularidad*

$$\mathbf{u} \in [H^{k+1}(\Omega)]^d \cap [H_0^1(\Omega)]^d \cap \boldsymbol{X}, \quad p \in H^k(\Omega) \cap L_0^2(\Omega) \quad y \quad \varphi \in H^{k+1}(\Omega) \cap L_0^2(\Omega)\,, \tag{4.1}$$

entonces $(\mathbf{u}, p, \varphi)$ *es solución del problema discreto* (3.6). *Es decir,*

$$\begin{aligned} \mathscr{A}_h^S(\mathbf{u}, \mathbf{v}_h) + \mathscr{C}_h^S(\mathbf{u}; \mathbf{u}, \mathbf{v}_h) - \mathscr{B}^S(\mathbf{v}_h, p) &= \mathscr{F}^S(\varphi, \mathbf{v}_h), \\ \mathscr{B}^S(\mathbf{u}, q_h) &= 0\,, \\ \mathscr{A}^C(\varphi, \psi_h) + \mathscr{C}^C(\mathbf{u}; \varphi, \psi_h) &= \mathscr{F}^C(\psi_h), \end{aligned} \tag{4.2}$$

para todo $(\mathbf{v}_h, q_h, \psi_h) \in \boldsymbol{V}_h \times Q_h \times W_h$.

Demostración. La segunda ecuación de (4.2) es inmediata por el hecho que $\mathbf{u} \in \boldsymbol{X}$. Ahora, de acuerdo a la regularidad asumida para $\mathbf{u}$ en (4.1) se sigue que

$$\nabla_h \mathbf{u} = \nabla \mathbf{u}\,, \quad [\![\mathbf{u}]\!] = 0 \quad \forall\, e \in \mathcal{E}_h^i\,, \quad \{\{\nabla \mathbf{u}\}\} = \nabla \mathbf{u} \quad \forall\, e \in \mathcal{E}_h \quad \text{y} \quad \mathbf{u} = 0 \quad \text{sobre} \quad \Gamma,$$

con lo que al evaluar $\mathscr{A}_h^S$ en $(\mathbf{u}, \mathbf{v}_h)$, con $\mathbf{v}_h \in \boldsymbol{V}_h$, usar la definición de esta forma bilineal, la definición de salto en la frontera e integrando por partes hacia atrás se deduce que

$$\mathscr{A}_h^S(\mathbf{u}, \mathbf{v}_h) = \mu \int_\Omega \nabla \mathbf{u}_h : \nabla_h \mathbf{v}_h - \sum_{e \in \mathcal{E}_h^b} \int_e \mu \nabla \mathbf{u} : \mathbf{v}_h \otimes \mathbf{n} = -\mu \int_\Omega \Delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_h.$$

Asimismo, como los saltos de $\mathbf{u}$ en los lados o caras interiores del dominio son cero, se sigue que la traza exterior $\mathbf{u}^e$ (ver la definición de la forma discreta $\mathscr{C}_h^S$ en (3.8)) coincide con $\mathbf{u}$, es decir, $\mathbf{u}^e - \mathbf{u} = \mathbf{0}$ para cada lado/cara interior $e \in \mathcal{E}_h^i$, por lo que

$$\mathscr{C}_h^S(\mathbf{u}; \mathbf{u}, \mathbf{v}_h) = \int_\Omega (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_h\,.$$

Además, por la regularidad asumida para p y el hecho que $\mathbf{u}|_\Gamma = \mathbf{0}$ podemos integrar por partes para deducir que

$$\mathscr{B}^S(\mathbf{v}_h, p) = \int_\Omega p \text{ div } \mathbf{v}_h \; = - \int_\Omega \nabla p \cdot \mathbf{v}_h \,.$$

Al combinar las tres identidades obtenidas arriba y hacer uso del hecho que $-\mu\Delta\mathbf{u} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} + \nabla p = \boldsymbol{f} - (1+\gamma\varphi)\boldsymbol{g}$ en Ω de acuerdo con la primera ecuación del problema fuerte (2.10), se concluye que

$$\mathscr{A}_h^S(\mathbf{u}, \mathbf{v}_h) + \mathscr{C}_h^S(\mathbf{u}; \mathbf{u}, \mathbf{v}_h) - \mathscr{B}^S(\mathbf{v}_h, p) = \int_\Omega \Big(\boldsymbol{f} - (1+\gamma\varphi)\boldsymbol{g}\Big) \cdot \mathbf{v}_h \,,$$

lo cual corresponde a la primera identidad de (4.2). Por su parte, para deducir la respectiva propiedad de consistencia en las ecuaciones de la concentración basta con efectuar una integración por partes hacia atrás en los dos términos que definen la forma bilineal $\mathscr{A}^C$, luego agruparlos adecuadamente y usar que $-\kappa\Delta\varphi + U\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_3} = -\mathbf{u}\cdot\nabla\varphi$ en Ω y que $\kappa\dfrac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}} - U\varphi n_3 = n_3 U\alpha$ sobre Γ, de acuerdo con (2.10), para deducir que

$$\begin{aligned}
\mathscr{A}^C(\varphi, \psi_h) \;&=\; \kappa \int_\Omega \nabla\varphi \cdot \nabla\psi_h - U \int_\Omega \varphi \frac{\partial\psi_h}{\partial\mathbf{n}} \\
&= \; -\kappa \int_\Omega \Delta\varphi\, \psi_h \;+\; \kappa \int_\Gamma \frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}}\psi_h \;+\; U \int_\Omega \frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\psi_h \;-\; U \int_\Gamma \varphi\psi_h n_3 \\
&= \int_\Omega \Big(-\kappa\Delta\varphi + U\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\Big)\, \psi_h \;+\; \int_\Gamma \Big(\kappa\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}} - U\varphi n_3\Big)\psi_h \\
&= \; - \int_\Omega (\mathbf{u}\cdot\nabla\varphi)\psi_h \;+ U\alpha \int_\Gamma n_3\psi_h \,,
\end{aligned}$$

lo cual corresponde a la tercera ecuación de (4.2) al hacer uso de la definición de la forma trilineal $\mathscr{C}^C$ y el funcional $\mathscr{F}^C$ (ver (2.13) y (2.15), respectivamente). $\square$

Como consecuencia inmediata del resultado anterior, se establece a continuación la siguiente relación de ortogonalidad de Galerkin la cual es de suma utilidad para derivar los estimados de error a priori que nos interesa estudiar.

Lema 4.1.2. *Bajo las mismas hipótesis del Lema 4.1.1, se cumple que*

$$\mathscr{A}_h^S(\mathbf{u}-\mathbf{u}_h,\mathbf{v}_h)+\mathscr{C}_h^S(\mathbf{u};\mathbf{u},\mathbf{v}_h)-\mathscr{C}_h^S(\mathbf{u}_h;\mathbf{u}_h,\mathbf{v}_h)-\mathscr{B}^S(\mathbf{v}_h,p-p_h)-\mathscr{F}^S(\varphi-\varphi_h,\mathbf{v}_h)\;=\;0 \tag{4.3}$$

$$\mathscr{A}^C(\varphi-\varphi_h,\psi_h)\;+\;\mathscr{C}^C(\mathbf{u};\varphi,\psi_h)\;-\;\mathscr{C}^C(\mathbf{u}_h;\varphi_h,\psi_h)=\;0 \tag{4.4}$$

para todo $\mathbf{v}_h\in\boldsymbol{V}_h$ *y para todo* $\psi_h\in W_h$.

