Universidad del Bío-Bío

Facultad de Educación y Humanidades

Pedagogía en Educación Matemática

Una mirada didáctica sobre la puesta en juego de los conocimientos matemáticos del profesor en una escuela de Yungay

Estudiante:

Ámbar Acuña Riquelme

Profesora Guía:

Dra. Sara Pascual Pizarro

Chillán, 2021

Una mirada didáctica sobre la puesta en juego de los conocimientos matemáticos del profesor en una escuela de Yungay

Resumen

Este trabajo tiene por objetivo analizar la secuencia de enseñanza de un profesor de séptimo básico que trata el contenido de área y perímetro de la circunferencia. Se hizo un análisis en profundidad acerca de: los conocimientos matemáticos para la enseñanza (que podría utilizar este profesor) de acuerdo a las categorías definidas por Ball, Thames & Phelps (2008); los niveles de actividad del profesor provenientes de la estructuración del medio y definidos por Margolinas (2002b); y sobre los criterios de pertinencia matemática de las intervenciones del profesor, elaborados por Bloch (2009). Las clases fueron realizadas de forma virtual debido al contexto de pandemia por Covid-19 (en el año 2020), se grabaron en su totalidad y luego se hizo la transcripción de cada una. La metodología utilizada para el análisis de la información es el procedimiento de la *sinopsis* y de la *macro-estructura* desarrolladas por el Grupo de Investigación de Análisis del Francés Enseñado (GRAFE) de la Universidad de Ginebra. Los resultados indican que: este profesor pone en juego cuatro de los seis tipos de conocimientos matemáticos para la enseñanza definidos Ball y sus colegas; en todos los niveles de actividad del profesor se presentaron algunos de estos conocimientos, y los que más utilizó fueron el C.C.E y el C.C.A.; y, las intervenciones no pertinentes según el criterio C1 están directamente influenciadas por la no utilización de C.E.C.

Palabras claves: profesor, estudiante, conocimiento, nivel, pertinencia.

A didactic view on the use of the teacher's mathematical knowledge in a school in Yungay

Abstract

The purpose of this study is to analyze the teaching sequence of a seventh-grade teacher who handles the content of area and perimeter of the circumference. An in-depth analysis was made about: the mathematical knowledge for teaching (that this teacher could use) according to the categories defined by Ball, Thames & Phelps (2008); the teacher's activity levels coming from the structuring of the medium and defined by Margolinas (2002b); and about the criteria of mathematical relevance of the teacher's interventions, elaborated by Bloch (2009). The classes were conducted in online mode due to the context of the Covid-19 pandemic (in the year 2020), were entirety recorded and then each one was transcribed. The methodology used for the analysis of the information is the *synopsis* and *macrostructure* procedure developed by the Research Group for the Analysis of French Language Teaching (GRAFE) of the University of Geneva. The results indicate that: this teacher implements four of the six types of mathematical knowledge for teaching defined by Ball and his colleagues; at all levels of the teacher's activity some of these knowledge were present, and the ones he used most were C.C.E and C.C.A.; and, the interventions not relevant according to criterion C1 are directly influenced by the non-use of C.E.C.

Keywords: teacher, student, knowledge, level, pertinence.

Agradecimientos

En primer lugar, quiero agradecer a la profesora Sara Pascual Pizarro, Ph.D., quien fue mi profesora guía en este trabajo. Su apoyo y orientación fueron clave para llevar a cabo el proceso de investigación. No hubiese podido arribar a estos resultados de no haber sido por su incondicional ayuda.

También quiero agradecer al profesor colaborador de esta investigación por su buena disposición al aceptar que se realizara un estudio de su secuencia de enseñanza, y al director de la misma Escuela (ubicada en la comuna Yungay) por permitirme observar y grabar las clases de un profesor del Establecimiento. En todo momento estuvieron dispuestos a colaborar. Sin su buena disposición no habría sido posible llevar a cabo este trabajo. Además, agradecer a los estudiantes por su participación en las clases.

Por último, quiero agradecer a mi familia, por darme apoyo moral y palabras de aliento cuando mis ánimos decaían.

Muchas gracias a todos.

CONTENIDOS

INTRODUCCIÓN

El tema de la articulación de los conocimientos matemáticos y didácticos de los profesores en las prácticas docentes es una de las líneas de trabajo de los grupos de investigación en la formación de futuros profesores. Los problemas y las preguntas de la enseñanza son abordados de diferentes puntos de vista, con enfoques diversificados, teniendo en cuenta el hecho de que la transposición didáctica está trabajada desde el reconocimiento de un saber sabio (Dorier, 2000). En términos generales, existen factores que pueden tener un impacto positivo o negativo en los logros de los estudiantes, tales como el conocimiento de los profesores, su disposición hacia las matemáticas, el plan de estudios que utilizan, las actividades que implementan en sus clases, entre otros. Pero es importante destacar que el estado de certificación de los profesores no implica necesariamente que tengan muchas habilidades para la enseñanza, ni que sus clases son completamente efectivas, es decir, sus logros educativos no son un indicador de su eficiencia como profesores (Ball & Hill, 2008).

En el plano didáctico, si bien la Teoría de las Situaciones Didácticas (Brousseau, 1998) se centró en primer lugar en la modelización de situaciones de aprendizaje casi aisladas, no se preocupó por modelizar el papel del profesor (Bloch, 2005), los trabajos didácticos de las matemáticas francófonas que estudian el papel del profesor se desarrollan desde los años 80. Según Bloch (1999), existe aquí la posibilidad de permitir el estudio de la contingencia, en particular tratando de identificar los conocimientos que el profesor necesita para gestionar una situación de enseñanza/aprendizaje. Las situaciones presentadas al principio como funcionando de modo "casi aislado", han sido definidas luego de modo más riguroso, así como el rol del profesor en estas situaciones (Margolinas, 2002b; Bloch, 1999). De este modo varios estudios ponen especialmente de relieve los conocimientos del profesor (Bloch, 2009; Comiti, Grenier & Margolinas, 1995; Grugeon, 2008; Margolinas, 1992; Margolinas, Coulange & Bessot, 2005; Robert, 2005).

Una serie de preguntas de investigación emergen de los conocimientos matemáticos útiles en la enseñanza y el análisis de la influencia de estos conocimientos sobre las opciones didácticas de los profesores, y que son investigaciones en didáctica de las matemáticas (véase por ejemplo Clivaz, 2011, 2014, 2016). Basándose en las categorías desarrolladas por Ball y su equipo (Ball, Thames, & Phelps, 2008), y en el modelo de la estructuración del medio (Margolinas, 2002b), Clivaz pone de relieve la interacción entre estos conocimientos y las elecciones de los profesores.

Nuestro trabajo se articula esencialmente alrededor de las clases de conocimientos matemáticos (Clivaz, 2011) de los profesores de básica en su gestión didáctica de las tareas matemáticas. Se basa en las categorías de conocimientos matemáticos para la enseñanza (Ball, Thames & Phelps, 2008), en la estructuración del medio y su declinación en niveles de actividad del profesor (Margolinas, 2002b), y sobre los criterios de pertinencia matemática del profesor elaborados por Bloch (2009). Se observó dos clases de un profesor durante su enseñanza.

En la comuna de Yungay, perteneciente a la región de Ñuble, hay instituciones educacionales diversas, pero pondremos nuestra atención en las clases realizadas por un profesor a estudiantes de una Escuela de la comuna y que cursan séptimo básico. Más específicamente, nos centraremos en el estudio de los conocimientos matemáticos del profesor, la implementación de estos conocimientos en el sistema educativo, el nivel de actividad del profesor en cada nivel del medio y los criterios de pertenencia matemática utilizados en sus clases.

La metodología utilizada para analizar la información es el procedimiento de la *sinopsis* y de la *macro-estructura* desarrolladas por el Grupo de Investigación de Análisis del Francés Enseñado (GRAFE) de la Universidad de Ginebra. La sinopsis se realiza sobre las transcripciones de las clases grabadas seleccionando la información necesaria permitiendo hacer un análisis en profundidad.

Este es un tema que está escasamente estudiado y hay poca información sobre las prácticas de los docentes en regiones, lo cual puede ser comparado con los resultados que se tienen de distintas regiones del país. Además, no hay antecedentes de este tipo de estudio en el mismo contexto.

CAPÍTULO I: PROBLEMÁTICA

1. El conocimiento de los profesores de matemática

El aprendizaje de la matemática no es algo sencillo para todos, requiere concentración, práctica, constancia, entre otras cosas. Se debe tomar en cuenta el hecho de que no todos los estudiantes aprenden de la misma forma, ni al mismo tiempo, cada uno puede necesitar una estrategia diferente, en función de sus características personales, habilidades y aptitudes. En este contexto, los profesores cumplen el rol de mediadores del aprendizaje. Deben tener en consideración que todos los estudiantes son diferentes, algunos necesitarán más ayuda que otros, pero, en definitiva, todos tienen el derecho de aprender, y para que esto sea efectivo los profesores deben estar comprometidos con su labor y darles a los estudiantes los medios necesarios para que sean participantes activos es su proceso de enseñanza y no estén en la clase como simpes oyentes de lo que dice el profesor.

En clases de matemática, por ejemplo, para ayudar a los estudiantes a escribir una figura utilizando un vocabulario apropiado para circunferencia y sus elementos (centro, radio, diámetro, entre otros) el profesor puede presentar los ejemplos propuestos en los libros de texto, y pedirles a los estudiantes que reconozcan la circunferencia y su trazado cuando ya está terminado, y en este contexto su enseñanza estaría de acuerdo con las prescripciones institucionales que no requieren que los teoremas a los programas se demuestren todos en curso. Por otra parte, los estudiantes no logran identificar la circunferencia tan fácilmente cuando no está particularmente trazada o simbolizada por una serie de puntos. Estos análisis llevan a suponer que los libros de texto permiten a los profesores, sin inconveniente, evitar dedicar tiempo a la enseñanza de un método.

Varios estudios de investigación ponen de manifiesto las dificultades que experimentan los profesores de matemática con respecto a los contenidos que tendrán que enseñar. Por ejemplo, los estudios de Ball (1990) y Bryan (1999) muestran lo cómodos que se sienten los profesores al utilizar los procedimientos y algoritmos habituales en matemáticas, pero también lo difícil que les resulta explicar el significado que hay detrás de esos mismos procedimientos (el porqué). Schmidt y Bednarz (1997) y Van Dooren, Verschaffel y Onghena (2003) muestran que los profesores de secundaria se sienten cómodos utilizando el álgebra para resolver problemas, pero que tienen dificultades para dar sentido y apreciar el uso de los procedimientos aritméticos como soluciones válidas a estos mismos problemas, por lo que les resultará difícil asumir esta transición entre la aritmética y el álgebra en su futura enseñanza. Así, cuando se enseña un contenido matemático específico, muchos estudiantes no reconocen lo que están aprendiendo, con qué objetivos y cómo se integra el contenido con otras áreas, siendo esto una de las principales causas del fracaso en matemática (Jorba, 1996; Aravena, 2001).

Por lo tanto, una vía interesante para explorar la matemática profesional docente, lo que Moreira y David (2005) han definido (refiriéndose en su caso a la "matemática escolar") como "el conjunto de conocimientos validados, específicamente asociados al desarrollo de la educación escolar en matemáticas [...] incluyendo el conocimiento producido por los profesores de matemáticas en sus prácticas escolares [...] así como el conocimiento producido por la investigación sobre la enseñanza y el aprendizaje de los conceptos y procesos matemáticos en la escuela". Es en este sentido que los investigadores hablan de matemáticas "profesionales", que se sitúan y arraigan en una determinada práctica profesional del profesor. Por ejemplo, durante la enseñanza y el aprendizaje de conceptos específicos, pueden surgir varios eventos *matemáticos*: razonamientos para dar sentido a los conceptos; concepciones, dificultades y errores en torno al concepto que se está trabajando o a los conceptos asociados; diversas estrategias y enfoques para resolver un problema; una variedad de representaciones para abordar y tratar un concepto; nuevas preguntas y vías de exploración, etc.

En tal sentido surge además la necesidad de estudiar el rol del profesor en el proceso de enseñanza, para analizar la influencia de sus conocimientos, cuál es su pertinencia matemática, si la cantidad de títulos que poseen asegura la calidad de la enseñanza, entre otras cosas. También es importante destacar de dónde surge el nuevo conocimiento y cuál es su utilidad en la actividad matemática, pues hacer matemáticas es una actividad que se centra en la construcción y resolución de diversos problemas (Hersh, 1997; Lang, 1985). Espinal y Gelvez (2019) afirman que "…en la resolución de problemas son necesarios los conocimientos previos de los estudiantes, pero además los procesos que modifican las estructuras actuales que favorecen la asimilación de la nueva información, dando lugar al conocimiento".

2. La influencia de los conocimientos matemáticos de los profesores sobre los resultados de sus alumnos

Los conocimientos especializados del contenido (C.E.C.) son conocimientos matemáticos que no disponen otros profesionales que utilizan las matemáticas. Es el caso, por ejemplo, cuando se trata de explicar por qué las palabras *radio* y *diámetro* pueden tener diferentes significados. En matemática, el radio de un círculo es la distancia entre el centro del círculo y los puntos del círculo; por lo tanto, es una longitud. En este caso es único y se puede decir efectivamente *el radio del círculo*. Un diámetro es una recta que pasa por el centro del círculo y en este caso solo se puede hablar de un diámetro entre otros, o el doble del radio y en este caso es una longitud única, como el radio, y se podrá decir *el diámetro del círculo*.

Aunque algunos creen que no es necesario haber estudiado mucho las matemáticas para enseñar *a pequeños*, sino que es necesario *ser bueno en matemáticas* para poder explicarlas. La mejora de la calidad de la enseñanza es un reto político fundamental (Petrou & Goulding, 2011) y la cuestión de los conocimientos disciplinarios de los docentes es central; un profesor debe recibir una *formación universitaria en matemáticas* (Hache, Proulx; 2016). Sin embargo, a menudo se la trata rápidamente como parte del *"paradigma del profesor instruido".*

En Chile, los conocimientos en matemática se consideran como preliminar a la parte inicial de la formación de los profesores de las universidades y constituyen una parte importante de la PSU. La Comisión Nacional Acreditadora (CNA, 2016) recomienda, por otra parte, que se mantenga la formación matemática académica en la medida en que las prácticas de los profesores se vuelvan más "profesionales". Sin embargo, trasciende la separación entre contenido puramente disciplinario y orientaciones profesionales, en que los conocimientos son impartidos de manera de cubrir los conocimientos matemáticos básicos y luego reorganizarlos al servicio de la práctica "profesional". Por otra parte, están los contenidos que se explicitan en manuales destinados a la preparación de las clases de profesores, por ejemplo, el Ministerio de Educación de Chile (MINEDUC, 2020) ofrece Orientaciones Didácticas Matemáticas, en donde se sugiere que el docente:

> *Debe promover que los estudiantes den sentido a los contenidos matemáticos que aprenden y construyan su propio significado de la matemática para llegar a una comprensión*

profunda. En este sentido, se espera que el profesor desarrolle un modelo pedagógico que favorezca la comprensión de conceptos matemáticos y no la mera repetición y mecanización de algoritmos, definiciones y fórmulas. (MINEDUC, 2020)

Algunos libros están incluso dedicados específicamente a las matemáticas de la escuela. Sin embargo, una vez aprobada su carrera, “nunca se cuestionan los conocimientos matemáticos actuales y potenciales de los profesores de los liceos y colegios” (Robert, 2001).

Según Bloch (2009), muchos profesores encuentran dificultades en sus primeros años de enseñanza, y esto se debe a que "heredan de sus estudios universitarios una concepción muy formal de las matemáticas, que les dificulta contemplar la 'puesta en escena' del saber matemático, así como comprender los procedimientos de los alumnos encontrados en sus clases".

Con respecto al conocimiento matemático de los profesores, Bloch (1997) considera que el problema surge casi en los mismos términos en enseñanza básica que en enseñanza media en cuanto al control de la actividad matemática de los estudiantes. Perrin- Glorian (2008) considera que la cuestión del saber matemático del profesor es más crucial en enseñanza básica por las siguientes tres razones:

- Los saberes son naturalizados y automatizados
- las matemáticas suelen ser menos visibles porque están anidadas en contextos concretos
- los profesores tienen una formación inicial en matemáticas muy diversa.

2.1. Caminos de influencia posibles

Está claro que los conocimientos de matemáticas de los profesores están positivamente relacionados con el rendimiento de los estudiantes. Sin embargo, la evidencia sobre la relación entre los conocimientos matemáticos de los profesores de primaria y secundaria y el rendimiento matemático de los estudiantes permanece desigual y ha sido sorprendentemente difícil de producir.

(National Mathematics Advisory Panel, 2008)

La opinión generalizada de que los conocimientos matemáticos del profesor influyen en el aprendizaje de los alumnos se apoya en la idea de que es necesario tener un conocimiento profundo de lo que se enseña, o en la idea de que el profesor personifica esos conocimientos en la clase

(Lampert, 1990). Sin embargo, el paso de la idea de sentido común a resultados validados por la investigación está lejos de ser una evidencia.

Para explicar las contradicciones entre los estudios sobre la influencia de los conocimientos matemáticos de los profesores en el rendimiento de los alumnos, Muijs y Reynolds suponen que "habría un efecto de umbral, en el sentido de que es necesario un nivel mínimo de conocimientos matemáticos para que los profesores sean eficaces, pero más allá de un cierto punto operaría una especie de ley de los rendimientos decrecientes" (Muijs y Reynolds, 2002). En su propio estudio cuantitativo, estos dos autores elaboran un modelo teórico de influencias, como se mostrará en la Figura 1, pero sus datos recogidos sobre 103 profesores primarios británicos, los llevan a concluir que los conocimientos del profesorado tienen una influencia directa no significativa en el éxito de los alumnos.

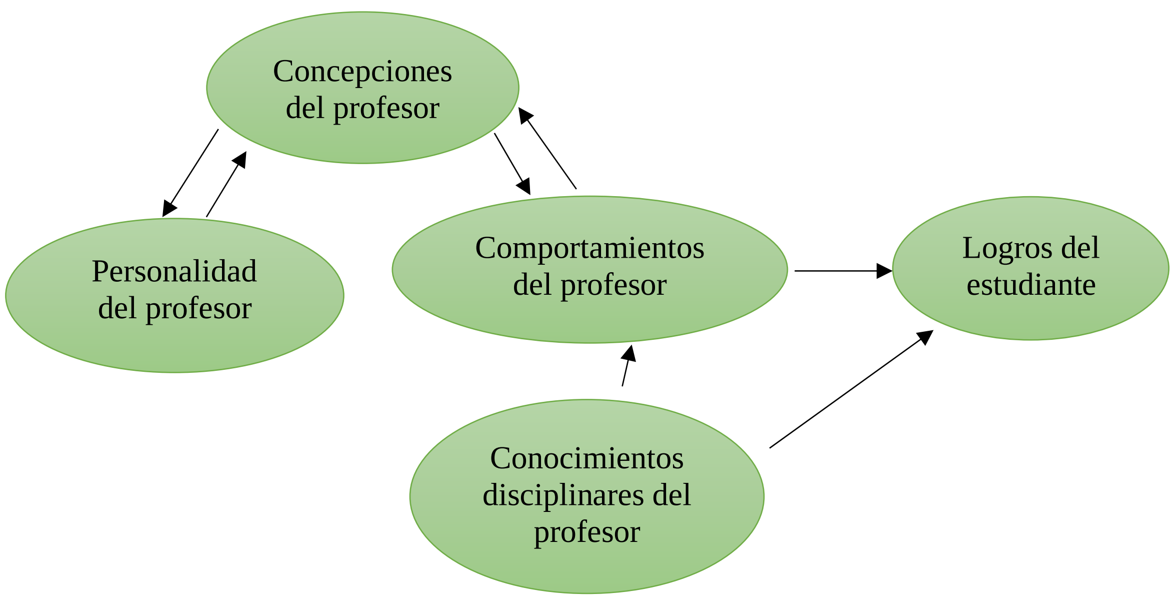


Figura 1: Modelo teórico de las relaciones entre las características del profesor y el aprendizaje del alumno (Muijs y Reynolds, 2002).

Para describir mejor este comportamiento, las autoras Stein, Baxter y Leinhardt (1990) vincularon los defectos en los conocimientos matemáticos de un profesor de quinto grado a su dificultad para crear oportunidades de conexión para sus alumnos entre las nociones matemáticas y entre las representaciones de una noción. Este tipo de dificultades sería particularmente fuerte en la gestión de problemas que podrían resolverse de diferentes maneras, ya sea en la gestión de estas tareas, como en la selección de ejemplos (Rowland, 2008). Según los autores esta falta de conocimientos es la causa de la discrepancia entre las recomendaciones hechas a los profesores para utilizar este tipo de problemas y la práctica efectiva.

Las encuestas del PISA (Programa Internacional de Seguimiento de los Resultados de los Alumnos) tienen por objetivo poner al día los resultados de los estudiantes de 15 años, es decir, lo que son capaces de hacer con lo que han aprendido, con qué diferencias según los países y dentro de cada uno de ellos. En matemáticas, lo que PISA nos enseña de los alumnos que participaron en PISA (2003), es que existe una correlación entre los conocimientos matemáticos y los conocimientos sobre la enseñanza de las matemáticas y una fuerte correlación entre estos últimos conocimientos y los resultados de los alumnos. En cambio, según la investigación, hay poca correlación entre los conocimientos matemáticos de los profesores y los resultados de los alumnos (PISA, 2003).

Otra influencia podría consistir en la preparación de las lecciones y, en particular, en la elección de las tareas propuestas a los alumnos. Los autores Osana y sus colegas (2006) se refieren a los profesores afirmando que “aquellos con un conocimiento sólido del contenido matemático, medido por una prueba estandarizada, pudieron clasificar los problemas con mayor precisión que aquellos con un conocimiento más débil del contenido”. Sin embargo, esto no significa que los futuros profesores utilicen esta capacidad. En efecto, ellos constatan que, si la preparación de sesiones de clases es un momento fundamental en la actividad del profesor, ellos no parten realmente del conocimiento matemático y, en particular, los criterios de elección de los ejercicios se refieren esencialmente a su forma y no a los conocimientos que permiten enseñar. Así, los conocimientos matemáticos de los profesores se utilizan para resolver los ejercicios, pero no para desarrollar o elegir actividades.

Según Ball y Hill (2008) la cuestión de la eficacia de la enseñanza y la necesidad de formar y seleccionar a profesores que pudieran ser eficaces ha llevado a distinguir y categorizar los conocimientos necesarios para la enseñanza y a crear instrumentos que permitan poner a prueba esos conocimientos. La historia de los modelos teóricos de categorización de los conocimientos de los profesores está estrechamente relacionada con los tipos de pruebas utilizadas para evaluar a los estudiantes en la enseñanza o a los profesores, especialmente en los Estados Unidos (Ball y Hill, 2008).

Con el fin de estudiar la influencia de los conocimientos matemáticos de los profesores en su enseñanza del concepto de la circunferencia como conjunto de puntos a la misma distancia de un punto dado (el centro) y su capacidad de movilizar la imagen mental y representación geométrica, primero exploraremos las dificultades de aprendizaje de los conceptos de área y de perímetro. Luego indagamos la cuestión de la división de los conocimientos matemáticos de los profesores, y daremos cuenta de las herramientas desarrolladas por la didáctica francesa de las matemáticas para analizar la enseñanza. Esto nos llevará a precisar los elementos de nuestra metodología.

3. Las dificultades de los estudiantes en la concepción de área y perímetro

Las dificultades en el aprendizaje de los conceptos de área y de perímetro han incitado a los expertos de programas y, por consiguiente, a los profesores a limitar la enseñanza al reconocimiento y a la aplicación de fórmulas. Así, cuando se plantea la cuestión del cálculo del área o del perímetro de una figura, el estudiante busca la fórmula correcta que debe aplicarse con los valores proporcionados

Ante las dificultades de aprendizaje, los programas de estudios sugieren a los profesores insistir más en el sentido de las nociones de área y perímetro, en vez de solo la enseñanza de fórmulas. Cabe citar algunos textos que indican: *"Los conceptos de perímetro y área no deben reducirse para el alumno a números o fórmulas asociados a figuras. Es necesario desarrollar actividades que permitan a los alumnos distinguir los dos conceptos".*

Michèle Artigue y Jacqueline Robinet (1982) realizaron una investigación para conocer cómo los estudiantes de la escuela primaria (enseñanza básica en Chile) diseñaban una circunferencia. A menudo, la circunferencia se enseña mediante un trabajo de vocabulario basado en la presentación de objetos geométricos que se refieren a ella (círculo, arco, centro, diámetro, radio, eje de simetría) por el trazado de figuras con el compás y por el cálculo de perímetro y área con la ayuda de las fórmulas.

Las autoras propusieron tres tareas a unos 50 alumnos de segundo y cuarto básico (sistema equivalente en Chile), para poner en práctica varias definiciones de la circunferencia, con la finalidad de determinar si los niños preferían ciertas definiciones, independientemente de las tareas propuestas, y que mediante confrontaciones de métodos entre los estudiantes favorecer el aprendizaje de las propiedades de la circunferencia a través su utilización.

En la primera tarea, los estudiantes recibían sectores circulares de tres circunferencias de diferente radio, tenían que recomponer las circunferencias y construir una pieza que faltaba, tal como se muestra en la Figura 2.

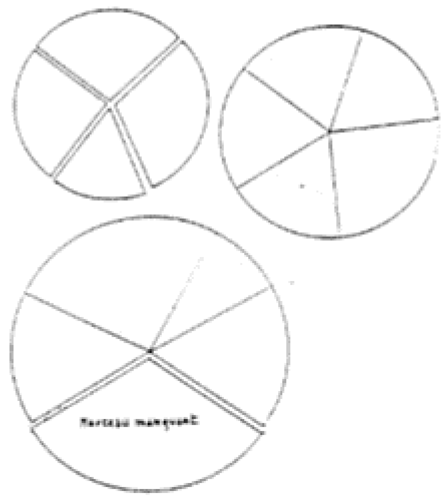


Figura 2: Recomposición de circunferencias con sectores circulares de diferente radio.

La segunda y la tercera tarea eran similares, pues las áreas circulares eran sustituidas respectivamente por sectores de anillos (véase el lado izquierdo en Figura 3) y arcos de circunferencias (en el lado derecho de la Figura 3).

En la tercera tarea, los alumnos no podían cortar la hoja sobre la que se dibujaban los arcos de la circunferencia.

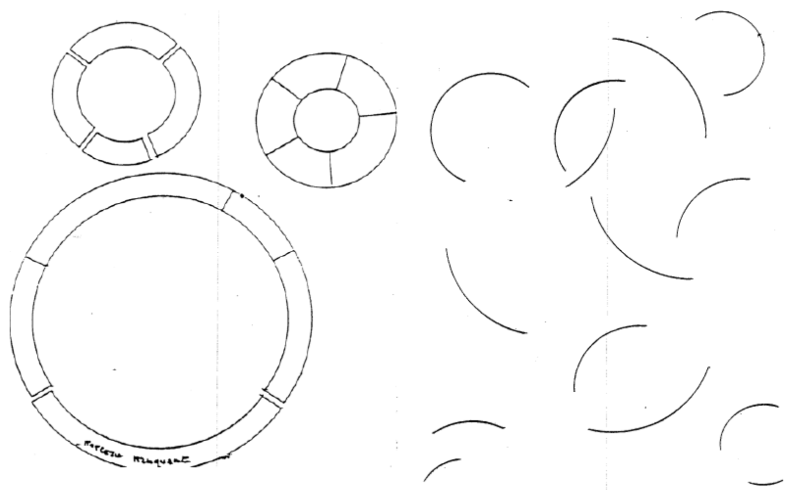


Figura 3: Sectores de anillos y arcos de circunferencias.

