UNIVERSIDAD DEL BÍO-BÍO

FACULTAD DE EDUCACIÓN Y HUMANIDADES
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
ESCUELA DE PEDAGOGÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

CONOCIMIENTOS DE LOS PROFESORES EN FORMACION DE UNA UNIVERSIDAD PÚBLICA SOBRE LOS SIGNIFICADOS DE LA PROBABILIDAD PRESENTES EN EL CURRICULO ESCOLAR

Tesis para optar al título de Profesora de Enseñanza Media en Educación Matemática

AUTORAS

OÑATE ORTEGA, RACHELLE YASMINCA

PARDO JARA, KARINA DEL CARMEN

Profesor guía

Rodriguez Alveal, Francisco Enrique

CHILLÁN
Julio-2021

Agradecimientos

En primer lugar, agradecemos a Dios por permitirnos cumplir con nuestras metas.

Agradecemos a nuestro profesor, Francisco Rodríguez por su apoyo y ayuda en todo momento de nuestra formación, así como en el transcurso de la investigación.

A nuestros padres y familias por confiar en nosotras, apoyarnos en esta etapa académica, ser el pilar base de nuestras vidas y por sobre todo ser siempre nuestro principal motivador para conseguir nuestros objetivos, ya que sin ustedes y sus consejos, cariño y buenos deseos no habríamos llegado hasta donde estamos.

Y finalmente, agradecer a nuestros amigos, compañeros y profesores en general, quienes entregaron lo mejor de sí mismos para formarnos en las diferentes áreas del saber, confiando en nuestras capacidades como futuras profesoras.

Resumen

Esta investigación tiene por objetivo el propósito de indagar en los conocimientos de los futuros profesores y profesoras de una Universidad pública de la región de Ñuble, respecto a la probabilidad y sus distintos significados en el contexto escolar. Para recoger los datos se aplicó, un instrumento de selección múltiple y preguntas abiertas. La muestra estuvo constituida por 21 profesores en formación, la que se obtuvo mediante un muestreo no probabilístico del tipo intencionado. En general, los resultados muestran que los profesores sin práctica profesional presentan porcentajes de logro menos descendidos que los profesores en formación con práctica profesional en relación a identificar el tipo de probabilidad en situaciones expuestas en los libros escolares entregados por el MINEDUC. Finalmente, se aborda la importancia de que los profesores en formación conozcan los significados de la probabilidad.

Palabras claves: formación docente, probabilidad, significados de probabilidad.

Tabla de contenido

1. Introducción

La presente investigación hace referencia al interés de conocer cuáles son los conocimientos sobre los significados de la probabilidad (intuitivo, clásico, subjetivo, axiomático y frecuencial) adquiridos por los profesores y profesoras en formación de Pedagogía en Educación Matemática de una universidad pública de la región de Ñuble. Es necesario tener presente que, se han dejado entrever las limitaciones de los docentes al enseñar la probabilidad únicamente desde el significado clásico (Vásquez y Alsina, 2013).

Sin embargo, para analizar esta problemática es necesario mencionar que Vásquez y Parraguéz (2014), han observado que durante décadas y en diferentes contextos, en educación, ha existido un interés por investigar la progresión de cómo se enseñaba y se enseña el concepto de probabilidad, para esto se ha tenido como referente variados estudios, destacando las investigaciones de Carmen Batanero.

Por otra parte, como mencionan Estrella, Olfos y Mena-Lorca (2015), hoy en día es necesario que los profesores y profesoras de matemática del sistema escolar logren desarrollar durante su formación profesional los conocimientos y habilidades que les permitan analizar, criticar y construir representaciones probabilísticas propuestas en el currículo escolar. Por el contrario, estudios como los de Batanero, Gómez, Contreras y Díaz (2015) y Vásquez y Alsina (2017), han entregado evidencia empírica sobre los profesores en formación, quienes presentan una deficiente formación en los contenidos de probabilidad y estadística.

En cuanto al marco de la metodología de esta temática, se abordó desde un paradigma positivista mediante un enfoque cuantitativo descriptivo de corte transversal. Así mismo, la población considerada fueron 21 estudiantes de Pedagogía en Educación Matemática de la Universidad del Bío-Bío, quienes habían cursado las asignaturas afines a Estadística y Probabilidad de la malla curricular y que se encuentran octavo semestre de la carrera.

Y, para llevar a cabo este estudio se realizó un muestreo no probabilístico del tipo intencionado y por disposición, para el cual se diseñó un instrumento de selección múltiple y con preguntas abiertas con el objetivo de identificar los conocimientos conceptuales adquiridos por los profesores en formación y a su vez, nos hemos basado en la revisión de los contenidos presentes en los textos escolares de matemática, entregados por el MINEDUC (2020), en el eje Datos y Azar.

Es por esto que el propósito de la siguiente investigación es evaluar las habilidades y conocimientos disciplinares acerca de la probabilidad, adquiridos por los docentes en formación de Pedagogía en Educación Matemática quienes se encargarán de enseñar este tópico a estudiantes de los últimos niveles de Educación Básica y en toda la Enseñanza Media.

2. **Planteamiento del problema**

En el siglo XX, el renombrado físico y matemático Hacking (1990), mencionó que muchos de los fenómenos que ocurrían en la naturaleza no estaban sujetos al determinismo, siendo un hito que marcó el inicio de cientos de investigaciones a futuro, las cuales han tenido como propósito comprender y explicar cómo funcionan los fenómenos aleatorios o estocásticos. Atendiendo que el mundo como lo conocemos actualmente, se caracteriza por una interminable sucesión de fenómenos del tipo aleatorio, como, por ejemplo: el número de accidentes un día cualquiera, el resultado de un partido de fútbol, los números de un juego de lotería, por mencionar algunos, los cuales, el ser humano ha intentado comprender, explicar y modelar mediante la formulación de leyes y teorías científicas (Chirinos, 2007).

De igual forma, cabe señalar que la matemática como ciencia formal (Bunge, 2013), ha modelado situaciones que responden a fenómenos determinísticos y no determinísticos o estocásticos, estos últimos corresponden a situaciones de incertidumbre para el ser humano (Batanero, 2005). Por otra parte, el área de la matemática que estudia dichos fenómenos asociados con la aleatoriedad es la teoría de la probabilidad (Batanero y Serrano, 1995).

Debido a que, la probabilidad puede ser entendida como una medida de incertidumbre y es considerada como un instrumento de modelización para la búsqueda de soluciones a problemas (Rodríguez, Díaz-Levicoy y Vásquez, 2018), lo cual conlleva a la función de ser un objeto matemático que ha emergido históricamente y sigue evolucionando como consecuencia de las prácticas sociales que están ligadas a los problemas de esta índole (Batanero, 2005).

En este contexto, son significativos los conceptos afines a probabilidad como: azar, aleatoriedad, experimento y suceso aleatorio, los que han permitido cuantificar la incertidumbre, aun cuando estos son conceptos abstractos y de carácter polisémico, que dificultan la comprensión de su significado (Batanero y Serrano, 1995). Actualmente, la tendencia es relacionar la probabilidad con actividades de corte estadístico, tales como predicciones meteorológicas, promedio de una asignatura, análisis de gráficos, entre otras, las cuales están vinculadas a la realización de experimentos o a la expresión numérica del grado de incertidumbre (Del Pino y Estrella, 2012).

En el caso particular de la estadística, esta permite comprender la variabilidad por medio de la resolución de problemas y también accede a conocer su vínculo con la incertidumbre, por lo tanto, es un puente de conexión entre la estadística y la probabilidad (Del Pino y Estrella, 2012).

Debido a que, el interés por comprender la probabilidad y sus elementos no es una inquietud reciente, Vásquez y Parraguez (2014), mencionan que, desde la década de los cincuenta algunos investigadores como Piaget, se interesaron por comprender como la probabilidad era entendida por los niños y niñas según las etapas del desarrollo cognitivo, trascendiendo hasta la actualidad sin perder relevancia.

Al respecto, Batanero y López (2015) plantean que Piaget ha descrito el razonamiento matemático que desarrollan los niños desde etapas muy tempranas. De donde resulta que, la idea de azar no puede ser comprendida hasta la etapa de las operaciones formales, a causa de que el azar es la medida de ocurrencia de un fenómeno o suceso que no tiene la condición de causa-efecto (Vásquez y Alsina, 2015). Conforme al período de operaciones concretas, es en esta etapa donde aparece la lógica, los sentimientos morales y sociales, de modo que, los niños y niñas son capaces de agrupar y manipular objetos percibidos, relacionan o vinculan objetos en base a un cierto tipo de orden o serie (Arnáez, 2005).

A nivel nacional, investigadores como del Pino y Estrella (2012) y posteriormente Vásquez y Alsina (2017), aluden que, en los primeros años, los estudiantes poseen nociones informales sobre el azar y la probabilidad, siendo en ocasiones, ideas erróneas, debido a las limitaciones de un razonamiento deductivo, en vista que, aún no logran la habilidad de poder extraer conclusiones desde las premisas, invalidando un razonamiento adecuado (Hernández y Parra, 2013).

En consecuencia, en las operaciones formales (durante el período de los 11 años), los niños y niñas crean su personalidad, forman un vínculo afectivo e intelectual con sus cercanos, poseen la madurez necesaria para comprender conceptos abstractos, como lo es la probabilidad y el azar, por consiguiente, han desarrollado un pensamiento hipotético-deductivo, abstracto y formal (Arnáez, 2005).

Para una mejor comprensión del momento de introducir en la enseñanza formal el concepto de probabilidad en los niños y niñas, Ortiz, Batanero y Contreras (2012), proponen que un método accesible es mediante la observación de experimentos y fenómenos naturales, donde los estudiantes sean capaces de distinguir situaciones aleatorias y asignen algunas probabilidades sencillas. Es así que, Vásquez y Parraguez (2014) dan cuenta de lo importante que es realizar investigaciones que muestren cómo los niños y niñas aprenden a partir de la experimentación los conceptos relacionados a los fenómenos aleatorios y de probabilidad.

De manera análoga, Rodríguez *et al*. (2018), señalan que la noción de probabilidad está presente desde los primeros años de la enseñanza básica y para comprenderla se hace necesario el uso de dispositivos físicos, tales como, el lanzamiento de monedas y dados, donde se observa los posibles resultados y los estudiantes intuyen o predicen previamente lo que ocurrirá.