Demostración. El resultado sigue de combinar (4.2) con las respectivas ecuaciones del problema discreto (ver (3.6)) .

□

4.2. Estimadores de error a priori

Como es usual, los estimadores a priori se basarán en descomponer los errores de aproximación individuales en la suma de un error de proyección (o interpolación, en el caso de la concentración) y un error local discreto. Con más precisión, escribimos

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{e}_{\mathbf{u}}\;&=\;\mathbf{u}-\mathbf{u}_h\;=\;\big(\mathbf{u}-\Pi_h^{\mathrm{BDM}}\mathbf{u}\big)\;+\;\big(\Pi_h^{\mathrm{BDM}}\mathbf{u}-\mathbf{u}_h\big)\;=:\;\boldsymbol{e}_{\mathbf{u}}^{\Pi}\;+\;\boldsymbol{e}_{\mathbf{u}}^{h}\,,\\
\boldsymbol{e}_p\;&=\;p-p_h\;=\;\big(p-\Pi_h^{\mathrm{L}^2}p\big)\;+\;\big(\Pi_h^{\mathrm{L}^2}p-p_h\big)\;=:\;\boldsymbol{e}_p^{\Pi}\;+\;\boldsymbol{e}_p^{h}\,,\\
\boldsymbol{e}_\theta\;&=\;\varphi-\varphi_h\;=\;\big(\varphi-\mathcal{I}_h\varphi\big)\;+\;\big(\mathcal{I}_h\varphi-\varphi_h\big)\;=:\;\boldsymbol{e}_\theta^{\Pi}\;+\;\boldsymbol{e}_\theta^{h}\,.
\end{aligned} \tag{4.5}$$

donde, en virtud de los espacios de elementos finitos (3.5) que usamos en nuestro esquema discreto, consideramos $\Pi_h^{\mathrm{BDM}}\mathbf{u}$, $\Pi_h^{\mathrm{L}^2}p$ e $\mathcal{I}_h\varphi$ como la proyección BDM de $\mathbf{u}$ en el espacio $\boldsymbol{V}_h$, la proyección L^2 de p en el espacio Q_h y la interpolación nodal (de Lagrange) de φ en W_h, respectivamente. A propósito, las siguientes propiedades de aproximación se satisfacen (ver [20, 24], por ejemplo): existe una constante positiva C, independiente de h, tal que

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}-\Pi_h^{\mathrm{BDM}}\mathbf{u}\|_{2,\mathcal{T}_h} &\leq C\,h^k\|\mathbf{u}\|_{k+1,\Omega}\,, \\ \|p-\Pi_h^{\mathrm{L}^2}p\|_{0,\Omega} &\leq C\,h^k\|p\|_{k,\Omega}\,, \\ \|\varphi-\mathcal{I}_h\varphi\|_{1,\Omega} &\leq C\,h^k\|\varphi\|_{k+1,\Omega}\,. \end{aligned} \tag{4.6}$$

De acuerdo a esto, al usar desigualdad triangular en (4.5) y aplicar (4.6) y la desigualdad inversa (3.3) (en el caso de la velocidad), conseguimos que

$$\begin{aligned} &\|\boldsymbol{e}_{\mathbf{u}}\|_{2,\mathcal{T}_h} \leq \|\boldsymbol{e}_{\mathbf{u}}^{\Pi}\|_{2,\mathcal{T}_h} + \|\boldsymbol{e}_{\mathbf{u}}^{h}\|_{2,\mathcal{T}_h} \leq Ch^k\|\mathbf{u}\|_{k+1,\Omega} + C\|\boldsymbol{e}_{\mathbf{u}}^{h}\|_{1,\mathcal{T}_h}\,, \\ &\|\boldsymbol{e}_p\|_{0,\Omega} \leq \|\boldsymbol{e}_p^{\Pi}\|_{0,\Omega} + \|\boldsymbol{e}_p^{h}\|_{0,\Omega} \leq Ch^k\|p\|_{k,\Omega} + C\|\boldsymbol{e}_p^{h}\|_{0,\Omega}\,, \\ &\|\boldsymbol{e}_\theta\|_{1,\Omega} \leq \|\boldsymbol{e}_\theta^{\Pi}\|_{1,\Omega} + \|\boldsymbol{e}_\theta^{h}\|_{1,\Omega} \leq Ch^k\|\varphi\|_{k+1,\Omega} + C\|\boldsymbol{e}_\theta^{h}\|_{1,\Omega}\,. \end{aligned} \tag{4.7}$$

En consecuencia, para estimar el error a priori de cada una de las variables necesitaremos estudiar el error discreto $\boldsymbol{e}_{\mathbf{u}}^h$, $\boldsymbol{e}_p^h$ y $\boldsymbol{e}_\theta^h$. Empezaremos con la velocidad y concentración, por medio del siguiente resultado.

Teorema 4.2.1. *Bajo las mismas hipótesis del Teorema 2.3.5, el Teorema 3.2.4 y el Lema 4.1.1, sean* $(\mathbf{u},p,\varphi)$ *y* $(\mathbf{u}_h,p_h,\varphi_h)$ *las soluciones de los problemas* (2.11) *y* (3.6)*, respectivamente. Suponga, además, que los datos son lo suficientemente pequeños para que la constante* $\widetilde{\alpha}$ *(definida en* (4.18)*) sea positiva. Entonces, existe una constante* $C>0$*, independiente de* h*, tal que*

$$\|\mathbf{u}-\mathbf{u}_h\|_{2,\mathcal{T}_h} + \|\varphi-\varphi_h\|_{1,\Omega} \leq C\,h^k\left(\|\mathbf{u}\|_{k+1,\Omega} + \|\varphi\|_{k+1,\Omega}\right). \tag{4.8}$$