La realización de las tareas puede basarse en tres caracterizaciones de la circunferencia:

1) la circunferencia es una figura invariante por cualquier rotación alrededor de un punto fijo llamado centro;
2) la circunferencia es una línea cerrada con curvatura constante;
3)
    a) la circunferencia es el conjunto de los puntos situados a una distancia determinada de un punto fijo llamado centro;
    b) la circunferencia es la trayectoria de un punto móvil rígidamente ligado a un punto fijo.

La primera tarea favorece más bien la caracterización 1), mientras que la segunda y la tercera tarea favorecen la caracterización 2). Los investigadores pensaban también que las terceras características eran las más conocidas, por lo que podían ser movilizadas por los alumnos para todas las tareas, pero cada vez es más difícil porque el centro es cada vez más difícil de determinar.

El análisis del trabajo de los estudiantes según las autoras ha mostrado que se está movilizando otra caracterización de la circunferencia:

4) la circunferencia es una figura que tiene “medida” en todas las direcciones del plano. Esta caracterización se utiliza a menudo de manera fragmentaria: se privilegian dos direcciones, la horizontal y la vertical.

El análisis del trabajo de los estudiantes también ha demostrado que ellos perciben la circunferencia como una línea en vez de un conjunto de puntos, y que el paso de una concepción a otra es muy difícil. Para completar el sector circular, por ejemplo, los niños que querían prolongar la línea operaban por rotación o deslizamiento y superposición parciales de los arcos conocidos, pero no utilizaban puntos “marcadores” construidos desde el centro y el radio conocidos y por los cuales pasarían las líneas. Del mismo modo, los que querían colocar todos los puntos situados a la misma distancia que los demás del centro dado, marcaban una decena de puntos, declaraban entonces que no era posible trazarlos todos y acababan trazando el arco de la circunferencia que faltaba a mano levantada. Estas constataciones muestran que existe una dificultad de naturaleza epistemológica, es decir, vinculada al conocimiento mismo: concebir una circunferencia, una recta o un segmento como un conjunto infinito de puntos, hace intervenir nociones difíciles como las de infinito, de infinitamente pequeño (hay infinidad de puntos infinitamente pequeños en un segmento) y de continuidad.

Así, si los estudiantes de cursos de nivel básico tienen una concepción de la circunferencia ligada a los instrumentos: *figura trazada con ayuda de un compás*; o concepciones más vinculadas a la percepción: *reconocimiento global de la forma* (en esta fase, disco y circunferencia no se distinguen, pues son *redondos*), *figura sin lado o sin ángulo* o *figura que siempre se curva de la misma manera* (a diferencia de otras líneas curvas cerradas como el óvalo o la elipse). Las actividades deberían tener por objetivo destacar la circunferencia como un *conjunto de puntos equidistantes del centro.*

4. Preguntas de investigación

Nos interesamos en descubrir la influencia de los conocimientos matemáticos de los profesores primarios en su gestión didáctica de las tareas matemáticas.

En matemática y para profesores de séptimo básico, las preguntas de investigación son:

1. ¿En qué niveles de actividad del profesor se manifiestan los diferentes tipos de conocimientos matemáticos para la enseñanza?
2. ¿Qué efectos tienen los tipos de conocimientos matemáticos en la enseñanza de los profesores sobre la pertinencia matemática de sus intervenciones y sobre la organización didáctica de sus clases de matemáticas en la Escuela?

CAPÍTULO II: MARCO TEÓRICO

1. Los conocimientos matemáticos para la enseñanza

Deborah Loewenberg Ball, Mark Hoover Thames y Geoffrey Phelps (2008) proponen clasificar los diferentes conocimientos matemáticos para la enseñanza (C.M.E.) según la siguiente división:

Conocimientos del sujeto y conocimientos pedagógicos del contenido. Estos a su vez se subdividen en tres tipos de conocimientos, los cuales serán descritos a continuación.

1.1. Conocimientos del sujeto

Conocimiento común del contenido (C.C.C.) se utiliza en entornos no necesariamente exclusivos de la enseñanza, por ejemplo, cuando se trata de calcular una respuesta correctamente, resolver problemas, utilizar un vocabulario correcto, etc. Los profesores deben conocer lo que enseñan y reconocer cuando los estudiantes dan respuestas erróneas o cuando los libros de texto dan definiciones inexactas. También se presentan cuando el profesor solo se sitúa en el nivel del algoritmo. Estos conocimientos son esenciales y absolutamente necesarios para el profesor, pero como se dijo anteriormente pueden ser utilizados en entornos diferentes al de la enseñanza, es decir, no son conocimientos exclusivos de los profesores, otras personas también los tienen, tal es el caso de algunos padres que a veces *creen* poder enseñar. Los conocimientos comunes del contenido son evaluados por Ball y sus colegas con preguntas del tipo "¿Cuál es un número que se encuentra entre 1,1 y 1,11? Hacemos preguntas que requieren saber que un cuadrado es un rectángulo, que $0 \div 7 = 0$ y que las diagonales de un paralelogramo no son necesariamente perpendiculares" (Ball, Thames & Phelps, 2008). Son preguntas que también pueden ser respondidas por otras personas que conocen de matemática.

Conocimiento especializado del contenido (C.E.C.), son conocimientos matemáticos de los que no disponen otros profesionales que utilizan las matemáticas. Es el caso, por ejemplo, cuando se trata de explicar por qué "para multiplicar por 10, se añade un cero", cuando hay que analizar errores de los estudiantes o cuando hay que decidir si un procedimiento original propuesto por un estudiante es correcto. Una situación particular que requiere estos conocimientos matemáticos específicos del contenido es la de la enseñanza de la geometría (Ball, Hill & Bass, 2005). Estos conocimientos especializados del contenido se distinguen de los conocimientos comunes del contenido (C.C.C.), pero también de los conocimientos pedagógicos del contenido:

> *Saber matemáticas para la enseñanza exige una especie de profundidad y detalle que va mucho más allá de lo que se necesita para llevar a cabo el algoritmo de forma fiable. […] Es importante señalar que cada una de estas tareas comunes de la enseñanza implica razonamiento matemático tanto como lo hace el pensamiento pedagógico.*
>
> (Ball et al., 2005)

Según Ball, Thames y Phelps (2008) este conocimiento específico de la enseñanza de las matemáticas se presenta cuando los profesores realizan diversas tareas, tales como: presentar ideas matemáticas, responder a las preguntas por qué de los estudiantes, vincular unas representaciones con otras o con ideas implícitas, conectar los temas enseñados con los anteriores o futuros, adaptar el contenido matemático de los libros de texto, modificar tareas para que sean más fáciles o más difíciles, dar o evaluar explicaciones matemáticas, utilizar notaciones matemáticas y criticar su uso, entre otras.

Conocimiento del horizonte matemático (C.H.M.), para Ball, Thames y Phelps (2008) se refiere a la conciencia de los vínculos entre los temas matemáticos en todo el currículum. Según estos autores los profesores necesitan saber cómo se relacionan los contenidos que están enseñando con los contenidos que los estudiantes verán en cursos posteriores, para así entregarles una buena base.

1.2. Conocimientos pedagógicos del contenido.

Conocimiento del contenido y de los alumnos (C.C.A.) se refieren a los conocimientos que tienen los profesores sobre las matemáticas y los estudiantes, lo cual les permite elegir ejemplos que sean interesantes y motivadores para los estudiantes, anticipar lo que pueden pensar y lo que podrían encontrar fácil o difícil (dificultades previstas de los estudiantes), interpretar las respuestas de ellos incluso cuando estén incompletas, interpretar y tratar una dificultad de un estudiante, y estructurar los conceptos erróneos que tienen sobre algún contenido matemático. Estos conocimientos sobre el aprendizaje están vinculados a conocimientos pedagógicos generales, y para medirlos Ball y sus colegas utilizan a menudo investigaciones y cuestionarios procedentes de los campos de la pedagogía (Ball, Thames & Phelps, 2008).

Conocimiento del contenido y de la enseñanza (C.C.E.), según Ball, Thames y Phelps (2008) este conocimiento se refiere a la construcción de la enseñanza de las matemáticas, y está relacionado con el tipo de secuencia que sigue el profesor para la enseñanza de los contenidos matemáticos, la elección de los ejemplos para profundizar los contenidos y el material o representaciones utilizadas para enseñar alguna idea específica. El profesor debe saber cuándo hacer una pausa para hacer algunas aclaraciones, cuándo utilizar un comentario dado por un estudiante para explicar algo, cuándo realizar una pegunta o proponer tareas con el fin de promover el aprendizaje de los estudiantes. Este conocimiento es medido por Ball y sus colegas mediante preguntas sobre la elección de material o, por ejemplo, sobre si el lenguaje y las metáforas utilizadas pueden ayudar o confundir el aprendizaje de los estudiantes.

Conocimiento del contenido y del currículum o plan de estudios (C.C.P.), Ball, Thames y Phelps (2008) se refieren a las categorías de conocimientos docentes de Shulman, quien dice que este conocimiento está referido a la comprensión de los materiales, programas o plan de estudios que sirven como 'herramientas de trabajo' para los profesores.

Esta categorización permitió a Hill, Rowan y Ball (2005) poner de manifiesto una influencia de los C.E.C. en los resultados de los alumnos. Además, a diferencia de la mayoría de los estudios que miden los conocimientos matemáticos de los profesores mediante diplomas obtenidos, cursos de matemáticas seguidos o pruebas generales de matemáticas, estos autores utilizaron los datos del *Estudio de Mejora de la Enseñanza* (SII, su sigla en inglés) que miden tanto el C.C.C. de los profesores como sus C.E.C. La medida de los C.E.C. se centra principalmente en los conocimientos matemáticos utilizados por los profesores en clase, conocimientos específicos del grado en cuestión. Las conclusiones de este trabajo son claras, los conocimientos matemáticos de los profesores constituyen el *efecto maestro* más importante, superior al grado de certificación de los profesores (efecto no significativo) o a sus estudios de matemáticas (efecto muy débil), a los años de experiencia (efecto muy bajo), a la duración diaria o anual pasado a hacer las matemáticas.

2. La pertinencia matemática

Para distinguir los efectos de los conocimientos matemáticos del profesor, Bloch (2009) propone, por su parte, distinguir diversos grados de pertinencia matemática de las intervenciones del profesor según los siguientes tres criterios:

> ***C_1:*** *[...] capacidad de interactuar con los alumnos sobre los elementos matemáticos de la situación y de fomentar la actividad de los estudiantes mediante intervenciones y comentarios sobre su producción matemática*
>
> ***C_2:*** *[...] tolerancia a las formulaciones provisionales y aproximadas, a las expresiones en la acción, y la capacidad de reconocer las ideas matemáticas que se incluyen en ostensivos no canónicos*
>
> ***C_3****: [...] capacidad para conducir la situación a su término con una fase de debate y validación; esto incluye la capacidad de seleccionar formulaciones y dejar otras a un lado, y de gestionar la cronología del debate sin matarla con el enunciado inmediato de las mejores producciones o del saber contemplado.*
>
> (Bloch, 2009)

Estos tres criterios permiten así evaluar los conocimientos de la materia del docente en función de la forma en que conducen a establecer una organización didáctica.

Los primeros dos criterios (C_1 y C_2) son definidos por Bloch (2009) para situaciones de clase, y el último criterio (C_3) para situaciones a-didácticas.

Con el fin de tener en cuenta la parte de a-didacticidad presente en situaciones de enseñanza por ostensión, se precisó el tercer criterio como "Capacidad de poner fin a la situación con una fase de debate y validación" añadiéndole, para la conducción de la situación, la *capacidad de elegir la intervención que permita, en el mejor de los casos, mantener la devolución de la actividad matemática al alumno*.

3. La estructuración del medio

Con el fin de analizar estos conocimientos y sus efectos, tanto en el establecimiento de organizaciones didácticas como en las interacciones en clase, hemos utilizado el modelo de estructuración del medio. Este modelo fue desarrollado por Margolinas (1992) que enriqueció la estructuración de Brousseau (1986) para analizar las actividades usuales del profesor y desentrañar sus prácticas.

Medio	Estudiante	Profesor	Situación
M_{+3}: M-Construcción		P_{+3}: P-Noosferiano	S_{+3}: Situación Noosferiana
M_{+2}: M- Proyecto		P_{+2}: P-Constructor	S_{+2}: Situación de construcción
M_{+1}: M- Didáctico	E_{+1}: E-Reflexivo	P_{+1}: P-Proyector	S_{+1}: Situación de proyecto
M_0: M- Aprendizaje	E_0: Estudiante	P_0: Profesor	S_0: Situación didáctica
M_{-1}: M- Referencia	E_{-1}: E- Aprendiz	P_{-1}: P-Observador	S_{-1}: Situación de aprendizaje
M_{-2}: M- Objetivo	E_{-2}: E-Actuando		S_{-2}: Situación de referencia
M_{-3}: M- Material	E_{-3}: E- Objetivo		S_{-3}: Situación objetiva

Tabla 1: Estructuración del medio (Margolinas, 2002b).

El medio del profesor puede construirse siguiendo el esquema de Margonilas (2002b), en correspondencia con la situación del estudiante. Además, como lo señala Brousseau (1990), no se puede considerar que el profesor no ponga más que conocimientos en la situación: La distinción conocimientos/saberes es necesaria cuando se trata de conocimientos profesionales como en el caso del aprendizaje del estudiante. De ello se desprende que, para estudiar el medio del profesor, hay que tener en cuenta dos tipos de objetos:

- los elementos "objetivos" del medio (los estudiantes, los elementos de la situación, relaciones entre el estudiante y los distintos medios didácticos...)
- los conocimientos y saberes que el profesor pone en juego en la situación.

Los niveles de actividad del profesor y las situaciones no se reducen al tiempo de la lección en clase, aunque algunas fases de una situación didáctica se caracterizan parcialmente por situaciones de diferentes niveles. Tampoco son temporales sucesivos (Margolinas, 2002b), y cada nivel puede ser considerado en el presente de la acción, pero también en el pasado o en el futuro. Por ejemplo, durante el trabajo en clase, el profesor puede trabajar en el nivel +1 proyectando una lección futura o recordando su trabajo anterior de preparación. De la misma manera, está en tensión entre su ambición, ya se trate de la lección (nivel +1), el tema (nivel +2) o más en general la enseñanza (nivel +3) y lo que piensa que los estudiantes podrán responder (nivel 0) o cómo desea observarlos (nivel -1) (Margolinas, 2004). La situación didáctica S_0 puede ser determinada por un análisis ascendente, de S_{-3} a S_0, desde el punto de vista del estudiante, o por un análisis descendente, de S_3 a S_0, desde el punto de vista del profesor. Puede suceder que estas dos situaciones no correspondan. Margolinas (2004) habla entonces de bifurcaciones didácticas.

La Tabla 2 es una representación del modelo de Margolinas (2002b) que muestra la forma en que precisa los niveles de actividad del profesor en cada nivel del medio.

	Nivel	Descripción del nivel
P_{+3}	Nivel noosferiano o ideológico	[…] actividad del profesor que reflexiona de manera muy general sobre la enseñanza, o bien, siempre en general, a la enseñanza de las matemáticas. A este nivel, la actividad del profesor no está terminada.
P_{+2}	Nivel de construcción o diseño de un tema	[…] la actividad del profesor es diseñar las grandes líneas de la enseñanza de un tema. Desde el punto de vista de la ingeniería didáctica, es en este nivel donde interviene de manera característica la búsqueda de una situación fundamental. Si se considera la observación de las prácticas ordinarias, se podría hablar a este nivel de investigación de problemática.
P_{+1}	Nivel de proyecto de la lección	[…] actividad del profesor que determina el escenario de una lección.
P_0	Nivel de la situación didáctica	[…] acción del profesor en la clase. Se trata del *nivel básico* en el que los estudiantes y el profesor interactúan; y por eso recibe el número cero.

P_{-1}	Nivel de observación o de devolución	Nivel de la devolución o de la observación de la actividad de los estudiantes.

Tabla 2: Niveles de actividad del profesor (Margolinas, 2002b).

Gracias a la observación de la actividad de los alumnos (Nivel P_{-1}), el profesor puede tomar decisiones en clase (Nivel P_0) que no había anticipado, pero también transformar su secuencia (Nivel P_{+1}) ver su concepción del tema matemático (Nivel P_{+2}) e incluso una de sus ideas sobre la enseñanza en general (Nivel P_{+3}).

(Margolinas, 2002b)

Así Margolinas (2002b) precisa que no se trata de un modelo temporal, sino de un modelo estructural que permite "*una multiplicidad de interpretación de la actividad del profesor desde el punto de vista temporal*". Sobre todo, desea insistir en que el profesor, en una posición dada, siempre está en interacción con el nivel superior (y los niveles superiores) y el nivel inferior (y los niveles inferiores).

3.1. Análisis descendente

El análisis descendente se centra en la actividad del profesor, y permite comprender cómo él percibe la situación de enseñanza y sus intenciones didácticas. Margolinas privilegia, para el profesor, los niveles sobre-didácticos, lo que corresponde efectivamente a los niveles en los que contempla la acción del profesor: P-noosferiano, P-constructor, P-proyector, Profesor, y en S_{-1}, P-observador. Se les estudiará haciendo lo que Margolinas llamó un análisis *descendente*: partiendo del nivel 3 para llegar al nivel -1. Se trata de determinar los niveles sobre-didácticos *descendiendo* de 3 a 1 y luego de prolongar este análisis a los niveles 0 y -1 *desde el punto de vista del profesor*.

Para llevar a cabo este análisis descendente, es necesario tener en cuenta numerosos elementos relativos a las situaciones del profesor (noosferiano, de construcción y de proyecto) cuyos indicios van a ser recogidos en los discursos del profesor (Margolinas, 2002b). En este sentido, nuestro análisis *descendente* de la situación de introducción oficial del cálculo del área y perímetro de la circunferencia, se basa en el protocolo de la *Guía de Aprendizaje* del profesor P, de sus fichas de preparación del curso y también de algunos de sus comentarios durante la secuencia de enseñanza.

4. Medida de áreas y perímetros

Como las matemáticas en la básica no deben ser formales, los conocimientos deben estar cercanos a la realidad, y en séptimo básico se está trabajando el pasaje de la geometría perceptiva a la formal, no se puede entonces recurrir a un lenguaje simbólico geométrico. En este sentido, nos apoyamos del enfoque didáctico que otorgan ciertos investigadores a la enseñanza de las magnitudes y medidas, como Godino, Batanero y Roa (2003).

4.1. Área de una región plana

El área de una región plana corresponde al número de unidades requeridas para cubrir esa región. Usualmente se eligen cuadrados como unidad de área, pero cualquier forma que recubra la figura sin solapamientos ni agujeros puede utilizarse como unidad de medida. En el proceso de medir se utilizan dos propiedades básicas:

- *Propiedad de congruencia*: Si una región R es congruente con otra región S entonces ambas regiones tienen la misma área: $área(R) = área(S)$.
- *Propiedad de disección*: Si una región R se descompone en varias subregiones disjuntas, $A, B, \dots, F$, entonces el área de R es la suma de las áreas de las subregiones:

$$área(R) = área(A) + área(B) + \cdots + área(F).$$

4.2. Longitud de una curva

La longitud de una línea poligonal se obtiene sumando las longitudes de sus lados. Si la línea es una curva (no poligonal) su longitud se puede estimar calculando la longitud de una línea poligonal cuyos vértices estén sobre la curva. La aproximación se puede ir mejorando, aumentando el número de vértices, como se muestra en la figura 4:

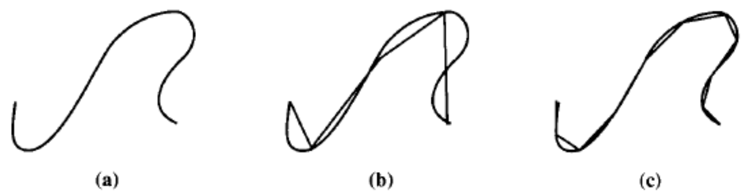


Figura 4: Representación de la longitud de una curva.

Si se trata de un objeto físico con bordes curvilíneos cuya longitud se desea medir podemos ajustar un hilo y después extenderlo longitudinalmente para su medición con una regla.

4.3. Perímetro

La longitud de una curva cerrada plana se dice que es el *perímetro* de dicha curva. Puesto que es una longitud se medirá en unidades de longitud (centímetros, metros, etc.). Es importante no confundir el perímetro con el área de una región limitada por una curva cerrada simple. El área es una magnitud que expresa el tamaño de una región y se mide en cm^2, m^2, etc.

4.4. Longitud de la circunferencia.

La circunferencia es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo O una cierta distancia constante r. La medida directa de la longitud de una circunferencia se puede obtener, de manera aproximada, rodeando el cuerpo con un hilo o cuerda de manera ajustada, luego extendiendo el hilo sobre una regla graduada y leyendo la longitud correspondiente del hilo extendido. ¿Es posible determinar la longitud de una circunferencia sin necesidad de hacer la operación física descrita? La respuesta es afirmativa debido a que existe una relación constante entre la longitud de cualquier circunferencia y su diámetro: la razón o cociente entre dichas longitudes es el número irracional π (≈3,1415927....). Podríamos hacer comprobaciones experimentales de esta relación midiendo con una cinta o hilo el borde de diversos objetos circulares y dividiendo esa longitud por los diámetros correspondientes. Si L representa la longitud de la circunferencia y d la longitud del diámetro se tiene: $L = \pi d$ (o también, $L = 2\pi r$, si r es la medida del radio).

En 1761 John Lambert probó que π es un número irracional, de manera que es imposible expresar su valor mediante una fracción o un decimal exacto o periódico. En la práctica se suele usar como aproximación 3,14, o 3,1416.

4.5. Fórmula de la longitud de la circunferencia

Midiendo con cuidado longitudes de circunferencias de distintos objetos circulares y sus respectivos diámetros (usando para ello una cinta métrica, una cuerda, un hilo, etc.) y registrando las medidas en una tabla los estudiantes pueden descubrir la importante relación entre ambas magnitudes. Estos pueden ser algunos resultados de esas mediciones.

Diámetro	Longitud de Circunferencia
$\mathbf{3cm}$	$9{,}5cm$
$\mathbf{6cm}$	$19cm$
$\mathbf{10cm}$	$31cm$
$\mathbf{15cm}$	$47cm$
$\mathbf{20cm}$	$63cm$
…	…

Tabla 3: Medidas de diámetros y longitudes de circunferencias de objetos circulares.

Un examen de tales resultados debería llevar a los estudiantes a concluir que la longitud de la circunferencia es siempre aproximadamente el triple que el diámetro correspondiente. Para que los estudiantes puedan mejorar de alguna manera las estimaciones se les puede pedir que hagan alguna gráfica, o calcular la media aritmética. El valor aproximado variará entre los grupos de estudiantes debido a errores en las mediciones, lo que puede ser un contexto rico para discutir los errores de tipo matemático y los que provienen de las acciones físicas, también permite dar sentido a la operación de promediar un conjunto de datos.

4.6. Longitud de un arco de circunferencia

Para calcular la longitud de un arco de circunferencia de radio *r* necesitamos conocer qué fracción es de la circunferencia completa. Para ello, si la amplitud del ángulo central correspondiente a ese arco es n grados, entonces la longitud L del arco será:

$$L = \frac{2 \cdot \pi \cdot r \cdot n}{360}$$

O, si la unidad de medida del ángulo n es el radián, entonces esta misma longitud L del arco será:

$$L = \pi \cdot n$$

4.7. El área de un círculo

El área de un círculo de radio r viene dada por la fórmula $A = \pi r^2$, fórmula probada por primera vez de manera rigurosa por Arquímedes. Una manera informal, aunque convincente de obtener la fórmula $A = \pi r^2$ se muestra en la figura 5. El círculo de radio r y longitud $L = 2\pi r$ se descompone en sectores congruentes y se disponen de manera de formar un "*paralelogramo*" de base $\frac{1}{2} L = \pi r$ y altura r. El paralelogramo "*ondulado*" tendrá como área $\pi \cdot r \cdot r = \pi \cdot r^2$. Si el número de sectores se hace cada vez mayor, los sectores serán progresivamente más delgados y el desarrollo se aproximará cuanto se quiera a un verdadero paralelogramo de área πr^2.

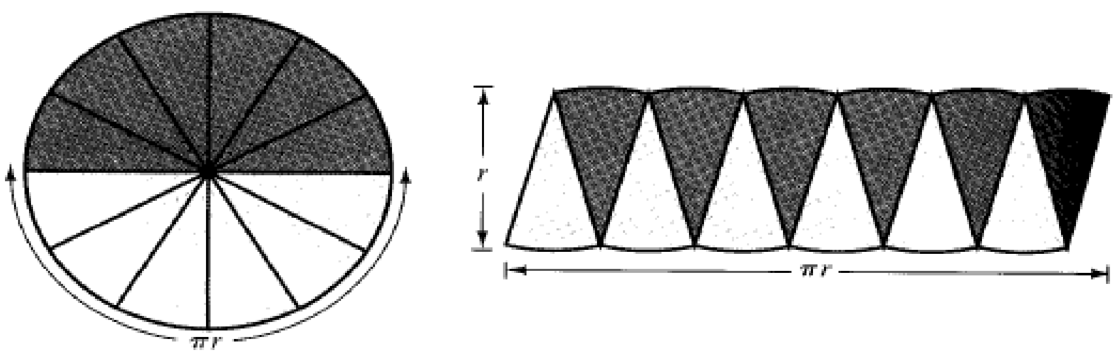


Figura 5: Descomposición de un círculo en sectores congruentes para formar un paralelogramo.

Las actividades de aprendizaje que llevan al estudiante a resolver un problema similar al que resolvieron matemáticos en otra época, están muy bien presentadas en los manuales donde se aborda el estudio de la geometría de modo un poco más inventiva, por ejemplo, *Matemáticas y su didáctica para maestros* de Godino (2012):

Se preguntó a un alumno que encontrara una fórmula para calcular el área de un círculo. Sugirió poner una cuerda alrededor del círculo y después formar con la cuerda un cuadrado. Por ejemplo, un círculo con una circunferencia de 8 unidades se puede transformar en un cuadrado de lado 2 unidades.

a) Si c = la longitud la circunferencia y l = lado del cuadrado, escribe una fórmula para l en función de c.

b) ¿Cuál sería la fórmula para calcular el área del círculo que se deduciría si fuera correcto el método propuesto por el alumno?

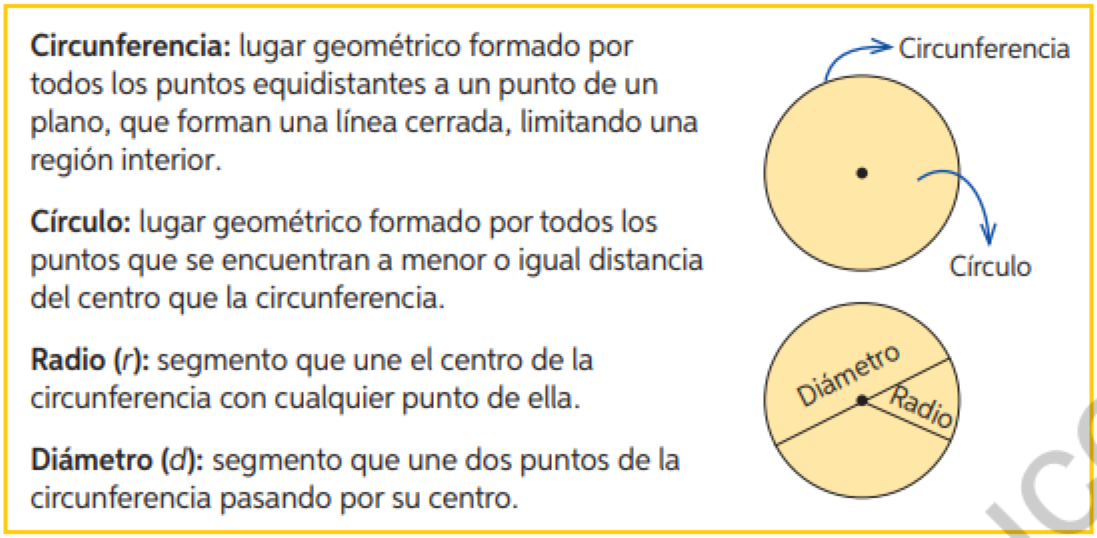
c) ¿Es correcta la fórmula? ¿Por qué no?