La probabilidad es un contenido importante de dominar, puesto que ayuda en la toma de decisiones, razón por la cual, se hizo preponderante introducir este conocimiento en el sistema escolar. En Latinoamérica y Chile particularmente, durante los últimos treinta años se ha ido incorporado fuertemente la estadística y probabilidad en los currículos de matemática a través del eje llamado Datos y azar en Enseñanza Media (Vásquez y Alsina, 2017).

Como se mencionó en párrafos anteriores, entre los conceptos relacionados a la probabilidad se encuentra el de azar, siendo el más empleado en los textos escolares impartidos por el Ministerio de Educación de Chile (MINEDUC, 2020) y se encuentra presente a lo largo de todo el currículo chileno. No obstante, recién en quinto año básico se introduce una definición informal del concepto azar, descrito como algo que no es certero de ocurrir.

Además, es importante señalar que, en los textos escolares de octavo año básico, se utiliza el concepto de azar para definir que es un experimento aleatorio y posteriormente, en primero medio se pretende comprender el concepto de azar experimentando con distintas representaciones gráficas (MINEDUC, 2020).

De manera similar, las bases curriculares de séptimo año básico, indican que para comprender mejor el concepto de probabilidad, se debe pensar en la diferencia que existe entre estos dos tipos de experimentos, los determinísticos y los aleatorios, formalizando que un experimento aleatorio es un evento donde no se puede predecir su resultado, puesto que no es único MINEDUC (2020). Equivalentemente, en primero medio se define un experimento aleatorio como aquel suceso donde sí se pueden conocer sus posibles resultados, pero al realizarlo no se puede determinar con certeza cual se obtendrá.

Por otra parte, se puede observar que en el currículo nacional no se hace mención explícitamente de los significados de la probabilidad, pero si se pueden inferir, en educación básica se trabaja desde el significado intuitivo y clásico, así como, en enseñanza media, el significado subjetivo, frecuencial y axiomático.

Pese a esto, existen grandes dificultades en el proceso de enseñanza y aprendizaje de este concepto matemático, una de estas dificultades es lo que se refleja al momento que los estudiantes se enfrentan a problemas de carácter probabilísticos, como, por ejemplo, confunden una probabilidad condicionada con la regla de Laplace.

Proponemos contemplar las ideas de Inzunsa y Guzmán (2011), y posteriormente, las de Batanero et al. (2015), las cuales nos motivan a enseñar probabilidad desde sus diversos enfoques, los significados: intuitivo, clásico, frecuencial, subjetivo y axiomático, incluyendo además, el uso de software educativos para construir modelos y explorar situaciones aleatorias que ayuden a los y las estudiantes a desarrollar intuiciones adecuadas sobre el razonamiento probabilístico desarrollado a nivel escolar. Sin embargo, el uso de las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC´S) en la enseñanza de la probabilidad no es el objeto de estudio de nuestra investigación

De otro modo, Vásquez y Parraguez (2014), observan generalmente que se da mayor énfasis a la enseñanza de la probabilidad desde el significado clásico, aplicando el algoritmo de la regla de Laplace, donde no se hace necesario utilizar software educativo, más bien, es identificar el espacio muestral, posibles resultados y aplicar fórmulas. De tal manera, Batanero y López (2015), agregan otra particularidad a considerar, puesto que vinculan los términos como caso favorable o juego equitativo con el significado clásico, así como, frecuencia o repetición se ligan con el significado frecuencial.

Al mismo tiempo, Batanero y López (2015) sugieren que, los estudiantes pueden calcular la frecuencia relativa y absoluta de un suceso acercándose al valor de la probabilidad mediante el cálculo de la regla de Laplace, lo que es posible gracias a la Ley de los Grandes Números, proponiendo además, el uso de representaciones como diagramas de árbol o tablas de contingencia para facilitar la comprensión de todos estos conceptos (frecuencia, caso favorables, juego equitativo, probabilidad).

Así mismo, Vásquez y Alsina (2013) señalan que en los países latinoamericanos existe una característica en común, respecto a la enseñanza de la probabilidad y estadística, dicha característica, es la utilidad y presencia en situaciones de la vida cotidiana, en las que es preciso disponer de un razonamiento crítico que permita interpretar la información. En vista de que, gran cantidad de profesores se limitan a instruir a sus estudiantes en técnicas de cálculo, aplicando fórmulas y no empleando herramientas tecnológicas, lo que conlleva a un trabajo mecánico y repetitivo, que no favorece la comprensión de los contenidos de la probabilidad y mucho menos la toma de decisiones frente a situaciones de incerteza.

A causa de lo mencionado anteriormente, la enseñanza de la probabilidad requiere de profesores capacitados para habilidades en los estudiantes y logren resolver problemas de corte probabilístico como estadístico, y a su vez, estos alumnos estén alfabetizados probabilística y estadísticamente. En otras palabras, educar estudiantes con habilidades para reconocer ciertos elementos básicos que son vinculados con el lenguaje informal y con los diferentes significados de la probabilidad e inclusive que puedan modelar la ocurrencia de sucesos cotidianos (Rodríguez *et al*. 2018).

Así mismo, a partir de la perspectiva del conocimiento, una función fundamental de la labor docente es propiciar el desarrollo de habilidades en los y las estudiantes, como, por ejemplo, la capacidad de resolver problemas con precisión, así como, transferir conocimientos previos y adecuarlos o adaptarlos a nuevos contextos, a su vez, que logren explicar de manera práctica y empírica los conceptos de azar y probabilidad, incorporando el uso de herramientas tecnológicas.

Por ello, es necesario que los profesores de matemática del sistema escolar y futuros profesores hayan logrado desarrollar durante su formación inicial los conocimientos y habilidades que les permitan analizar, criticar y construir representaciones estadísticas y probabilísticas acorde a las propuestas del currículo escolar. Con el fin de promover situaciones problemas reales, contingentes y contextualizadas, que favorezcan el aprendizaje de la probabilidad en los estudiantes y sean capaces de tomar decisiones frente a la incertidumbre (Estrella et al. 2015).

Como consecuencia de esto, estudios de Batanero et al. (2015) y de manera semejante los de Vásquez y Alsina (2017), dan cuenta de una deficiente formación respecto a los conocimientos de la probabilidad de futuros profesores de enseñanza media, teniendo presente el hecho de que la probabilidad es un área compleja de enseñar. En igual forma, se han encontrado ciertas incongruencias en la formación docente de profesores de Educación Básica, las que se han visto reflejadas en la práctica laboral (Vásquez y Alsina, 2014).

Además, hoy en día el MINEDUC realiza una prueba estandarizada, conocida como END, de carácter obligatoria, la cual contempla tópicos de conocimientos pedagógicos, didácticos y disciplinares, según corresponda, a su vez, se rinde un año antes de egresar de las carreras de pedagogía.

Como consecuencia, Rodríguez et al. (2019) evidencian que después de la aplicación de dicha prueba, se reveló la deficiente formación docente tanto en las áreas de Geometría como en el eje de Datos y Azar, a pesar de que existen los Estándares Orientadores para las carreras de pedagogía en enseñanza media, en los cuales se basa la Formación Inicial Docente (FID), siendo conocidos desde el año 2012 por todas las instituciones de orden superior que ofrecen carreras de pedagogía (Rodríguez et al., 2019).

De igual modo, Vásquez y Parraguez (2014), entregan evidencias acerca de las falencias del profesorado en la comprensión de la independencia y sucesos aleatorios, al igual que en la falta de un razonamiento proporcional para el desarrollo de problemas, donde se hace un uso y abuso del cálculo de la regla de Laplace para el cálculo de probabilidades. Todas estas observaciones se relación también con lo relatado por Vásquez y Alsina (2015), intuyendo que las transformaciones en el currículo escolar, demanda que se formen profesores y profesoras con sólidos conocimientos disciplinares como didácticos en el área de la probabilidad.

En síntesis, se puede percibir que todos estos estudios mencionados, a nivel nacional como internacional, dan cuenta de una deficiente formación de futuros profesores y profesoras del sistema escolar. Situación que repercute y afecta significativamente el aprendizaje de sus estudiantes, debido a que los conocimientos disciplinares y pedagógicos de un profesor, son elementos esenciales que influyen en forma directa, puesto que, un profesor jamás ha de enseñar algo que no conoce o no comprende completamente (Vásquez y Alsina, 2015).

Y, para dar por concluido, a nuestro juicio, es indiscutible y a su vez, de gran importancia, indagar respecto a las habilidades y conocimientos que han adquirido los profesores y profesoras en formación en educación matemática. Razón por la cual, el presente estudio pretende dar respuesta a la siguiente interrogante: ¿Cuáles son las habilidades y conocimientos sobre los significados de la probabilidad que poseen los profesores y las profesoras en formación de Pedagogía en Educación Matemática a nivel de sistema escolar?

3. Objetivos de la Investigación

Teniendo presente la pregunta de investigación se plantean los siguientes objetivos

3.1. Objetivo General

Evaluar las habilidades y conocimientos sobre los significados de la probabilidad adquiridos por los profesores y profesoras en formación de Pedagogía en Educación Matemática de una universidad del centro sur del país.

3.2. Objetivos Específicos

1. Indagar cuales son las habilidades y conocimientos que poseen los profesores en formación de sobre la probabilidad y sus significados.
2. Comparar los conocimientos y habilidades respecto a los significados de la probabilidad que poseen los profesores en formación en práctica profesional y en formación que cursan séptimo y octavo semestre de la carrera de Pedagogía en Educación Matemática.
3. Analizar las habilidades y conocimientos presentes en las respuestas de los futuros profesores y profesoras respecto a los significados de la probabilidad.

4. Marco Teórico

4.1 La probabilidad en el currículo escolar

En lo que respecta al modelo de ciudadano, capaz de tomar decisiones y actuar en sociedad, en el año 1989, el Consejo Nacional de Profesores de Matemática (NCTM), teniendo como base los Estándares Curriculares y de Evaluación para la Educación Matemática de América del Norte, se propuso realizar mejoras en la educación, para cumplir con la expectativa del ciudadano competente, de tal manera que el área de la matemática también estuvo sujeta a estos cambios progresivos (Traducción de NCTM, 2014).