Demostración. En primer lugar procederemos con la velocidad. Para ello, notamos que en virtud de la elipticidad de la forma bilineal discreta $\mathscr{A}_h^S(\cdot,\cdot)$ (cf. (3.14)) y la no-negatividad de la forma $\mathscr{C}_h^S(\mathbf{u}_h;\cdot,\cdot)$, con $\mathbf{u}_h$ claramente en $\boldsymbol{X}_h$ (cf. (3.18) y (3.19)), se cumple que

$$\begin{aligned}\widetilde{\alpha}_S\,\|\boldsymbol{e}_{\mathbf{u}}^h\|_{1,\mathcal{T}_h}^2 \;&\le\; \mathscr{A}_h^S(\boldsymbol{e}_{\mathbf{u}}^h,\boldsymbol{e}_{\mathbf{u}}^h)\;\le\;\mathscr{A}_h^S(\boldsymbol{e}_{\mathbf{u}}^h,\boldsymbol{e}_{\mathbf{u}}^h)\,+\,\mathscr{C}_h^S(\mathbf{u}_h;\boldsymbol{e}_{\mathbf{u}}^h,\boldsymbol{e}_{\mathbf{u}}^h)\\ &=\;\mathscr{A}_h^S(\boldsymbol{e}_{\mathbf{u}},\boldsymbol{e}_{\mathbf{u}}^h)\,-\,\mathscr{A}_h^S(\boldsymbol{e}_{\mathbf{u}}^\Pi,\boldsymbol{e}_{\mathbf{u}}^h)\,+\,\mathscr{C}_h^S(\mathbf{u}_h;\boldsymbol{e}_{\mathbf{u}},\boldsymbol{e}_{\mathbf{u}}^h)\,-\,\mathscr{C}_h^S(\mathbf{u}_h;\boldsymbol{e}_{\mathbf{u}}^\Pi,\boldsymbol{e}_{\mathbf{u}}^h)\\ &=\;\Big(\mathscr{A}_h^S(\boldsymbol{e}_{\mathbf{u}},\boldsymbol{e}_{\mathbf{u}}^h)-\mathscr{C}_h^S(\mathbf{u}_h;\mathbf{u}_h,\boldsymbol{e}_{\mathbf{u}}^h)\Big)\,-\,\mathscr{A}_h^S(\boldsymbol{e}_{\mathbf{u}}^\Pi,\boldsymbol{e}_{\mathbf{u}}^h)\\ &\qquad+\mathscr{C}_h^S(\mathbf{u}_h;\mathbf{u},\boldsymbol{e}_{\mathbf{u}}^h)\,-\,\mathscr{C}_h^S(\mathbf{u}_h;\boldsymbol{e}_{\mathbf{u}}^\Pi,\boldsymbol{e}_{\mathbf{u}}^h)\,,\end{aligned}\tag{4.9}$$

donde en la primera igualdad se reemplaza $\boldsymbol{e}_{\mathbf{u}}^h=\boldsymbol{e}_{\mathbf{u}}-\boldsymbol{e}_{\mathbf{u}}^\Pi$ de acuerdo con (4.5) en la primera componente de $\mathscr{A}_h^S$ y en la segunda componente de $\mathscr{C}_h^S$, se usa la linealidad de estas formas en dichas componentes y, luego, en la última igualdad se reemplaza $\boldsymbol{e}_{\mathbf{u}}=\mathbf{u}-\mathbf{u}_h$ en $\mathscr{C}_h^S(\mathbf{u}_h;\boldsymbol{e}_{\mathbf{u}},\boldsymbol{e}_{\mathbf{u}}^h)$ y se reagrupan términos. Ahora bien, por la relación de ortogonalidad de Galerkin (4.3), con $\mathbf{v}_h=\boldsymbol{e}_{\mathbf{u}}^h$, se tiene que

$$\mathscr{A}_h^S(\boldsymbol{e}_{\mathbf{u}},\boldsymbol{e}_{\mathbf{u}}^h)\,+\,\mathscr{C}_h^S(\mathbf{u};\mathbf{u},\boldsymbol{e}_{\mathbf{u}}^h)\,-\,\mathscr{C}_h^S(\mathbf{u}_h;\mathbf{u}_h,\boldsymbol{e}_{\mathbf{u}}^h)+\mathscr{B}^S(\boldsymbol{e}_{\mathbf{u}}^h,-\boldsymbol{e}_p)\,-\,\mathscr{F}^S(\boldsymbol{e}_\theta,\boldsymbol{e}_{\mathbf{u}}^h)\;=\;0\,,\tag{4.10}$$

pero $\mathbf{u}_h\in\boldsymbol{X}_h$ y $\Pi_h^{\mathrm{BDM}}\mathbf{u}\in\boldsymbol{X}_h$ (porque $\mathbf{u}\in\boldsymbol{X}$ y por propiedades del proyector BDM [20]) y entonces $\operatorname{div}\,\boldsymbol{e}_{\mathbf{u}}^h=0$ con lo que $\mathscr{B}^S(\boldsymbol{e}_{\mathbf{u}}^h,-\boldsymbol{e}_p)=0$ y (4.10) se reduce por lo tanto a

$$\mathscr{A}_h^S(\boldsymbol{e}_{\mathbf{u}},\boldsymbol{e}_{\mathbf{u}}^h)\,-\,\mathscr{C}_h^S(\mathbf{u}_h;\mathbf{u}_h,\boldsymbol{e}_{\mathbf{u}}^h)\;=\;\mathscr{F}^S(\boldsymbol{e}_\theta,\boldsymbol{e}_{\mathbf{u}}^h)\,-\,\mathscr{C}_h^S(\mathbf{u};\mathbf{u},\boldsymbol{e}_{\mathbf{u}}^h)\,.\tag{4.11}$$

Al reemplazar (4.11) en (4.9) y, luego, sumar y restar el término $\mathscr{C}_h^S(\Pi_h^{\mathrm{BDM}}\mathbf{u};\mathbf{u},\boldsymbol{e}_{\mathbf{u}}^h)$

y asociando convenientemente se llega a

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\alpha}_S \, \|\boldsymbol{e}_{\mathbf{u}}^h\|_{1,\mathcal{T}_h}^2 \;\leq\; & \mathscr{F}^S(\boldsymbol{e}_\theta, \boldsymbol{e}_{\mathbf{u}}^h) \,-\, \mathscr{C}_h^S(\mathbf{u}; \mathbf{u}, \boldsymbol{e}_{\mathbf{u}}^h) \,-\, \mathscr{A}_h^S(\boldsymbol{e}_{\mathbf{u}}^\Pi, \boldsymbol{e}_{\mathbf{u}}^h) \\
& \qquad + \mathscr{C}_h^S(\mathbf{u}_h; \mathbf{u}, \boldsymbol{e}_{\mathbf{u}}^h) \,-\, \mathscr{C}_h^S(\mathbf{u}_h; \boldsymbol{e}_{\mathbf{u}}^\Pi, \boldsymbol{e}_{\mathbf{u}}^h) \\
=\; & \mathscr{F}^S(\boldsymbol{e}_\theta, \boldsymbol{e}_{\mathbf{u}}^h) \,-\, \mathscr{A}_h^S(\boldsymbol{e}_{\mathbf{u}}^\Pi, \boldsymbol{e}_{\mathbf{u}}^h) \,-\, \mathscr{C}_h^S(\mathbf{u}_h; \boldsymbol{e}_{\mathbf{u}}^\Pi, \boldsymbol{e}_{\mathbf{u}}^h) \\
& \qquad + \Big(\mathscr{C}_h^S(\Pi_h^{\mathrm{BDM}}\mathbf{u}; \mathbf{u}, \boldsymbol{e}_{\mathbf{u}}^h) \,-\, \mathscr{C}_h^S(\mathbf{u}; \mathbf{u}, \boldsymbol{e}_{\mathbf{u}}^h) \Big) \\
& \qquad + \Big(\mathscr{C}_h^S(\mathbf{u}_h; \mathbf{u}, \boldsymbol{e}_{\mathbf{u}}^h) - \mathscr{C}_h^S(\Pi_h^{\mathrm{BDM}}\mathbf{u}; \mathbf{u}, \boldsymbol{e}_{\mathbf{u}}^h) \Big) .
\end{aligned}
$$