Figura 6: Una actividad de aprendizaje (Godino, 2012).

5. Del manual del profesor

Los documentos institucionales del Ministerio de Educación de Chile (MINEDUC) hacen hincapié en que el aprendizaje del área y perímetro del círculo se promueve realizando actividades con material concreto o utilizando ilustraciones de figuras para estimar áreas y perímetros, como se mostrará más adelante.

En la *Guía didáctica del docente* del MINEDUC se entregan algunas definiciones de conceptos como círculo y circunferencia (véase la figura 7) y luego se señala la importancia de que los estudiantes apliquen esos conceptos y definiciones pues en el futuro deberán utilizarlos para abordar contenidos más específicos con respecto a ellos, por ejemplo, la proporcionalidad en el círculo y los teoremas de cuerdas, tangentes y secantes en la circunferencia. Además, deben comprender que el radio tiene una medida que no varía independiente de donde se dibuje en el círculo, o que la cuerda que pasa por el centro del círculo corresponde al diámetro, son ejemplos del manejo conceptual que los estudiantes deben tener para el nivel.


Circunferencia: lugar geométrico formado por todos los puntos equidistantes a un punto de un plano, que forman una línea cerrada, limitando una región interior.

Círculo: lugar geométrico formado por todos los puntos que se encuentran a menor o igual distancia del centro que la circunferencia.

Radio (*r*): segmento que une el centro de la circunferencia con cualquier punto de ella.

Diámetro (*d*): segmento que une dos puntos de la circunferencia pasando por su centro.

Figura 7: Saber puesto en juego (MINEDUC, 2020).

Algunos matemáticos como Euclides (325 a.C. – 265 a.C.) y Aurelio Baldor (1906-1978) proporcionaron en su época definiciones de círculo y circunferencia.

En la 20º edición (2004) de "Geometría y Trigonometría" de Baldor aparecen las siguientes definiciones: "*La circunferencia es el conjunto de todos los puntos de un plano que equidistan de otro punto llamado centro", y "El círculo es la superficie del plano limitada por la circunferencia. Es decir, está formado por todos los puntos de la circunferencia y todos los puntos interiores a ella*".

Euclides en su obra "Elementos de Geometría", más conocida como "Los elementos de Euclides" proporciona la siguiente definición "*Un círculo es una figura plana comprendida por una sola línea llamada circunferencia de tal modo que todas las rectas dibujadas que caen sobre ella desde un punto de los que están dentro de la figura son iguales entre sí"*. Su obra es un extenso tratado formado por trece libros, donde recopila casi todo el saber matemático de la época. Se realizó la primera versión en español en Sevilla, España (1576).

En internet se pueden encontrar diversas definiciones para circunferencia, como las siguientes:

- Conjunto de puntos de un plano que son equidistantes de cierto punto (denominado centro de la Circunferencia).
- Es una línea curva cerrada cuyos puntos están todos a la misma distancia del centro.

- Línea curva, cerrada, cuyos puntos son equidistantes de otro llamado centro situado en el mismo plano.
- Según la RAE, la Circunferencia es, la curva plana, cerrada, cuyos puntos son equidistantes de otro, el centro, situado en el mismo plano.

Y para el círculo:

- Un círculo es una esfera en el plano euclidiano.
- El círculo de diámetro AB es el lugar geométrico de los puntos desde los cuales vemos el segmento AB bajo el ángulo recto .
- El círculo es una curva cerrada de curvatura constante.
- El círculo es la figura que encierra la superficie máxima para un perímetro dado.

En la *Guía didáctica del docente* también se les sugiere a los profesores hacer hincapié en que el círculo y la circunferencia son *lugares geométricos*, es decir, cada uno es un conjunto de puntos que cumplen determinadas propiedades geométricas.

Para abordar el contenido de área y perímetro del círculo esta guía didáctica propone actividades exploratorias, por ejemplo, para perímetro del círculo sugieren explorar con material concreto (objetos en los que se observe un círculo, lana, regla y tijeras). Y luego de realizar unas actividades para encontrar una aproximación de π se introduce la fórmula de perímetro. Estas actividades se muestran en la figura 8.

1. Observa la situación y realiza las actividades propuestas.

Calcular el perímetro de figuras de lados rectos es algo que vienes practicando desde hace algunos años. Sin embargo, para calcular el perímetro de un círculo, tendremos que utilizar otra estrategia.

- Sigue los pasos para calcular el perímetro de un círculo.

Paso 1: Mide el diámetro de uno de los objetos solicitados en los materiales utilizando la regla. Asegúrate de que la medida pase por el centro del círculo.

Paso 2: Con la lana, mide el contorno de los objetos (longitud de la circunferencia) y córtala según la medida.

Paso 3: Mide la longitud de la lana cortada con una regla.

Paso 4: Repite el proceso con los otros 3 objetos.

b. Completa la tabla en tu cuaderno. Utiliza calculadora de ser necesario.

Objeto	Diámetro (d)	Contorno de la circunferencia (P)	$P : d$

c. Analiza y describe la relación que existe entre los cocientes. ¿A qué número es cercano?

Figura 8: Actividad de aprendizaje (MINEDUC, 2020).

En resumen, lo primero deben hacer los estudiantes es tomar uno de los objetos y medir su diámetro, luego con la lana se debe medir el contorno de ese objeto y cortarla según la medida, para posteriormente medir con una regla la longitud de la lana cortada, y finalmente deberán hacer una división entre la longitud de la lana y el diámetro del objeto. Tendrán que repetir este mismo procedimiento con otros tres objetos, con la finalidad de encontrar una relación entre los cocientes (una aproximación del valor π).

Luego, se les presenta el número π para introducir la fórmula de perímetro del círculo, como se muestra en la figura 9.

El valor del cociente entre el perímetro y el diámetro de un círculo es un número que llamaremos pi, y denotaremos con la letra griega π, que corresponde a un irracional (3,141592653589793238462643483279…) que se puede aproximar de diferentes formas, por ejemplo:

Aproximado a la unidad $\pi \approx 3$

Aproximado a la centésima $\pi \approx 3{,}14$

El número π permite modelar una expresión para calcular el perímetro P:

$P = d \cdot \pi$ o bien $P = 2r \cdot \pi$

Figura 9: Una modelización de la fórmula del perímetro (MINEDUC, 2020).

Para estimar y determinar el área del círculo la *Guía didáctica del docente* propone la siguiente actividad:

1. El profesor entrega a sus estudiantes las siguientes figuras en una lámina y les solicita que reflexionen cómo pueden estimar el área de los círculos de las imágenes.

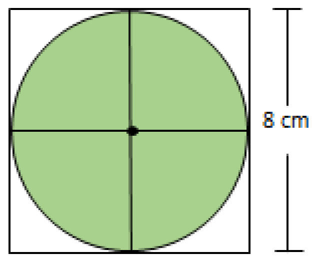


Figura 1

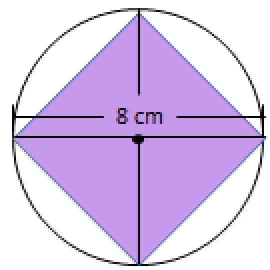


Figura 2

Observa lo realizado por dos estudiantes y responde las preguntas.

Paso 1: Recortamos los triángulos inferiores de la figura 2, en los que se divide el cuadrado inscrito en la circunferencia (dibujado al interior de esta). Luego, los superpusimos, como muestra la figura 3.

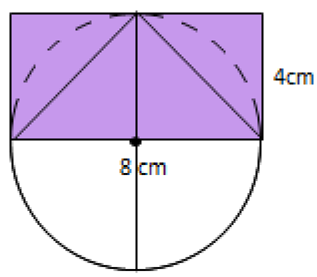
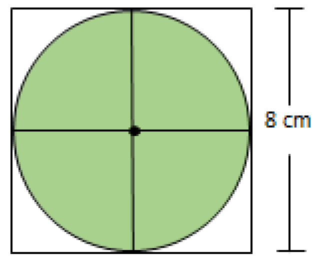


Figura 3

a. ¿Qué figura se formó?
b. ¿Cuál es el área de esta figura?
c. ¿Es menor o mayor que el área del círculo?
d. ¿A qué partes del círculo corresponden las medidas explicitadas en la imagen?

Paso 2: Posteriormente, calculamos el área del cuadrado de lado 8cm y estiramos el área del círculo.



e. ¿cuál es el área del cuadrado circunscrito (exterior al círculo)?

f. ¿Es menor o mayor que el área del círculo?

Paso 3: Finalmente, establecimos una relación de orden entre las medidas, es decir, el área del círculo (A) puede clasificarse como mayor que el doble de su radio al cuadrado y menor que el cuádruple de su radio al cuadrado.

$$2r^2 < A < 4r^2$$

g. Reemplaza los valores de las figuras en la relación establecida y observa lo que ocurre. ¿Cuál crees que sería una buena estimación de A?

Figura 10: Actividad de aprendizaje (MINEDUC, 2020).

Luego de otras actividades entrega una definición de área del círculo:

El área de un círculo (A) de radio r corresponde a la medida de la superficie del círculo y se calcula aplicando la siguiente fórmula:

$$A = \pi \cdot r^2$$

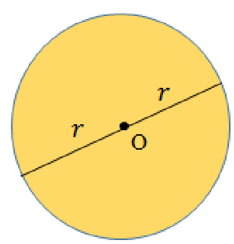


Figura 11: Definición y fórmula matemática para área del círculo (MINEDUC, 2020).

Si los estudiantes realizan la actividad mostrada en la figura 8, deberán hacer mediciones de diámetros con una regla, y esas mediciones tendrán centímetros como unidad de medida. En la fórmula del área podrían presentar dificultades cuando eleven al cuadrado el radio, pues los estudiantes suelen realizar cálculos de manera lineal y podrían hacer lo siguiente con la unidad de medida: $cm^2 = c^2m^2$.

El perímetro y área son números medidos en unidades de magnitud, y la medición de las magnitudes ha sido un tema preocupante en la historia de las matemáticas. Esta medición está relacionada directamente con los números con los cuales ella se realiza, y la evolución de las matemáticas llevó mucho tiempo antes de que permitiera que los números fueran pensados independientemente de los conceptos de magnitud y medición.

La medida de una magnitud consiste en compararla con una magnitud del mismo tipo que se ha elegido como unidad, es decir, saber cuántas veces la magnitud a medir contiene la unidad. Además, tiene la propiedad de ser aditiva, lo que significa que si dos conjuntos A y B son mensurables y que la medida de su parte común (se dice también de su intersección) es nula, entonces la medida de su unión es igual a la suma de su medida. Esta propiedad se utiliza para evaluar el área o el perímetro de una figura, con posibles adaptaciones cuando la intersección de los dos conjuntos no tiene una medida nula.

CAPÍTULO III: METODOLOGÍA

1. Contexto

En marzo del año 2020 debido al contexto de pandemia por Covid-19 las clases presenciales fueron suspendidas por el MINEDUC. Los establecimientos educacionales fueron implementando de forma gradual reuniones y/o clases virtuales para que los estudiantes pudieran seguir avanzando con el año escolar, y en este contexto es que la realización de esta investigación se limita a la observación y grabación de dos clases virtuales de un solo profesor de matemática, quien realiza clases a séptimos y octavos básicos en una Escuela ubicada en la comuna de Yungay, región de Ñuble. Las clases grabadas fueron con estudiantes de séptimo básico, por elección del profesor, y con quienes comenzaría a tratar en la clase un nuevo contenido priorizado (área y perímetro de la circunferencia), siguiendo el orden de la priorización curricular implementada dado el contexto de pandemia. La primera clase tuvo una duración de 43 minutos, y la segunda de 49, sumando en total 92 minutos de observación y grabación por video.

El objetivo de esta investigación es analizar de forma minuciosa la secuencia de enseñanza de este profesor, haciendo un seguimiento de cómo aborda el contenido de área y perímetro de la circunferencia, los tipos de conocimientos que utiliza, en qué niveles de actividad se mueve y los criterios de pertinencia matemática utilizados en sus clases.

Antes de comenzar con las grabaciones de las clases se le envió un correo electrónico al director del establecimiento con la finalidad de solicitar su autorización para ver y grabar algunas clases de un profesor o profesora de matemática, en las que aborde un mismo contenido. Luego de que el director diera su autorización, a través de WhatsApp se le preguntó a un profesor (elegido al azar) del establecimiento si podía colaborar con esta investigación, permitiendo que asistiera de oyente a todas las clases de uno de sus cursos para hacer un seguimiento de un objeto o concepto matemático. El profesor aceptó colaborar y sugirió trabajar con un séptimo básico, con quienes comenzaría a ver *Área y Perímetro de la Circunferencia*, y para ello ya tenía elaborada una *Guía de Aprendizaje* (Anexo 1). En la Escuela se utiliza un formato especial para todas las *Guías de Aprendizaje*, sin importar la asignatura, y este profesor utiliza el mismo formato.

Las clases se realizaban los días viernes a las 11 de la mañana a través de Google Meet, solo una vez a la semana, y unos 10 minutos antes de que comenzara la clase enviaba por WhatsApp el link de esta para que pudiera asistir de oyente, sin realizar ningún tipo de intervención, y observando al profesor. Estas clases fueron grabadas en su totalidad utilizando un programa de computador que se llama *Debut, capturador de video*, que permite hacer una grabación de todo lo que aparezca en la pantalla del computador y conservando además el audio de lo que se esté grabando. En total fueron dos las clases grabadas, pues ese fue el tiempo que el profesor designó para abordar la *Guía de Aprendizaje* (que estudiaremos en esta investigación), antes de pasar a otro contenido. De cada una de las clases se hizo su respectiva transcripción, de forma manual, sin utilizar un software de computador. En las transcripciones de la *Clase N°1* (Anexo 2) y la *Clase N°2* (Anexo 3) se muestran los diálogos entre el profesor [P] y los estudiantes [E1, E2, E3,…], además de algunas acotaciones de lo que estaba sucediendo. La primera clase tuvo una duración de 43 minutos y solo se abordó lo relacionado al perímetro de la circunferencia. El profesor en conjunto con los estudiantes resolvió todos los ejercicios que requerían utilizar la fórmula de perímetro, dejando para la segunda clase los ejercicios de área, y esta segunda clase finalmente tuvo una duración de 49 minutos.

2. Análisis de la información

Como se había mencionado en el capítulo anterior los conocimientos de los profesores se manifiestan en diferentes niveles de actividad del profesor, pero también en varios momentos de la clase, así para poder observar de forma clara estos momentos se ha optado por el procedimiento de la *sinopsis* y de la *macro-estructura* desarrolladas por el Grupo de Investigación de Análisis del Francés Enseñado (GRAFE) de la Universidad de Ginebra. Schneuwly y sus colegas afirman que "la sinopsis es una herramienta para condensar las transcripciones de las secuencias didácticas en una unidad más comprensible para hacerlas comparables y analizables, captar su estructura y poder situar cada momento analizado en un todo" (Schneuwly, Sales & Dolz-Mestre, 2005). De igual modo "facilita la localización de los momentos y lugares donde se realizan los gestos profesionales del profesor" (Schneuwly, Dolz-Mestre & Ronveaux, 2006).

La metodología utilizada para el análisis de la información es la *sinopsis*, que se realiza sobre la transcripción de las clases grabadas (Anexos 2 y 3), en las que el profesor utilizó una *Guía* *de Aprendizaje* (Anexo 1) entregada con anterioridad a sus estudiantes y que en el momento inicial de la clase se les pide que deban tenerla a mano pues comenzarán a resolverla. Esta forma de reducción debe permitir resaltar la estructuración jerárquica y la secuencialidad de una secuencia didáctica que utiliza el profesor.

Según Schneuwly, Sales & Dolz-Mestre (2005) el punto de partida para crear una sinopsis es una *actividad escolar*, que corresponde a una actividad de enseñanza/aprendizaje, que se caracteriza por una instrucción, más o menos explícita, que define un objetivo. Se lleva a cabo gracias a repeticiones de las instrucciones y mediante las diversas interacciones realizadas por los estudiantes y reguladas por el profesor para lograr el objetivo. A menudo, se pueden desglosar en diferentes fases (por ejemplo: instrucción, ejecución, corrección) de niveles inferiores y se agrupan en niveles jerárquicos superiores estructurando la secuencia. El desencadenante de una actividad escolar es generalmente una consigna oral o escrita, la introducción de un nuevo soporte material (un texto, un cuestionario o notas en la pizarra), o la puesta en marcha de un nuevo dispositivo (el ejercicio, la lectura en voz alta de un texto).

En la sinopsis realizada sobre las transcripciones de las clases grabadas se seleccionó la información de los conocimientos del profesor permitiendo hacer un análisis en profundidad. Luego, a través de la información seleccionada se realizó una macro-estructura enfocada en las acciones profesionales del profesor sobre los conocimientos didácticos matemáticos, revelando sus tendencias. Esta macro-estructura se presenta a continuación:

Medida del perímetro y área de la circunferencia

1. Revisión de la definición de perímetro y su fórmula utilizando un soporte geométrico y un soporte material.

- **1.1.** Vincula el perímetro de la circunferencia con el recorrido que haría una persona que camina por los puntos de esta.
- **1.2.** Explicita el valor del radio en el ejemplo explicativo $(r = 10cm)$ haciendo que sea un ejercicio de aplicación directa de la fórmula.

  La falta de tareas exploratorias lleva a explicitar el método en lugar de ponerlo en práctica.
- **1.3.** Lee *¡Datos importantes!* De la Guía de Aprendizaje, que entrega una definición para π y una definición para radio.

2. Revisión de la definición de área y su fórmula utilizando un soporte geométrico y un soporte material.

- **2.1.** Induce a una confusión entre círculo y circunferencia con las palabras empleadas *"… el área encerrada"*.
- **2.2.** Insiste, al igual que en el perímetro, en la formulación de un cálculo, y hace énfasis en que se deben aprender las fórmulas.
- **2.3.** No explica por qué la unidad de medida es cm^2, solo dice que esa es la diferencia que hay con la fórmula del perímetro.
  - **2.3.1.** Coloca en las alternativas de los ejercicios las unidades de medida (cm y cm^2) y estas llevan a los estudiantes a determinar qué fórmula utilizar.

3. Realiza un trabajo de modelización en el campo de las magnitudes (área y perímetro) y medidas de la circunferencia.

- **3.1.** Utiliza elementos reales en los ejercicios para medir el perímetro de la circunferencia yuxtaponiendo longitudes y utilizando una unidad de referencia (argollas del ejercicio n°8).
  - **3.1.1.** Pide saber que el perímetro de una figura se conserva, aunque haya una descomposición o recomposición de su contorno.
- **3.2.** Pide, de manera explícita, calcular el área de una superficie (ejercicio n°9), convirtiéndolo en un ejercicio de aplicación directa.

1.3.1. Establece que $\pi = 3$, y esto induce a los estudiantes a un cálculo exacto que los lleva a rechazar ciertos procedimientos.

1.3.2. Induce ambigüedad en los términos recta/segmento, pues indica que el radio es una "línea recta que une el centro de un círculo con cualquier punto del borde de la circunferencia.

1.4. Llama "**r**" al radio, pero no entrega el centro ni la definición para evocar en los estudiantes el trazado de la circunferencia.

1.5. Propone un ejercicio en el que el perímetro se utiliza como referencia para calcular los centímetros que recorrería una rueda de bicicleta cuando ha dado 10 vueltas (ejercicio n°2).

2.4. Induce ambigüedad en el objetivo perseguido del primer ejercicio, pues la pregunta puede estar referida al área de la circunferencia, o al disco que corresponde a la zona que cubre la moneda.

3.2.1. Supone que el estudiante concibe la circunferencia como una figura "redonda" y no como un "lugar geométrico", cuando se refiere a *"tabla circular"*

3.3. No pide a los estudiantes que verifiquen sus respuestas midiendo el área y el perímetro de cada uno de los reales para hacerles tomar conciencia de la formulación matemática disco/circunferencia.

Figura 12: Macro-estructura de la secuencia de enseñanza.

El grado de detalle en las transcripciones se hace en base a los hechos y las preguntas que nos planteamos en el **Capítulo I**, dependiendo del interés que encontremos en los momentos considerados, por ejemplo, cuando el profesor simplifica el trabajo de los estudiantes diciendo *"…no tenemos que hacer las cosas más difíciles, para ustedes π va a valer solamente 3*", o cuando da una definición simple de lo que él considera como perímetro y área "*si ustedes recuerdan perímetro era lo de afuera, ahora área es lo que está adentro*", también utiliza expresiones como "*…calcular el área encerrada solo sabiendo cuánto mide el radio*", en vez de decir *superficie encerrada*. Este grado o nivel de detalle no es fijo y, a veces, se logra detallar de manera más precisa cuando se asignan palabras claves o códigos a pasajes de las transcripciones para resumirlos, o incluso se pueden transcribir íntegramente (Clivaz, 2011).

3. La secuencia del profesor

Las clases se basaron en la resolución de la *Guía de Aprendizaje* preparada por el profesor. Esta guía comienza con definiciones de área y perímetro de la circunferencia, sus respectivas fórmulas matemáticas y un *ejemplo explicativo* para cada caso. Estos ejemplos se tratan del cálculo del perímetro y del área de las figuras formadas por la circunferencia de radio $10cm$, y que fueron dibujadas para cada ejemplo.

Tres secuencias de tareas se dedican luego a revisar el área y el perímetro de la circunferencia en: cuatro ejercicios de selección múltiple, cada uno presenta una imagen del objeto al que se refiere el ejercicio, por ejemplo, en el ejercicio n°1 se debe calcular la superficie que ocupa una moneda de $500 y junto a la pregunta hay adjunta una imagen de esta moneda; tres ejercicios de aplicación directa de las fórmulas, con las circunferencias dibujadas y el valor del radio expresado en el interior de estas; y dos problemas matemáticos, en uno de ellos deben deducir qué fórmula utilizar y en el otro aparece de forma explícita que se debe calcular el área. El sentido de las actividades dispensa un trabajo específico de conceptualización de las situaciones, más bien pone a prueba conocimientos de cálculos útiles solamente en el marco del ejercicio a resolver, y esto le ayuda al profesor para verificar lo que enseña en la clase.

El profesor realiza una lectura completa de toda la guía, dando algunas indicaciones para resolver los ejercicios, y con ayuda de los estudiantes los va resolviendo uno por uno en su pizarra para trabajar las medidas del perímetro y el área de la circunferencia con el radio dado en cada ejercicio.

Dado a que se limitó a π al entero 3, la utilización de estas fórmulas conduciría a valores aproximados del perímetro y área, pero no a valores esperados, valores exactos o valores redondeados a la centésima.

La explicación del área y perímetro de una circunferencia se produce en el comienzo de cada una de las clases. En la primera clase el profesor muestra la definición de perímetro de la circunferencia y solo trabaja con la parte de la guía que está referida a perímetro, y en la segunda clase muestra la definición del área y lo referido a ese contenido, trabajando con los ejercicios que habían quedado pendientes. La explicación de las fórmulas es retomada y estrenada juntamente con los ejercicios de los ítems I, II y III. Las dificultades de los alumnos se tratan a medida que van surgiendo. Dado que el profesor ha encontrado dificultades en los estudiantes para aplicar correctamente las fórmulas y dificultades con el trabajo autónomo de ellos, pues la mayoría espera a que él resuelva los ejercicios, la última sección de la guía está dedicada al trabajo de problemas matemáticos a realizar individualmente.

4. Análisis “a priori”

El siguiente análisis está referido a la *Guía de Aprendizaje* de *Área y Perímetro de la Circunferencia* (Anexo 1) utilizada por el profesor en su secuencia de enseñanza, y que está compuesta por definiciones de los conceptos, fórmulas, ejemplos explicativos, ejercicios de selección múltiple, ejercicios de aplicación directa de las fórmulas y problemas matemáticos.

4.1. La introducción de los objetos de enseñanza

La introducción muestra incoherencias en varios aspectos. En la parte inicial la descripción del área se confunde con el concepto de superficie tratándolas como iguales. El resultado de la fórmula de área es un valor numérico (número real positivo) lo cual es incoherente con la explicación que entrega la guía “*…el área de la circunferencia es todo lo que está adentro*”. Esta misma explicación se contradice con la definición de la circunferencia que en parte indica “*…limitando una región interior*”, región interior formada por puntos pertenecientes al círculo, que por lo demás se señala en las definiciones de la *Guía didáctica del docente* (MINEDUC, 2020) presentadas en la Figura 7.

4.2. Sobre la definición de los conceptos de área y perímetro

Área:	Perímetro:
La curva denominada circunferencia encierra en su interior una superficie, la cual es llamada área. *Dicho de una forma más sencilla el área de la circunferencia es todo lo que está adentro.* Tenemos una fórmula muy fácil que nos permite calcular el área encerrada, solo sabiendo cuánto mide el radio. Llamemos **"r"** al radio de la circunferencia, entonces el área se calcula con la siguiente fórmula: $\boxed{\text{Á} = \pi \cdot r^2}$	Teniendo una circunferencia, el perímetro es la longitud de la curva, es decir la distancia que caminaría una persona que empezará a caminar en un punto de la circunferencia y diera una vuelta alrededor de la circunferencia hasta llegar al punto de partida. *Dicho de una forma más sencilla el perímetro es todo el contorno de la circunferencia.* De igual manera que para el área, existe una expresión que nos permite saber la longitud de la circunferencia solo conociendo su radio, la fórmula es: $\boxed{P = 2 \cdot \pi \cdot r}$

Figura 13: Definición de área y perímetro de la circunferencia presentes en la Guía de Aprendizaje.

Si bien al inicio, la guía indica que la circunferencia "…*encierra en su interior una superficie*", una descripción correcta, la define como área produciendo una incoherencia interna. Así mismo, utiliza expresiones como "… *calcular el área encerrada*" que no ayudan a la comprensión y distinción de los conceptos de área y superficie, cuando en realidad se debe decir "región encerrada" o "superficie encerrada".

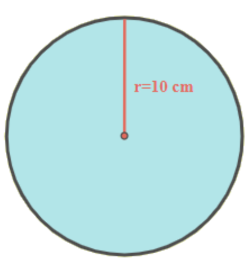
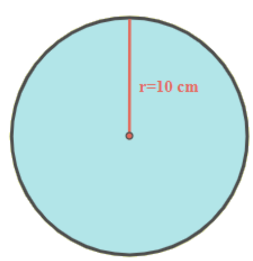
Situación análoga para describir el concepto del radio (en el apartado de **¡Datos importantes!**) como *"línea recta…"*, cuando en la *Guía didáctica del docente* lo define como un segmento, lo cual es correcto. A veces es usual que se atribuya a la longitud de este segmento como radio, pero en ningún caso como una recta, como lo indica en el recuadro de **¡Datos**

importantes! La longitud de un segmento, el segmento y la recta son objetos que están relacionados, pero son diferentes, de hecho, el primero corresponde al marco numérico y los otros dos al geométrico. Del mismo modo, no es claro el significado que se pretende dar a "borde" al señalar *"… borde de la circunferencia"* (en el punto 2 del mismo recuadro) ya que la circunferencia no tiene borde, entendiendo por borde una frontera.

Por otro lado, en la descripción que da del perímetro como la distancia que recorre una persona, etc., utiliza la circunferencia como una trayectoria por donde la persona camina. Lo cual intuitivamente es comprensible por el alumno, pero al mismo tiempo señala que lo hace *"…alrededor de la circunferencia"*, posiblemente como una forma de referencia, produciendo una incoherencia, dado que una trayectoria por donde se transita no puede ser al mismo tiempo un objeto de referencia. Además, para esta descripción descuida el centro de la circunferencia como el objeto equidistante, simétrico y referencial en torno o alrededor del cual la persona transita, simplemente no lo pronuncia.

Posteriormente, como una forma más sencilla de describir el perímetro se señala *"…el perímetro es todo el contorno de la circunferencia"*, esto es incoherente pues la circunferencia no posee contorno. La idea intuitiva que podría tener un alumno respecto de *"contorno"* aplicado al círculo, no aplica para la circunferencia, lo que podría producir una dificultad en el futuro cuando deban comprender contorno de curvas como parábola, elipses, entre otras.