Como consecuencia, en Chile en los años 1996 y 1998, la reforma curricular transformó los ejes de aprendizaje de Matemática organizándola en tres ejes: álgebra y funciones, geometría y probabilidad y estadística, para darle una nueva perspectiva, donde la educación no tuviera como finalidad fomentar la memorización de contenidos, sino la formación de habilidades matemáticas en los estudiantes (Vásquez y Alsina, 2017).

Cabe mencionar que, tanto en Chile como en Latinoamérica, durante los últimos treinta años se ha incorporado fuertemente la estadística y probabilidad en los currículos de matemática a través del eje denominado Datos y Azar a nivel de Enseñanza Media (MINEDUC, 2013). En tal sentido, en el año 2009 se aprobó un nuevo Ajuste Curricular, unificándose el currículo para los doce años de escolaridad, en base a las habilidades y competencias que debían desarrollar los y las estudiantes (Moder, 2014).

Dicho lo anterior, la asignatura de matemática tras incorporar el eje de Datos y Azar en el currículo escolar, tiene el objetivo de promover estos lineamientos sobre el desarrollo de habilidades, sobre los conocimientos, debido a que, las habilidades de corte estadístico y probabilístico, permiten que los y las estudiantes recojan, describan e interpreten datos, contribuyendo a la toma de decisiones frente a situaciones de incerteza (Vásquez y Alsina, 2015).

Por otra parte, el MINEDUC en las Bases Curriculares, define los Objetivos mínimos de Aprendizaje (MINEDUC, 2020), los cuales están dirigidos al contenido de probabilidad, además, los libros de textos entregados a los estudiantes, abordan temáticas de esta índole desde los primeros niveles de Educación Básica, a causa de la dinámica vida social, política, cultural, etc, que se mantiene variante a través del tiempo (Rodríguez y Díaz-Levicoy, 2019).

Sobre la base de la formación del profesorado a nivel de Enseñanza media y considerando que pueden desempeñar funciones desde séptimo año básico hasta cuarto año medio en el sistema escolar; las Bases Curriculares introducidas por el MINEDUC (2015) en la separación de estos niveles, proporciona objetivos específicos relacionados al tratamiento de la probabilidad. A modo de ejemplo, en la Tabla 1 se presenta una recopilación de los objetivos de aprendizaje que trabajan la noción de probabilidad extraídos directamente desde el MINEDUC (2015).

Tabla 1

Resumen de los objetivos de aprendizaje a nivel de secundaria

Nivel	Objetivo de Aprendizaje	Objetivo de Aprendizaje
7° básico	OA 18	Explicar las probabilidades de eventos obtenidos por medio de experimentos de manera manual y/o con software educativo: Estimándolas de manera intuitiva. Utilizando frecuencias relativas. Relacionándolas con razones, fracciones o porcentaje
8° básico	OA 17	Explicar el principio combinatorio multiplicativo: A partir de situaciones concretas. Representándolo con tablas y árboles regulares, de manera manual y/o con software educativo. Utilizándolo para calcular la probabilidad de un evento compuesto
1° medio	OA 14	Desarrollar las reglas de las probabilidades, la regla aditiva, la regla multiplicativa y la combinación de ambas, de manera concreta, pictórica y simbólica, de manera manual y/o con software educativo, en el contexto de la resolución de problemas.
	OA 15	Mostrar que comprenden el concepto de azar: -Experimentando con la tabla de Galton y con paseos aleatorios sencillos de manera manual y/o con software educativo. -Realizando análisis estadísticos, empezando por frecuencias relativas. -Utilizando probabilidades para describir el comportamiento azaroso. -Resolviendo problemas de la vida diaria y de otras asignaturas
2° medio	OA 12	Mostrar que comprenden el rol de la probabilidad en la sociedad: -Revisando informaciones de los medios de comunicación. -Identificando suposiciones basadas en probabilidades. -Explicando cómo una probabilidad puede sustentar suposiciones opuestas. -Explicando decisiones basadas en situaciones subjetivas o en probabilidades
3° medio	OA 2	Tomar decisiones en situaciones de incerteza que involucren el análisis de datos estadísticos con medidas de dispersión y probabilidades condicionales.
4° medio	OA 2	Fundamentar decisiones en situaciones de incerteza, a partir del análisis crítico de datos estadísticos y con base en los modelos binomial y normal.

Fuente: Elaboración propia de los autores con elementos explícitos de las bases curriculares del año 2015

En síntesis, la introducción del eje de Datos y Azar, tiene como finalidad que los estudiantes logren analizar e inferir información obtenida a partir de datos estadísticos, que sean críticos y capaces de validar sus opiniones o decisiones (Vásquez y Alsina 2015). De igual modo, las actividades que entregan los textos del estudiante respecto al área de la probabilidad, implican que los niños y jóvenes sean capaces de estimarla intuitivamente y su vez, calcular en forma experimental y teórica la probabilidad de ocurrencia de diversos eventos, a fin de que los estudiantes logren construir modelos probabilísticos fundados en situaciones aleatorias o estocásticas (Vásquez y Alsina 2015).

4.2 La probabilidad y sus significados

La enseñanza de la probabilidad ha estado presente en los currículos escolares por lo menos, hace unos treinta y cinco años, siendo un amplio tema de investigación a causa de las innovaciones que han surgido en la visión de cómo enseñarla (Batanero 2005). Para ejemplificar, se ha utilizado un enfoque más experimental desde las experiencias aleatorias o estocásticas en los primeros niveles de Educación Básica (Batanero, 2005).

Hasta ahora, la gran motivación para estudiar la naturaleza de la probabilidad y sus componentes, se debe a que existe evidencia de que las intuiciones estocásticas muchas veces nos engañan, por lo cual, para mejorar la metodología de la enseñanza de la probabilidad, los profesores deben contemplar sus diferentes significados (Batanero, 2005).

Es necesario tener presente que, hasta los años 1970 el significado clásico de la probabilidad se basaba en el cálculo combinatorio, un contenido complejo tanto para los estudiantes como para los profesores, estos contenidos sobre las técnicas de conteo para calcular probabilidades fueron vistas como un tema secundario de la matemática que solo se aplicaba para juegos de azar, omitiendo su vínculo con otras ciencias, puesto que para muchos, solo era una aplicación de la teoría de conjuntos (Batanero, 2005).

Del mismo modo, cabe mencionar que los estudiantes deben formar su conocimiento en forma gradual, con interés y dimensionando que los errores son necesarios de incurrirlos para un aprendizaje significativo, siendo las mismas dificultades que se han presentado durante la historia, al momento de desarrollar el cálculo de probabilidades, controversias que influyen en su aprendizaje (Batanero, 2005).

Como consecuencia, Batanero (2005) es una destacada investigadora y además, es una referente para quienes realicen posteriores investigaciones, como Inzunsa y Guzmán (2011), además de Batanero *et al*. (2015), quienes, influenciados por la investigadora enunciada en primer lugar, sugieren enseñar probabilidad contemplando sus diversos significados, los cuales son: significado intuitivo, clásico, frecuencial, subjetivo y axiomático, con base en el uso de software educativos. Sin embargo, el experimentar o simular no es la solución final para resolver problemas de probabilidad, debido a que el construir modelos y explorar situaciones aleatorias dependen de las hipótesis que se establezcan con anterioridad y del modelo teórico que se emplee en el software (Batanero, 2005).

Figura 1: Significados de la Probabilidad a nivel escolar

Fuente: Batanero, C., 2005

Para sintetizar, se presentan las definiciones de los significados de la probabilidad (intuitivo, clásico, frecuencial subjetivo y axiomático), las cuales fueron extraídas de diferentes investigaciones, sin embargo, todos estos estudios fueron influenciados por Batanero (2005).

En primer lugar, el significado intuitivo, el cual se asocia con los conceptos de azar y probabilidad, por otra parte, se utiliza un lenguaje coloquial como, previsible, posible, seguro, por ende, se asignan probabilidades cualitativamente acorde al grado de creencia de que ocurrirá un suceso, el uso de juegos de azar pueden ser una buena herramienta para cuantificar la incertidumbre y sea de fácil comprensión para los estudiantes en los primeros niveles de escolaridad (Batanero, 2005; Vásquez y Alsina, 2015; Vásquez y Alsina, 2019; Vásquez, Rodríguez-Muñiz, Muñiz-Rodríguez y Alsina, 2020).

En segundo lugar, se presenta el significado clásico, el cual es quizás el más conocido a nivel escolar, considerando que la probabilidad de un suceso es la razón entre la cantidad de casos favorables de que ocurra el evento y la cantidad de casos posibles o totales que pueden ocurrir en el experimento (todos los resultados son igualmente probables de ocurrir), lo anterior, se conoce como Regla de Laplace, no obstante, no puede ser aplicada a un experimento que tenga un número infinito de posibles resultados o cuando no se cumple con la condición de equiprobabilidad (Batanero, 2005; Vásquez y Alsina, 2015; Vásquez y Alsina, 2019; Vásquez, Rodríguez-Muñiz, Muñiz-Rodríguez y Alsina, 2020).

En tercer lugar, el significado frecuencial, en donde el gran matemático Bernoulli es quien le asigna el cálculo de la probabilidad a sucesos que son aleatorios mediante la observación de la frecuencia relativa de un gran número de experimentos, por otra parte, Bernoulli logró demostrar su teoría mediante la Ley de los Grandes Números, la que básicamente nos dice que la frecuencia con que se realiza un experimento en condiciones similares (iguales), nos acerca al resultado teórico de la probabilidad, pero aun así es un valor aproximado (Batanero, 2005; Vásquez y Alsina, 2015; Vásquez y Alsina, 2019; Vásquez, Rodríguez-Muñiz, Muñiz-Rodríguez y Alsina, 2020).

Para resumir, Vásquez y Alsina (2015), señalan que existen 4 limitaciones en este significado:

1) la imposibilidad de realizar un experimento una infinidad de veces, bajo las mismas condiciones, para poder determinar la probabilidad de ocurrencia de un suceso cualquiera;

2) no permite obtener un valor exacto, sino aproximaciones;

3) se desconoce la cantidad necesaria de ensayos que permiten una buena estimación; y

4) es inaplicable a sucesos que si bien son aleatorios, son irrepetibles.