A continuación, usando apropiadamente la estimación (3.48) para acotar $\mathscr{F}^S$ y las estimaciones (3.10) y (3.20) para las formas $\mathscr{A}_h^S$ y C_h^S se infiere que

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\alpha}_S \|\boldsymbol{e}_{\mathbf{u}}^h\|_{1,\mathcal{T}_h}^2 \;\leq\; & \widetilde{C}_{Sob} \gamma \|\boldsymbol{g}\|_{\infty,\Omega} \, \|\boldsymbol{e}_\theta\|_{0,\Omega} \|\boldsymbol{e}_{\mathbf{u}}^h\|_{1,\mathcal{T}_h} \,+\, \widehat{C}_{\mathscr{A}^S} \, \|\boldsymbol{e}_{\mathbf{u}}^\Pi\|_{2,\mathcal{T}_h} \|\boldsymbol{e}_{\mathbf{u}}^h\|_{1,\mathcal{T}_h} \\
& + \widetilde{C}_{S,\mathrm{LIP}} \Big[\|\mathbf{u}_h\|_{1,\mathcal{T}_h} \|\boldsymbol{e}_{\mathbf{u}}^\Pi\|_{1,\mathcal{T}_h} \,+\, \|\boldsymbol{e}_{\mathbf{u}}^\Pi\|_{1,\mathcal{T}_h} \|\mathbf{u}\|_{1,\mathcal{T}_h} \,+\, \|\boldsymbol{e}_{\mathbf{u}}^h\|_{1,\mathcal{T}_h} \|\mathbf{u}\|_{1,\mathcal{T}_h} \Big] \|\boldsymbol{e}_{\mathbf{u}}^h\|_{1,\mathcal{T}_h} .
\end{aligned}
$$

Luego, simplificando a ambos lados por $\|\boldsymbol{e}_{\mathbf{u}}^h\|_{1,\mathcal{T}_h}$, usando $\|\boldsymbol{e}_\theta\|_{0,\Omega} \leq \|\boldsymbol{e}_\theta\|_{1,\Omega} \leq \|\boldsymbol{e}_\theta^\Pi\|_{1,\Omega} + \|\boldsymbol{e}_\theta^h\|_{1,\Omega}$ y $\|\boldsymbol{e}_{\mathbf{u}}^\Pi\|_{1,\mathcal{T}_h} \leq \|\boldsymbol{e}_{\mathbf{u}}^\Pi\|_{2,\mathcal{T}_h}$ y las cotas a priori para las soluciones $\mathbf{u}$ y $\mathbf{u}_h$ de acuerdo con (2.28) y (3.24), respectivamente, se obtiene

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\alpha}_S \|\boldsymbol{e}_{\mathbf{u}}^h\|_{1,\mathcal{T}_h} \;\leq\; & \widetilde{C}_{Sob} \gamma \|\boldsymbol{g}\|_{\infty,\Omega} \, \|\boldsymbol{e}_\theta^\Pi\|_{1,\Omega} \,+\, \widetilde{C}_{Sob} \gamma \|\boldsymbol{g}\|_{\infty,\Omega} \, \|\boldsymbol{e}_\theta^h\|_{1,\Omega} \,+\, \widehat{C}_{\mathscr{A}^S} \, \|\boldsymbol{e}_{\mathbf{u}}^\Pi\|_{2,\mathcal{T}_h} \\
& + \widetilde{C}_{S,\mathrm{LIP}} \Big[\widetilde{C}_1(\mu, \alpha, \kappa, U, \boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}) \|\boldsymbol{e}_{\mathbf{u}}^\Pi\|_{2,\mathcal{T}_h} \,+\, C_1(\mu, \alpha, \kappa, U, \boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}) \big(\|\boldsymbol{e}_{\mathbf{u}}^h\|_{1,\mathcal{T}_h} \,+\, \|\boldsymbol{e}_{\mathbf{u}}^\Pi\|_{2,\mathcal{T}_h} \big) \Big] .
\end{aligned}
\tag{4.12}
$$

Llevaremos a cabo a continuación un procedimiento análogo para obtener una estimación preliminar asociado con el error local discreto $\boldsymbol{e}_\theta^h$ para la concentración. En este sentido, la elipticidad de la forma $\mathscr{A}^C$ (cf. (3.16)) y el hecho que $\mathscr{C}^C(\mathbf{u}_h; \boldsymbol{e}_\theta^h, \boldsymbol{e}_\theta^h) = 0$

(pues $\mathbf{u}_h \in \boldsymbol{X}_h$) implican que

$$\begin{aligned}\widetilde{\alpha}_C \,\|\boldsymbol{e}_\theta^h\|_{1,\Omega}^2 \,\leq\, \mathscr{A}^C(\boldsymbol{e}_\theta^h, \boldsymbol{e}_\theta^h) \,&=\, \mathscr{A}^C(\boldsymbol{e}_\theta^h, \boldsymbol{e}_\theta^h) \,+\, \mathscr{C}^C(\mathbf{u}_h; \boldsymbol{e}_\theta^h, \boldsymbol{e}_\theta^h) \\ &= \Big(\mathscr{A}^C(\boldsymbol{e}_\theta, \boldsymbol{e}_\theta^h) - \mathscr{C}^C(\mathbf{u}_h; \varphi_h, \boldsymbol{e}_\theta^h)\Big) \,-\, \mathscr{A}^C(\boldsymbol{e}_\theta^\Pi, \boldsymbol{e}_\theta^h) \\ &\qquad + \mathscr{C}^C(\mathbf{u}_h; \varphi, \boldsymbol{e}_\theta^h) \,-\, \mathscr{C}^C(\mathbf{u}_h; \boldsymbol{e}_\theta^\Pi, \boldsymbol{e}_\theta^h)\,.\end{aligned} \tag{4.13}$$