4.3. Los ejemplos explicativos de la guía

Ejemplo explicativo:	Ejemplo explicativo:
	
$Á = \pi \cdot r^2$ $Á = 3 \cdot 10^2$ $Á = 3 \cdot 10\ cm \cdot 10\ cm$	$P = 2 \cdot \pi \cdot r$ $P = 2 \cdot 3 \cdot 10\ cm$ $P = 6 \cdot 10\ cm$

Á = 3 · 100 cm^2 Á = 300 cm^2	P = 60 cm

Figura 14: Ejemplos explicativos de las definiciones de área y perímetro de la circunferencia en la Guía de Aprendizaje.

En los *ejemplos explicativos* se aplica la fórmula para el cálculo de área y perímetro de una circunferencia por un proceso de sustitución del valor numérico del radio, el cual es dado, para luego reducir a un resultado numérico. En ningún caso se hace mención o explicación de estas fórmulas en lo geométrico o en su relación con el concepto de superficie en la medición, en la utilización de unidades de medida para el área y/o de longitud para el perímetro, para organizar superficies en función del área o comparar con otras superficies de figuras simples (como, aproximación por polígonos).

En el proceso del cálculo numérico, el desarrollo de ambos ejemplos asigna explícitamente el valor 3 a π, que en realidad es una aproximación, pero exagerada. Es más usual utilizar la aproximación 3,14.

¡Datos importantes!:

1) π (pi): es un número irracional (no puede expresarse como fracción), por ende, su valor más usado para este tipo de ejercicios es 3,14, pero para el desarrollo de esta guía el valor de π será de 3.
2) r (radio): línea recta que une el centro de un círculo con cualquier punto del borde de la circunferencia.

Figura 15: Definición de π y radio en la Guía de Aprendizaje.

Existe ausencia del concepto (o al menos la idea) de aproximación, y se opta más bien por la igualdad al referirse a los valores de 3 y 3,14 para π. En el ejemplo del área se produce un error aproximado de 14 cm^2 que equivale, por ejemplo, a la superficie de un rectángulo de dimensiones 2 cm y 7 cm, que no es menor.

4.4. Tamaños irreales y el número π

Los ejercicios (ítem I y II, Anexo 1) y problemas (ítem III, Anexo 1) propuestos para el trabajo autónomo de los estudiantes poseen para su resolución la misma estructura de desarrollo que en los *ejemplos explicativos.* Lo que lleva a una sustitución directa y mecánica del valor numérico del radio para cada fórmula. Tampoco propone una variante en la resolución, por ejemplo, indicar el diámetro o el perímetro en lugar del radio de manera que el alumno tuviese la necesidad de calcular el radio. En la aplicación de fórmulas, el estudiante no invierte tiempo ni razonamiento en el análisis de la interpretación de los datos, pues son dados de forma explícita y directos para sustituir en la fórmula, tampoco se solicitan justificaciones o verificaciones, por lo tanto, el trabajo del alumno consiste en reemplazar los datos en una fórmula, calcular el valor numérico y presentar el resultado. En el cálculo numérico utiliza solo números enteros positivos, salvo el problema 7 que es el único en que el radio es un número decimal, lo cual a priori, se puede suponer que fue para la facilidad de los cálculos pues incluso el número irracional π la guía lo asume igual al entero 3. Se evitan los números decimales incluso estando conscientes que corresponden al nivel de aprendizaje de los alumnos.

En relación con la medida del radio en objetos reales, como una mesa (ejercicios 3 y 4, Anexo 1) o la moneda de \$500 (ejercicio 1, Anexo 1), el planteamiento de los ejercicios resta realismo a los tamaños de los objetos; una mesa de diámetro 8 cm y una moneda (de \$500) de diámetro 4 cm, es decir, dos de estas monedas cubren el diámetro de la mesa, lo cual es irreal. El diámetro de una moneda de \$500 es de 2,6 cm, o sea de radio 1,3 cm (fuente: Banco Central de Chile) y una mesa de diámetro 8 cm es irreal para ser una mesa.

I. **<u>Selección múltiple.</u>** Lee con atención los siguientes enunciados y luego marca la alternativa correcta. Considera que el valor de π es 3.

1) Una moneda de \$500 tiene un radio de 2 cm. **<u>¿Qué superficie ocupa?</u>**

a) 12 cm^2
b) 4 cm^2
c) 7 cm^2
d) 9 cm^2

Figura 16: Ejercicio n°1 de la Guía de Aprendizaje.

5. Posibles desarrollos y dificultades de los estudiantes

5.1. Posibles desarrollos de los estudiantes

La estructura de los ejercicios y problemas tienen el mismo formato, lo cual lleva a que en esencia el desarrollo es la aplicación directa de una fórmula, no permitiendo una variación de las estrategias o procedimientos en sus desarrollos.

Transversalmente los alumnos aplicarán la fórmula, ya sea del área o del perímetro, sustituyendo el dato del radio dado en cada enunciado. La distinción de qué fórmula aplicar, no es una dificultad para el alumno pues los propios enunciados explicitan el tipo de valor numérico que se debe calcular, área o perímetro.

a) *Ejercicios 1), 3), 4), 5), 6), 7) y 9).* Los estudiantes procederán a la aplicación directa de la fórmula.
b) *Ejercicio 2).* Dos posibles desarrollos:

2) La rueda de una bicicleta tiene un radio de 32 cm. **¿Cuántos centímetros recorrerá un ciclista cuando la rueda ha dado 10 vueltas?**

a) 172 cm.
b) 182 cm.
c) 192 cm.
d) Ninguna de las anteriores.

Figura 17: Ejercicio n°2 de la Guía de Aprendizaje.

Desarrollo 1: el alumno interpretará que el perímetro de la rueda corresponde a "una vuelta que recorrerá la bicicleta". Para ello aplicará, la fórmula de perímetro obteniendo así la distancia que recorrerá la rueda en una vuelta. Luego, este resultado lo multiplicará por 10 para dar respuesta al ejercicio.

Desarrollo 2: el alumno procede separadamente con la multiplicación $32 \cdot 10$ (valor del radio y el número de vueltas), y luego este resultado lo multiplique por $2 \cdot 3$, donde 3 corresponde al valor de π, según las indicaciones de la guía. El resultado final será el mismo que el desarrollo 1. En este desarrollo es posible que el alumno no comprenda el significado de la multiplicación $32 \cdot 10$, y más bien proceda mecánicamente sin razonar, aunque la guía induce a la mecanización a partir de los desarrollos de los ejemplos explicativos.

c) *Problema 8).* Dos posibles desarrollos:

8) Para una presentación de gimnasia de un colegio se necesita elaborar <u>15 argollas</u> de radio <u>40 cm</u>. ¿Cuántos centímetros de tubo plástico se debe comprar para confeccionar las 15 argollas?

Figura 18: Problema n°8 de la Guía de Aprendizaje.

<u>Desarrollo 1</u>: el alumno procederá con el cálculo del perímetro de una argolla por aplicación de la fórmula con el radio de 40 cm. El resultado dará los centímetros de tubo plástico necesarios para confeccionar una argolla. Luego este resultado lo multiplicará por 15, el número de argollas, para obtener los centímetros de tubo plástico para confeccionar las 15 argollas.

D<u>esarrollo 2</u>: el alumno procede con la multiplicación $40 \cdot 15$ (valor del radio y el número de argollas), y luego este resultado lo multiplique por $2 \cdot 3$, donde 3 corresponde al valor de π, según las indicaciones de la guía. El resultado final será el mismo que el desarrollo 1. Al igual que en el ejercicio 2, es posible que en el alumno no logre comprender el significado de la multiplicación $40 \cdot 15$ en el contexto del problema.

5.2. Dificultades/ errores de los estudiantes

Algunas de las principales dificultades y errores, se describen a continuación:

1. Es posible que los alumnos establezcan una regla de multiplicación de las magnitudes lineales en el caso de área, es decir $cm \cdot cm = cm^2$.
2. Es posible que los alumnos presenten dificultades en distinguir entre la medida y la magnitud de la medida. Así, por ejemplo, la magnitud de los lados de un rectángulo es cm y la del área es cm^2.
3. Un posible error en los alumnos es considerar cm como una expresión algebraica formada por la multiplicación de "c" y "m". esto para justificar el resultado de la multiplicación

$$10\ cm\ \cdot 10\ cm = 100\ cm^2$$

donde cm^2 lo interprete por

$$cm\ \cdot cm = \ c^2m^2 = \ cm^2$$

4. Otra forma que el alumno quiera justificar $cm\ \cdot cm = cm^2$, es que a partir del resultado del cálculo de área

$$10\ cm\ \cdot 10\ cm = 100\ cm^2$$

deduzca que

$$cm\ \cdot cm = cm^2 \quad \text{ya que } 10 \cdot 10 = 100$$

es decir, *"multiplicar los valores numéricos y también las unidades de medida"*

5. En el proceso de resolución, al haber asumido el valor de 3 para π es posible que pueda producir dificultades en actividades con material tangible. El procedimiento utiliza 3 como igual a π, lo cual facilita el cálculo del área y longitud pues se reduce a multiplicación de números naturales. El resultado obtenido, el alumno lo asume igual al área y perímetro. Si a posterior en una situación de validar sus resultados con materiales tangibles pueden ocurrir diferencias significativas, entre los resultados y la realidad, que el alumno no logre comprender ni explicar. En el caso del ejercicio 3), el resultado que obtiene el alumno tiene una diferencia aproximada de 2,3 cm^2 de déficit del mantel para cubrir la mesa. Así mismo, en el ejercicio 4) la longitud de la huincha que obtiene el alumno no es suficiente para cubrir el borde de la mesa a causa de asumir "el valor de π igual a 3". Ahora si las magnitudes son superiores, el error es mayor. Esto por no dar énfasis en el significado de la aproximación y haber optado por otra aproximación para π, como 3,14.

6. Análisis a posteriori

6.1. De la secuencia del profesor

En lo sigue se trata de destacar la influencia de los conocimientos matemáticos para la enseñanza (definidos por Ball, Thames y Phelps) en la secuencia del profesor.

6.1.1. Atribución de la observación de los hechos de enseñanza

Los objetos de observación se atribuyen a pasajes del relato, de las transcripciones o comparaciones con el análisis a priori y describen el nivel de actividad del profesor, el tipo de conocimientos matemáticos en juego y su pertinencia.

Podemos señalar hechos y plantear preguntas apoyándonos en el análisis a priori, las que no habíamos reparado durante la observación de la secuencia de enseñanza.

6.1.2. El tiempo y los diferentes momentos

La *Guía de Aprendizaje* de *Área y Perímetro de la Circunferencia* les fue entregada a los estudiantes unos días antes de la primera clase, y su resolución y/o desarrollo constituyó la base de la secuencia de enseñanza de este profesor. Esta guía está dividida en tres ítems: en el *Ítem I* el profesor elige presentar ejercicios de selección múltiple para utilizarlos como aplicaciones directas de las explicaciones de la clase; en el *Ítem II* propone resolver ejercicios para hacer una aplicación directa de las fórmulas matemáticas de área y perímetro; y en el *Ítem III* elige presentar dos problemas matemáticos para que los estudiantes razonen una posible solución.

La ***primera clase*** está referida a la parte de la guía referida a perímetro de la circunferencia. El tiempo y los diferentes momentos de estudio en la clase se detallan a continuación:

11:05hrs – 11:25hrs: Presentación de la actividad. El profesor les dice a los estudiantes que en esa clase solo trabajarán con la parte de la guía que está referida a perímetro de la circunferencia. Les da algunas instrucciones sobre la forma de trabajo, por ejemplo, que resuelvan los ejercicios sin la calculadora, que den sus respuestas de forma oral o en el chat, entre otras. El profesor realiza una lectura de la primera hoja de la guía (solo la parte de perímetro), lee la definición de perímetro, su fórmula, desarrolla el *ejemplo explicativo* en su pizarra y lee los *¡datos importantes!* Luego, comienza a leer las *instrucciones* de la segunda hoja de la guía, y del *Ítem I* lee el ejercicio n°2.

11:25hrs – 11:30hrs: Búsqueda de solución al ejercicio n°2 por parte de los estudiantes, aplicando fórmula del perímetro. El profesor hace la corrección del ejercicio en la pizarra con ayuda de los estudiantes. Se repite el mismo proceso en la resolución del ejercicio n°4.

11:30hrs – 11:37hrs: El profesor lee el *Ítem II*. Los estudiantes resuelven de forma autónoma los ejercicios n°5, n°6 y n°7, aplicando la fórmula del perímetro. El profesor hace la corrección de cada uno de los ejercicios en la pizarra con ayuda de los estudiantes.

11:37hrs – 11:39hrs: El profesor lee el *Ítem III* y luego el ejercicio n°8. Los estudiantes de forma autónoma aplican la fórmula de perímetro para resolver el ejercicio n°8 y después el profesor hace la corrección en la pizarra.

11:39hrs – 11:48hrs: El profesor da algunas indicaciones finales y realiza un resumen de lo visto en la clase.

La ***segunda clase*** está referida a la parte de área de la circunferencia. A continuación, se describe el tiempo y los momentos de la clase:

11:06hrs – 11:10hrs: El profesor hace una retroalimentación de la clase anterior, y un repaso de algunos conceptos. Presenta la actividad y lee la definición de área de la circunferencia, su fórmula y el desarrolla en la pizarra el *ejemplo explicativo* con ayuda de los estudiantes.

11:10hrs – 11:21hrs: El profesor lee los ejercicios n°1 y n°3 del *Ítem I.* Los estudiantes buscan solución a los ejercicios y aplican la fórmula del área. A continuación, el profesor hace la corrección en la pizarra con ayuda de los estudiantes.

11:21hrs – 11:41hrs: Los estudiantes resuelven de forma autónoma los ejercicios n°5, n°6 y n°7 del *Ítem III*, aplicando la fórmula del área, y luego el profesor hace la corrección de cada uno de los ejercicios en la pizarra con ayuda de los estudiantes.

11:41hrs – 11:48hrs: El profesor lee el ejercicio n°9 del *Ítem III,* los estudiantes aplican de la fórmula del área y luego el profesor hace la corrección del ejercicio en la pizarra.

11:48hrs – 11:54hrs: El profesor da unas indicaciones finales y se despide de los estudiantes.

6.1.3. Organización de la clase

En la ***primera clase*** el profesor les pide que tengan a mano la guía porque comenzarán a resolver los ejercicios. Les indica que en esa clase solo verán lo referido a perímetro de la circunferencia, y lo de área quedará pendiente para verlo en la clase siguiente.

De la primera hoja de la guía el profesor lee la definición y da un ejemplo por medio de un dibujo que hizo en la pizarra para explicar lo que es perímetro. Luego muestra en la misma pizarra la fórmula y lee *¡datos importantes!* en donde se entrega una definición de π y radio. Después desarrolla en su pizarra el *ejemplo explicativo*, preguntándole a los estudiantes por cuáles números reemplazar en la fórmula.

Para la segunda hoja de la guía el profesor lee las *instrucciones,* en donde se explica las partes en las que está dividida la guía y los tipos de ejercicios que contiene (preguntas de alternativas, ejercicios y problemas matemáticos). Vuelve a mencionar que no utilicen calculadora y que dejen los desarrollos hechos en la guía pues después deberán sacarles fotos a sus desarrollos y enviárselos para evaluarlos.

Con ayuda de los estudiantes resuelve en su pizarra los ejercicios n°2 y n°4 del *Ítem I*. Luego de resolver cada ejercicio le pide a un estudiante que le saque un pantallazo del ejercicio para que después lo comparta con el resto de sus compañeros.

Les da unos minutos para que de manera autónoma resuelvan los ejercicios n°5, n°6 y n°7 del *Ítem II*. Algunos estudiantes los resuelven y van dando sus resultados de forma oral, y el profesor les dice que luego va a resolver los ejercicios en la pizarra para que comprueben si llegaron al resultado correcto. En el ejercicio n°7 el radio de la de circunferencia es un número decimal, y no todos los estudiantes pueden resolverlo de manera autónoma así es que esperan a que el profesor lo resuelva en la pizarra.

El ejercicio n°8 es el último de perímetro y corresponde a un problema matemático (del *Ítem III*), y el profesor lo resuelve en su pizarra con ayuda de los estudiantes. Al finalizar la clase él les dice que cuando no entiendan algo pregunten, da las gracias a los estudiantes que tuvieron encendida la cámara de sus computadores y por haber participado en la clase. Luego, les menciona que en la próxima clase se hará lo mismo, pero con la parte de área de la circunferencia. Finalmente, pide que alguien diga lo que aprendió en la clase.

En la ***segunda clase*** el profesor hace una retroalimentación de lo visto en la clase anterior, dando énfasis en que para esa guía se reemplazará a π por 3 para facilitar los cálculos, pero más adelante cuando vuelvan a utilizar π deberán reemplazarlo por 3,14. Les dice que área corresponde a lo que está adentro de la circunferencia y después lee la definición que está en la primera hoja de la guía y resuelve en su pizarra el *ejemplo explicativo* con ayuda de los estudiantes, luego lo explica de nuevo pues una estudiante se lo pide.

El profesor resuelve los ejercicios n°1 y n°3 del *Ítem I* en la pizarra con ayuda de los estudiantes. Después, les da unos minutos para que resuelvan de manera autónoma los ejercicios n°5, n°6 y n°7. En vista de que los estudiantes siguen presentando dificultades en la multiplicación con números decimales les propone que en la próxima clase refuercen ese contenido. Pasan al *Ítem III* de la guía, y los estudiantes resuelven de manera autónoma el ejercicio n°9 que corresponde a un problema matemático que pide calcular el área de una tabla circular. Posteriormente, el profesor hace la corrección de ese ejercicio en la pizarra. Finalmente, les dice que ya están resueltos todos los ejercicios y que deben sacarles fotos a sus desarrollos para enviárselas, y que en la próxima clase reforzarán multiplicación y división de decimales.

En resumen, las clases consistían en la lectura de las definiciones por parte del profesor, lectura de los enunciados y la resolución de los ejercicios en su pizarra, haciéndoles preguntas a los estudiantes en cuanto al procedimiento, y, en su mayoría, de forma general, sin individualizarlos, cualquier estudiante podía realizar aportes. Había un diálogo constante entre el profesor y algunos de los estudiantes de la clase. En la mayoría de los ejercicios se detenía y les daba tiempo para que resolvieran ellos solos, y luego él los desarrolla en su pizarra de acuerdo a lo que los estudiantes le indicaban. Aclaraba dudas cuando las había, o volvía a repetir el desarrollo de un ejercicio cuando alguien se lo pedía.

6.1.4. Opción elegida por el profesor para el enunciado de las consignas

El profesor utilizó el conocimiento pedagógico didáctico cuando cambió el formato de su *Guía de Aprendizaje* a uno diferente al de las guías implementadas por la Escuela. La diferencia con las guías implementadas por la Escuela se encuentra en que en esas guías aparecía en el pie de página la frase reflexiva “Aprender sin pensar es inútil. Pensar sin aprender, peligroso”, y este profesor cambia esa frase por la siguiente: “Nadie es perfecto por eso los lápices tienen goma”.

El profesor escribe en la guía "**¡Datos Importantes!**", dándole énfasis agregando signos exclamativos, escribiendo en negrita y con subrayado. Esto se debe a una opción deliberada del profesor, para resaltar lo que hay en ese recuadro pues es parte fundamental en la resolución de los ejercicios. También resalta en negrita y con subrayado la palabra "**Instrucciones**", pidiéndole a los estudiantes que dejen los cálculos hechos en la guía porque cuando la tengan resuelta deben sacarle fotos y enviárselas para que él los califique, y viendo sus desarrollos podría identificar posibles errores, o si utilizan un método distinto para resolver. Cabe destacar que cuando el profesor analiza los errores de los estudiantes está utilizando el conocimiento especializado del contenido (C.E.C.). Además, agrega "***¡Éxito!***", siguiendo la misma estructura de las guías anteriores, con la diferencia de que en las anteriores esta palabra estaba al final de la guía.

El profesor limita el valor de π al "entero 3", en lugar de "el número irracional $3{,}14$" que es la aproximación que se utiliza usualmente. En la *Guía didáctica del docente* se define a π como el "*valor del cociente entre el perímetro y el diámetro de un círculo*", y este profesor en ningún momento de la clase indica qué es el número π, solo se refiere a él como un número irracional y que para el desarrollo de la guía se utilizará la parte entera de ese número, para que les sea más fácil. Esto se remite a una opción deliberada del profesor. Acá él utiliza el conocimiento especializado del contenido (C.E.C.), pues modifica la tarea de los estudiantes para que les sea más fácil.

6.1.5. Texto escrito en la Guía de Aprendizaje

En la definición de área entregada en la primera hoja de la guía, la expresión "*el área encerrada*" apela al número que define la magnitud del objeto geométrico círculo y no menciona ninguna unidad de medida, solo lo hace después al resolver los ejercicios diciendo que el perímetro va acompañado de centímetros (cm) y el área de centímetros cuadrados (cm^2). Lo mismo ocurre cuando declara la expresión "*el área de la circunferencia es todo lo que está adentro"*, no utiliza unidad de medida y no es una definición matemática, es una expresión propia del profesor. De todo esto se desprende que el profesor utiliza el conocimiento común del contenido (C.C.C.), pues solo se sitúa en el nivel del algoritmo.

En la segunda hoja de la guía, específicamente en **Instrucciones** el profesor escribe "te solicito que no uses calculadora para resolverla y lo más importante que dejes todos tus cálculos hechos en la guía", con la intención de que cuando los estudiantes tengan desarrollados todos los ejercicios le saquen fotos y se las envíen, pues sirven de evidencia para comprobar que trabajaron, y porque esta es la forma que elige para calificarlos, en este contexto de clases virtuales. Además, esto le permitirá identificar con mayor facilidad posibles errores de los estudiantes y ver si utilizan métodos diferentes para resolver los ejercicios. Por estas razones es que el profesor utiliza tres tipos de conocimientos: el primero es el conocimiento común del contenido (C.C.C.), pues él mismo resuelve los ejercicios situándose solo en el nivel del algoritmo, y por medio de los desarrollos que posteriormente ellos le enviarán deberá reconocer cuando los estudiantes den respuestas erróneas; el segundo es el conocimiento especializado del contenido (C.E.C.), pues deberá analizar posibles errores de los estudiantes, deberá decidir si un procedimiento original propuesto por un alumno es correcto; y el tercero es el conocimiento del contenido y de los alumnos (C.C.A.), pues deberá interpretar las respuestas de los estudiantes.

Cuando se refiere a que ***"****el perímetro es todo el contorno de la circunferencia"* apela a la longitud de la curva, y a esa longitud se le llama circunferencia, por lo que confunde la terminología. Además, deja implícita la unidad de medida asociada al perímetro. Hay ambigüedad en los términos, lo que produce confusión debido al uso corriente de estas expresiones.

La definición que da del radio es *"línea recta que une el centro de un círculo con cualquier punto del borde de la circunferencia",* y evidencia que confunde la terminología, porque, por ejemplo, en la *Guía didáctica de docente* la definición entregada sobre el radio es "*segmento que une el centro de la circunferencia con cualquier punto de ella",* en ningún momento habla de círculo.

Tomando la misma definición de radio entregada por el profesor, en una parte dice "*borde de la circunferencia",* y eso es incorrecto, pues según una de las definiciones entregadas en el Marco Teórico "*la longitud del círculo se llama circunferencia*".

Los tres párrafos anteriores muestran que el profesor da definiciones incorrectas de los conceptos y los confunde, por lo tanto, se puede concluir que en esos casos no emplea el conocimiento común del contenido (C.C.C.), puesto que no utiliza un vocabulario correcto.

6.1.6. Las preguntas de los estudiantes luego de la lectura de los ejercicios

Las preguntas de los estudiantes permiten construir el sentido de los problemas matemáticos que se les presenten. A través de estas preguntas el profesor se asegura de que los estudiantes comprenden la consigna, lo que deben hacer, los pasos a seguir, entre otras cosas, y es natural que ellos hagan preguntas antes de comenzar con los procedimientos, lo cual no quiere decir que ellos tengan dificultades para comprender, si no que buscan seguir perfectamente el procedimiento adecuado. En estos casos, en los que el profesor debe interpretar y tratar alguna dificultad de un estudiante (presente en las preguntas que le realiza al profesor) está utilizando el conocimiento del contenido y de los alumnos (C.C.A.). Y al responder las preguntas por qué de los estudiantes utiliza el conocimiento especializado del contenido (C.E.C.).

Aunque las preguntas de los estudiantes no eran explícitas al desarrollo de los problemas ellos solicitaban en algunas ocasiones que el profesor repitiera la explicación del ejercicio que estaban resolviendo. El profesor realizaba preguntas con mayor frecuencia, y algunas de estas eran: "¿qué fórmula debemos utilizar?", "¿cuánto vale el radio?", "¿cuánto es $3 \cdot 6$?", "¿se va entendiendo?".

Se presentó una dificultad en la interpretación del enunciado del ejercicio n°8, que dice "Para una presentación de gimnasia de un colegio se necesita elaborar 15 argollas de radio 40cm…", algunos estudiantes no sabían qué era una argolla y el profesor buscó en su celular una imagen por internet para mostrársela y así ellos entendieran a qué se refería con argolla.

6.1.7. La tarea de los estudiantes

Como se ha mencionado anteriormente, la *Guía de Aprendizaje* se divide en tres ítems, el primero contiene ejercicios de selección múltiple en donde los estudiantes deben decidir qué fórmula utilizar luego de hacer un análisis de la pregunta planteada en cada ejercicio. En el segundo ítem se pide la aplicación de directa de las fórmulas matemáticas. Y en el tercer ítem hay problemas matemáticos que requieren comprensión y aplicación de las fórmulas.

El profesor les propone a los estudiantes resolver de manera autónoma la mayoría de los ejercicios de la guía, y el trabajo de los estudiantes consiste básicamente en la elección de qué fórmula utilizar, pues a excepción del último ítem los demás ejercicios se basan principalmente en la aplicación directa de las fórmulas de área y perímetro de la circunferencia.

La *Guía didáctica del docente* (MINEDUC, 2020) señala que el profesor debe proponerles a los estudiantes explorar con material concreto para luego determinar o encontrar una aproximación de los conceptos de área y perímetro, y que de esta forma logren darles sentido a los contenidos aprendidos. Él los debe guiar a un procedimiento correcto, y en algunas oportunidades les pide que resuelvan los ejercicios por sí solos, para constatar si lo explicado anteriormente está siendo interiorizado por ellos.

6.1.8. La hipótesis del profesor

La resolución de la *Guía de Aprendizaje* en la secuencia de enseñanza hizo que el trabajo de los estudiantes se basara en la utilización de las fórmulas de área y perímetro de la circunferencia.

La hipótesis del profesor es que la enseñanza del área y perímetro consiste en la aplicación mecánica de las fórmulas sin tomar en cuenta las unidades de medidas para determinar las magnitudes.

6.1.9. La letra del problema

El lenguaje empleado por el profesor en la clase y que utiliza en la guía es familiar a los estudiantes, pues simplifica las definiciones para hacerlas comprensibles a los estudiantes explicándolas con otras palabras y dando ejemplos. Sin embargo, no precisa las definiciones utilizadas en lenguaje matemático. Cabe destacar que en la guía se presentan algunos errores conceptuales, por ejemplo, en la definición de *radio* menciona "*borde de la circunferencia*", y la circunferencia no tiene borde, pues tal y como la define la *Guía didáctica del docente* en la Figura 7 la circunferencia es por sí sola una curva cerrada. Debido a esto es que el profesor no emplea el conocimiento común del contenido (C.C.C.), pues no utiliza un vocabulario correcto.