Sin embargo, pese a estas limitaciones, presenta potencialidades para su estudio en el aula, por la utilización de software para simular experimentos aleatorios (p. 444).

En cuarto lugar, el significado subjetivo, en el cual "la probabilidad pierde su carácter objetivo y es entendida como un indicador de grados de creencia en la que es asignada a un suceso por una persona en particular" (Vásquez y Alsina, 2015, p. 6).

> Es posible determinar cuantitativamente la probabilidad de ocurrencia de sucesos a partir de la intuición y revisando la asignación inicial con la información adicional que pueda aparecer sobre el suceso (frecuencias relativas, razones de equiprobabilidad, etc.). Esto nos permite una aproximación didáctica para discutir, en el seno del grupo, cuánta información maneja cada miembro para emitir sus juicios y de qué calidad es esta (Vásquez, Rodríguez-Muñiz, Muñiz-Rodríguez y Alsina, 2020, p. 243).

Dicho significado tiene relación con la aplicación del Teorema de Bayes, la cual permite que las probabilidades antes de realizar el experimento cambien debido ciertas causas y ofrezcan un cálculo de la probabilidad contemplando los nuevos datos o información (Batanero, 2005; Vásquez y Alsina, 2015; Vásquez y Alsina, 2019; Vásquez, Rodríguez-Muñiz, Muñiz-Rodríguez y Alsina, 2020).

Finalmente, se presenta el significado axiomático, en donde los matemáticos Borel y Kolmogorov en forma separada dedujeron una axiomática para la probabilidad aplicando la teoría de la medida y la teoría de conjuntos respectivamente, como menciona Vásquez y Alsina (2019): "los sucesos se pueden representar por medio de conjuntos donde el espacio muestral (Ω) sería el conjunto total y los diferentes sucesos corresponderían a subconjuntos de este. En este sentido, la probabilidad es considerada una medida normada, acotada entre 0 y 1, definida sobre estos conjuntos" (p.6). Este significado de la probabilidad no expone en forma explícita un método para el cálculo de probabilidad, más bien, nos establece las características que deben tener (Batanero, 2005; Vásquez y Alsina, 2015; Vásquez y Alsina, 2019; Vásquez, Rodríguez-Muñiz, Muñiz-Rodríguez y Alsina, 2020).

En cuanto a la enseñanza de la probabilidad, podemos mencionar a Vásquez y Parraguez (2014), quienes evidencian que al momento de ser enseñada a adolescentes, generalmente se trabaja desde el significado clásico, aplicando el algoritmo de la regla de Laplace. Otra acotación importante, es la de Batanero y López (2015), quienes identifican que los términos como caso favorable o juego equitativo, están vinculados con el significado clásico, mientras que, las palabras frecuencia o repetición se ligan al significado frecuencial.

De igual forma, Batanero y López (2015), afirman que para estimar la posibilidad de ocurrencia de un suceso aleatorio, se puede desarrollar mediante la experimentación, calculando la probabilidad en base a su frecuencia relativa, a su vez, por medio del algoritmo de la regla de Laplace, a través de representaciones en diagramas de árbol o tablas de contingencia, los que tienen como finalidad facilitar la comprensión de todos estos conceptos como: frecuencia, caso favorables, juego equitativo, probabilidad.

Así pues, el calcular la frecuencia relativa de un suceso que se repite una gran cantidad de veces y su probabilidad exacta, mediante el cálculo de la regla de Laplace, es posible de calcular gracias a la Ley de los Grandes Números, que nos señala que al repetir un gran número de veces dicho experimento (tendiendo al infinito), la frecuencia relativa es una estimación que se acerca a la probabilidad teórica (Batanero y López, 2015).

A continuación, se presenta una tabla resumen de Batanero (2005), que permite visualizar los principales aspectos de cada significado de la probabilidad que deben ser considerados por los profesores y futuros profesores del sistema escolar, con el fin de prever posibles errores o dificultades en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la probabilidad.

Tabla 2

Elementos que caracterizan los diferentes significados de la probabilidad

Significado de la probabilidad	Campos de problemas	Algoritmos y procedimientos	Elementos Lingüísticos	Definiciones y propiedades	Algunos conceptos relacionados
Intuitivo	-Sorteos -Adivinación	-Manipulación de generadores de azar: dados, cartas…	-Lenguaje ordinario	-Opinión, impredecible, creencia	-Suerte -Destino
Clásica	-Cálculo de esperanzas o riesgos en juegos de azar	-Combinatoria -Proporciones -Análisis a priori de la estructura del experimento	-Triángulo aritmético -Listado de sucesos Fórmulas combinatorias	-Cociente de casos favorables y posibles -Equiprobabilidad de sucesos simples	-Esperanza -Equitatividad -Independencia
Frecuencial	-Estimación de parámetros en poblaciones	-Registro de datos estadísticos a posteriori -Ajuste de curvas matemáticas -Análisis matemático -Simulación	-Tablas y gráficos estadísticos -Curvas de densidad -Tablas de números aleatorios -Tablas de distribuciones	-Límite de las frecuencias relativas -Carácter y objetivo basado en la evidencia empírica	-Frecuencia relativa -Universo -Variable aleatoria -Distribución de probabilidad
Subjetiva	-Mejora del conocimiento sobre sucesos inciertos, incluso no repetibles	-Teorema de Bayes -Asignación subjetiva de probabilidades	-Expresión de la probabilidad condicional	-Carácter subjetivo -Revisable con la experiencia	-Probabilidad condicional -Distribuciones a priori y a posteriori
Axiomática	-Cuantificar la incentidumbre de resultados en experiementos aleatorios abstractos	-Teoría de conjuntos -Álgebra de conjuntos -Teoría de la medida	-Símbolos conjuntistas	-Función medible	-Espacio muestral -Espacio de probabilidad -Conjunto de Borei

Fuente: Batanero (2005, p. 256)

Cabe señalar que, existe un instrumento sobre los conocimientos que poseen los profesores de matemática en Educación Básica, creado por Vásquez y Alsina (2019), dicho instrumento se llama Pauta de Observación de los Significados de la Probabilidad (POSP) y se formalizó bajo los fundamentos teóricos de autores como Batanero (2005), Vásquez y Alsina (2014, 2015, 2017), sumando la revisión de textos escolares.

Más aún, este exhaustivo estudio se considera una herramienta importante que entrega indicadores para dar cuenta de los conocimientos que poseen los profesores o futuros profesores sobre los significados de la probabilidad y su enseñanza, pero a nivel de Enseñanza Básica (Vásquez y Alsina, 2019).

Sin embargo, como nuestro propósito es evaluar las habilidades y conocimientos sobre los significados de la probabilidad, de profesores en formación de Enseñanza Media (Vásquez y Alsina, 2019), para analizar los resultados de nuestro estudio, es preciso conocer que los significados de la probabilidad reflejan distintos conceptos que subyacen en la resolución de situaciones cotidianas que involucran la probabilidad, las que también permite comprender los errores que se comenten al querer resolver un problema (Batanero, 2005).

Considerando los aspectos mencionados anteriormente, se puede tener una base sólida para comenzar a indagar en cómo es la Formación Docente de futuros profesores de Enseñanza Media en relación a los significados de la probabilidad y continuar con las ideas de investigaciones anteriores que ya han dado algunos atisbos de este tema, pero en Educación Básica.

4.3 La probabilidad en la formación inicial docente

A partir del año 2012, el MINEDUC proporciona orientaciones para los contenidos disciplinares y pedagógicos que deben alcanzar todos los profesores de Chile al finalizar su formación profesional en instituciones de educación superior, con el propósito de desempeñarse eficazmente en los seis niveles que comprenderá la educación media. De igual forma, el Centro de Perfeccionamiento, Experimentación e Investigaciones Pedagógicas (CPEIP, 2019), se focalizó en la creación de Estándares Orientadores para Carreras de Pedagogía en Educación Media y así, regularizar la Formación Docente a nivel país.

En relación a la formación inicial docente, cabe mencionar a Rodríguez, Vásquez y Rojas (2019), quienes entregan evidencias de que la calidad de un profesor o profesora se refleja en los resultados de sus estudiantes, desde esa perspectiva, es interesante conocer cómo se perfila el profesorado en Chile. En coherencia con lo anterior, el MINEDUC (2012), ya había manifestado que es importante observar cómo se desarrolla o lleva a cabo la formación inicial docente, es decir, la formación universitaria de futuros profesores y profesoras de Chile.

Para entender el significado de los estándares orientadores, basta la definición proporcionada por el CPEIP (2019), donde se describe que estos

> son un instrumento que facilitará el seguimiento de los logros alcanzados a través del proceso formativo y que permitirá diagnosticar las necesidades de reforzamiento y formación continua, de manera de apoyar a las instituciones en el desafío que significa en la actualidad formar profesores de calidad (p. 4)

Por otra parte, el contexto educacional, se puede decir que un estándar indica que aspectos o dimensiones se han de observar en un futuro profesor o profesora, así como la medida en que se va a evaluar su desempeño, de igual modo, orienta respecto a las habilidades y conocimientos que deben poseer los profesores en formación, identificando las fortalezas y debilidades de esta (MINEDUC, 2012).

A modo de ejemplo, se presentan los estándares orientadores para los egresados de carreras de pedagogía en educación básica, correspondientes a la asignatura de matemática, en el eje de Datos y Probabilidades, se ha encontrado los siguientes estándares enfocados a la enseñanza de la probabilidad:

Tabla 3

Estándares orientadores para la enseñanza de la probabilidad

Estándar 15	Es capaz de conducir el aprendizaje de la recolección y análisis de datos
Estándar 16	Está preparado para conducir el aprendizaje de las probabilidades
Estándar 17	Demuestra competencia disciplinaria en el eje de Datos y Probabilidades

Fuente: Elaboración propia con elementos explícitos de las bases curriculares del año 2020

Acorde a los estándares sobre la enseñanza de la probabilidad para profesores de Enseñanza Media, el MINEDUC (2012), en el eje de Datos y Azar, presenta los siguientes estándares contenidos en la tabla 4.