Pero por la relación de ortogonalidad de Galerkin (4.4) con $\psi_h = \boldsymbol{e}_\theta^h$ se tiene que

$$\mathscr{A}^C(\boldsymbol{e}_\theta, \boldsymbol{e}_\theta^h) \,-\, \mathscr{C}^C(\mathbf{u}_h; \varphi_h, \boldsymbol{e}_\theta^h) = \,-\mathscr{C}^C(\mathbf{u}; \varphi, \boldsymbol{e}_\theta^h)\,,$$

lo cual al reemplazarlo en (4.13), usar posteriormente linealidad de $\mathscr{C}^C$ en la primera componente, el hecho que $\boldsymbol{e}_\mathbf{u} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_h$, el acotamiento de las formas $\mathscr{A}^C$ y $\mathscr{C}^C$ (cf. (3.15) y (3.13)) conduce a

$$\begin{aligned}\widetilde{\alpha}_C \,\|\boldsymbol{e}_\theta^h\|_{1,\Omega}^2 \,&\leq\, -\mathscr{A}^C(\boldsymbol{e}_\theta^\Pi, \boldsymbol{e}_\theta^h) \,-\, \mathscr{C}^C(\boldsymbol{e}_\mathbf{u}; \varphi, \boldsymbol{e}_\theta^h) \,-\, \mathscr{C}^C(\mathbf{u}_h; \boldsymbol{e}_\theta^\Pi, \boldsymbol{e}_\theta^h) \\ &\leq\, (\kappa + U)\,\|\boldsymbol{e}_\theta^\Pi\|_{1,\Omega}\|\boldsymbol{e}_\theta^h\|_{1,\Omega} \,+\, \widetilde{C}_{\mathscr{C}^C}\Big[\|\boldsymbol{e}_\mathbf{u}\|_{1,\mathcal{T}_h}\|\varphi\|_{1,\Omega} \,+\, \|\mathbf{u}_h\|_{1,\mathcal{T}_h}\|\boldsymbol{e}_\theta^\Pi\|_{1,\Omega}\Big]\|\boldsymbol{e}_\theta^h\|_{1,\Omega}\,,\end{aligned} \tag{4.14}$$

y al simplificar en ambos lados por $\|\boldsymbol{e}_\theta^h\|_{1,\Omega}$ y usar los estimados a priori para φ y $\mathbf{u}_h$ en las normas $\|\cdot\|_{1,\Omega}$ y $\|\cdot\|_{1,\mathcal{T}_h}$ de acuerdo con (2.28) y (3.24), respectivamente, se consigue que

$$\begin{aligned}\widetilde{\alpha}_C \,\|\boldsymbol{e}_\theta^h\|_{1,\Omega} \,&\leq\, (\kappa + U)\,\|\boldsymbol{e}_\theta^\Pi\|_{1,\Omega} \,+\, \widetilde{C}_{\mathscr{C}^C}\Big[C_2(\alpha,\kappa,U)\|\boldsymbol{e}_\mathbf{u}\|_{1,\mathcal{T}_h} \,+\, \widetilde{C}_1(\mu,\alpha,\kappa,U,\boldsymbol{f},\boldsymbol{g})\|\boldsymbol{e}_\theta^\Pi\|_{1,\Omega}\Big] \\ &\leq\, (\kappa + U)\,\|\boldsymbol{e}_\theta^\Pi\|_{1,\Omega} \,+\, \widetilde{C}_{\mathscr{C}^C}\Big[C_2(\alpha,\kappa,U)\Big(\|\boldsymbol{e}_\mathbf{u}^\Pi\|_{2,\mathcal{T}_h} \,+ \|\boldsymbol{e}_\mathbf{u}^h\|_{1,\mathcal{T}_h}\Big) \,+\, \widetilde{C}_1(\mu,\alpha,\kappa,U,\boldsymbol{f},\boldsymbol{g})\|\boldsymbol{e}_\theta^\Pi\|_{1,\Omega}\Big]\end{aligned} \tag{4.15}$$

donde en la última desigualdad se ha usado que $\|\boldsymbol{e}_\mathbf{u}\|_{1,\mathcal{T}_h} \,\leq\, \|\boldsymbol{e}_\mathbf{u}^\Pi\|_{2,\mathcal{T}_h} \,+ \|\boldsymbol{e}_\mathbf{u}^h\|_{1,\mathcal{T}_h}$.

Ahora bien, definiendo las siguientes constantes (dependientes de datos)

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{C}_1(\mu,\alpha,\kappa,U,\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}) &:= \widetilde{C}_{S,\mathrm{LIP}} C_1(\mu,\alpha,\kappa,U,\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}) + \widetilde{C}_{\mathscr{C}^C} C_2(\alpha,\kappa,U)\,,\\
\boldsymbol{C}_2(\mu,\alpha,\kappa,U,\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}) &:= \widehat{C}_{\mathscr{A}^S} + \widetilde{C}_{S,\mathrm{LIP}} \widetilde{C}_1(\mu,\alpha,\kappa,U,\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}) + \boldsymbol{C}_1(\mu,\alpha,\kappa,U,\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}),\\
\boldsymbol{C}_3(\mu,\alpha,\kappa,U,\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}) &:= \widetilde{C}_{Sob}\gamma\|\boldsymbol{g}\|_{\infty,\Omega} + \kappa + U + \widetilde{C}_{\mathscr{C}^C}\widetilde{C}_1(\mu,\alpha,\kappa,U,\boldsymbol{f},\boldsymbol{g})\,,\\
\boldsymbol{C}_4(\mu,\alpha,\kappa,U,\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}) &:= \text{máx}\left\{\boldsymbol{C}_2(\mu,\alpha,\kappa,U,\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}), \boldsymbol{C}_3(\mu,\alpha,\kappa,U,\boldsymbol{f},\boldsymbol{g})\right\}\,,
\end{aligned} \tag{4.16}$$

y tras combinar las expresiones (4.12) y (4.15), se consigue que

$$\begin{aligned}
\widetilde{\alpha}_S\|\boldsymbol{e}^h_{\mathbf{u}}\|_{1,\mathcal{T}_h} + \widetilde{\alpha}_C\|\boldsymbol{e}^h_\theta\|_{1,\Omega} \leq \boldsymbol{C}_1(\mu,\alpha,\kappa,U,\boldsymbol{f},\boldsymbol{g})\|\boldsymbol{e}^h_{\mathbf{u}}\|_{1,\mathcal{T}_h} + \widetilde{C}_{Sob}\gamma\|\boldsymbol{g}\|_{\infty,\Omega}\|\boldsymbol{e}^h_\theta\|_{1,\mathcal{T}_h}\\
\boldsymbol{C}_4(\mu,\alpha,\kappa,U,\boldsymbol{f},\boldsymbol{g})\Big(\|\boldsymbol{e}^\Pi_{\mathbf{u}}\|_{2,\mathcal{T}_h} + \|\boldsymbol{e}^\Pi_\theta\|_{1,\Omega}\Big)\,.
\end{aligned} \tag{4.17}$$