Los números utilizados en los ejercicios de la guía están en un dominio accesible para los estudiantes y hace que los cálculos no sean demasiado tediosos, pues son, en su mayoría, números enteros, solo en el ejercicio n°7 se presenta un número decimal pues se le asignó al radio de la circunferencia el valor de $4{,}5cm$. Incluso a π le asignaron un valor entero para hacer los cálculos aún más fáciles. Por estas razones es que el profesor utiliza el conocimiento especializado del contenido (C.E.C.) al modificar las tareas para que sean más fáciles.

6.1.10. El enunciado oral

La presentación oral de un problema evita las dificultades en la lectura y centra la actividad de los estudiantes en el objetivo matemático. Cuando el profesor realiza la lectura de la guía va ejemplificando lo leído en la mayoría de los casos, por ejemplo, para el ejercicio n°3 el profesor lee “una mesa redonda tiene por radio 4cm y se quiere cubrir con un mantel”, y luego les da un ejemplo diciendo “cuando a ustedes les dicen *hijo, vamos a tomar once, ponga el mantel*… Cuando ustedes ponen un mantel en la mesa ocupan lo de adentro de la mesa, por lo tanto, están ocupando el área”. Acá el profesor está utilizando el conocimiento del contenido y de los alumnos (C.C.A.) al elegir ejemplos interesantes y motivadores para ellos, y el conocimiento del contenido y de la enseñanza (C.C.E.) al elegir ejemplos para profundizar los contenidos.

6.1.11. Las decisiones del profesor en el contexto de la clase

Hay intervenciones y/o decisiones que provienen de la actividad propia del profesor, quien es el responsable del trabajo efectuado, del tiempo transcurrido, de cada uno de los momentos de la clase, etc. A continuación, se presentan algunas de las decisiones tomadas por el profesor en las dos clases que realizó y se clasificarán en los tipos de conocimientos matemáticos para la enseñanza definidos por Ball, Thames y Phelps (2008).

El profesor utiliza el conocimiento del contenido y de la enseñanza (C.C.E.) cuando sigue una secuencia para la enseñanza de los contenidos matemáticos. Por ejemplo, utiliza el C.C.E. cuando: Planifica el tiempo de las clases para que estas tengan una duración estimada entre 40 y 50 minutos; Enuncia la actividad, es decir, da las consignas de organización; Lee el enunciado de los problemas y ejercicios; Anota en la pizarra el desarrollo de los ejercicios y los datos importantes que serán utilizados (ejemplo: el radio); Explica el vocabulario presente en la guía y ejemplifica de forma oral o en la pizarra; Se asegura que los estudiantes resuelven los ejercicios, pidiéndoles aportes de forma oral o escribiendo en el chat; Les pide que escriban sus desarrollos en la guía para que después envíen fotos, que cuando no entiendan algo pregunten, y que mantengan silencio en algunas ocasiones porque impiden que los demás escuchen lo que él está diciendo.

Cuando les pide a los estudiantes no utilizar calculadora utiliza el conocimiento común del contenido (C.C.C), pues se trata de calcular una respuesta correctamente al resolver un problema.

En algunas ocasiones se evidenció que modificaba la tarea (o el trabajo) de los estudiantes para hacerlas más fáciles, por ejemplo, cuando les pide que reemplacen a π por 3. Aquí el profesor utiliza el conocimiento especializado del contenido (C.E.C.)

6.1.12. Modelos pedagógicos subyacentes

El profesor utiliza un modelo pedagógico tradicional, pue es él quien cumple el rol protagonista en las secuencias de enseñanza, haciendo una lectura completa de la guía, pidiéndole a los estudiantes que den aportes de resolución, y resolviendo los ejercicios en su pizarra. Los estudiantes solo fueron los receptores de la información. Las intervenciones de un profesor están, de hecho, muy relacionadas con el modelo pedagógico, que es el suyo.

Este modelo al parecer es un modelo tradicional cuya metodología se basa en la retención memorística de la información, a partir de la repetición, y en este caso, la secuencia de enseñanza se basó en la resolución de una *Guía de Aprendizaje* aplicando dos fórmulas matemáticas. Estas fórmulas se debían aplicar una y otra vez, y sin darle sentido a las medidas de magnitud. Al situarse solo en el nivel del algoritmo el profesor utiliza el conocimiento común del contenido (C.C.C.).

6.1.13. La pertinencia matemática de las intervenciones del profesor

De acuerdo a los criterios de pertinencia matemática definidos por Bloch (2009) y descritos en el Marco Teórico, se presentará un análisis de las intervenciones del profesor presentes en su secuencia de enseñanza, relacionándolas a su pertinencia matemática.

Para efectos de este análisis las descripciones de los criterios se redujeron a lo siguiente:

C_1: Capacidad para interactuar con los estudiantes sobre los elementos matemáticos de la situación.

C_2: Tolerancia de formulaciones provisionales.

C_3: Capacidad para poner fin a la situación con una fase de debate y validación. *En particular, la capacidad de elegir la intervención que permita la mejor forma de mantener la devolución de la actividad matemática al alumno*.

En la primera clase:

- El profesor explica que π es un número irracional porque no se puede transformar a fracción. Introduce π en la calculadora para que los estudiantes vean que es un número muy grande, y les señala que es un número decimal con infinitos números después de la coma, y que se acostumbra mucho usar 3,14 como el valor de π. No explica de dónde proviene π, solo muestra que es parte de la fórmula y lo introduce en la calculadora para que los estudiantes vean el decimal al que corresponde. Además, no se refiere al concepto de aproximación, solo menciona que se acostumbra a usar el valor de π como 3,14. Sus intervenciones no son pertinentes según el criterio C_1, pues las interacciones no se sitúan en el nivel matemático, sino que se basan en convenciones. No utiliza el C.E.C. porque no expone ideas matemáticas completas y correctas.

- Luego de que el profesor leyera el segundo ejercicio de la guía les dice a los estudiantes que se debe calcular el perímetro, sin dar mayor explicación de por qué se debe calcular el perímetro en vez de área. Anota la fórmula en la pizarra y les pregunta a los estudiantes por cuáles valores reemplazar cada componente de la fórmula. Más adelante, para obtener el resultado final se debe realizar la multiplicación de $192 \cdot 10$ y dice que se debe multiplicar $192 \cdot 1$ y luego agregar el cero, dando como resultado 1.920. Posteriormente afirma que el resultado es 1.920 cm, pero no explica por qué el resultado queda en centímetros (todas las alternativas están en centímetros, pero no da ninguna explicación al respecto). Al no dar explicaciones o justificaciones, sus intervenciones se consideran como no pertinentes de acuerdo al criterio C_1. No utiliza el C.E.C. porque no da explicaciones matemáticas que ayuden a la comprensión de los estudiantes. Tampoco explica el porqué de la regla del cero o cuál es la lógica de ese procedimiento.
- Cuando los estudiantes dan respuestas erróneas el profesor les indica qué está mal. Los corrige cuando hacen conclusiones anticipadas. En algunas ocasiones, los estudiantes dan sus resultados antes de que el profesor los comience a resolver en su pizarra, y él les dice que esperen a que él los resuelva para que corroboren si sus respuestas son correctas. Estas interacciones son pertinentes según el criterio C_2. Además, utiliza el C.C.C., pues reconoce cuando los estudiantes dan respuestas erróneas. También utiliza el C.C.A., al interpretar las respuestas de los estudiantes y estructurar los conceptos erróneos que tienen sobre los conceptos.
- Antes de terminar la clase, el profesor les hace dos preguntas a los estudiantes: "¿Qué es importante para calcular el perímetro?" y "¿Qué elementos deben conocer?". Algunos responden: radio y π. Luego, menciona que para la resolución de esta guía π vale 3,14 y es un número irracional. Con esta intervención final el profesor hace una devolución de la actividad matemática, por lo tanto, es pertinente según el criterio C_3. Además, utiliza

el C.C.E., pues realiza preguntas con el fin de promover el aprendizaje de los estudiantes, a través de la retroalimentación.

En la segunda clase:

- Cuando el profesor presenta la fórmula de área de la circunferencia dice que el r^2 les podría complicar. Menciona que ese 2 que está arriba representa una potencia y quiere decir que deben multiplicar dos veces el radio. Además, les dice que para facilitarles más los cálculos la fórmula definitiva será $á = \pi \cdot r \cdot r$, y que deben aprendérsela. No da una definición de potencia, tampoco habla de base y exponente. Pide que se aprendan la fórmula de memoria y no da explicaciones más que procedimentales, por lo tanto, las intervenciones no son matemáticamente pertinentes según el criterio C_1. El profesor utiliza el C.E.C. cuando reescribe la fórmula, modificando su escritura para hacerla visualmente más compresible para los estudiantes, y con esto está facilitándoles la tarea.
- Con ayuda de los estudiantes resuelve el *ejemplo explicativo* de área. Les da como resultado 300, y el profesor dice “300 cm si fuera perímetro, pero como estamos calculando el área le vamos a agregar un 2 chiquitito acá arriba (cm^2), significa centímetros cuadrados y esa es la forma de calcular lo que es área, 300 cm^2, eso es importante, agregar el número 2 chiquitito arriba y significa que es cuadrado porque estamos calculando el área”. Esta intervención no es pertinente según el criterio C_1, porque no se sitúa en el nivel matemático, sino en el de las convenciones. El profesor no utiliza el C.E.C. porque no da explicaciones matemáticas.
- Algunos estudiantes ya tenían los ejercicios resueltos, y cuando el profesor indica con qué ejercicio continuará ellos le dicen que ya lo tienen resuelto, o simplemente enuncian sus resultados de forma oral. Luego de que el profesor resuelve en su pizarra y comprueba que son correctas las respuestas que le habían dado los estudiantes con anterioridad los felicita por su logro. Esta intervención es pertinente según el criterio C_2.
- Un estudiante tiene problemas al resolver uno de los ejercicios, y el profesor le pide que le muestre su procedimiento para indicarle en qué parte se equivocó o qué le falta para terminar. Esto es pertinente según el criterio C_2. Acá el profesor utiliza el C.C.A. porque al revisar los desarrollos de los estudiantes debe interpretar sus respuestas incluso cuando estén incompletas, y estructurar los conceptos erróneos.

6.2. De los conocimientos del profesor

Los conocimientos del profesor se desglosan en niveles sucesivos y la estructuración en niveles no debe enmascarar la declinación de un mismo conocimiento a varios niveles. Los conocimientos se resumen en una tabla en cada nivel y, por otro lado, los elementos correspondientes se presentan en el mismo orden en cada nivel.

M_{+3}: M-Construcción		P_{+3}: P-Noosferiano	S_{+3}: Situación Noosferiana

Figura 19: Nivel +3: Nivel Noosferiano.

Para P_{+3} es importante que los estudiantes realicen los cálculos mano, por lo tanto, antes de comenzar a resolver la Guía de Aprendizaje les pide que no utilicen calculadora. Más delante aclara que le servirá ver sus procedimientos en el caso de que sus resultados sean incorrectos, y con eso lograría identificar el/los error/es, y además le serviría para ver si ellos resuelven los ejercicios de otra forma y así podría aprender nuevos métodos.

P_{+3} hace énfasis en la memorización de las fórmulas de área y perímetro de la circunferencia, por lo que las repite de forma oral con la intención de que los estudiantes se las aprendan.

Se preocupa de que los estudiantes entiendan los ejercicios y problemas, explicándoselos con otras palabras y de manera más sencilla, dando ejemplos en algunos casos, para que posteriormente decidan qué fórmula utilizar (cuando no está explícita en la pregunta). Pregunta reiteradamente si alguien tiene dudas para detenerse un momento y aclararlas, pues para él es importante que todos aprendan. Además, es consciente de que no todos aprenden al mismo ritmo, les da tiempo para que resuelvan los ejercicios por sí solos y les brinda apoyo a los que les cuesta más.

P_{+3} recuerda su experiencia como estudiante y les menciona que no le iba muy bien en la asignatura de matemática, le costaba mucho, y que en una oportunidad una profesora le tuvo que explicar un ejercicio siete veces, hasta que al fin lo entendió. Según él esa es una de las razones por las que considera que debe hacer lo mismo con sus estudiantes, explicarle los ejercicios las veces que sean necesarias hasta lograr que comprendan.

Les da la consigna de que reemplacen π por 3 para facilitar los cálculos, pero destaca que eso es solo para la realización de esa guía, y que más adelante cuando vuelvan a utilizar esas fórmulas, tal vez con otro profesor, deberán reemplazarlo por 3,14 que es la aproximación más usual.

Descripción	Tipo de Conocimiento	Comentario o explicación
Da la consigna de no utilizar calculadora en la resolución de los ejercicios.	C.C.C.	En la resolución de un ejercicio o problema matemático se trata de calcular una respuesta correctamente.
Hace énfasis en la memorización de las fórmulas de área y perímetro de la circunferencia.	C.C.C.	El profesor solo se sitúa en el nivel del algoritmo, busca que los estudiantes se aprendan las fórmulas sin darles mayor sentido a los conceptos de área y perímetro.
Se preocupa de que los estudiantes entiendan los enunciados de los ejercicios y problemas, dando ejemplos en algunos casos o explicando con palabras más sencillas.	C.C.E.	Elije ejemplos para profundizar los contenidos y asegurarse de que los estudiantes entienden lo que se les pide.
Es consciente de que no todos aprenden al mismo ritmo y les pregunta si van entendiendo. Les da tiempo para que resuelvan los ejercicios por sí solos y les brinda apoyo a los que les cuesta más.	C.C.A.	Estructura los conceptos erróneos de los estudiantes y resuelve sus dudas.
	C.C.E.	El hecho de dar tiempo para el trabajo autónomo de los estudiantes está relacionado al tipo de secuencia que sigue el profesor para la enseñanza de los contenidos matemáticos.

Da la consigna de reemplazar a π por 3 para facilitar los cálculos, pero explica que más adelante deberán usar la aproximación que les indique el profesor que les esté impartiendo la asignatura.	C.E.C.	Conecta el tema enseñado con la forma en que se pudiese abordar en el futuro. Busca facilitarles el trabajo a los estudiantes adaptando el contenido de los libros de texto, pues la aproximación más usual para π es 3,14.
	C.C.A.	Anticipa que los estudiantes podrían encontrar difícil trabajar con números decimales, por lo que menciona que deberán reemplazar a π por un número entero para facilitar los cálculos.

Tabla 4: Clasificación de los tipos de conocimientos utilizados por P_{+3}.

En este nivel P_{+3} utilizó cuatro tipos de conocimientos. La cantidad de veces en las que se presentó cada uno de ellos en el nivel +3 se muestra en la siguiente tabla.

Tipo de Conocimiento	Cantidad de veces
C.C.C.	2
C.E.C	1
C.C.A.	2
C.C.E.	2

Tabla 5: Resumen de la cantidad de veces en las que P_{+3} utilizó algunos de los tipos de conocimientos.

En el nivel +3, en siete ocasiones P_{+3} utilizó algunos de los tipos de conocimientos matemáticos para la enseñanza definidos por Ball y sus colegas (2008).

M_{+2}: M-Proyecto		P_{+2}: P-Constructor	S_{+2}: Situación de construcción

Figura 20: Nivel +2: Nivel de construcción.

P_{+2} planifica la cantidad de clases en las que resolverá la Guía de Aprendizaje y el tiempo que le dedicará a cada una, para que estas tengan una duración entre 40 a 50 minutos. Para la construcción de esta guía P_{+2} anticipó que los estudiantes tenían problemas con la multiplicación de números decimales, siendo este uno de los motivos por el que limitó el valor de π al entero 3. Sin embargo, en el ejercicio n°7 le asignó al radio de la circunferencia un valor decimal, y no todos los estudiantes recordaban cómo multiplicar por este tipo de número, así es que varios estudiantes esperaron a que él lo resolviera en la pizarra. Debido a esta dificultad les sugirió a los estudiantes que cuando terminen de resolver la guía tengan una clase dedicada a repasar multiplicaciones y divisiones con números decimales.

La estructura de la guía estaba diseñada para ver área y perímetro de manera simultánea, pues los ejercicios se presentaban combinados, pero antes de la primera clase P_{+2} tomó la decisión de ver primero la parte de perímetro de la circunferencia, y dejar el área para la clase siguiente, esto para que los estudiantes no se confundieran con los conceptos y se aprendieran más fácilmente las fórmulas. Se apoya de dibujos en la pizarra para explicar el perímetro y el área de la circunferencia. Lee los ejercicios y en algunos casos les da tiempo a los estudiantes para que los resuelvan solos, sin su ayuda, y luego él los resuelve en su pizarra.

Para P_{+2} es importante que los estudiantes no solo se aprendan las fórmulas, sino que además aprendan a identificar cuál es la que se debe utilizar según el problema y cómo utilizarlas.

Descripción	Tipo de Conocimiento	Comentario o explicación
Planifica la duración de las clases y la cantidad de sesiones en las que abordará el contenido de área y perímetro de la circunferencia.	C.C.E.	Esta planificación tiene relación con el tipo de secuencia que sigue el profesor para la enseñanza de los contenidos matemáticos.
Anticipa que los estudiantes tienen problemas con los números decimales, siendo esta una de las razones por las que limita el valor de $\boldsymbol{\pi}$ a 3. Esto induce al cálculo exacto que debe	C.E.C.	Al limitar a un entero el valor de π está adaptando el contenido matemático de los libros de texto y modificando la tarea de los estudiantes para que sean más fáciles.

llevar a los estudiantes a rechazar ciertos procedimientos.	C.C.A.	Anticipa lo que podrían encontrar difícil.
Propone un ejercicio que contiene un número decimal y no todos los estudiantes saben cómo resolverlo.	C.C.E.	Este ejercicio diferente busca promover el aprendizaje de los estudiantes.
Enseña en la primera clase lo relacionado a perímetro de la circunferencia y en la segunda clase enseña área de la circunferencia.	C.C.E.	Esto está relacionado al tipo de secuencia que sigue el profesor para la enseñanza de los contenidos matemáticos.
Se apoya de dibujos en la pizarra para explicar las definiciones de área y perímetro de la circunferencia.	C.C.E.	Utiliza representaciones para enseñar una idea específica.
Lee los ejercicios, da tiempo para que los estudiantes resuelvan y luego él los resuelve en la pizarra.	C.C.E.	Estas acciones están relacionadas al tipo de secuencia que sigue el profesor para la enseñanza de los contenidos matemáticos.
Se preocupa de que los estudiantes se aprendan las fórmulas, y también sepan decidir cuál utilizar y cómo hacerlo.	C.C.C.	El profesor les da importancia a las fórmulas, situándose en el nivel del algoritmo.

Tabla 6: Clasificación de los tipos de conocimientos utilizados por P_{+2}.

En este nivel P_{+2} utilizó cuatro tipos de conocimientos. La cantidad de veces en las que se presentó cada uno de ellos en el nivel +2 se muestra en la siguiente tabla.

Tipo de Conocimiento	Cantidad de veces
C.C.C.	1
C.E.C	1

C.C.A.	1
C.C.E.	5

Tabla 7: Resumen de la cantidad de veces en las que P_{+2} utilizó algunos de los tipos de conocimientos.

En el nivel +2, en ocho ocasiones P_{+2} utilizó algunos de los tipos de conocimientos matemáticos para la enseñanza definidos por Ball y sus colegas (2008).

M_{+1}: M-Didáctico	E_{+1}: E-Reflexivo	P_{+1}: P-Proyector	S_{+1}: Situación de proyecto

Figura 21: Nivel +1: Nivel de proyecto

En la secuencia de enseñanza no se observó que P_{+1} enseñara las unidades de medida, solo consideraba la parte numérica de las fórmulas y en los resultados agregaba las unidades de medida sin dar mayor explicación de por qué en el perímetro el resultado quedaba en cm y en el área en cm^2.

P_{+1} limita su enseñanza al reconocimiento y aplicación de fórmulas. Los ejemplos explicativos de la guía inducen a una mecanización, y los demás ejercicios poseen la misma estructura, no hay variaciones. Además, se presentan algunas incoherencias cuando P_{+1} se refiere a algunos conceptos, por ejemplo, cuando habla de área y superficie como si fuesen iguales, o cuando define perímetro como la distancia que recorre una persona y utiliza la circunferencia como una trayectoria por donde la persona camina, y al mismo tiempo señala que lo hace "…alrededor de la circunferencia", posiblemente como una forma de referencia, produciendo una incoherencia. Tampoco hay realismo en los tamaños, pues en el ejercicio n°1 dice que el radio de una moneda de $500 mide 2 cm.

Descripción	Tipo de Conocimiento	Comentario o explicación
No enseña las unidades de medida. Solo agrega a los resultados **cm** o $\mathbf{cm^2}$.	C.E.C.	Simplifica la tarea de los estudiantes para que solo les den énfasis a los números, dejando de lado las unidades de medida.
Limita su enseñanza al reconocimiento y aplicación de	C.C.C.	Al darle importancia a las fórmulas se sitúa en el nivel del algoritmo.

fórmulas. Los ejercicios y problemas de la guía poseen la misma estructura, no hay variaciones.	C.E.C.	La mayoría de los ejercicios de la guía son de aplicación directa de las fórmulas, y esto facilita la tarea de los estudiantes, pues no implica un mayor razonamiento.
Entrega definiciones de algunos conceptos en donde se evidencian algunas incoherencias. Además, da poco realismo a los tamaños de los objetos descritos en los ejercicios.		No se identifica algún tipo de conocimiento. Pero, se podría decir que cuando se presentan algunas incoherencias por no utilizar un vocabulario correcto el profesor no está utilizando el C.C.C.

Tabla 8: Clasificación de los tipos de conocimientos utilizados por P_{+1}.

En este nivel P_{+1} utilizó dos tipos de conocimientos. La cantidad de veces en las que se presentó cada uno de ellos en el nivel +1 se muestra en la siguiente tabla.

Tipo de Conocimiento	Cantidad de veces
C.C.C.	1
C.E.C	2

Tabla 9: Resumen de la cantidad de veces en las que P_{+1} utilizó algunos de los tipos de conocimientos.

En el nivel +1, en tres ocasiones P_{+1} utilizó algunos de los tipos de conocimientos matemáticos para la enseñanza definidos por Ball y sus colegas (2008).

M_0: M-Aprendizaje	E_0: Estudiante	P_0: Profesor	S_0: Situación didáctica

Figura 22: Nivel 0: Nivel Didáctico.

Al inicio de cada clase P_0 enuncia la actividad, da consignas de organización acerca de cómo se trabajará en la clase, y al cierre hace un resumen de lo visto.

Hace un dibujo en la pizarra para explicar perímetro y área. Da ejemplos diferentes para que los estudiantes entiendan los conceptos y algunos de los ejercicios de la guía.

P_0 desarrolla todos los ejercicios de la guía en su pizarra mientras que los estudiantes hacen sus aportes de forma oral. Está pendiente de los estudiantes que presentan dificultades para resolver los ejercicios, les pregunta cómo van avanzando, y si saben lo que deben hacer. Responde las preguntas de los estudiantes e interpreta y trata las dificultades. Da ejemplos para explicar las definiciones o para mejorar la comprensión de los ejercicios.

Descripción	Tipo de Conocimiento	Comentario o explicación
Da consignas de organización al comienzo de cada clase y antes de finalizar realiza un resumen de lo visto.	C.C.E.	Esto se relaciona a la secuencia que sigue el profesor para la enseñanza de los contenidos matemáticos.
Explica las definiciones de perímetro y área de la circunferencia por medio de un dibujo en la pizarra. Da ejemplos explicativos para que los estudiantes entiendan los conceptos y los ejercicios de la guía.	C.C.E.	Esto está relacionado a la elección de ejemplos que elige el profesor para profundizar los contenidos, y a representaciones que hace para enseñar alguna idea específica.
Desarrolla los ejercicios en su pizarra con ayuda de los aportes que hacen los estudiantes de forma oral.	C.C.C.	Cuando resuelve los ejercicios está tratando de calcular una respuesta correctamente.
Se preocupa de los estudiantes que presentaban dificultades para resolver los ejercicios, les pregunta cómo van avanzando, y si saben lo que deben hacer.	C.C.A.	El profesor debe estructurar los conceptos erróneos que tienen los estudiantes sobre algún contenido matemático, para así darles solución a sus inquietudes.

	C.C.E.	El profesor debe saber cuándo hacer una pausa para hacer algunas aclaraciones, y lo hace resolviendo sus dudas y preguntándoles si van entendiendo.
Responde las preguntas que le hacen los estudiantes.	C.C.A.	El profesor debe interpretar y tratar las dificultades e inquietudes que manifiesten los estudiantes.
	C.E.C.	Responde a las preguntas por qué de los estudiantes.
Da ejemplos en algunos casos (para los conceptos matemáticos y los enunciados de los ejercicios).	C.C.A.	Elige ejemplos que sean interesantes y motivadores para los estudiantes.
	C.C.E.	Elige ejemplos para profundizar los contenidos.

Tabla 10: Clasificación de los tipos de conocimientos utilizados por $P_{0.}$

En este nivel P_0 utilizó cuatro tipos de conocimientos. La cantidad de veces en las que se presentó cada uno de ellos en el nivel 0 se muestra en la siguiente tabla.

Tipo de Conocimiento	Cantidad de veces
C.C.C.	1
C.E.C	1
C.C.A.	3
C.C.E.	4

Tabla 11: Resumen de la cantidad de veces en las que P_0 utilizó algunos de los tipos de conocimientos.

En el nivel 0, en nueve ocasiones P_0 utilizó algunos de los tipos de conocimientos matemáticos para la enseñanza definidos por Ball y sus colegas (2008).

M_{-1}: M-Referencia	E_{-1}: E-Aprendiz	P_{-1}: P-Observador	S_{-1}: Situación de aprendizaje

Figura 23: Nivel -1: Nivel de aprendizaje.

En cuanto a la parte de observación, durante la secuencia de enseñanza P_{-1} observó algunas dificultades en los estudiantes, tales como: problemas con las tablas de multiplicar y olvido de cómo multiplicar con números decimales.

Dado a que le resolución de los ejercicios solo se limita a la parte numérica, a futuro los estudiantes podrían presentar dificultades en distinguir entre medida y magnitud de medida.

Como la guía fue entregada a los estudiantes antes de la clase P_{-1} observó que varios ya habían resuelto algunos o todos los ejercicios. También observó que a algunos estudiantes les costaba resolverlos.

Cuando les pide a los estudiantes que dejen los cálculos hechos en la guía para sacarle fotos y enviárselas, les menciona que con esto podría identificar posibles errores, o si utilizan un método distinto para resolver. Aquí P_{-1} observa la actividad de los estudiantes analizando posibles errores.

Descripción	Tipo de Conocimiento	Comentario o explicación
Observa algunas dificultades en los estudiantes.	C.E.C	El profesor analiza errores de los estudiantes y debe decidir si los procedimientos propuestos por ellos son correctos.
	C.C.A.	El profesor debe saber cuándo tratar una dificultad en los estudiantes, e interpretar sus respuestas para entenderlas y así darles alguna solución.
Limita la resolución de los ejercicios solo a la parte numérica, y los estudiantes podrían tener dificultades para distinguir medida y magnitud de medida.	C.C.C.	Solo se sitúa en el nivel del algoritmo.
	C.E.C.	Al considerar solamente la parte numérica de los ejercicios está modificando la tarea del estudiante para hacerles el trabajo más fácil.

Observa que varios estudiantes ya habían resuelto los ejercicios, y a otros les costaba resolverlos.	C.C.A.	Prevé dificultades de los estudiantes, y estas debe interpretarlas y tratarlas.
Observa los desarrollos de los ejercicios resueltos analizando posibles errores que hayan cometido los estudiantes.	C.E.C	Debe analizar errores de los estudiantes, y decidir si un procedimiento propuesto por un estudiante es correcto.
	C.C.A.	Debe interpretar las respuestas de los estudiantes.

Tabla 12: Clasificación de los tipos de conocimientos utilizados por P_{-1}.

En este nivel P_{-1} utilizó tres tipos de conocimientos. La cantidad de veces en las que se presentó cada uno de ellos en el nivel -1 se muestra en la siguiente tabla.

Tipo de Conocimiento	Cantidad de veces
C.C.C.	1
C.E.C	3
C.C.A.	3

Tabla 13: Resumen de la cantidad de veces en las que P_{-1} utilizó algunos de los tipos de conocimientos.