Tabla 4

Estándares para profesores de matemática de enseñanza media del eje de Datos y Azar

Estándar 17	Es capaz de motivar la recolección y estudio de datos y de conducir el aprendizaje de las herramientas básicas de su representación y análisis.
Estándar 18	Es capaz de conducir el aprendizaje de las probabilidades discretas.
Estándar 19	Está preparado para conducir el aprendizaje de las variables aleatorias discretas.
Estándar 20	Está preparado para conducir el aprendizaje de la distribución normal y teoremas límite

Fuente: Elaboración propia con elementos explícitos de las bases curriculares del año 2012

De este modo, se puede inferir a partir de los estándares que, el profesor al llevar acabo el desarrollo de ellos, repercutirá en buena manera en los y las estudiantes en su proceso de aprendizaje, ya que podrán trabajar los significados frecuencial, subjetivo y axiomático de la probabilidad, pero a su vez, estos aprendizajes serán el reflejo de la consolidada formación docente, tanto en lo teórico como el manejo de las TIC´S y softwares educativos.

En concordancia con las ideas anteriores, Alveal y Rubilar (2012), muestran que las habilidades de los profesores y profesoras en Formación Inicial Docente, respecto a Datos y Azar, son deficientes, basándose en la observación de debilidades en los futuros profesores para decodificar y codificar gráficos de barras agrupadas, además, mencionan que no poseen habilidades para decodificar gráficos sectoriales, más aún, señalan que los docentes en formación no logran analizar e interpretar información.

De igual modo, investigaciones como las de Vásquez y Alsina (2014), validan lo mencionado por Alsina (2009), presentando diversas competencias matemáticas que han de desarrollar los futuros profesores y profesoras al momento de enseñar probabilidad dentro del aula. Entre ellas se encuentran: construir el conocimiento matemático basado en la abstracción, experimentación y vínculo entre conceptos; el razonamiento matemático se debe realizar en base a deducciones e inducciones; para plantear y resolver problemas, se debe leer y entender enunciados, crear estrategias de resolución y validar sus resultados; para interpretar y representar resultados, se ha de utilizar palabras, números, símbolos, representaciones gráficas, etc. y por último, al comunicar los descubrimientos, debe saber argumentar verbalmente y en forma escrita dichos resultados.

Luego, Alveal, Fuentes y Rubilar (2016), señalan que los futuros profesores en su proceso de formación, deben adquirir habilidades para codificar y descodificar información representada por gráficos e histogramas, de carácter estadístico y de probabilidad. Al mismo tiempo, indican que la habilidad de simulación y comparación de datos por medio de las medidas de tendencia central, favorecen a nivel de sistema escolar, la inserción del concepto de variable aleatoria.

5. Metodología

5.1. Diseño del Estudio

El presente estudio es de naturaleza cuantitativo descriptivo de corte transversal (Veiga de la Fuente y Zimmermann, 2008). En particular, se pretende evaluar los conocimientos disciplinares y su pertinencia con lo determinado por los estándares orientadores para carreras de pedagogía en educación media de matemática, puesto que, en conformidad con la Ley de Sistema de Desarrollo Docente, la segunda evaluación obligatoria, es aplica por el CPEIP y está basada en la medición de dichos estándares para la Formación Inicial Docente (MINEDUC, 2020).

5.2 Población y Muestra y contexto

Para efectos de la investigación, la población objeto de estudio fueron 21 estudiantes de Pedagogía en Educación Matemática, que habían cursado y aprobado las asignaturas de Métodos estadísticos y probabilidades (240135), Inferencia estadística (240138) y Didáctica de la estadística (321076), de los cuales 11 profesores en formación están realizando su práctica profesional en establecimientos de las regiones de Ñuble y Maule, agregando que los 10 profesores en formación restantes no han tenido cercanía con la docencia directa. Así mismo, la muestra fue seleccionada mediante un muestreo no probabilístico del tipo intencionado y por disposición (McMillan y Schumacher, 2005).

5.3 Instrumento

Para dar respuesta a los objetivos de la investigación, se diseñó un instrumento de tipo selección múltiple y con preguntas abiertas, teniendo como propósito identificar los conocimientos conceptuales adquiridos por los profesores en formación y a su vez, nos hemos orientado con los contenidos y actividades presentes en los textos escolares de matemática, entregados por el

MINEDUC (2020) en el eje Datos y Azar, desde quinto año básico hasta cuarto año de Enseñanza Media. En la siguiente tabla se muestran las características del instrumento.

Tabla 5

Especificaciones del instrumento

Contenido	**Número de Preguntas**
Conocimientos y habilidades asociados a los significados de probabilidad (Intuitivo, clásico, frecuencial, subjetivo y axiomático).	16
Ideas conceptuales sobre el azar, aleatoriedad y probabilidad.	4
Total de preguntas	20

Fuente: Elaboración autoras

5.4. Análisis de la Información

Para el análisis de los datos se utilizó una estadística descriptiva univariada numérica (porcentajes, promedio aritmético, desviación típica) y a través de tablas, se describen las respuestas encontradas, agrupándolas en profesores en formación en práctica profesional y sin práctica profesional. Además, para dicho análisis, se utilizarán las figuras o imágenes utilizadas en el instrumento de recolección de información que utilizamos para dar respuesta a los objetivos específicos planteados en la presente investigación.

En el análisis de los resultados, por razones de ética, los profesores en formación en práctica profesional como los profesores en formación que no se encuentran en práctica profesional, se codificarán como PF-PP y PF-NPP, respectivamente.

6. Resultados y Discusión

Para analizar los resultados obtenidos, se muestran los porcentajes de logros en cada significado: intuitivo, clásico, frecuencial, subjetivo y axiomático, incluyendo algunas ideas conceptuales conocidas por los profesores en Formación en la asignatura de Didáctica de la estadística y preguntas del Texto del Estudiante de Matemática desde quinto básico a cuarto año medio.

6.1 Caracterización de los profesores en formación encuestados

Primeramente, en la Tabla 6 se muestra la caracterización de los participantes de la investigación, los cuales no presentan diferencias numéricas en la distribución de sexo, debido a que los participantes de sexo femenino son 10 y los de sexo masculino 11. Del mismo modo, no hay diferencias numéricas en la distribución de profesores en práctica profesional o no práctica profesional (PF-PP o PF-NPP).

De forma similar, las edades de los encuestados oscilan entre los 21 y 28 años. Lo que permite deducir que la carrera de pedagogía en educación matemática no es la primera carrera a la cual el participante con la mayor edad ingresó, y además, se infiere que existen participantes que han reprobado asignaturas, razón por la cual, superan la media aritmética respecto a las edades de las distribuciones.

Tabla 6

Estadísticas básicas de los profesores en formación con y sin práctica.

		Profesor en formación con práctica	Profesor en formación sin práctica	Promedio (D.E)
Sexo	Femenino	3	7	23,2 (1,6)
	Masculino	6	5	24,0 (1,91)
	Edad (años)	24,6 (2,05)*	23,08 (1,32)*	

*: Promedio (D. Estándar)

Fuente: Elaboración autoras

En lo referente a la distribución por edades, el sexo femenino presenta mayor homogeneidad que el sexo masculino, asimismo, sus promedios no presentan gran diferencia entre sí. No obstante, los PF-PP son los participantes del estudio con mayor heterogeneidad, debido a la amplitud del intervalo, que va desde los 22-28 años y los PF-NPP son los datos más uniformes de la distribución, siendo su intervalo por edades desde los 21-26 años. Cabe señalar que los PF-PP se encuentran en los dos últimos semestres de la carrera de pedagogía en educación matemática, prontos a egresar como profesores.

Considerando que existen leves diferencias entre la distribución de sexo femenino y masculino, para efectos de este estudio no se considera un factor de interés a investigar, aun cuando existen investigaciones como la de García (2003), que sí lo han mencionado.

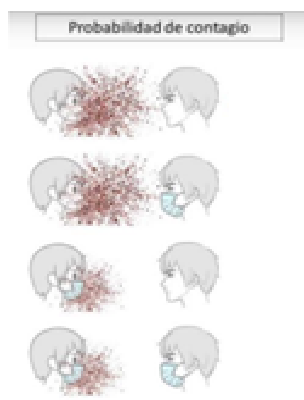
6.2 Significado intuitivo del concepto de Probabilidad

El primer acercamiento con el cálculo de probabilidades se realiza durante la infancia, con la valoración cualitativa y utilización del lenguaje coloquial probabilístico como: "Posiblemente llueva", "es casi imposible ganar la lotería", "si salgo sin permiso, es seguro que mi mamá se moleste", por mencionar algunos ejemplos, los cuales corresponden al significado intuitivo de la probabilidad.

Es por esto que, posteriormente, en el sistema escolar chileno, se introduce el significado intuitivo de la probabilidad en Educación Básica. Para tal efecto, se utiliza un lenguaje coloquial como suceso seguro, probable, posible, imposible, etc. y se valora en una escala cualitativa la probabilidad de ocurrencia de dichos sucesos (Batanero y López, 2015).

Al respecto, se les consultó a los participantes sobre qué tipo de significado de probabilidad se encontraba presente en la Figura 2, acerca de uso de la mascarilla como medio para reducir el contagio de COVID-19 (Vásquez, Rodríguez-Muñiz, Muñiz-Rodríguez y Alsina, 2020).

Figura 2: Uso se la mascarilla y la posibilidad de contagio de COVID-19



Fuente: Vásquez, Rodríguez-Muñiz, Muñiz-Rodríguez y Alsina, 2020

Para lo cual, se les indicó a los participantes que identificaran la imagen, seleccionando entre el significado clásico, subjetivo e intuitivo, los resultados entregados por los encuestados se muestran en la Tabla 7.

Tabla 7

Porcentajes de logro sobre el significado intuitivo de la probabilidad presente en una escala cualitativa

Pregunta	Significado	Profesores en formación		Total
		En práctica	No práctica	
Uso se la mascarilla y la posibilidad de contagio de COVID-19	Clásico	14,28%	9,52%	23,8%
	Subjetivo	9,52%	14,28%	23,8%
	Intuitivo	19,04%	33,33%	52,37%

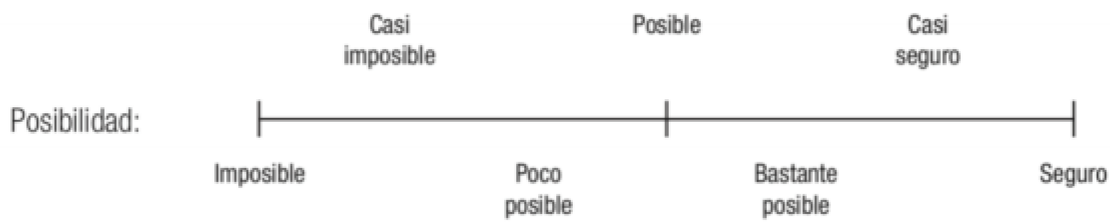
Fuente: elaboración autoras

De manera que el porcentaje de logro sobre el significado intuitivo, corresponde a un 52,37%, donde los profesores en formación describen que la Figura 2, acerca del uso de la mascarilla producto del COVID-19, concierne al significado intuitivo de la probabilidad, cabe mencionar, que el mayor porcentaje de logro (33,33%), corresponde a PF-NPP.