De acá se desprende que si los datos son lo suficientemente pequeños para que se satisfaga

$$\widetilde{\alpha} = \text{mín}\Big\{\widetilde{\alpha}_C - \widetilde{C}_{Sob}\gamma\|\boldsymbol{g}\|_{\infty,\Omega}\,,\, \widetilde{\alpha}_S - \boldsymbol{C}_1(\mu,\alpha,\kappa,U,\boldsymbol{f},\boldsymbol{g})\Big\} > 0\,, \tag{4.18}$$

donde $\boldsymbol{C}_1(\mu,\alpha,\kappa,U,\boldsymbol{f},\boldsymbol{g})$ esta definida en (4.16), entonces los dos primeros términos del lado derecho de la desigualdad (4.17) pueden combinarse con los del lado izquierdo y asi deducir la estimación de error local para la velocidad y la concentración como

$$\|\boldsymbol{e}^h_{\mathbf{u}}\|_{1,\mathcal{T}_h} + \|\boldsymbol{e}^h_\theta\|_{1,\Omega} \leq \widetilde{\alpha}^{-1}\boldsymbol{C}_4(\mu,\alpha,\kappa,U,\boldsymbol{f},\boldsymbol{g})\Big(\|\boldsymbol{e}^\Pi_{\mathbf{u}}\|_{2,\mathcal{T}_h} + \|\boldsymbol{e}^\Pi_\theta\|_{2,\mathcal{T}_h}\Big)\,. \tag{4.19}$$

En consecuencia, al usar las estimaciones (4.19) en (4.7), agrupando y usando nuevamente las propiedades de aproximación de los espacios discretos (4.6), se consigue que

$$\|\boldsymbol{e}_{\mathbf{u}}\|_{2,\mathcal{T}_h} \,+\, \|\boldsymbol{e}_\theta\|_{1,\Omega} \leq \Big[1 + \widetilde{\alpha}^{-1}\boldsymbol{C}_4(\mu,\alpha,\kappa,U,\boldsymbol{f},\boldsymbol{g})\Big]\, Ch^k\Big(\|\mathbf{u}\|_{k+1,\Omega} \,+\, \|\varphi\|_{k+1,\Omega}\Big)\,, \tag{4.20}$$

lo cual entrega la desigualdad de (4.8) para el error total de la velocidad y la concentración, con la constante C allí dada explicitamente por $\Big[1+\widetilde{\alpha}^{-1}\boldsymbol{C}_4(\mu,\alpha,\kappa,U,\boldsymbol{f},\boldsymbol{g})\Big]\, C$, la cual depende claramente de datos y otras constantes pero todas ellas siendo independiente del tamaño de malla h. $\square$

Ahora, procederemos con la respectiva estimación del error para la presión.

Teorema 4.2.2. *Asuma que se cumplen todas las hipótesis del Teorema 4.2.2. Entonces, existe una constante $C > 0$, independiente de h, tal que*

$$\|p - p_h\|_{0,\Omega} \;\;\leq\;\; C\, h^k \left(\, \|p\|_{k,\Omega} \,+\, \|\mathbf{u}\|_{k+1,\Omega} \,+\, \|\varphi\|_{k+1,\Omega} \right). \tag{4.21}$$

Demostración. Bastará con acotar el error discreto $\boldsymbol{e}_p^h$ en la norma de $L^2(\Omega)$ en términos del error de proyección $\boldsymbol{e}_p^\Pi$ en la misma norma para luego hacer uso de (4.7) y la respectiva propiedad de aproximación establecida en la segunda desigualdad de (4.6). En efecto, notar que en virtud de la condición inf-sup discreta (3.17) con $q_h = \boldsymbol{e}_p^h = \boldsymbol{e}_p^\Pi - \boldsymbol{e}_p$ y tras usar la cota (3.11) para la forma bilineal $\mathscr{B}^S$ se tiene que

$$\begin{aligned}\widetilde{\beta}\, \|\boldsymbol{e}_p^h\|_{0,\Omega} \leq \sup_{\substack{\mathbf{v}_h\in\boldsymbol{V}_h\\ \mathbf{v}_h\neq\mathbf{0}}} \frac{\mathscr{B}^S(\mathbf{v}_h,\boldsymbol{e}_p^h)}{\|\mathbf{v}_h\|_{1,\mathcal{T}_h}} \quad &\leq \quad \sup_{\substack{\mathbf{v}_h\in\boldsymbol{V}_h\\ \mathbf{v}_h\neq\mathbf{0}}} \frac{\mathscr{B}^S(\mathbf{v}_h,\boldsymbol{e}_p^\Pi)}{\|\mathbf{v}_h\|_{1,\mathcal{T}_h}} + \sup_{\substack{\mathbf{v}_h\in\boldsymbol{V}_h\\ \mathbf{v}_h\neq\mathbf{0}}} \frac{\mathscr{B}^S(\mathbf{v}_h,-\boldsymbol{e}_p)}{\|\mathbf{v}_h\|_{1,\mathcal{T}_h}} \\ &\leq \quad \widetilde{C}_{\mathscr{B}^S}\, \|\boldsymbol{e}_p^\Pi\|_{0,\Omega} \,+\, \sup_{\substack{\mathbf{v}_h\in\boldsymbol{V}_h\\ \mathbf{v}_h\neq\mathbf{0}}} \frac{\mathscr{B}^S(\mathbf{v}_h,-\boldsymbol{e}_p)}{\|\mathbf{v}_h\|_{1,\mathcal{T}_h}}\,.\end{aligned} \tag{4.22}$$

Pero, gracias a la relación de ortogonalidad de Galerkin (4.3), se tiene que

$$\begin{aligned}
\mathscr{B}^S(\mathbf{v}_h, -\boldsymbol{e}_p) \;&=\; \mathscr{A}_h^S(\boldsymbol{e}_{\mathbf{u}}, \mathbf{v}_h) \,+\, \mathscr{C}_h^S(\mathbf{u}; \mathbf{u}, \mathbf{v}_h) \,-\, \mathscr{C}_h^S(\mathbf{u}_h; \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) \,-\, \mathscr{F}^S(\boldsymbol{e}_\theta, \mathbf{v}_h) \\
&= -\mathscr{A}_h^S(\boldsymbol{e}_{\mathbf{u}}, \mathbf{v}_h) \,-\, \Big[\mathscr{C}_h^S(\mathbf{u}; \mathbf{u}, \mathbf{v}_h) \,-\mathscr{C}_h^S(\mathbf{u}_h; \mathbf{u}, \mathbf{v}_h)\Big] - \mathscr{C}_h^S(\mathbf{u}_h; \boldsymbol{e}_{\mathbf{u}}, \mathbf{v}_h) \,+\, \mathscr{F}^S(\boldsymbol{e}_\theta, \mathbf{v}_h) \\
&\le \widehat{C}_{\mathscr{A}^S}\, \|\boldsymbol{e}_{\mathbf{u}}\|_{2,\mathcal{T}_h}\, \|\mathbf{v}_h\|_{1,\mathcal{T}_h} \,+\, \widetilde{C}_{S,\mathrm{LIP}}\Big[\, \|\mathbf{u}\|_{1,\mathcal{T}_h} +\, \|\mathbf{u}_h\|_{1,\mathcal{T}_h}\Big]\, \|\boldsymbol{e}_{\mathbf{u}}\|_{1,\mathcal{T}_h}\, \|\mathbf{v}_h\|_{1,\mathcal{T}_h} \\
&\qquad + \widetilde{C}_{Sob}\gamma \|\boldsymbol{g}\|_{\infty,\Omega} \|\varphi - \varphi_h\|_{1,\Omega}\, \|\mathbf{v}_h\|_{1,\mathcal{T}_h}.
\end{aligned} \tag{4.23}$$