En el nivel -1, en siete ocasiones P_{-1} utilizó algunos de los tipos de conocimientos matemáticos para la enseñanza definidos por Ball y sus colegas (2008).

CAPÍTULO IV: RESULTADOS

1. Conocimientos matemáticos para la enseñanza presentes en los niveles de actividad del profesor

Luego de realizar un análisis en profundidad de la secuencia de enseñanza, se evidenció que en todos los niveles de actividad del profesor se presentaron algunos de los tipos de conocimientos matemáticos para la enseñanza definidos por Ball, Thames y Phelps (2008), principalmente en el *nivel 0: nivel didáctico*, pues el profesor interactuaba constantemente con los estudiantes, y en el *nivel +2: nivel de construcción*, pues planificó la enseñanza del contenido.

En el *nivel 0* el profesor utilizó cuatro de los seis tipos de conocimientos matemáticos para la enseñanza definidos por Ball y sus colegas. El C.C.C. y el C.E.C. se presentaron en una oportunidad cada uno, el C.C.A. se presentó en tres ocasiones y el C.C.E. en cuatro. En total, el profesor utilizó en nueve ocasiones estos conocimientos en el *nivel didáctico*.

En el *nivel +2* utilizó los mismos tipos de conocimientos que en el *nivel 0*, pero en diferente cantidad. El C.C.C., el C.E.C. y el C.C.A. se presentaron en una oportunidad cada uno, y el C.C.E. se presentó en cinco oportunidades. En total, el profesor utilizó en ocho oportunidades estos conocimientos en el *nivel de construcción.*

2. Los conocimientos matemáticos para la enseñanza que más utilizó y los que no utilizó

Los conocimientos matemáticos para la enseñanza que más utilizó el profesor son el conocimiento del contenido y de la enseñanza (C.C.E.), y el conocimiento del contenido y de los alumnos (C.C.A.), pues son los que se presentaron en mayor cantidad en las tablas de los niveles de actividad del profesor. El C.C.E se presentó en 11 oportunidades y el C.C.A en 9.

En la secuencia de enseñanza no se observó que el profesor utilizara el conocimiento del horizonte matemático (C.H.M) y el conocimiento del contenido y del currículum (C.C.P).

3. Influencia de los conocimientos matemáticos para la enseñanza en la pertinencia matemática de las intervenciones del profesor

Los tipos de conocimientos matemáticos para la enseñanza que influyeron en la pertinencia matemática de las intervenciones del profesor fueron el C.C.C., C.E.C., C.C.A. y el C.C.E. Al referirnos a la pertinencia matemática del profesor y sus elecciones didácticas el conocimiento que más resaltó entre los demás tipos de conocimientos fue el C.E.C. El análisis de esta pertinencia matemática demostró una influencia de la utilización del C.E.C con los criterios de pertinencia matemática, como también la no utilización de este conocimiento, por ejemplo, cuando no da explicaciones matemáticas que ayuden a la comprensión de los estudiantes no está utilizando el C.E.C., y cuando modifica la tarea de los estudiantes para hacerles el trabajo más fácil sí utiliza el C.E.C.

Los resultados arrojaron una correlación entre las intervenciones del profesor que se consideran como no pertinentes según el criterio C_1 y la no utilización del C.E.C. Por lo tanto, este fenómeno observado ilustra la importancia del C.E.C. en la pertinencia matemática de las intervenciones del profesor.

4. Algunas incoherencias presentes en la Guía de Aprendizaje y su relación con los conocimientos matemáticos para la enseñanza

En la *Guía de Aprendizaje* se presentaron varias incoherencias, por ejemplo, en la definición de área indica que la circunferencia "…*encierra en su interior una superficie*", y luego "… *calcular el área encerrada*". El área se confunde con el concepto de superficie, pues son tratadas como iguales. El profesor confunde terminología y no utiliza el C.C.C. pues no utiliza un vocabulario correcto.

Lo mismo ocurre en la descripción que entrega de perímetro, utilizando la circunferencia como una trayectoria por donde una persona camina, lo cual intuitivamente es comprensible por el estudiante, pero luego señala que lo hace *"...alrededor de la circunferencia"*, posiblemente como una forma de referencia, y nuevamente se produce una incoherencia. Luego, se señala que *"...el perímetro es todo el contorno de la circunferencia"*, lo cual es incoherente pues la circunferencia no posee contorno.

En el apartado de *¡Datos importantes!* entrega una definición de radio que empieza como *"línea recta…"*, y el radio es un segmento. En la misma definición se habla de *"… borde de la circunferencia"*, y no es claro el significado que se pretende dar a "borde", pues la circunferencia no tiene borde, entendiendo por borde una frontera. De igual modo, el profesor no utiliza el C.C.C. pues no emplea un vocabulario correcto.

Dio medidas poco realistas a objetos reales, por ejemplo, indica que el radio de una moneda de $500 es de 2cm, y en otro ejercicio se refiere a una mesa redonda de radio 4cm ¿será una mesa de juguete? No lo especifica. En estos casos no se identifica algún tipo de conocimiento matemático para la enseñanza.

En el transcurso de las clases se vio que el profesor intentaba simplificar al máximo la tarea de los estudiantes diciendo, por ejemplo, *"…no tenemos que hacer las cosas más difíciles, para ustedes π va a valer solamente 3".* En este caso, él no se refiere al concepto de aproximación, solo lo enseña como una igualdad. Y al limitar el valor de π al entero 3 las fórmulas conducirán a valores aproximados del perímetro y área, no a valores exactos. Además, no propuso variaciones en los ejercicios, en todos se da el valor del radio, en vez de, por ejemplo, indicar el valor del diámetro, y evita los números decimales, pues solo un ejercicio de la guía presentaba un número decimal como el valor del radio de una circunferencia. En ningún momento se ve que haya recurrido a las unidades de magnitud, pues el profesor no las consideró en los desarrollos de los ejercicios, y como quiere hacer las cosas más fáciles para ellos, omite la enseñanza de estas unidades y solo se centra en la parte numérica. Entonces, el trabajo de los estudiantes se reduce a la aplicación de fórmulas, reemplazando los valores para obtener el resultado. El profesor utiliza el C.C.C. porque solo se sitúa en el nivel del algoritmo, y utiliza el C.E.C. cuando modifica la tarea de los estudiantes para que se les haga más fácil, por ejemplo, al limitar el valor de π al entero 3, con esto también está adaptando el contenido matemático de los libros pues la aproximación más usual es 3,14.

CONCLUSIONES

Los resultados obtenidos evidencian que en la secuencia de enseñanza en estudio este profesor pone en juego cuatro de los seis tipos de conocimientos matemáticos para la enseñanza definidos por Ball, Thames y Phelps (2008). Además, en cuanto a los criterios de pertinencia matemática definidos en el Capítulo I (Bloch, 2009) y reajustados en el Capítulo III para hacer el análisis, se mostró que el profesor realizó intervenciones en sus clases que se pueden considerar como pertinentes o no pertinentes de acuerdo a estos criterios de pertinencia matemática, y que las intervenciones no pertinentes según el criterio C_1 están directamente influenciadas por la no utilización de C.E.C.

Se observaron situaciones y/o acciones realizadas por el profesor en sus clases en las que utilizó algunos de los conocimientos matemáticos para la enseñanza, por ejemplo, cuando limitó el valor de π al entero 3 usó el C.E.C., pues trataba de hacerles el trabajo más fácil a los estudiantes quitándoles los números decimales que para ellos podrían ser un poco más difíciles de trabajar. En esa misma situación también utilizó el C.C.A. porque anticipó que podrían tener dificultades con los números decimales. Cuando se apoyaba de dibujos en la pizarra para explicar las definiciones de área y perímetro de la circunferencia utilizaba el C.C.E., pues usaba representaciones para enseñar una idea específica. Al resolver solo la parte numérica de los ejercicios solo se situaba en el nivel del algoritmo, por lo tanto, utilizaba el C.C.C. La forma en que fueron empleados estos conocimientos podría tener una influencia negativa en el aprendizaje de los estudiantes, pues el profesor hace énfasis en la memorización y aplicación de fórmulas más que en la comprensión de los conceptos de área y perímetro de la circunferencia. Además, al limitar la resolución de los ejercicios solo a la parte numérica, ignorando las unidades de medida, puede llevar a los estudiantes a que en el futuro tengan dificultades para distinguir medida y magnitud. Cabe destacar que en la enseñanza del contenido se presentaron algunas incoherencias conceptuales, por ejemplo, cuando dice que *"…el perímetro es todo el contorno de la circunferencia"*. Estas concepciones erróneas pueden ser difíciles de erradicar.

Los conocimientos utilizados por los profesores pueden tener un impacto positivo o negativo en el proceso de enseñanza. Estudiar la influencia de los conocimientos matemáticos del profesor en la enseñanza de área y perímetro de la circunferencia fue uno de los propósitos de este trabajo. Y los resultados obtenidos solo están referidos a este profesor en particular.

Las clases realizadas por este profesor fueron tradicionales, basándose en la resolución de una *Guía de Aprendizaje* y resolviendo los ejercicios en la pizarra. En el proceso de enseñanza los profesores deben buscar romper el esquema tradicional, presentándole a los estudiantes situaciones y/o actividades nuevas, para que se motiven y sean partícipes activos en su proceso de aprendizaje, haciéndoles experimentar con situaciones que los lleven a realizar procesos como la exploración, formulación y validación, para finalmente llegar a la institucionalización de los contenidos.

Un factor limitante para llevar a cabo esta investigación fue el contexto de Pandemia, pues a causa de eso las clases se realizaban de forma virtual, algo diferente a lo acostumbrado y donde no se logran apreciar con más detalle algunas situaciones. Además, este profesor debía realizar clases una vez por semana, por lo tanto, el tiempo disponible para la enseñanza de los contenidos fue limitado, y enseñó área y perímetro de la circunferencia en un total de dos clases.

Para complementar este estudio se podrían observar clases presenciales (dentro de lo posible y si las condiciones lo permiten) de este mismo profesor, en donde también esté enseñando área y perímetro de la circunferencia a estudiantes de séptimo básico, y contrastar poniendo el relieve las diferencias, fortalezas y debilidades de la enseñanza de acuerdo a cada modalidad (presencial y virtual) realizando este mismo tipo de análisis.

Por otro lado, se podría estudiar la secuencia de enseñanza de más de un profesor, que tengan diferente cantidad de años desempeñándose como profesores, que estén haciendo clases en el mismo nivel y enseñando el mismo contenido, para luego hacer una comparación de sus secuencias de enseñanza y posterior análisis acerca de las diferencias que presenten en cuanto al empleo de los conocimientos matemáticos para la enseñanza, en qué niveles de estructuración del medio se sitúan sus intervenciones y su pertinencia matemática.

REFERENCIAS

Artigue, M. & Robinet J. (1982). Conceptions du cercle chez des enfants de l'école élémentaire [Concepciones del círculo en niños de primaria]. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 3*(1), 5-64. https://revue-rdm.com/1982/conceptions-du-cercle-chez-les/

Ball, D. L. & Hill, H. C. (2008). Measuring teacher quality in practice [Medición de la calidad del profesor en la práctica]. In D. H. Gitomer (Ed.), Measurement issues and assessment for teaching quality (pp. 80-98). Thousand Oaks, CA: Sage Publications.

Ball, D., Hill, H. & Bass, H. (2005). Knowing Mathematics for Teaching. Who Knows Mathematics Well Enough to Teach Third Grade, and How Can We Decide? [Conocer las matemáticas para la enseñanza. ¿Quién sabe lo suficiente de matemáticas para enseñar en tercer grado y cómo podemos decidirnos?]. *American Educator*, *29*(1), 14, 16-17, 20-22, 43-46. https://hdl.handle.net/2027.42/65072

Ball, D., Thames, M. & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching. What Makes It Special? [Conocimiento de contenidos para la enseñanza. ¿Qué lo hace especial?]. *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389-407. https://doi.org/10.1177/0022487108324554

Bloch, I. (1997). Connaissances mathématiques de l'enseignant – pour l'enseignement [Conocimientos matemáticos del profesor – para la enseñanza]. *Petit x*, *45*. IREM de Grenoble, Saint-Martin d'Hères.

Bloch, I. (1999). L'articulation du travail mathématique du professeur et de l'élève dans l'enseignement de l'analyse en première scientifique. Détermination d'un milieu - Connaissances et savoirs [La articulación del trabajo matemático del profesor y el alumno en la enseñanza del primer análisis científico. Determinación de un medio - Conocimientos y saberes]. *Recherches En Didactique Des Mathématiques*, *19*(2), 135–194. https://revue-rdm.com/1999/l-articulation-du-travail/

Bloch, I. (2005). Quelques apports de la théorie des situations a la didactique des mathématiques dans l'enseignement secondaire et supérieur [Algunos aportes de la teoría de las situaciones a la didáctica de las matemáticas en la enseñanza secundaria y superior]. Université Paris VII - Denis Diderot.

Bloch, I (2009). Les interactions mathématiques entre professeurs et élèves. Comment travailler leur pertinence en formation? [Interacciones matemáticas entre profesores y estudiantes. ¿Cómo trabajar su relevancia en la formación?]. *Petit x*, 81, 25-53.

Brousseau, G. (1990). Le contrat didactique: le milieu [El contrato didáctico : el medio]. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *9* (9.3), 309 - 336.

Clivaz, S. (2011). Des mathématiques pour enseigner : analyse de l'influence des connaissances mathématiques d'enseignants vaudois sur leur enseignement des mathématiques à l'école primaire [Matemáticas para la enseñanza: análisis de la influencia del conocimiento matemático de los profesores de Vaud en su enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria]. Education. Université de Genève. Francia. https://doi.org/10.13097/archive-ouverte/unige:17047

Espinal, M.-L. & Gelvez, D. (2019). Método de Pólya como estrategia pedagógica para fortalecer la competencia resolución de problemas matemáticos con operaciones básicas. *Zona Próxima*, (31), 8-25. http://www.scielo.org.co/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S2145-94442019000200008&lng=en&tlng=es.

Godino, J., Batanero, C. & Roa, R. (2003). Medida de magnitudes y su didáctica para maestros. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Hill, H., Rowan, B. & Ball, D. (2005). Effects of teachers' mathematical knowledge for teaching on student achievement [Efectos del conocimiento matemático de los profesores para la enseñanza sobre el rendimiento de los estudiantes]. *American Education Research Journal*, *42*(2), 371-406.

Margolinas, C. (2002b). Situations, milieux, connaissances : analyse de l'activité du professeur [Situaciones, medios, conocimientos: análisis de la actividad del profesor]. In J.-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot & R. Floris (Eds.), *Actes de la 11ème Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques* (pp.141-156). Grenoble: La Pensée Sauvage.

Margolinas, C. (2004). *Points de vue de l'élève et du professeur: Essai de développement de la théorie des situations didactiques [Perspectivas del alumno y del profesor: Ensayo sobre el desarrollo de la teoría de situaciones didácticas]*. Education. Université de Provence - Aix-Marseille, I.

Ministerio de Educación de Chile. (2020). *Orientaciones didácticas Matemáticas*. https://www.curriculumnacional.cl/614/w3-article-20853.html

Muijs, D. & Reynolds, D. (2002). *Being or Doing: The Role of Teacher Behaviors and Beliefs in School and Teacher Effectiveness in Mathematics, a SEM analysis* [Ser o hacer: el rol de los comportamientos y creencias de los profesores en la escuela y la eficacia de los profesores en matemáticas, un análisis SEM]. http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.455.1890&rep=rep1&type=pdf

National Mathematics Advisory Panel. (2008). *Foundations for Success: The Final Report of the National Mathematics Advisory Panel* [Fundamentos para el éxito: Informe final del Panel Asesor Nacional de Matemáticas], U.S. Department of Education: Washington, DC.

Osana, H., Lacroix, G., Tucker, B. & Desrosiers, C. (2006). The role of content knowledge and problem features on preservice teachers' appraisal of elementary mathematics tasks [El rol del conocimiento del contenido y las características del problema en la evaluación de los futuros profesores de las tareas de matemáticas elementales]. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *9*(4), 347-380. https://doi.org/10.1007/s10857-006-4084-1

Perrin-Glorian, M.-J. (2008). From producing optimal teaching to analyzing usual classroom situations. Development of a fundamental concept in the theory of didactic situations: the notion of milieu [Desde producir una enseñanza óptima hasta analizar situaciones habituales en el aula. Desarrollo de un concepto fundamental en la teoría de situaciones didácticas: la noción de medio]. *The first century of the International Commission on Mathematical Instruction (1908-2008)*. Rome, Italy. Résumé paru (abstract) page 308. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01660872

Petrou, M., Goulding, M. (2011). Conceptualising Teachers' Mathematical Knowledge in Teaching [Conceptualización del conocimiento matemático de los profesores en la enseñanza]. In Rowland T., Ruthven K. (eds), Mathematical Knowledge in Teaching. Mathematics Education Library, vol 50. Springer, Dordrecht. https://doi.org/10.1007/978-90-481-9766-8_2

PISA (2003). Aprender para el mundo del mañana: Informe PISA 2003. https://www.oecd.org/pisa/39732493.pdf

Robert, A. (2001). Les recherches sur les pratiques des enseignants et les contraintes de l'exercice du métier d'enseignant [Investigación sobre las prácticas de los profesores y las limitaciones del ejercicio de la profesión docente]. *Recherches en didactique des mathématiques, 21* (1.2), 57-80.

Rowland, T. (2008). The Purpose, Design and Use of Examples in the Teaching of Elementary Mathematics [El propósito, diseño y uso de ejemplos en la enseñanza de la matemática elemental]. *Educational Studies in Mathematics*, *69*(2), 149-163.

Schneuwly, B.,Sales, G. & Dolz-Mestre, J.(2005). A la recherche de l'objet enseigné : une démarche multifocale [En busca del objeto enseñado: un enfoque multifocal]. *Les dossier des sciences de l'éducation,14, 77-93.*

Schneuwly, B., Dolz-Mestre, J. & Ronveaux, C. (2006). Le synopsis : un outil pour analyser les objets enseignés [La sinopsis: una herramienta para analizar las materias impartidas]. In M.-J. Perrin- Glorian & Y. Reuter (Eds.), *Les méthodes de recherche en didactiques : actes du premier séminaire international sur les méthodes de recherches en didactiques de juin 2005*. (pp.175-189).Villeneuve d'Ascq: Presses universitaires du Septentrion.

Stein, M., Baxter, J. & Leinhardt, G. (1990). Subject-Matter Knowledge and Elementary Instruction : A Case from Functions and Graphing [Conocimiento de la materia e instrucción elemental: un caso de funciones y gráficas]. *American Educational Research Journal*, *27*(4), 639-663. https://doi.org/10.3102/00028312027004639

ANEXOS

ANEXO 1: Guía de Aprendizaje

Página n°1:

GUÍA DE APRENDIZAJE

7°B

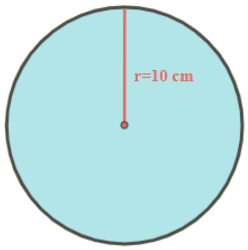
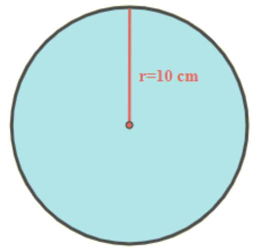
Asignatura: Matemática

Docente: | **E-mail:**

Nombre del estudiante: ______________________________ **Fecha:** ______________

Área y perímetro de una circunferencia

Área:	Perímetro:
La curva denominada circunferencia encierra en su interior una superficie, la cual es llamada área. *Dicho de una forma más sencilla el área de la circunferencia es todo lo que está adentro.* Tenemos una fórmula muy fácil que nos permite calcular el área encerrada, solo sabiendo cuánto mide el radio. Llamemos **“r”** al radio de la circunferencia, entonces el área se calcula con la siguiente fórmula: $\boxed{\mathbf{Á = \pi \cdot r^2}}$	Teniendo una circunferencia, el perímetro es la longitud de la curva, es decir la distancia que caminaría una persona que empezará a caminar en un punto de la circunferencia y diera una vuelta alrededor de la circunferencia hasta llegar al punto de partida. *Dicho de una forma más sencilla el perímetro es todo el contorno de la circunferencia.* De igual manera que para el área, existe una expresión que nos permite saber la longitud de la circunferencia solo conociendo su radio, la fórmula es: $\boxed{\mathbf{P = 2 \cdot \pi \cdot r}}$

<u>Ejemplo explicativo:</u>	<u>Ejemplo explicativo:</u>
	
$Á = \pi \cdot r^2$ $Á = 3 \cdot 10^2$ $Á = 3 \cdot 10\ cm \cdot 10\ cm$ $Á = 3 \cdot 100\ cm^2$ $Á = 300\ cm^2$	$P = 2 \cdot \pi \cdot r$ $P = 2 \cdot 3 \cdot 10\ cm$ $P = 6 \cdot 10\ cm$ $P = 60\ cm$

<u>¡Datos importantes!:</u>

1) π (pi): es un número irracional (no puede expresarse como fracción), por ende, su valor más usado para este tipo de ejercicios es 3,14, pero para el desarrollo de esta guía el valor de π será de 3.
2) r (radio): línea recta que une el centro de un círculo con cualquier punto del borde de la circunferencia.

"Nadie es perfecto por eso los lápices tienen goma"

Página n°2:

Instrucciones: Esta guía consiste en ejercitar lo explicado en la primera hoja. Estará dividida por tres ítems, donde el primer ítem será de 4 preguntas de alternativa, el segundo serán 3 ejercicios y el último ítem de 2 problemas matemáticos, te solicito que no uses calculadora para resolverla y lo más importante que dejes todos tus cálculos hechos en la guía. ***¡Éxito!***

I. **Selección múltiple.** Lee con atención los siguientes enunciados y luego marca la alternativa correcta. Considera que el valor de π es 3.

1) Una moneda de $500 tiene un radio de 2 cm. **¿Qué superficie ocupa?**

a) 12 cm^2
b) 4 cm^2
c) 7 cm^2
d) 9 cm^2

2) La rueda de una bicicleta tiene un radio de 32 cm. **¿Cuántos centímetros recorrerá un ciclista cuando la rueda ha dado 10 vueltas?**

a) 172 cm.
b) 182 cm.
c) 192 cm.
d) Ninguna de las anteriores.

3) Una mesa redonda tiene por radio 4 cm. Se quiere cubrir con un mantel hasta el borde. **¿Cuántos centímetros cuadrados de género se necesitan?**

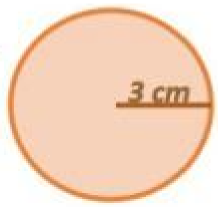
a) 48 cm^2
b) 12 cm^2
c) 24 cm^2
d) 11 cm^2

4) Una mesa redonda tiene por radio 4 cm. Se quiere cubrir el borde con una huincha plástica. **¿Cuántos centímetros de huincha se necesitan?**

a) 10 cm.
b) 14 cm.
c) 20 cm.
d) 24 cm.

II. **Ejercicios.** Calcula el perímetro y área de las siguientes circunferencias. Considera que el valor de π es 3.

5)



Área:

Perímetro:

"Nadie es perfecto por eso los lápices tienen goma"

Página n°3:

6)

Área:	Perímetro:

7)

Área:	Perímetro:

III. Problemas. Lee y resuelve los siguientes problemas, no olvides la respuesta. Considera que el valor de π es 3.

8) Para una presentación de gimnasia de un colegio se necesita elaborar **<u>15 argollas</u>** de radio **<u>40 cm</u>**. **¿Cuántos centímetros de tubo plástico se debe comprar para confeccionar las 15 argollas?**

9) Iván hizo una tabla circular cuyo radio mide **12 cm** para colocar una olla sobre ella en la mesa. **¿Cuánto mide el área de esta tabla?**

"Nadie es perfecto por eso los lápices tienen goma"

ANEXO 2: Transcripción de la clase N°1

P: Ya chicos, saludos, muy buenas tardes para todos

E1: hola profe

P: hola, hola a todos

E2: hola

P: Bueno chicos, primero partir con presentarme porque no los conozco a todos, mi nombre es… [dice su nombre] y yo voy a ser su profesor de matemática por lo que resta del año ¿ya? Empecé a trabajar en la Escuela desde septiembre, y me toca hacerles la asignatura de Matemática a ustedes. Para la clase de hoy necesito que todos tengan su guía a mano, la última que fue entregada, la de área y perímetro.

E1: ya la tengo.

P: Ya, perfecto, muy bien, esa guía necesito que todos la tengan… Y, también mencionarles que no soy amigo de la calculadora, no me gusta la calculadora, así que necesito que los cálculos se hagan a mano, que se hagan a mano todos por favor, no son cálculos complicados así es que en lo posible hacerlo todo a mano, que me parece mejor así. Entiendo que no quieran activar su cámara algunos porque les da un poquito de vergüenza, un poquito de timidez, no va haber problema con eso, pero espero que con el tiempo sí la vayan activando ¿ya? Eso sí que es importante, y que participen harto con el micrófono cuando tengan alguna idea o algo que comentar, los que tengan problemas con el micrófono usen el chat, pero si yo a veces demoro en ver el chat porque voy a estar dándome vuelta para escribir en la pizarra, les pido disculpas de antemano. Antes de comenzar la clase voy a pasar lista [nombra a los estudiantes]. Ya chicos, todos presentes, si alguno tiene problemas con el internet y se le cae, después me escribe y me habla ¿ya? No va a quedar ausente, porque ese es un problema que tiene el internet, no ustedes ¿se entiende cierto?

E1: sí

P: Ya, perfecto. Comencemos, con la guía en mano cierto, la guía que ustedes tienen que tener en mano habla de área y habla de perímetro [acerca la guía a la cámara del computador para que los estudiantes la vean]. Para la clase de hoy solamente voy a hablar lo que es perímetro, solamente vamos a hablar de perímetro hoy día, el área la vamos a dejar descansar. Dice abajito, perímetro: "Teniendo una circunferencia, el perímetro es la longitud de la curva, es decir, la distancia que caminaría una persona si empezara a caminar en un punto de la circunferencia y diera una vuelta alrededor de esta, hasta llegar al punto de partida. Dicho de una forma más sencilla, el perímetro es todo el contorno de la circunferencia". Este trabalenguas que yo acabo de leer, parece que estuviera en chino, ahora en español, consiste en lo siguiente... Yo estoy enfocando una pizarra, espero que la puedan ver bien.

E2: sí

P: Perfecto, vamos a imaginar que esa persona que está ahí, yo soy malo para el dibujo, pero ustedes imaginen que es un rubio de ojos azules [apunta a un dibujo que tiene en la pizarra], ese rubiecito de ojos azules va a caminar por el contorno de mi círculo, el contorno es todo lo que está en morado, no sé si ustedes logran ver que es morado lo que está ahí.

E3: sí, sí se ve

P: Ya, muchas gracias. Esa persona va a caminar por alrededor de este círculo y eso es lo que pertenece al perímetro, el contorno, lo que rodea este círculo ¿ya?, a eso yo me refiero con perímetro, por lo tanto, cuando ustedes tengan algún problema, y vean la palabra contorno ustedes van a saber al tiro que yo me estoy refiriendo a perímetro ¿me entienden?

E1: Sí, profe

P: Perfecto, entonces a eso se refiere el perímetro. Ya, para calcular este perímetro hay una fórmula matemática que me permite calcularlo, la fórmula matemática es la que está acá [señala la parte de la pizarra donde la tiene anotada], perímetro es igual a $2 \cdot \pi \cdot r$, ese símbolo significa pi [refiriéndose a π], lo puse acá arriba, miren [apunta donde tiene anotado $\pi = pi$] y r significa radio, esa es la fórmula. Ahora, abajito de su guía hay un rectángulo que dice *Datos Importantes* ¿cierto?

E1: sí

P: Ya, muy bien. El n°1 dice que "π es un número irracional, que no se puede expresar como fracción" ¿Ustedes sabían que hay números decimales que ustedes los pueden transformar a fracción, cierto?

E1: Sí.