Por otra parte, el 57,60% de los PF-PP, describen que la figura corresponde al significado clásico o subjetivo. En consecuencia, se puede deducir que, en su mayoría, los participantes desconocen los significados de la probabilidad y sus características, debido a que durante su formación profesional, los significados de la probabilidad son tratados únicamente en la asignatura de Didáctica de la Estadística.

A causa de que más de la mitad de los encuestados responde incorrectamente, y teniendo en consideración que, la pregunta planteada no entrega suficiente información para emitir juicios, se analizaron las respuestas obtenidas en las preguntas abiertas, las cuales interrogan sobre la posibilidad de contagio en una escala cualitativa, con el fin de comprender mejor las inferencias de los participantes. De modo que, un ejemplo de escala cualitativa de probabilidad de un suceso (Vásquez et. al, 2020), es la presente en la Figura 3.

Figura 3: Escala cualitativa de posibilidad de ocurrencia



Fuente: Vásquez *et. al*, 2020

De manera puntual, se les preguntó a los participantes ¿Cuál sería la posibilidad de contagio de cada una de las imágenes?, teniendo presente su respuesta entregada en la primera pregunta y desde su conocimiento adquirido durante su formación profesional, entregando las respuestas expresadas en la Tabla 8.

Tabla 8

Porcentajes de logro acerca de determinar la posibilidad de contagio

Imágenes	Cuantificación de la incertidumbre	Probabilidad de contagio	Profesores en formación		Total
			En práctica	No práctica	
	Casi seguro	Muy alta o muy probable	28,57%	23,8%	52,37%
		Medianamente probable	0%	4,76%	4,76%
		Asignar una escala cuantitativa	14,28%	23,8%	38,08%
		Otro	0%	4,76%	4,76%
	Bastante posible	Casi segura, medianamente alta, bastante alta, moderadamente alta.	23,8%	23,8%	47,6%
		Poco probable	0%	4,76%	4,76
		Asignar una escala cuantitativa	14,28%	23,8%	38,08%
		Otro	4,76%	4,76%	9,52%
	Poco posible	Poco probable, medianamente probable, medianamente baja.	14,28%	19,04%	33,32%
		Alta posibilidad	4,76%	0%	4,76%
		Asignar una escala cuantitativa.	14,28%	23,8%	38,08%
		Otro	9,52%	14,28%	23,8%
	Casi imposible	Baja, poco probable, menos probable, escasamente probable.	19,04%	28,57%	47,61%
		Medianamente probable	9,52%	0%	9,52%
		Asignar una escala cuantitativa	14,28%	23,8%	38,08%
		Otro	0%	4,76%	7,76%

Fuente: elaboración autoras

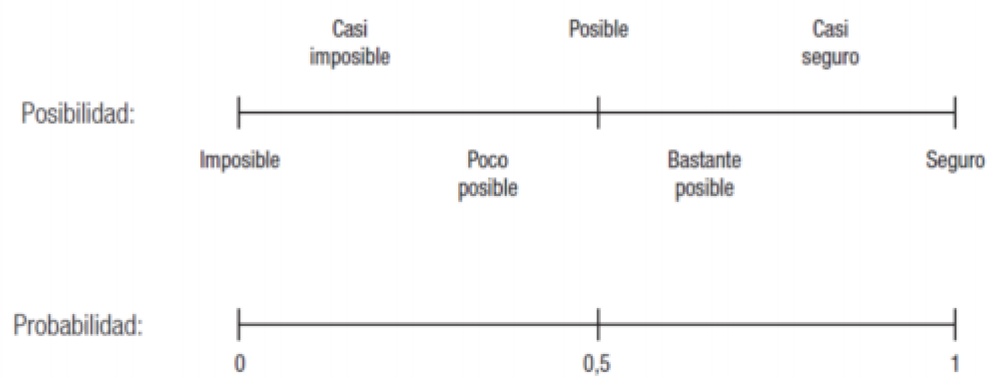
En tal sentido, un 28,57% de los futuros profesores, valora cada imagen en una escala cualitativa de probabilidades, donde se observa que un suceso casi seguro, se compara con una probabilidad muy alta o muy probable. Asimismo, un suceso casi imposible está dentro del mismo margen que una probabilidad baja, poco probable, menos probable o escasamente probable.

Para ilustrar los relatos de los participantes, en primera instancia, se observa la formación de una escala cualitativa: Muy alta, alta, mediana, baja (PF-NPP3, Sexo Femenino).

Del mismo modo, el 23,81% de los profesores en formación explicitan que un suceso bastante posible y uno poco posible, son términos que cuantifican la incertidumbre en igual medida.

Por otra parte, el 38,08% del total de los encuestados, asignan probabilidades en una escala cuantitativa, lo que explica el alto porcentaje (57,6%) de participantes que categorizan la Figura 2 como un elemento del significado clásico o subjetivo. En tal sentido, se deduce que es más fácil y común cuantificar numéricamente la probabilidad de ocurrencia de un evento. Al respecto, como lo indica Vásquez et. al, 2020, la cuantificación de un suceso permite medir el grado de incertidumbre, el azar y establecer comparaciones entre las distintas probabilidades de eventos relacionándolo con representaciones numéricas, como se observa en la Figura 4.

Figura 4: Correspondencia entre la escala cualitativa de posibilidad de ocurrencia y la escala cuantitativa de probabilidad de ocurrencia



Fuente: Vásquez *et. al*, 2020

En relación a las valoraciones cuantitativas explicitadas por los participantes, se observa una escala numérica decreciente, infiriendo que son porcentajes, tal como: *100, 75, 50, 30* (PF-PP 9, Sexo Femenino). Así mismo, se puede aprecia otra representación numérica, expresada a través de fracciones, las cuales son: *1, ½, ½, ¼* (PF-NPP 17, Sexo Masculino; PF-NPP 18, Sexo Femenino).

En resumen, los participantes cuantifican los sucesos a través de dos representaciones numéricas, porcentajes y fracciones. Cabe señalar que las transformaciones numéricas, como convertir fracciones a números decimales o porcentajes, es común al momento de calcular y comparar probabilidades.

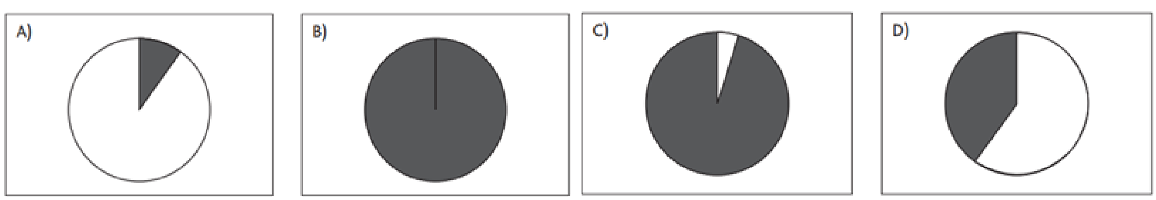
Por otra parte, se observan respuestas en forma de relato extenso, donde los participantes describen lo que se ocurre en la imagen, sin embargo, no asignan una probabilidad del suceso, tal como se muestra en las siguientes citas:

> *Si los dos están sin mascarilla ambos tienen la misma posibilidad de contagiarse. La persona que está sin mascarilla tiene más posibilidad de contagiarse que el que la está usando. Cuando una persona está contagiada y usa mascarilla es menos probable que contagie a otras personas. Cuando se usa mascarilla hay menos posibilidad de contagio, pero no se puede decir que está protegido completamente* (PF-NPP 16, Género Masculino).

En síntesis, se infiere que el participante hace una diferencia entre cada imagen y el riesgo de contagio, sin embargo, no es asociado con el significado intuitivo y sus características.

Por otro lado, a los participantes se les solicito que relacionaran las zonas achuradas con los sucesos seguros, casi seguros, poco seguros, casi imposibles o imposibles, entre otros.

Figura 5: Probabilidad del suceso acorde al área coloreada de la ruleta



Fuente: Cuaderno de actividades 5° Básico, 2020.

Al respecto, se entregaron aseveraciones sobre los eventos de la Figura 5, los cuales se presentan en la Tabla 9.

Tabla 9

Porcentajes de logro acerca del Significado intuitivo de la probabilidad

¿Cuál de las aseveraciones acerca del área coloreada de cada ruleta es correcta?	Profesores en formación		
	En práctica	No práctica	Total
La ruleta B) representa un suceso seguro	9,52%	4,76%	14,28%
La ruleta B) representa un suceso seguro. La ruleta C) representa una probabilidad del 50%. La ruleta C) representa un suceso casi seguro o muy probable, mientras que la ruleta A) representa un suceso poco seguro.	0%	14,28%	14,28%
La ruleta B) representa un suceso seguro. La ruleta A) representa un suceso casi imposible. La ruleta C) representa un suceso casi seguro o muy probable, mientras que la ruleta A) representa un suceso poco seguro.	33,33%	38,09%	71,42%
La ruleta B) representa un suceso seguro. La ruleta C) representa una probabilidad del 50%. La ruleta D) representa un suceso poco posible.	0%	0%	0%
Todas las anteriores.	0%	0%	0%

Fuente: elaboración autoras

De donde se tiene que el 71,42% de los profesores en formación seleccionan las aseveraciones correctas, correspondiendo en 33,33% a PF-PP y en 38,09% a PF-NPP. En relación las habilidades que involucra la pregunta, estas son mencionadas en la POPS, donde se describe que el profesor debe distinguir diferentes tipos de sucesos y poner énfasis en la posibilidad de ocurrencia como escala cualitativa (Vásquez y Alsina, 2019). Y por el contrario, el 48,56% de los participantes, seleccionan las opciones que contienen la única aseveración errónea, donde se le asigna al evento una probabilidad del 50%, lo que corresponde a una escala cuantitativa.