donde en la segunda igualdad hemos sumado y restado convenientemente el término $\mathscr{C}_h^S(\mathbf{u}_h; \mathbf{u}, \mathbf{v}_h)$ y, tras agrupar convenientemente, hemos usado la linealidad de $\mathscr{C}_h^S$ en la segunda componente y, finalmente, las estimaciones (3.10), (3.20) y (3.48). Con la desigualdad (4.23), usando que $\|\boldsymbol{e}_{\mathbf{u}}\|_{1,\mathcal{T}_h} \le \|\boldsymbol{e}_{\mathbf{u}}\|_{2,\mathcal{T}_h}$, simplificando por $\|\mathbf{v}_h\|_{1,\mathcal{T}_h}$ y, posteriormente, usando las cotas a priori para las soluciones $\mathbf{u}$ y $\mathbf{u}_h$ (cf. (2.28) y (3.24)) podemos establecer que

$$\begin{aligned}
\sup_{\substack{\mathbf{v}_h \in \boldsymbol{V}_h \\ \mathbf{v}_h \neq \mathbf{0}}} \frac{\mathscr{B}^S(\mathbf{v}_h, -\boldsymbol{e}_p)}{\|\mathbf{v}_h\|_{1,\mathcal{T}_h}} &\le \Big[\widehat{C}_{\mathscr{A}^S} \,+\, \widetilde{C}_{S,\mathrm{LIP}}\big(\, \|\mathbf{u}\|_{1,\mathcal{T}_h} +\, \|\mathbf{u}_h\|_{1,\mathcal{T}_h}\big)\Big]\, \|\boldsymbol{e}_{\mathbf{u}}\|_{2,\mathcal{T}_h} \\
&\qquad + \widetilde{C}_{Sob}\gamma \|\boldsymbol{g}\|_{\infty,\Omega} \|\boldsymbol{e}_\theta\|_{1,\Omega} \\
&\le \Big[\widehat{C}_{\mathscr{A}^S} \,+\, \widetilde{C}_{S,\mathrm{LIP}}\big(C_1(\mu,\alpha,\kappa,U,\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}) + \widetilde{C}_1(\mu,\alpha,\kappa,U,\boldsymbol{f},\boldsymbol{g})\Big]\, \|\boldsymbol{e}_{\mathbf{u}}\|_{2,\mathcal{T}_h} \\
&\qquad + \widetilde{C}_{Sob}\gamma \|\boldsymbol{g}\|_{\infty,\Omega} \|\boldsymbol{e}_\theta\|_{1,\Omega}
\end{aligned} \tag{4.24}$$

Asi pues, reemplazando lo obtenido en (4.24) en el segundo término del lado derecho de (4.22) y operando, se deduce que

$$\|\boldsymbol{e}_p^h\|_{0,\Omega} \,\le\, \widetilde{\beta}^{-1}\widetilde{C}_{\mathscr{B}^S}\, \|\boldsymbol{e}_p^{\Pi}\|_{0,\Omega} \,+\, \widetilde{\beta}^{-1}\boldsymbol{C}_5(\mu,\alpha,\kappa,U,\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}) \Big[\, \|\boldsymbol{e}_{\mathbf{u}}\|_{2,\mathcal{T}_h} + \|\boldsymbol{e}_\theta\|_{1,\Omega}\Big], \tag{4.25}$$

donde

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{C}_5(\mu,\alpha,\kappa,U,\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}) \\
&\quad = \text{máx}\left\{\widehat{C}_{\mathscr{A}^S} + \widetilde{C}_{S,\mathrm{LIP}}\big(C_1(\mu,\alpha,\kappa,U,\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}) + \widetilde{C}_1(\mu,\alpha,\kappa,U,\boldsymbol{f},\boldsymbol{g})\,,\widetilde{C}_{Sob}\gamma\|\boldsymbol{g}\|_{\infty,\Omega}\right\}.
\end{aligned} \tag{4.26}$$

De esta manera,

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{e}_p\|_{0,\Omega} &\leq \|\boldsymbol{e}_p^{\Pi}\|_{0,\Omega} + \|\boldsymbol{e}_p^{h}\|_{0,\Omega} \\
&\leq \big(1+\widetilde{\beta}^{-1}\widetilde{C}_{\mathscr{B}^S}\big)\,\|\boldsymbol{e}_p^{\Pi}\|_{0,\Omega} + \widetilde{\beta}^{-1}\boldsymbol{C}_5(\nu,\mathbb{K},\boldsymbol{g},\theta_{\mathrm{D}})\Big[\,\|\boldsymbol{e}_{\mathbf{u}}\|_{2,\mathcal{T}_h} + \|\boldsymbol{e}_\theta\|_{1,\Omega}\Big],
\end{aligned}$$

y usando la propiedad de aproximación en la segunda desigualdad de (4.6) junto con las estimaciones de error a priori (4.8) para la velocidad y la concentración demostradas en el Teorema 4.2.1 se deduce finalmente la estimación del error para la presión (4.21), donde la constante C allí esta dada explícitamente como $\text{máx}\{1+\widetilde{\beta}^{-1}\widetilde{C}_{\mathscr{B}^S}\,,\widetilde{\beta}^{-1}\boldsymbol{C}_5(\mu,\alpha,\kappa,U,\boldsymbol{f},\boldsymbol{g})\}$, con $\boldsymbol{C}_5(\mu,\alpha,\kappa,U,\boldsymbol{f},\boldsymbol{g})$ definida por (4.26), dependiendo de datos y otras constantes, pero independiente de h. $\square$

Capítulo 5

Conclusiones y Trabajos Futuros

Conclusiones

En esta tesis hemos desarrollado, construido y analizado un nuevo método de elementos finitos H(div)$-$conforme para la solución numérica de un modelo de Bioconvección que describe el movimiento de microorganismos gravitatorios inmersos en fluidos cultivos. El esquema numérico combina una técnica de Galerkin discontinio de penalización interior simétrica estándar y un enfoque upwind en el término convectivo para las ecuaciones del fluido junto con un esquema de elementos finitos conforme para la ecuación de concentración.

1. Se derivaron estimados a priori para las soluciones de los problemas continuo y discreto.

2. Se demostró existencia de solución continua y solución discreta reescribiendo la forma débil del modelo en términos de un operador de punto fijo y utilizando los teoremas de Shauder y Brouwer, respectivamente.

3. Bajo una hipótesis de data pequeña, se demostró unicidad de solución para el problema continuo y discreto.

4. En el caso discreto, se empleó el espacio de elementos finitos **BDM**, de grado k, el cual es H(div)$-$conforme y provee velocidades discretas con divergencia nula. Para la presión se usaron elementos discontinuos a trozos de grado $k-1$ y elementos finitos de Lagrange de grado k.