P: Ya, pero el número de π no se puede transformar a fracción, por eso se le llama irracional, no es porque no piensa, sino porque no se puede transformar a fracción. Ahora, si ustedes vieran el valor de pi en una calculadora, les daría esto miren [introduce π en la calculadora y les muestra el resultado que da], un número gigantesco, a esto pertenece π, un número decimal con muchos números después de la coma, infinitos números, pero se acostumbra mucho a usar que el valor π es 3,14, se dice mucho que π vale 3,14, pero como estamos haciendo una educación a distancia, no tenemos que hacer las cosas más difíciles, para ustedes π va a valer solamente 3, nada más, por lo tanto, cada vez que ustedes vean π en la guía, π va a valer 3, eso es importante ¿se va entendiendo?

E1, E3: sí

P: Ya, perfecto, cuando alguien no entienda por favor dígame, con confianza, y si no tiene bueno el micrófono, me escribe por el chat, para yo parar. Ya, ahora, r es el radio, qué dice abajo, "el radio es la línea recta que une el centro de un círculo con cualquier punto del borde de la circunferencia". En español, este es un círculo, ustedes no crean que esto es un huevo, es un círculo. Este es el centro [señala donde tiene el dibujo en la pizarra], por lo tanto, desde aquí a cualquier lado yo puedo hacer una línea, y eso me va a indicar el radio. Por ejemplo, puedo hacer una línea con el rubiecito de ojos azules y ahí voy a tener el radio, puedo hacerla acá y ese es el radio, pero siempre desde cualquier lado de la circunferencia llegando hasta la mitad ¿se entiende?

E2: sí, profe

E1: E3: sí

P: Perfecto, a eso corresponde lo que es perímetro. Ahora, para yo calcular perímetro, me debo aprender la fórmula que está acá, recuerden la fórmula, $2 \cdot \pi \cdot r$, $2 \cdot \pi \cdot r$, recuérdenlo siempre $2 \cdot \pi \cdot r$. Si tiene la guía, destáquela donde está eso dicho, píntela, hágale algo bonito, lo que usted quiera ¿bueno?

E2: bueno

P: Ahora, comenzamos acá, ahí abajito, tengo un *Ejemplo explicativo* de la guía, dice que el radio vale 10cm, entonces yo voy a calcular el perímetro de este círculo, y voy a decir, lo primero la fórmula, voy a anotar, $P = 2 \cdot \pi \cdot r$, eso es lo primero.

E1: sí

P: Y ahora ustedes van a remplazar esa fórmula, van a decir, $P = 2 \cdot \pi \cdot r$ ¿cuánto vale π?

E1, E3: 3

P: Muy bien, π vale 3, $2 \cdot 3 \cdot r$ ¿y cuánto vale r?

E1: 10

P: Perfecto, vale 10. Sigo, $P = 2 \cdot 3$, ¿eso es?

E1, E3: 6

P: Muy bien, 6. Y $6 \cdot 10$, es el que queda solito.

E1: 60cm

P: 60cm. Ahí está el ejercicio resuelto, esta es la forma de resolver el perímetro ¿Se entiende o no?

E1: Sí, profe

P: Muy bien, recuerden que π vale 3, siempre vale 3, el radio va a estar en el ejercicio.

E2: y el 2 nunca se mueve

P: El 2 nunca se mueve, muy bien **E2**, muy buen aporte, el 2 siempre va a estar en la fórmula. Excelente. $2 \cdot \pi \cdot r$ ¿Cuánto va a valer π siempre para ustedes?

E1, E2: 3

P: Eso es para esta guía, cuando en el futuro tengan con otro profesor a lo mejor y les estén enseñando esto, a lo mejor les van a dar otro valor para π, pero yo para hacerlo más fácil, les estoy diciendo que π vale 3 ¿Ya?

E1: Ya

P: Ya. Como se dieron cuenta, la primera hoja de esta guía, no tiene nada de ejercicios, es solamente materia, ustedes tenían que leer y tratar de comprender lo que pudieran de esta materia ¿cierto?

E1: Sí

P: Ya, si ustedes se van a la siguiente hoja, a la hoja 2, ya empezamos con los ejercicios ¿cierto? Las instrucciones dicen que "esta guía consiste en ejercitar lo explicado en la primera hoja, estará dividida por tres ítems, donde el primer ítem será de cuatro preguntas de alternativas, el segundo serán tres ejercicios y el último ítem de dos problemas matemáticos". Les solcito que no usen calculadora, como les mencionaba no soy muy amigo de la calculadora, y lo más importante es que ustedes siempre cuando resuelvan un ejercicio tienen que dejarme los ejercicios hechos al lado, por dos razones, razón n°1, a veces ustedes resuelven la matemática de una forma distinta a la que yo lo expliqué, eso a mí me puede favorecer, puedo aprender y algunos de ustedes puede entender su forma y no la mía, para llegar a matemática podemos tomar distintos caminos ¿cierto? Pero siempre tenemos que llegar al mismo. Entonces, por eso es importante, que ustedes siempre dejen anotado, y lo otro es que tienen que dejar anotado por si se llegan a equivocar, para yo ver dónde se equivocaron, porque si ustedes marcan la pura alternativa a mí me va a costar identificar dónde se equivocan ¿me entienden o no?

E1: Sí

P: Ya, perfecto. Ahora vamos a diferenciar. Recuerden que el perímetro es siempre lo de afuera, el contorno, eso no lo olviden más, lo que va por fuera. Ahora, ítem 1 con selección múltiple, "lee con atención los siguientes enunciados y luego marca la alternativa correcta, considera que el valor de π es 3". La n°1 uno dice: "una moneda de $500 tiene un radio de 2cm ¿qué superficie ocupa?" O sea, para yo saber la superficie que ocupa la moneda tengo que saber lo de adentro de la moneda, como tengo que saber lo de adentro tengo que calcular el área, yo no enseñé área hoy día, por lo tanto, ese lo saltamos, para la próxima clase. Vamos a la n°2, n°2 dice: "La rueda de una bicicleta tiene un radio de 32cm ¿cuántos centímetros recorrerá un ciclista cuando la rueda ha dado 10 vueltas?". Acá, yo tengo que usar el perímetro ¿y cómo lo uso chicos? De la siguiente manera [borra lo escrito en la pizarra] ¿Cuánto vale el radio en el ejercicio 2?

E2: 32

P: Muy bien, 32, perfecto. Y ahora yo empiezo a resolver, empiezo a reemplazar en la fórmula. $P = 2 \cdot \pi$ ¿Cuánto vale π?

E1, E2: 3

P: 3, muy bien, no lo olviden nunca, para ustedes y para esta guía y para esta materia π vale 3 ¿y cuánto vale el radio?

E1: 32

P: Perfecto, bien E1, 32, ahora empiezo a resolver ¿cuánto es $2 \cdot 3$?

E1, E2: 6

P: Perfecto, 6, ahora el 6 lo voy a multiplicar por 32, lo voy a hacer acá abajito [escribe dentro de la circunferencia que tiene dibujada en la pizarra]. $32 \cdot 6$, ¿$6 \cdot 2$ son?

E2: ¿6?

P: No, cuidado

E3: ¿ $6 \cdot 2$ dijo?

P: Sí

E2: ah

E3: 12

P: 12, muy bien, 1 de reserva ¿$6 \cdot 3$ son?

E4: 15

E1: 18

P: 18, ¿y más 1?

E4: 8

E1: 19

P: 19, por lo tanto, me da 192

E1: 192

E2: yo lo dije primero

P: Está bien **E2**, disculpa que no pueda ver el chat en el momento, pero como estoy escribiendo acá… pero bien **E2**, vi tu respuesta. Ahora, la pregunta dice "¿Cuánto recorrerá el ciclista dando 10 vueltas?" ¿Qué creen ustedes que tengo que hacer con ese 192?

E5: ¿Multiplicarlo por 10?

P: Perfecto, perfecto, multiplicarlo por 10 ¿ya? **El** 192 multiplicarlo por 10 es bien facilito ¿ustedes se saben la técnica de agregar los ceros o no? Multiplican 191, perdón, $192 \cdot 1$ da 192, y le agregan el cero no más, 1.920, y ahí está la respuesta. Por lo tanto, son $1.920cm$. Por lo tanto, la respuesta correcta de a n°2 es la letra **d**, ninguna de las anteriores ¿se entiende chicos? [Algunos estudiantes le señalan que sí] Perfecto, bien, cuando no entiendan pregunten por favor ¿ya? Es importante. Como aquí la pregunta decía cuánto iba a dar 10 vueltas, tenía que multiplicar al final por 10, pero si no me hubiera dicho eso llegaba solamente hasta el 192 ¿ya? Sigo avanzando, cuando ustedes me digan que me detenga yo me detengo.

E2: profe, yo quiero que se detenga un poco porque me había equivocado.

P: Sí tranquilo, no te preocupes **E2**, ahora puedes modificarlo ¿bueno?

E2: bueno, bueno, bueno

P: ya, sigo. En el n°3 dice "una mesa redonda tiene por radio 4cm y se quiere cubrir con un mantel" Cuando a ustedes los mandan y les dicen "hijo, vamos a tomar once, ponga el mantel" ¿cierto? cuando ustedes ponen el mantel están ocupando lo de adentro, por lo tanto, eso no es perímetro, porque el perímetro es lo del contorno, recuerden el rubio de ojos azules que yo dibujé acá, el rubiecito de ojos azules era el que hacía el contorno, y cuando ustedes ponen un mantel en la mesa ocupan lo de adentro de la mesa, por lo tanto, están ocupando el área ¿me entienden o no? Por lo tanto, el ejercicio 3 no lo vamos a resolver porque se resuelve con área, vámonos al n°4, dice: "una mesa redonda tiene por radio 4cm, se quiere cubrir el borde con una huincha plástica", o sea que eso lo de afuera le quieren colocar huincha [señala la circunferencia que tiene dibujada en la pizarra], y si van a ocupar lo de afuera, el borde, ¿es perímetro o área?

E3, E4: perímetro

P: perfecto, es perímetro, por lo tanto, el n°4 lo vamos a calcular con el perímetro ¿ya? ¿No sé si copiaron esto chicos? [Señala al ejercicio desarrollado en la pizarra]

E1: sí

P: O le quieren sacar un pantallazo y después lo comparten…

E6: sí

E1: listo profe, estoy listo

P: ¿entendiste o no **E3**? No te escucho **E3**, tienes tu micrófono apagado

E3: voy a sacarle una foto

P: ya, tú lo compartes después por si alguien no lo escribió ¿bueno? Gracias **E3**, eres muy amable. Sigo avanzando chicos, voy a borrar acá [borra el ejercicio escrito en la pizarra]. ¿Cuánto vale el radio en el ejercicio 4?

E5: 4

P: Perfecto, muy bien, 4, excelente, 4. Ustedes vuelven a anotar la fórmula $P = 2 \cdot \pi \cdot r$, esta fórmula deben aprendérsela de memoria ojalá, no es tan difícil, después se van a dar cuenta que no, me imagino que algunos ya están calculando el ejercicio ya, y ahora ustedes van a calcular $P = 2 \cdot \pi$ ¿cuánto valía π?

E1: 3

P: 3, ¿cuánto vale el radio?

E1: 4

P: 4, muy bien. Multiplico $2 \cdot 3$ ¿cuánto es $2 \cdot 3$?

E1, E2: 6

P: muy bien, 6, el 6 lo multiplico por el 4 que quedó solito, ¿y eso es?

E3, E1: 24

P: Muy bien, 24cm, alternativa correcta ¿la letra?

E2, E5: d

P: d, ¿se va entendiendo chicos?

E1, E5: sí

P: muy bien, excelente, esa es la idea.

E2: Profe el ejercicio de abajo ya lo tengo hecho.

P: ya, ahí lo vamos a revisar, ahora lo das después cuando veamos las respuestas ¿bueno **E2**?

E2: bueno

P: ya, esa es la primera parte de las alternativas, los otros los vamos a ver en la próxima clase cuando veamos área, en el próximo capítulo, no se lo pierdan ah, no les voy a hacer ningún spoiler de eso, para que vengan a la próxima clase. Ahora chicos, el ítem 2 tenemos tres ejercicios. El ejercicio tenemos que calcular el área y el perímetro, nosotros no vamos a calcular área todavía, vamos a calcular perímetro ¿pueden calcularlo ustedes desde su casa el perímetro de acá? ¿Se atreven o no? Con lo que ya explicamos…

E1: ya

P: A ver, los que se atreven chicos calcúlenlo, calculen el perímetro, colocan la fórmula y después van reemplazando. **E7** se supone que ya lo hizo, ya **E7** lo vamos a decir ahora las respuestas y tú vas revisando en este caso ¿bueno? Vas revisando si tus respuestas están correctas. Resuelvan ustedes a ver, cómo les va. Ah, se me olvidó [anota en la pizarra que el radio vale 3cm]

E5: ¿es de 18?

P: Vamos a ver, vamos a ver, ¿**E3** le tomaste un pantallazo a esto? A la n°4 **E3** ¿le tomaste un pantallazo a este? [Ella le hace una seña diciendo que sí, y él responde de la misma manera]. Ya, vamos a revisar si son 18 como dices tú, unos minutitos por favor [Borra la pizarra y espera a que los estudiantes resuelvan]. Ya, dos minutitos más chicos para que vean si lo pudieron hacer y lo trabajamos juntos ahora [el profesor espera a que resuelvan]. Ya, ¿lo terminaron chicos?

E1, E5: sí

P: respuestas, para ir viendo si les dio, **E1** ¿cuánto te dio a ti?

E1: 18

E5: a mi igual

P: Bien, a mi igual me dio 18

E4: 18

P: Bien, 18 ¿a alguien le dio un número distinto a 18?

E2: No, está bien

P: ya, calculemos ¿cuánto vale el radio en el ejercicio?

E4, E1: 3

P: muy bien, vale 3cm, reemplazo en la fórmula $2 \cdot \pi$ ¿cuánto valía π?

E1: 3

P: muy bien, ¿el radio vale?

E1: 3

P: muy bien, 3 ¿$2 \cdot 3$ son?

E1, E2: 6

P: Muy bien ¿multiplicado por 3 son?

E1, E2: 18

P: bien chicos, 18cm, excelente servicio, cinco estrellas para ustedes, la respuesta era 18 ¿se entendió o no?

E1: sí

P: Son secos, muy bien, excelente. Avancemos a la última hoja de la guía. Qué pena que sean 3 hojas no más, debí haber hecho una guía de 20. Avancen a la última hoja ¿Se atreven con el n°6 ustedes ahora? Perímetro nuevamente.

E5: sí

E1: yo ya lo tengo

E7: ¿Profesor?

P: sí

E7: yo esa parte de la guía no la tengo

P: ¿no la tienes?

E7: no, yo tengo hasta ahí no más, hasta donde usted hizo, pero la otra no la tengo

P: Mmm…, eh… ¿la descargaste por internet la guía?

E7: No es que mi mamá me lo mandó ya que yo no estoy en la casa.

P: ah ya, ok

E7: entonces no sé si a ella no se lo entregaron o la pasó a enviar no más.

P: ¿te doy un consejo por mientras que vemos qué problema pasó? ¿Tienes algún cuaderno a mano?

E7: he sí

P: ya, anda escribiendo la respuesta en el cuaderno, mira yo te voy a decir aquí cuánto valía el radio. En el ejercicio que van a calcular tus compañeros, el radio vale 7cm.

E7: ah, ok

P: ¿ya? Resuélvelo en una hojita y después verificas si la tienes en tu casa y la resuelves ¿bueno?

E7: ya

P: excelente ¿**E3** le sacó pantallazo cierto? [Ella le hace señas de que sí]

P: Gracias **E3**. Voy a borrar entonces [Borra la pizarra]. Resuelvan la n°6 chicos [Espera a que los estudiantes resuelvan]. Vamos a esperar un minutito más y comprobamos la respuesta. ¿**E7** y las que hicimos las tenías bien cierto?

E7: si, todas las tenía bien solamente que la última parte me faltaba.

P: bien, perfecto, perfecto, muy bien [Sigue esperando a que los demás resuelvan] ¿Ya lo hicieron chicos o no?

E5, E7: sí

P: ¿cuánto les dio?

E5: a mí 42

E7: a mi igual

E3: a mí también

E4, E3: 42

P: ¿ninguna respuesta distinta?

E1, E3: no

P: ya, vamos a revisar [empieza a escribir en la pizarra] $2 \cdot \pi$ ¿π vale?

E1: 3

P: perdón que lo diga muchas veces, pero si yo lo digo tantas veces se les va a quedar aquí [señala la cabeza] ese es mi objetivo, que de decirlo tantas veces se les quede aquí, eso les pasa cuando quieren aprenderse una canción, la escuchan una y otra vez y se la terminan aprendiendo, yo soy la canción ahora, y ustedes me están escuchando a mí. $2 \cdot 3 \cdot r$ ¿Cuánto vale r?

E1: 7

P: 7 ¿cuánto es $2 \cdot 3$?

E1, E4: 6

P: 6 ¿y $6 \cdot 7$?

E1, E3, E4: 42

P: 42, y ahí está la respuesta

E3: ay, me salió

P: Excelente, muy bien, mira la **E3** hasta se alegró donde lo hizo bien ¿viste **E3** que todo se puede? Es querer no más **E3**, es querer, muy bien **E3**. El de abajito el n°7 está un poquito más complicado porque el número que está ahí es un número decimal, ¿ustedes se acuerdan cómo se multiplicaban los números decimales o no?

E5, E1: sí

P: ya, los que se acuerdan cómo se hacía lo multiplican, los que no me esperan un poquito y lo resolvemos juntos ¿bueno? Ya, les doy unos minutitos más para que resuelvan ese ahora. En este ejercicio el radio vale 4,5cm [y lo escribe en la pizarra, luego espera a que los estudiantes resuelvan el ejercicio]. Ustedes me van indicando cuando lo hicieron ¿ya? Para yo empezar a revisarlo.

E1: listo

P: ya **E1**, ya vamos a revisar. ¿**E2** tú lo hiciste igual? [él le hace señas de que no]. No, ¿te cuestan los decimales **E2**? [le hace señas nuevamente]. Más o menos, ya, ahora lo vamos a ver ¿bueno? Ya, reemplacemos nuevamente $2 \cdot \pi$ ¿π vale?

E1: 3

P: 3, ¿y cuánto vale el radio?

E4: E1: E5: 4,5

P: 4,5 muy bien ¿cuánto es $2 \cdot 3$?

E1, E4, E3: 6

P: $6 \cdot 4{,}5$ ¿aquí ustedes saben que si esto lo dan vuelta les da el mismo resultado o no?

E1, E5: sí

P: que el orden de los factores no altera el producto

E5: sí

P: Entonces yo lo voy a dar vuelta para multiplicarlo acá $4{,}5 \times 6$ [lo escribe dentro de la circunferencia que tiene dibujada en la pizarra], miren que es fácil multiplicar los decimales, para el que no se acordaba bien ¿cuánto es $6 \cdot 5$?

E1, E5: 30

P: muy bien ¿$6 \cdot 4$?

E3: $6 \cdot 4 = 24$

P: ¿más 3?

E1, E3: 27

P: 27, muy bien ¿cuántos números después de la coma tengo?

E3: uno

P: uno, yo dejo un número después de la coma

E3: ah, no me acordaba

P: ¿ven? Por lo tanto, aquí la respuesta sería 27,0 que es lo mismo que 27cm ¿los que lo hicieron lo tienen bueno?

E1: sí

P: bien ¿E5 cómo lo tenías tú?

E5: no, yo me equivoqué…

P: ya, ¿y en qué te equivocaste **E5**? ¿Dónde te perdiste?

E5: en centímetros, pero ya entendí ya

P: ya, bien, bien. Escríbanlo los que no lo tenían listo. **E3** el pantallazo, de ahí después lo compartes con tus compañeros. Ustedes me dicen cuándo puedo borrar para avanzar ¿o avanzo no más? ¿Lo entendiste verdad **E2**? ¿Se entendió? [Él le señala que sí]

P: Bien **E2**. Ya, avancemos con el último ítem de la guía [borra la pizarra]. El último ítem es de problemas, dice el N°8 "para una presentación de gimnasia de un colegio se necesita elaborar 15 argollas de radio 40cm" ¿ustedes conocen las argollas cierto? con las que algunas veces juegan como al sau-sau y se van moviendo…

E1: sí

P: ¿sí? ¿Las ubican o no?

E1: sí

P: no, la **E3** está pilla, a ver **E3** deja buscar una foto en mi teléfono [ocupa su celular para buscar imágenes por internet, luego muestra desde su celular una imagen de argollas]. Son algo así **E3** mira, pero son más grandes y van por la cintura ¿te acordaste ahora? Ya, dice entonces "¿cuántos centímetros de tubo plástico se debe comprar para confeccionar las 15 argollas?" ya, si ustedes quieren confeccionar estas argollas deben ocupar centímetros y deben ocupar plástico por el contorno de esta argolla no deben hacer lo de adentro ¿cierto? y si es lo de afuera de la argolla ¿se calcula el área o el perímetro?

E4, E3: perímetro

P: muy bien, se calcula el perímetro, eso es importante, excelente chicos, ahora ¿cuánto dice que vale el radio en el ejercicio?

E5: 40cm

P: muy bien, 40cm, y yo empiezo a reemplazar ahora $2 \cdot \pi$ ¿cuánto vale π?

E5: 3

P: 3 ¿y cuánto vale el radio?

E5: 40

P: muy bien, 40, multiplico $2 \cdot 3$ ¿y eso es?

E5: 6

P: 6, muy bien, y el 6 lo voy a multiplicar por 40. No se compliquen miren, ¿cuánto es $6 \cdot 4$?

E3: 24

E4: 12

P: bien, 24, y ahora agreguen el cero

E5: 40

P: está listo, 240cm, ¿está listo el problema o falta algo?

E5, E1: está listo

P: No, falta algo, porque eso es lo que ocupo para construir una argolla

E2: profe me perdí ¿adónde iban?

P: vamos en los problemas **E2**.

E2: ¿pero en la última hoja de matemática en la de abajo o no?

P: sí

Profesora de Integración: Es que esa no aparece en la que tiene **E3** ni **E1**, así que eso tienen que copiarla ustedes porque ustedes tienen otra hoja adicional de ejercicios, por eso no les aparece **E2**.

P: ya, ahí está la aclaración, la profesora les hizo la aclaración chicos. Ya, esto es lo que mide una argolla ¿y cuántas argollas quiere confeccionar este colegio?

E5; E3: 15

P: ¿entonces qué tengo que hacer con el 240?

E3: ¿lo multiplica por 15?

P: Lo multiplico por 15, perfecto, multiplíquenlo a ver cuánto les da, $240 \cdot 15$, multipliquen ahí a ver. Hay una respuesta por interno, ya la vamos a revisar **E8** ¿ya? Espérame un poquito [espera un minuto]. Ya chicos, resolvamos juntos ahora ¿cuánto sería $5 \cdot 0$?

E3, E5: 0

P: 0, ¿$5 \cdot 4$?

E3: 20

P: 20, dos de reserva ¿ $5 \cdot 2$?

E3: 10, 12

P: más 2, 12. ¿Qué hago aquí ahora antes de seguir?

E3: ah, me faltó un número… Pone una equis

P: la equis, muy bien, equis, ¿1 · 0 es?

E3: 0

P: 0, ¿1 · 4?

E3: 4

P: 4, ¿1 · 2?

E3: 2

P: 2, y ahora los voy a sumar. Cero, cero, seis, y tres, por lo tanto, la respuesta es 3.600cm. Muy bien **E8**, tú lo habías dado ¿lo hiciste sin calculadora cierto? Bien **E8**. **E3** un pantallazo. Ya, bien. Me voy a ganar ahora aquí para que me vean un poquito mejor, no se asusten que soy yo [y se ubica frente al computador]. Ya, chicos, eso era la clase de hoy, reforzar lo que era el perímetro, ahora, si ustedes se dan cuenta al final de la guía yo les puse una frase, y la frase dice "nadie es perfecto, por eso los lápices tienen goma" Por qué quiero dejarles eso claro, es para terminar la clase, nunca fui bueno para matemática en el colegio, nunca tuve promedio 7 ¿ya? a veces tenía un poquito abajo del 5, a veces arriba de 6 ¿ya? A mí me costaba mucho matemática, por eso yo les contaba la historia de todas las veces que me tuvo que explicar una profesora para poder entender algo, yo los quiero incitar a lo mismo, que cuando no entiendan algo pregunten ¿ya? Yo agradezco a los que tuvieron su cámara encendida, es muy bueno para mí para yo conocerlos, les agradezco mucho eso, porque en otros colegios esto no pasa, la cámara está todo el día apagada, la cámara no se enciende para nada, los chicos no hablan y ustedes sí fueron participando, fueron hablando así que eso yo lo agradezco harto, espero que la clase les haya servido y que les haya quedado muy claro esa parte de la guía. Ahora, no quiero que se apuren en resolver la otra parte, si ustedes quieren hacerlo y se atreven a leer y a tratar de resolverlo, háganlo, pero la próxima clase nosotros vamos a trabajar con lo que es el área y vamos a hacer lo mismo que hoy día ¿ya? Y cuando tengamos esta guía lista ustedes me la van a enviar, la idea es que yo les haya aclarado un poquito más en lo que consiste esto ¿cómo se sienten ahora? ¿Un poco más entendidos con el tema o no?

E1: sí

P: Perfecto, esa es la idea, bien. La idea es que yo les ayudara a ustedes y que trataran de entender el máximo ¿hay alguien que me quiera contar en un par de palabritas lo que aprendió hoy día? De todo lo que yo hablé

E3: no escuché ¿repite? ¿Lo puede repetir?

P: que si tú me puedes repetir lo que aprendiste hoy día, en un par de palabras ¿Alguien que se atreva? No es necesario que diga todo tal cual, es solamente alguien que vaya tenido alguna idea.

E3: que el perímetro es el contorno de algo

P: el contorno del círculo

E3: eso

P: O de una figura, porque todas las figuras tienen perímetro, perfecto **E3**, muy bien ¿alguien más quiere agregar algo? ¿Qué es importante para calcular el perímetro? ¿Qué elementos deben ustedes conocer? Hay dos elementos

E5: la multiplicación

P: la multiplicación, bien ¿y cuáles son los símbolos que usábamos?

E3: radio, pe… eh no me acuerdo, radio eh…

E5: lo de perímetro y área

E3: π

P: bien, radio y π, por ahí escuché π, bien, excelente

E3: ¿π se llama?

P: ¿Y cuánto vale para nuestra guía?

E1: E3: 3

P: 3, ¿pero vale 3 realmente?

E5: 3,14 vale

P: 3,141516 y es un número irracional, perfecto. Eso es básicamente lo de hoy chicos ¿tienen alguna duda? ¿Algo que preguntar? Antes de finalizar

E1: no

P: Ya, voy a corroborar la lista, para ver a quién dejé presente y quién me falta ¿bueno? Así es que si no nombro a alguien me lo dice por el chat o me lo dice hablando, voy a ver, hoy día estuvo presente… [el profesor pasa lista]

P: Creo que nadie más. Chicos, cuando tengan problemas con el internet, me lo dicen ¿ya? Para yo dejarlos igual justificados acá porque es importante que ustedes queden justificados en vez de quedar ausentes, así que eso ténganlo claro. Eso es por hoy, nos vemos el próximo viernes, a la misma hora y en el mismo canal, cuídense y buen fin de semana para todos

E3: chao, cuídese

E1: chao profe

E4: chao profe

ANEXO 3: Transcripción de la clase N°2

P: Ya, chicos, recordemos que la clase anterior estuvimos trabajando con la guía de área y perímetro. Quisimos darle énfasis a una sola parte de la guía, en especial, fue la parte de perímetro. Del perímetro, hay dos cosas importantes que quiero que ustedes recuerden siempre, la primera es que cuando pido calcular el perímetro ¿A qué me refiero chicos? ¿A lo de adentro o a lo de afuera?