En síntesis, la información entregada por los participantes, permite inferir que existen nociones y conocimientos básicos de las características del significado intuitivo de la probabilidad. Se utilizan términos del tipo estocástico, se vincula con el lenguaje probabilístico y se valora en una escala cualitativa los sucesos (Vásquez y Alsina, 2019).

En resumen, un considerable porcentaje de futuros profesores (38,1%) vinculan el significado intuitivo con el significado clásico, vinculando el lenguaje coloquial con porcentajes o números racionales, infiriendo que la cuantificación (el número) es el medio más factible y común para comparar probabilidades y tomar decisiones en situaciones de incerteza.

6.3 Significado clásico de la Probabilidad

El significado clásico o Laplaciano de la probabilidad hasta 1970 fue el contenido predominante en los currículos de matemática, generalmente se asocia a los juegos de azar o juegos equitativos (Batanero, 2005), por otra parte, el algoritmo de la regla de Laplace está limitada a un número finito de casos posibles, entregando un método de cálculo y no una definición de qué es la probabilidad realmente (Batanero, 2005).

En lo que respecta al significado clásico, se consideró como base la investigación de Alsina, Vásquez, Muñiz-Rodríguez y Rodríguez-Muñiz (2020), para preguntarles a los participantes cual o cuales de las opciones presentes en la Tabla 10, son características del significado clásico de la probabilidad.

Tabla 10

Respuestas y porcentaje de logro sobre el Significado Clásico de la Probabilidad

Respuestas	Profesores en Formación		Total
	En práctica	Sin práctica	
El Teorema de Bayes	0%	0%	0%
El Teorema de Bayes, La Regla de Laplace y representa probabilidades en una escala cuantitativa entre 0,1	4,76%	4,76%	9,52%
El número de casos favorables y no favorables, La Regla de Laplace y representa probabilidades en una escala cuantitativa entre 0 y 1.	38,09%	28,57%	66,66%
El Teorema de Bayes, La Regla de Laplace y representa probabilidades en una escala cualitativa que fluctúa entre 0 y 1.	0%	4,76%	4,76%
Todas las anteriores	0%	19,04%	19,04%

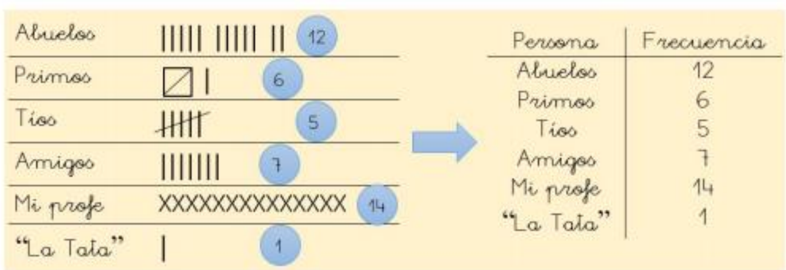
Fuente: elaboración autoras

Como observación general de la Tabla 10, se aprecia un aceptable porcentaje de logro sobre las características y elementos propios del significado clásico de la probabilidad. (66,66%).Correspondiendo el 38,09% a PF-PP y el 28,57% a PF-NPP. Sin embargo, el 33,33% de los encuestados proporcionan respuestas en las cuales se incluye el Teorema de Bayes como elemento del Significado Clásico de la Probabilidad.

De donde se infiere que los participantes confunden el Teorema de Bayes con la regla de Laplace y por consecuencia, el significado subjetivo y el significado clásico de la probabilidad. No obstante, para aplicar el Teorema de Bayes se requiere de dos eventos y para la aplicación de la regla de Laplace, se deben relacionar los casos favorables con los casos totales entorno a un solo evento.

Por otra parte, en la Figura 6 se presenta el número de veces que un estudiante ha hablado por videollamada y con quienes, durante el tiempo de cuarentena.

Figura 6: Tabla de recuento y de frecuencia de la cantidad de videollamadas



Fuente: Alsina *et. al*, 2020, p. 115

Respecto a la lectura de representaciones gráficas, Alsina *et. al* (2020), mencionan que observar representaciones cuantitativas y organizar los resultados de un recuento a través de un orden numérico, es algo que una variable cualitativa no puede hacer, y de este modo, se puede reflexionar en el significado de la frecuencia absoluta, siendo en este caso, del número de veces que se repite un suceso. De manera que, las afirmaciones presentadas a los participantes, contenían representaciones numéricas en fracciones y porcentajes (como se muestra en la Tabla 11), las que fueron decodificadas desde la lectura de la figura anterior.

Tabla 11

Respuestas y porcentaje de logro sobre la tabla de recuento de las videoconferencias durante el confinamiento

Respuestas	Profesores en Formación		Total
	En práctica	Sin práctica	
El estudiante ha hablado 4/15 del total de veces con sus abuelos	4,76%	9,52%	14,28%
Aproximadamente un 2% de veces habló con “La Tata”	4,76%	4,76%	9,52%
El estudiante de 40 veces habló 14 con su profesora.	4,76%	4,76%	9,52%
El estudiante ha hablado 4/15 del total de veces con sus abuelos y el estudiante de 40 veces habló 14 con su profesora.	9,52%	0%	9,52%
El estudiante ha hablado 4/15 del total de veces con sus abuelos y aproximadamente un 2% de veces habló con “La Tata”	19,04%	38,09%	57,13%

Fuente: elaboración autoras

Como se puede observar, el 57,14% de los participantes aplican la regla de Laplace y calculan la frecuencia observada del evento. No obstante, un 19,04% de los profesores en formación, tiene dificultades para sumar la frecuencia observada (la cual es de un total de cuarenta y cinco llamadas). Por lo tanto, se puede inferir que la habilidad de representar información mediante marcas de conteo y tabla de frecuencia, es una habilidad poco dominada por los encuestados. Cabe considerar que actividad presentada es pertinente para estudiantes de 6-8 años (Alsina *et. al*, 2020)

Por otra parte, el 23,81% de los encuestados seleccionan al menos una aseveración correcta. De igual manera, cabe señalar que no se observó que los participantes crearan un vínculo entre porcentajes y fracciones. Por consiguiente, es necesario mencionar a Duval (2016), quien menciona que para comprender la matemática es necesario conocer y utilizar transformaciones numéricas, incluido cualquier lenguaje, las que corresponden a herramientas para producir un nuevo conocimiento o comunicar las representaciones mentales del individuo. En este caso, transformar fracciones a porcentajes.

Teniendo en cuenta que, uno de cuarenta y cinco, son las veces que el estudiante habló con "La Tata" (ver Figura 6), al realizar la transformación de la fracción (1/45) a porcentajes, equivaldría a 2% aproximadamente. No obstante, el 33,33% de futuros profesores, descartan esta alternativa como correcta, por no se realizar la transformación numérica.

De la misma forma, una herramienta comúnmente utilizada para representar información y calcular probabilidades aplicando la regla de Laplace, es a través de una tabla de distribuciones, como se muestra en la Figura 7, donde se representa la distribución por edades de los chilenos que han dado positivo al COVID-19 en las pruebas PCR.

Figura 7: Distribuciones por edades de los chilenos que dieron positivo al COVID-19

Tramos de edad	**Distribución de la población**	**Distribución de casos positivos**
menor de 5	1 166 146	1 065
05-17	3 104 422	2 673
18-49	8 220 531	29 045
50-59	2 232 733	6 624
60-69	1 499 917	3 748
70-79	879 498	1 785
80 y más	470 756	1 108
Total	17 574 003	46 048

Fuente: Vásquez et. al, 2020, p. 255

Al respecto, la situación problema planteada a los participantes consistía en seleccionar aleatoriamente una persona entre 18 y 49 años y calcular, ¿Cuál es la probabilidad de que sea positivo por COVID-19? Las respuestas entregadas están representadas en la Tabla 12.

Tabla 12

Respuestas y porcentaje de logro sobre la tabla de distribución por contagio de COVID-19

	Profesores en Formación		Total
	En práctica	Sin práctica	
29.045	0%	0%	0%
29.045 / 46.048	9,52%	23,8%	33,32%
8.220.531 / 17.574.003	9,52%	0%	9,52%
29.045 / 8.220.531	9,52%	28,57%	38,09%
29.045 / 17.574.003	14,28%	4,76%	19,04%

Fuente: elaboración autoras

Considerando la información expresada en la Figura 7, Vásquez *et. al* (2020), comentan que la forma en que se representan los datos puede confundir a quien lee la tabla, puesto que, las amplitudes de los intervalos son distintos en cada tramo. Por ejemplo, el tramo de 18-49 años es mucho más amplio que el tramo de 50-59 años, por lo cual, se puede observar que primer intervalo tiene mayor concentración que el segundo.

En vista de que, la pregunta planteada conlleva cierta complejidad, puesto que, sitúa al encuestado a reducir su espacio muestral, considerando solamente las personas entre los 18-49 años, como el universo y aplicar la regla de Laplace, siendo 29.045 / 8.220.531 la probabilidad correspondiente al seleccionar aleatoriamente una persona entre 18-49 años y esta sea positivo de COVID-19.

De manera concreta, un 38,09% de los encuestados calcula la probabilidad utilizando correctamente la regla de Laplace, recayendo el porcentaje mayor de acierto (28,57%) a los profesores en formación que no están en práctica profesional, en contrariedad al 9,52% que corresponde a los profesores en formación que sí lo están. Cabe mencionar que esta es una de las preguntas de selección múltiple con el porcentaje de logro más descendido por los encuestados.

En contraste con lo anterior, un 33,32% de los participantes calcula la probabilidad condicionada. Para ilustrar mejor, la probabilidad de seleccionar al azar una persona entre 18-49 años dado que es positivo. De igual modo, se infiere que su razonamiento, existe la posibilidad de calcular la probabilidad de seleccionar al azar una persona entre 18-49 años que este contagiada del total de contagiados.

Asimismo, entre las respuestas encontradas, se observa que el 9,52% calcula la probabilidad de seleccionar aleatoriamente una persona entre 18-49 años, a su vez, el 19,04% de los encuestados calcula la probabilidad de seleccionar una persona entre 18-49 años que está contagiada. De igual modo, un 33,33% de los encuestados calcula la probabilidad 29.045 / 46.048.