5. Se demostraron teóricamente estimaciones óptimas para el error de la aproximación numérica empleando la consistencia del esquema discreto, propiedades de aproximación de los espacios de elementos finitos usados y hipótesis de datos pequeños.

Trabajos en progreso y a futuro

Son diversas las actividades que siguen como consecuencia de lo realizado en la presente tesis. Citamos algunas a continuación.

1. En cuanto a implementación computacional, estamos en la etapa de codificación del método para llevar a cabo experimentos numéricos en dos y tres dimensiones en pro de estudiar el desempeño de la técnica dG/primal propuesta y, también, para confirmar las tasas de convergencia que han sido teóricamente demostradas.

2. A corto plazo, estamos interesados en analizar y construir un método numérico alternativo, completamente-dG. para el mismo modelo, en el que se aproxime la concentración por elementos discontinuos usando la misma técnica para el fluido.

Bibliografía

[1] R.A. Adams and J.J.F. Fournier, *Sobolev Spaces*. Second edition. Pure and Applied Mathematics (Amsterdan), 140. Elsevier/Academic Press, Amsterdam, 2003.

[2] R. de Aguiar, B. Climent-Ezquerra, M. A. Rojas-Medar and M. D. Rojas-Medar, *On the convergence of Galerkin spectral methods for a bioconvective flow*. J. Math. Fluid Mech. 19 (2017), 91–104.

[3] M. A. Bees and O. A. Croze, *Mathematics for streamlined biofuel production from unicellular algae*. Biofuels 5 (2014), no. 1, 53–65.

[4] J. L. Boldrini, M. A. Rojas-Medar and M. D. Rojas-Medar, *Existence and uniqueness of stationary solutions to bioconvective flow equations*. Electron. J. Differential Equations 2013, no. 110, 15 pp.

[5] Y. Cao and S. Chen, *Analysis and finite element method approximation of bioconvection flows with concentration dependent viscosity*. Int. J. Numer. Anal. Model. 11 (2014), no. 1, 86–101.

[6] S. Childress and R. Peyret, *A numerical study of two-dimensional convection by motile particles*. J. de Mécanique 15 (1976), 753–779.

[7] P.G. Ciarlet, *Linear and Nonlinear Functional Analysis with Applications*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, 2013.

[8] B. Climent-Ezquerra, L. Friz and M.A. Rojas-Medar, *Time-reproductive solutions for a bioconvective flow.* Ann. Mat. Pura Appl. (4) 192 (2013), no. 5, 763–782.

[9] V. Girault and P-A. Raviart, *Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations. Theory and Algorithms.* Springer Series in Computational Mathematics, 5. Springer-Verlag, Berlin, 1986.

[10] V. Girault, B. Rivière and M. Wheeler, *A discontinuous Galerkin method with nonoverlapping domain decomposition for the Stokes and Navier-Stokes problems.* Math. Comput. 74 (2005), pp. 53–83

[11] A. Harashima, M. Watanabe, and I. Fujishiro, *Evolution of bioconvection patterns in a culture of motile flagellates.* Phys. Fluids 31 (1988), no. 4, 764–775.

[12] A.V. Kuznetsov, *The onset of bioconvection in a suspension of negatively geotactic microorganisms with high-frequency vertical vibration.* Int. Commun. Heat Mass 32 (2005), no. 9, 1119–1127.

[13] M. Levandowsky, W. S. Childress, S. H. Hutner and E. A. Spiegel, *A mathematical model of pattern formation by swimming microorganisms.* J. Protozool. 22 (1975), 296–306.

[14] R. Mil-Martínez, V.H. Ferrer, M. Turcio, F. López-Serrano, J.A. Ortega and R.O. Vargas, *Stability analysis and numerical simulation of gravitactic bioconvection in a rectangular cavity.* Computers & Mathematics with Applications 77 (2017), no. 1, 222–236.

[15] Y. Moribe, *On the bioconvection of Tetrahymena pyriformis.* Master's thesis (in Japanese), Osaka University, 1973.

[16] T. J. Pedley and J. O. Kessler, *Hydrodynamic phenomena in suspensions of swimming microorganisms.* Annual review of fluid mechanics, Vol. 24, 313–358, Annual Reviews, Palo Alto, CA, 1992.

[17] Y. Kan-on, K. Narukawa and Y. Teramoto, *On the equations of bioconvective flow*. J. Math. Kyoto Univ. 32 (1992), no. 1, 135–153.

[18] D. N. Arnold, *An interior penalty finite element method with discontinuous elements*. SIAM J. Numer. Anal. 19 (1982), no. 4, pp. 742–760.

[19] R. Bürguer, P. Méndez and R. Ruiz-Baier, *On H(div)-conforming methods for double diffusion equations in porous media.* SIAM J. Numer. Anal. 57 (2019), no. 3, 1318–1343.

[20] F. Brezis and M. Fortin, *Mixed and Hybrid Finite Element Methods*, vol. 15, Springer Series of Computational Mathematics, Springer, New York. 1991.

[21] B. Cockburn, G. Kanschat and D. Schötzau, *A locally conservative LDG method for the incompressible Navier-Stokes equations.* Math. Comp. 74 (2005), pp. 1067–1095.

[22] B. Cockburn, G. Kanschat and D. Schötzau, *A note on discontinuous Galerkin divergence-free solutions of the Navier-Stokes equations.* J. Sci. Comp. 31 (2007), pp. 61–73.

[23] E. Colmenares, G. N. Gatica and W. Miranda, *Analysis of an augmented fully-mixed finite element method for a bioconvective flows model.* Journal of Computational and Applied Mathematics 393 (2021), art. no. 113504.

[24] A. Ern and D. A. Di Pietro, *Mathematical Apects of Discontinuous Galerkin Methods*, vol. 69 of Mathématiques et Applications, Springer-Verlag, 2012.

[25] V. Girault and P.-A. Raviart, *Finite element methods for Navier-Stokes equations*, vol. 5 of Springer Series in Computational Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1986. Theory and algorithms.

[26] P. Hansbo, and M. G. Larson, *Discontinuous Galerkin methods for incompressible and nearly incompressibility elasticity by Nitsche's method.*

[27] Lesaint and P.A. Raviart, *On a finite element method for solving the neutron transport equation*, Mathematical Aspects of Finite Elements in Partial Differential Equations, de Boor C. (ed.). Academic Press: New York, 1974; 89–145.

[28] R. Oyarzúa, T. Qin and D. Schötzau, *An exactly divergence-free finite element method for a generalized Boussinesq problem*. IMA J. Numer. Anal. 34 (2014), no. 3, pp. 1104–1135.

[29] R. Oyarzúa and P. Zuñiga, *Analysis of a conforming finite element method for the Boussinesq problem with temperature-dependent parameters* . J. Comput. Appl. Math. 323 (2017), pp. 71–94.

[30] C. Waluga, *Analysis of hybrid discontinuous Galerkin methods for incompressible flow problems*. Ph.D. Thesis, RWTH Aachen, Germany, (2012)