E1: Al contorno

E3: A lo de afuera, al contorno

P: Al contorno, perfecto, muy buena respuesta, perfecto, perímetro siempre es el contorno, lo de afuera. Cuando dibujé al rubiecito de ojos azules, a eso me refería con el contorno, porque él iba caminando por alrededor de este círculo. Ahora, ¿alguien recuerda la fórmula para calcular el perímetro? Ojalá que no vean la guía ¿Alguien la recuerda? ¿Alguien recuerda esa fórmula?

E4: el radio multiplicado por el…

P: ¿No te acuerdas ya E1?

E4: No

P: Ya, tranquilo. Ya chicos a ver, las fórmulas son bastante importantes…

E4: multiplicado por pin, pin

P: Otra vez perdón, justo estaba hablando.

E4: el radio multiplicado por π. Me acordé de pinocho.

P: Ya, bien, buena manera de acordarse de las cosas, asociándolas, bien. Ya, el radio multiplicado por π, y le falta agregarle un 2 ¿Ya? La fórmula era $2 \cdot \pi \cdot r$. Esperen un poco… [Ingresa un estudiante y el profesor le pregunta su nombre]. Ya, como les decía, las fórmulas matemáticas chicos, es súper importante que ustedes recuerden estas fórmulas matemáticas, al igual que las tablas de multiplicar, las fórmulas matemáticas nos van a ayudar mucho en la vida cotidiana, nos van a ayudar mucho a lo largo, es importante que ustedes se las aprendan, recuerden que la fórmula era $2 \cdot \pi \cdot r$ ¿para nosotros cuánto valía π en la guía? ¿Alguien lo recuerda?

E1, E4: 3

P: Bien, bien los que hablaron, 3, perfecto chicos. Para nosotros π vale 3, pero recordar que ustedes en un futuro probablemente a π lo van a usar como 3,14 como un número decimal ¿va a complicarse un poquito la cosa? Sí ¿Va a ser imposible hacerlo? No. Va a ser igual de sencillo, igual de fácil, solamente que yo por este tema de pandemia, porque están en casa y les cuesta un poco más quise que π fuera 3. Recuerden también ustedes que π es un número irracional, un número que tiene infinitos decimales, creo que se los mostré hasta en la calculadora en la clase anterior, mostrándoles la cantidad de decimales que tenía este número, veo que varios están asentando con la cabeza, así es que veo que fue así. Ahora, también tenemos que recordar el radio (el profesor apunta a la pizarra donde tiene dibujada una circunferencia y está marcado el radio), el radio era un segmento que va desde cualquier parte de la circunferencia y llegaba hasta la mitad de esta, ese era nuestro radio. A veces ustedes van a encontrar el valor del diámetro, el diámetro es esta misma línea, pero completa, en cambio el radio es solamente hasta la mitad, eso es lo que fue la clase anterior chicos ¿hay algo que quieran preguntar? ¿Hay algo que quieran recordar antes de avanzar a lo de hoy? [Los estudiantes mueven la cabeza diciendo que no]. Ya, perfecto, seguimos entonces. En esta clase nos vamos a dedicar al área de la circunferencia, nos vamos a ir al área de la guía. Ahora, recordar nuevamente que para nosotros π va a valer 3, para facilitar los cálculos ¿cierto? Ahora, el área, a diferencia del perímetro, aquí no vamos a tener a ningún rubiecito de ojos azules caminando por nuestra circunferencia. Ahora nosotros nos vamos a enfocar en lo que está adentro de este círculo, eso corresponde al área chicos, a lo que está adentro, si ustedes recuerdan perímetro era lo de afuera, ahora área es lo que está adentro de esta.

E3: área es lo de adentro

P: Exacto, área es lo que está adentro, como, por ejemplo, cuando a ustedes les mandan a poner la mesa, y ponen un mantel, ahí están cubriendo el área de esa mesa, porque están poniendo un mantel ¿se va entendiendo la idea cierto?

E1: sí profe

P: Ya, perfecto, excelente. Ahora, para nosotros calcular la fórmula con el área tenemos que aprendernos está fórmula que está acá, voy a correr un poquito más mi computador para que lo vean mejor [enfoca la fórmula que tiene anotada en la pizarra]. Tienen que aprenderse la fórmula que está en verde $á = \pi \cdot r^2$, r^2 ya puede complicar un poquito la existencia a lo mejor, ustedes van a decir ¿qué es ese 2 que está arriba chiquitito? ¿Qué hace encima de eso? Eso es una potencia, y significa que ustedes deben multiplicar dos veces el radio, por lo tanto, para yo facilitar aún más este tipo de cálculo les anoto acá en azul la fórmula que va ser la definitiva, y les va a facilitar todo tipo de cálculo, y la fórmula es $á = \pi \cdot r \cdot r$, esa fórmula ustedes deben manejarla de memoria, en lo posible, tienen que llegar algún día a aprenderse esta fórmula, π va a valer siempre lo mismo, que es 3 pero para nosotros, y el radio que nos va a dar la guía. Ahora, nos vamos a la guía chicos y leemos lo que dice de área, dice: "la curva denominada circunferencia encierra en su interior [el profesor agrega: "o sea todo lo que está adentro"], una superficie la cual es llamada área, dicho de una forma más sencilla, el área de una circunferencia es todo lo que está adentro". Luego dice: "tenemos una fórmula muy fácil que nos permite calcular el área encerrada solo sabiendo cuánto mide el radio". No necesitamos saber ninguna otra información más, solo cuánto mide el radio, porque nosotros ya sabemos cuánto vale π. [sigue leyendo] "sabiendo el radio de la circunferencia entonces el área se calcula de la siguiente forma" Acá está la fórmula chicos [apunta a la pizarra] $\pi \cdot r^2$, pero para que aún sea más fácil, como yo les decía, ustedes apréndanse esta fórmula que está acá [y la encierra], esa fórmula $á = \pi \cdot r \cdot r$. Ahora, tomando el mismo ejemplo de la guía, vamos a resolver lo siguiente chicos. En la guía dice que el radio vale $10cm$, entonces yo coloco acá que vale $10cm$ [escribe en la pizarra]. Y resuelvo, miren que sencillo es, área es igual a π ¿cuánto vale π?

E4: 3

P: 3, muy bien, 3, por radio ¿cuánto vale el radio?

E4: 10

P: Muy bien, 10, y por otro radio ¿cuánto vale el otro radio?

E1: 10

P: 10 también, perfecto, y tenemos una multiplicación $3 \cdot 10 \cdot 10$, como ustedes quieran pueden multiplicar acá, porque el orden de los factores no altera el producto, ustedes deciden cómo, yo comúnmente multiplico estos dos primero [marca $10 \cdot 10$], los dos del final, pero si ustedes lo quieren hacer de otra forma lo hacen de otra forma, entonces yo escribo [mira el computador y se da cuenta que un estudiante escribe la respuesta en el chat], gracias **E8**, $á = 3 \cdot ¿\ 10 \cdot 10$ cuánto es?

E4: 100

P: Muy bien, 100, y ahora ese $3 \cdot 100$ me va a dar el resultado final, que es 300, $300cm$ si fuera perímetro, pero como estamos calculando el área le vamos a agregar un 2 chiquitito acá arriba [cm^2], significa centímetros cuadrados y esa es la forma de calcular lo que es área, $300cm^2$, eso es importante, agregar el número 2 chiquitito arriba y significa que es cuadrado porque estamos calculando el área ¿se entiende chicos?

E4: sí profe

P: Ya, perfecto. La idea es que si alguien lo quiere escribir, veo que la **E3** lo estaba escribiendo, si alguien más lo quiere escribir, lo quiere agregar en su cuaderno, lo hace, no hay problema ¿ya? Si alguien le quiere tomar un pantallazo y después enviarlo al grupo de WhatsApp, también lo hace.

E4: yo ya le saqué un pantallazo

P: Bien, después lo compartes en el grupo ¿bueno?

E4: ok

P: Gracias ¿hay alguna duda con lo que acabo de explicar chicos? Si no entendieron algo me pueden preguntar de nuevo, con confianza.

E3: ¿puede explicar de nuevo?

P: Por supuesto que sí **E3**. Mira, esta es nuestra fórmula **E3**, esto tenemos que aprendernos nosotros como el Padre Nuestro cuando las mamitas se van a acostar y dicen "padre nuestro que estás en el cielo…", nosotros nos vamos a aprender esto de acá $\pi \cdot r \cdot r$, esta es nuestra fórmula. π para nosotros tenemos el valor que está acá, vale 3, y el radio siempre lo va a dar el ejercicio, en este caso el radio vale 10 **E3**, por lo tanto, tú vas a reemplazar todos estos símbolos por los valores de acá abajo, π vale 3, el radio vale 10 y el otro igual va a valer 10, porque es el mismo radio, por lo tanto, yo reemplazo ¿ves? Ahora yo empiezo a multiplicar, como tú quieras multiplicas, en el orden que tú quieras, yo multipliqué $10 \cdot 10$, me dio 100, lo multiplico por 3 y me da los 300.

E3: ya, gracias

P: No hay de qué **E3**.

E3: ahora sí

P: Ya chicos, ahora si gustan, nos vamos a ir a la hoja dos de nuestra guía, y ya podemos comenzar nosotros a resolver esta guía con facilidad. Voy a borrar acá para ir resolviendo junto con ustedes cuando sea necesario [borra la pizarra]. Tenemos en la hoja n°2 la primera pregunta de alternativas que dice: "una moneda de $500 tienen un radio de 2cm ¿qué superficie ocupa?" Cuando yo hablo de superficie, es lo mismo que hablar de área, por lo tanto, para calcular ese ejercicio ¿qué van a hacer ustedes? Van a colocar que el radio vale 2 y luego van a reemplazar con la fórmula.

E9: da 12

P: ¿Ya? Vamos a ver, área es igual a π, π vale 3, el radio vale 2, y nuevamente 2 ¿multiplico cierto? 3 · 2 · 2 que son 4, y 3 · 4 que son 12, por lo tanto, bien como dijo **E7** creo que fue la que me dio la respuesta…

E7: **E9** fue

P: **E9**, bien **E9**, muy bien, $12cm^2$, la alternativa **a**. Esa es la forma de calcular el n°1. Esto es importante que esté en su guía cuando ustedes me la envíen chicos. Es muy probable, ya, es muy probable que cuando terminemos esta clase la guía esté completa.

E3: yo la tengo en el cuaderno

P: Ya, le saca una fotito al cuaderno y a la guía ¿bueno? No hay problema, no te preocupes de eso. Ya, el n°2 lo hicimos la clase anterior porque correspondía a perímetro ¿cierto? el dos de alternativa. El n°3, aquí está lo que yo les hablaba antes, miren lo que dice, dice: "una mesa redonda tiene por radio 4cm, se quiere cubrir con un mantel hasta el bode ¿cuántos centímetros cuadrados de género se necesita?" Y aquí ustedes podrían calcularlo ¿lo pueden calcular desde allá? Calculen el n°3, pensando en la misma fórmula, pero ahora el radio no va a valer 2 ¿cuánto va a valer el radio en este ejercicio?

E4: 4

P: Excelente, 4. Calcúlenlo a ver cómo les va.

E9: da 48

P: Ya, vamos a ver, gracias **E9**, vamos a revisar. Calcúlenlo los que no lo han hecho todavía. [El profesor les da unos minutos para que resuelvan el ejercicio]. ¿Lo calculaste **E3**? Te dio 48, ya ¿Alguien más lo hizo, o no?

E4: sí profe

P: ¿cuánto te dio?

E4: 48

P: Ya, bien. ¿Alguien más lo tiene o no? ¿Y a ti **E8** cuánto te dio?

E8: 48

P: Bien, 48 ¿lo hacemos igual acá para ver cómo nos va? Vamos a borrar acá…, voy a borrar acá [borra la pizarra]. Empezamos a calcular, en el ejercicio nos dice que la mesa tiene un radio de 4cm, y yo empiezo a reemplazar en la fórmula $á = \pi$, o sea 3, por $4,$ por 4, multiplico, $á = 3 \cdot 4 \cdot 4$ que son 16 y $á = 3 \cdot 16$, que son $48cm^2$, alternativa **a**, está perfecto, muy bien chicos, buen trabajo, bien **E3**, bien **E8**, bien **E9**, excelente trabajo. La n°4 de alternativa la resolvimos la clase anterior porque era con perímetro, esa ya está hecha también, y nos vamos al ítem 2 de la guía, donde tenemos que calcular el área y el perímetro de cada uno de esos círculos ¿podemos calcular el área de la n°5, o no?

E4: sí

P: Ya, a ver, háganlo desde allá

E4: 27cm

P: ¿ya? Vamos a ver si a los demás les da lo mismo a ver, el radio vale 3 y empiezan a reemplazar. [El profesor borra la pizarra y les da unos minutos para que resuelvan]

E9: ¿profesor estamos haciendo la 5 cierto?

P: Correcto, la parte de área y perímetro del círculo

E9: da 27

P: Ya, vamos a ver, esperamos porque hay algunos que lo están haciendo aún.

E9: Bueno

E10: no entiendo cómo hacerlo

P: ¿no se entendió nada de lo que hemos explicado?

E10: No, un poquito no más, el perímetro

P: Ya ¿tienes tu guía a mano?

E10: sí profe

P: Ya, ahora presta el doble de atención, la fórmula para calcular área es esta que está encerrada en este rectángulo verde [señala la parte de la pizarra en donde está escrita la fórmula] $\pi \cdot r \cdot r$, π vale 3, para nuestra guía π va a valer siempre 3, y r es el radio, el radio siempre te lo va a dar el ejercicio, en este caso el n°5 dice que el radio vale 3cm, entonces yo voy a reemplazar por ese 3 en la fórmula π, dijimos que π vale 3, por lo tanto coloco 3, el radio vale 3, coloco 3, y nuevamente me pide el radio, vuelvo a colocar 3, multiplico, en el orden que ustedes quieran á $= 3$, ¿$3 \cdot 3$ son?

E3: 9

P: Y ahora yo multiplico $3 \cdot 9$

E3: 27

P: Y eso da 27 ¿se entendió un poco más?

E10: sí profesor, se entiende

P: Ya, para que vayamos completando la guía. Hay que aprenderse las tablas de multiplicar. Yo tengo las tablas de multiplicar en reggaetón por si alguien las quiere, me habla en WhatsApp y les mando las canciones en formato reggaetón. Ya, vámonos a la última hoja de la guía chicos, última hoja, y partamos con el n°6, calculen ustedes el n°6, si alguien lo tiene no me dé la respuesta todavía, esperen unos minutitos porque algunos lo están calculando, así es el que ya la tiene espere un poquito, no de la respuesta todavía. **E10** trata de resolver este, el n°6 ¿te parece?

E10: Ya

P: Ya, vamos. [El profesor borra la pizarra y les da unos minutos para que resuelvan]. Ya, ahora sí puedo escuchar respuestas, mientras algunos terminan.

E9: me dio 147

E4: a mí igual

P: ¿147?

E9: sí

P: Perfecto, ya

E3: a mí también

P: Ya, ¿**E10** cómo vas tú?

E10: me falta un poquito

P: Tú dices cuándo y me das la respuesta ¿bueno? [El profesor espera un poco más] ¿Cómo vamos **E10**?

E10: me falta

P: Ya. [Mientras espera, el profesor anota en la pizarra que el radio vale 7cm]

E10: profesor, no me dio

P: E10 yo no tengo ningún problema, si te cuesta dime no más, la clase pasada otra estudiante me preguntaba varias veces, me decía que no entendía, hasta que entendió. Cuando ustedes no entiendan algo la única forma de entenderlo es que ustedes me digan, porque yo doy por hecho que si ustedes no me responden lo saben, ayer una clase la terminé 10 o 15 minutos antes, porque nadie me hablaba, hablaba todo el rato yo, incluso cuando preguntaba el desarrollo nadie me hablaba, entonces como nadie dice nada yo doy por hecho que todos entendieron, y sigo avanzando y sigo avanzando, pero si ustedes no entienden tienen que preguntarme. Vamos **E10**, concéntrate acá por favor, vamos a reemplazar con nuestra fórmula, á $= \pi, \pi$ vale 3, recuerda que para nuestra guía π vale 3, 3 por el radio, y el radio para este ejercicio vale 7, coloco 7 y vuelvo a colocar 7 porque me vuelve a pedir el radio, multiplico ¿cierto? ¿$7 \cdot 7$ son?

E3: 49

P: Muy bien, 49, y ahora ese 49 lo multiplico por 3, ¿y eso me da?

E3:147

P: 147cm^2, bien chicos, entendieron bastante rápido, buenas respuestas. **E10** ¿vas entendiendo un poco más?

E10: sí

P: Ya. Luego, tenemos el n°7 que es con decimales ¿se atreven a hacerlo ustedes? Inténtenlo, es prácticamente lo mismo, con la diferencia de que ahora el número aquí no va a ser un número entero, va a ser un número decimal. Inténtenlo ustedes chicos. Los que ya tienen la respuesta no me la den todavía, esperen unos minutitos más por favor. [El profesor da tiempo para que resuelvan] ¿Cómo vamos **E10**?

E10: bien profesor

E9: profe, ya lo terminé

P: Ya, **E9**, dame tu respuesta ¿cuánto te dio a ti?

E9: me dio 60,75

P: Ya ¿alguien tiene otra respuesta? La **E3** se cruzó de brazos ¿Qué pasó **E3**?

E3: profe me enojé, no me sale

P: Ya, pero **E3**, no desactives tu cámara, lo vamos a trabajar juntos, no te preocupes. Eso es lo bueno de la matemática, que cuesta un poquito, y cuando uno lo logra se siente tan bien, pero no hay que frustrarse tan rápido, no hay que cansarse, hay que darle cara a la matemática.

E3: tengo poca paciencia

P: No, hay que tener harta, yo te convido un poquito, tengo harta ¿**E8** lo hiciste tú? ¿**E11**? ¿Lo hicieron chicos o no?

E11: Todavía no

P: ¿Cuánto te dio **E5**? Tienes el micrófono desactivado

E5: me dio 27 a mí

P: 27, ya, tenemos respuestas diferentes. Vamos a esperar unos dos minutitos más y lo revisamos. Voy a colocar acá mientras tanto que el radio vale 4,5 [lo escribe en la pizarra]. ¿Cómo vas **E10**?

E10: no me sale profesor

P: Ya, lo hacemos ahora, tranquilo, no te preocupes. Ahora lo vamos a resolver. Lo que complica acá un poco es el número decimal ¿cierto? Ese número que tiene una coma. Podríamos dejar una clase para reforzar los números decimales ¿cierto? porque igual los veo un poco débiles ahí. Ya, resolvámoslo juntos chicos, π vale 3, el radio vale 4,5 y repito 4,5. Multiplico $4{,}5 \cdot 4{,}5$ [lo hace en una esquina de la pizarra]. Empiezo con el 5, ¿$5 \cdot 5$ son?

E3: 25

P: 25, muy bien, 2 de reserva, ¿$5 \cdot 4$ son?

E3: 20

P: ¿Más 2?

E3:22

P: Perfecto, 22. Ponemos una equis (x) ahí de espacio, ahora digo ¿ $4 \cdot 5$ son?

E3: 20

P: Muy bien, 20, coloco un 2 ¿$4 \cdot 4$ son?

E3: 16

P: Muy bien ¿más 2?

E3: 18

P: Excelente, 18. Ahora sumo esos números, 5, 2, 2 más 8 son 10, 1 y 2. Tengo un número después de la coma, acá tengo otro número después de la coma, en total tengo dos números después de la coma, por lo tanto, yo dejo dos números después de la coma, por lo tanto, es 20,25 ¿ya? $3 \cdot 20{,}25$ y ahora ese 20,25 lo vamos a multiplicar por 3, voy a colocar acá abajo $20{,}25 \cdot 3$, ¿ $3 \cdot 5$ es?

E3: 15

P: 15, uno de reserva, $3 \cdot 2$ son 6, ¿más 1?

E3:7

P: 7, ¿$3 \cdot 0$ es?

E3, E9: 0

P: ¿ $3 \cdot 2$ es?

E3, E9: 6

P: 6. Tengo dos números después de la coma, por lo tanto, yo dejo dos números después de la coma, 60,75. Por lo tanto, la respuesta aquí es $60{,}75cm^2$. Chicos, a ver, veo complicaciones, no muchas, pero sí las hay en los números decimales ¿ustedes creen que será necesario que en la próxima clase reforcemos un poquito eso?

E3: ya

P: ¿les parece o no? [varios responden que sí, y otros dicen que les da lo mismo]. Ya chicos, ahora nos vamos a la última parte de la guía, los problemas, y recuerden que el problema n°8 lo hicimos la clase anterior, era perímetro, ya está calculado, y nos queda el n°9, y dice: “Doan hizo una tabla circular cuyo radio mide 12cm, para colocar una olla sobre ella ¿cuánto mide el área de esta tabla?” Aquí la pregunta dice cuánto mide el área, por lo tanto, ya sabemos. Entonces aquí nuestro valor del radio va a ser 12, y después resolvemos de la misma forma ¿lo pueden resolver ustedes?

E9: Profe, yo ya lo hice

P: Ya **E9**, te doy la palabra en unos minutitos más para que me des la respuesta ¿bueno?

E9: Bueno

P: Resuélvanlo los que lo van a hacer. **E8** si le tomas una fotito a esto antes de borrarlo para que tú lo envíes por favor, al grupito, porque este ejercicio es bien completo. Por favor **E8**, en la fotito después pones cuando la envíes escribes que este es el ejercicio 7 ¿Bueno?

E8: listo

P: Gracias **E8**. Ahí tu manda la foto y dices que corresponde al ejercicio 7, por favor ¿Lo hiciste ya **E3**? Que andan rápidos, son unas máquinas. **E9**, tú me dijiste primero ¿cuánto te dio a ti?

E9: 432

E4: a mí igual

P: ya ¿**E3**?

E3: me dio lo mismo

P: ¿segura?

E3: sí

P: Ya ¿**E10** tú cómo vas?

E10: me falta

P: Ya, te espero unos minutitos **E10**. En este momento tengo el computador más lejos de lo común de la pizarra ¿Aun así ven bien los números? ¿Se ve bien todo o no?

E9: sí

P: A ya, perfecto así yo ocupo toda la pizarra, súper bien, gracias. Entonces ocupo toda la pizarra. [El profesor borra algunas cosas de la pizarra]. ¿**E8** lo hiciste tú? Me va a escribir, tiene postura de que va a escribir. Mientras **E8** escribe ¿**E11** tú lo hiciste?

E11: sí

P: ¿cuánto te dio **E11**?

E11: pero no me dio lo mismo

P: Ya, vamos a revisar ¿bueno? ¿**E5**?

E5: a mí me dio lo mismo

P: Ya. ¿**E10** cómo vas?

E10: profesor, no me quiere salir el resultado profesor

P: ¿Me puedes mostrar cómo estás trabajando? Prende tu cámara y muéstrame lo que estás haciendo, por favor. Necesito ver dónde te estás equivocando, porque así me cuesta un poco. ¿**E10**?

E10: ¿sí?

P: ¿Puedes prender tu cámara y mostrarme cómo lo estás trabajando?

E10: ya

E4: profe ¿el radio de cuánto es?

P: Para este ejercicio, el radio vale para este ejercicio…

E9: 12

P: 12, gracias, 12. ¿**E10** puedes mostrar o no? Se nos fue **E10** ¿**E10**?

E10: ya profesor, me equivoqué en esta cuestión

P: A ver, fijé tu pantalla, ahora no veo a nadie más que a ti. Enfócalo un poquito más que se ve pixelado. No, no veo, está como de lado. Da vuelta la hoja, si la puedes colocar derecha… por ahí va la cosa, ahí estamos mejor. $\pi \cdot 12$. Ya, bien, el otro radio que está al final, en el segundo paso **E10**, también tiene que ser 12. Ah ya, multiplicaste $12 \cdot 12$ es 144, perfecto **E10**. Mira y ahora te falta el valor de π ¿cuánto vale π para nuestro ejercicio **E10**? Mira mi pantalla [el profesor señala en su pizarra donde dice $\pi = 3$]. ¿cuánto vale?

E10: 3

P: 3, entonces ese 144 **E10** te está faltando multiplicarlo por 3 nada más

E10: ah ya

P: Bien **E10**, gracias por mostrarnos, mientras tú lo trabajas, yo voy a revisarlo con los chicos. [Escribe en la pizarra]. Reemplazo, el valor de π, vale 3, el radio vale 12, y el radio vale 12, multiplico ¿$12 \cdot 12$ cuánto es chicos? 144, y ahora ese 144 para finalizar lo multiplico por 3, y eso es

E4, E9: 432

P: Perfecto chicos, $432cm^2$. Como este es un problema, tiene que tener una respuesta escrita al final ¿cierto? El área de esta tabla mide $432cm^2$. Y ahí estaría finalizada la guía chicos. Como nos queda tiempo, necesito hacer un pequeño diálogo con ustedes, así es que necesito que ustedes me vayan contestando en lo posible ¿ya? Ya chicos, miren, lo primero que quiero decirles es que la guía ya está completa, por lo tanto, ustedes ya estarían en la facultad, o ya podrían enviarme su guía al WhatsApp, con la guía completa, así es que apenas la tengan, con los ejercicios hechos si, no se me pongan frescos, porque los fuimos haciendo en la pizarra.

E4: yo ya los tengo

P: Ya, apenas los tengan, me la envían

E4: yo se la mandé a la profesora, parece

P: Ya, si me lo puede enviar a mí de vuelta también se lo agradezco ¿ya?

E4: Oka.

P: Ya, así que eso es lo primero, cuando puedan. Identifíquense chicos, por favor, colóquenme nombre y curso, hay algunos nombres que los tengo guardados. Lo segundo, fue lo que ustedes me dijeron, algunos aprobaron, otros dijeron que les daba prácticamente igual, que yo encuentro pertinente que para la próxima clase recordemos cómo multiplicar los números decimales ¿ya?

E3: sí

P: ya, multiplicar y dividir números decimales, así que agradezco que para la próxima clase trabajemos en eso, lo otro chicos es que yo estaba mirando mientras les hacía la clase un documento en el cual me sale los contenidos que ustedes tienen que haber visto este año, y nos va quedando solamente un contenido, por lo tanto, apenas… [una estudiante lo interrumpe]

E3: ¿cuál?

P: Es el de datos y probabilidades

E3: ah, ok

P: Ya, apenas nosotros terminemos con esa clase que vamos a dejar para la próxima de repaso, nosotros vamos a trabajar con ese contenido, y cuando se les haga entrega de la última guía, porque nos queda una guía más ¿les parece que la sigamos trabajando de la misma manera? ¿Que la vayamos trabajando en conjunto y la vayamos revisando?

E9: sí

E3: sí, es más fácil

P: Ya, bien, esa es la idea. La idea es que ustedes se sientan cómodos trabajando, entonces cuando yo haga envío de la última guía, cuando sea la fecha, la vamos a trabajar todos en conjunto ¿ya? Ahora en lo posible, recuerden, apenas tengan su guía lista ustedes me la hacen llegar al WhatsApp, se identifican con nombre y curso, porque tengo con otro séptimo también, y así yo la guardo. No sé si me quieren hacer alguna pregunta… no sé si quieren agregar algo… [Se une a la clase la profesora jefa del curso, el profesor le da el espacio para que hable, y ella le dice algunas cosas a curso]

P: Ya chicos, eso sería por mi parte, darles las gracias por estar acá, bien participativos, sigamos con las mismas ganas. La próxima clase no vamos a trabajar con ninguna guía en especial, les voy a pedir que traigan un cuaderno, vengan con un lápiz, vengan con una goma y nos pongamos a trabajar con multiplicaciones y divisiones de decimales, que es donde estamos un poquito débiles ¿ya?

E3: sí

P: A fortalecer ese contenido chicos, así es que le voy a pedir harto entusiasmo para la próxima clase. Si quieren se pueden retirar, pero que **E10** se quede hasta el final, así que **E10** si me estás escuchando no te retires de la reunión por favor. Los demás chicos, los dejo hasta acá, y que tengan un bonito fin de semana. [Los estudiantes se despiden y luego se retiran].