De modo que, el 28,57% de los profesores en formación aplica el algoritmo de la regla de Laplace, no obstaste, se puede deducir, que el enunciado no fue decodificado correctamente, lo que implica el cálculo erróneo de la probabilidad planteada en el problema, o en el peor de los casos, confunden un problema de aplicación de la regla de Laplace con uno de probabilidades condicionadas.

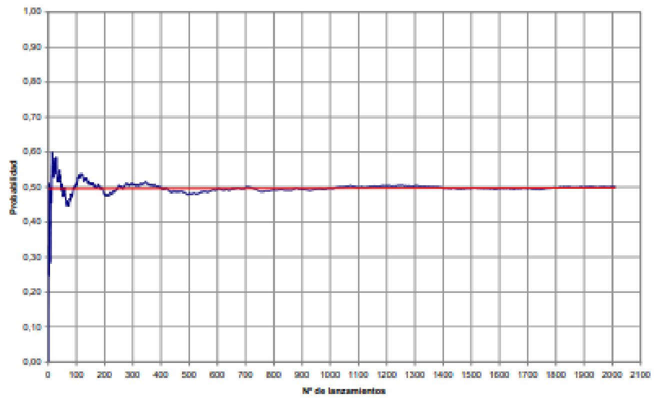
6.4 Significado frecuencial de la probabilidad

En lo que respecta al significado frecuencial, Sánchez (2009), comenta que este significado es también conocido como experimental o empírico, y se centra en una estimación a través de la experimentación de la probabilidad de un evento, asociado a la frecuencia relativa, al repetir un gran número de veces este experimento bajo las mismas condiciones, siendo además, el nexo entre el modelo y la realidad (Sánchez, 2009).

En tal sentido, se sugiere comenzar a trabajar desde los primeros años de escolaridad el significado frecuencial de la probabilidad, realizando actividades prácticas y experimentos, primeramente, prediciendo probabilidades, posteriormente, experimentando y comparándolas, para finalizar, con la formalización del contenido (Sánchez, 2009).

De la misma forma, uno de los experimentos comúnmente utilizado para explicar el significado frecuencial de la probabilidad, es a través del lanzamiento de monedas, como dos mil veces, por ejemplo, y anotar los resultados, tal como se muestra en la Figura 8.

Figura 8: Resultados al obtener cara lanzando una moneda dos mil veces



Fuente: Vásquez *et al*, 2020

Por otra parte, se le solicitó a los encuestados decodificar la información que representaba la Figura 8, como el valor al que tiende la frecuencia relativa a medida que aumenta la cantidad de lanzamientos, de igual forma, inferir la relación entre la frecuencia relativa y la probabilidad teórica de este, entregando las respuestas que se muestran en la Tabla 13.

Tabla 13

Porcentaje de logro en relación a la habilidad de leer información de un gráfico con el lanzamiento de una moneda.

Representaciones gráficas del Significado Frecuencial de la Probabilidad		
	Profesores en formación	
Respuestas	En práctica profesional	Sin práctica profesional
Corresponde al significado frecuencial de la probabilidad. Repetir un experimento con eventos independientes y en las mismas condiciones, un número suficientemente grande, la probabilidad tiende acercarse a cierto valor y la probabilidad teórica del lanzamiento de una moneda es 0,5	23,8%	19,04%
Repetir un experimento con eventos independientes y en las mismas condiciones, un número suficientemente grande, la probabilidad tiende acercarse a cierto valor, la probabilidad teórica del lanzamiento de una moneda es 0,5 y la probabilidad de obtener cara en 50 lanzamientos es 0,1 aproximadamente.	4,76%	0%
Repetir un experimento con eventos independientes y en las mismas condiciones, un número suficientemente grande, la probabilidad tiende acercarse a cierto valor, la probabilidad teórica del lanzamiento de una moneda es 0,5 y la probabilidad de obtener cara en 20 lanzamientos es 0,3 aproximadamente.	0%	14,28%
Corresponde al significado frecuencial de la probabilidad, repetir un experimento con eventos independientes y en las mismas condiciones, un número suficientemente grande, la probabilidad tiende acercarse a cierto valor, la probabilidad teórica del lanzamiento de una moneda es 0,5 y la probabilidad de obtener cara en 20 lanzamientos es 0,3 aproximadamente.	14,28%	14,28%
Corresponde al significado frecuencial de la probabilidad, repetir un experimento con eventos independientes y en las mismas condiciones, un número suficientemente grande, la probabilidad tiende acercarse a cierto valor, la probabilidad teórica del lanzamiento de una moneda es 0,5, la probabilidad de obtener cara en 50 lanzamientos es 0,1 aproximadamente y la probabilidad de obtener cara en 20 lanzamientos es 0,3 aproximadamente.	0%	9,52%

Fuente: elaboración autoras

En relación con los porcentajes de logro de la Tabla 8, se puede observar que en general, los participantes poseen la habilidad de leer información representada en gráficos de frecuencia. No obstante, un 19,04% de los encuestados, no logran asociar el experimento con el significado frecuencial de la probabilidad. Lo que se puede contrastar con la información aparente en tablas anteriores, donde los encuestados saben cómo calcular probabilidades pero desconocen a cual significado pertenece.

Por otra parte, el 14,28% de los participantes, selecciona la única alternativa incorrecta, la cual requería decodificar información desde la Figura 8, trasladando el problema al primer cuadrante del plano cartesiano, donde el eje de las abscisas corresponde al número de lanzamientos de la moneda y el eje de las ordenadas a la frecuencia relativa. En oposición a lo mencionado, un 4,76% de los PF-PP y un 9,52% de PF-NPP, decodifican incorrectamente la información, expresando que la probabilidad de lanzar una moneda al aire cincuenta veces es 0,1, cuando se observa que es 0,5.

Cabe señalar que, el 100% de los encuestados explicita que en cierto punto la frecuencia relativa tiene a estabilizarse (en 0,5 en este caso), siendo un evento independiente que se repite un número suficientemente grande. En concreto, la probabilidad teórica y la frecuencia relativa tienden a 0,5. Así mismo, infiere que el 42,84% de los participantes posee la habilidad de leer información desde representaciones gráficas (ver Figura 8), observando que la probabilidad al momento de lanzar la moneda veinte veces y obtener cara es de aproximadamente 0,3.

Otro fenómeno utilizado en el sistema escolar para analizar el significado frecuencial de la probabilidad es a través del lanzamiento de un dado, como se muestra en la Tabla 14.

Tabla 14

Resultados del lanzamiento de un dado

Número	Cantidad de veces que apareció el número al realizar el experimento
1	3
2	4
3	5
4	6
5	2
6	0

Fuente: Elaboración propia de las autoras

En lo que respecta al lanzamiento de un dado de seis caras no cargado, se le indicó a los participantes que la probabilidad de obtener 3, al lanzar el dado es de 1/6 (probabilidad teórica) y que desde la información presente en la Tabla 14, comentaran cual o cuales de las aseveraciones de la Tabla 15, es o son correctas.

Tabla 15

Porcentaje de logro de las afirmaciones correctas sobre el lanzamiento de un dado no cargado veinte veces

Representaciones gráficas del Significado Frecuencial de la Probabilidad		
	Profesores en Formación	
Resultados	En práctica profesional	No práctica Profesional
El primer experimento nos entrega la probabilidad teórica y la segunda la probabilidad frecuencial.	9,52%	9,52%
La probabilidad frecuencial es de 16,66 % aproximadamente y la probabilidad teórica es de un 25%	9,52%	9,52%
El primer experimento nos entrega la probabilidad teórica y la segunda la probabilidad frecuencial y la probabilidad frecuencial es de 25% y la probabilidad teórica es de un 16,66% aproximadamente	14,28%	9,52%
El primer experimento nos entrega la probabilidad frecuencial y la segunda la probabilidad teórica y la probabilidad frecuencial es de 25% y la probabilidad teórica es de un 16,66% aproximadamente.	9,52%	14,28%
El primer experimento nos entrega la probabilidad teórica y la segunda la probabilidad frecuencial, la probabilidad frecuencial es de 25% y la probabilidad teórica es de un 16,66% aproximadamente y al repetir el experimento infinitas veces, la probabilidad teórica con la probabilidad frecuencial serán totalmente diferentes	0%	14,28%

Fuente: elaboración autoras

Como se puede observar, un 23,81% de los participantes distinguen la probabilidad teórica de la probabilidad frecuencial, asimismo, se infiere que este porcentaje de encuestados domina las transformaciones numéricas como, de fracción a decimal y luego a porcentajes. No obstante, se deduce que, otro 23,81% de la muestra, no diferencia la probabilidad teórica de la frecuencial, centrándose solamente en el cálculo de la probabilidad en el significado clásico, relacionando los casos favorables con los casos totales y su vez, la conversión de una representación numérica a otra, pero no se realiza un análisis más profundo de ambos experimentos.

Por otra parte, se ha de conjeturar que el 14,29% de los profesores en formación desconocen que la frecuencia relativa tiende a la probabilidad teórica luego de un gran número de repeticiones del experimento. Por consiguiente, se deduce que los participantes desconocen cómo se comporta la frecuencia de un evento repetido un gran número de veces, sin embargo, son capaces de inferirlo desde una representación gráfica, como es el caso de la Figura 8.

En síntesis, un alto porcentaje de encuestados (76,19%) tiene dificultades al momento de diferenciar la probabilidad teórica de la probabilidad frecuencial, además, se cree que el conocimiento teórico del significado frecuencial es débil y les dificulta decodificar información presente en tablas de frecuencia.

Del mismo modo, otra tabla que representa la frecuencia de un evento, es representada en la Figura 9, al hacer sonar una chicharra defectuosa un gran número de veces y con la información obtenida, tomar decisiones.

Figura 9: Número de veces en que la chicharra no sonó y su frecuencia relativa

Número de veces que se tocó la chicharra	Número de veces que la chicharra no sonó	Frecuencia relativa
10	1	0,1
30	3	0,1
50	4	0,08
200	15	0,075
500	39	0,078
1000	78	0,078

Fuente: Texto del Estudiante 2° Medio, 2021, p. 155

Otro rasgo del significado frecuencial de la probabilidad, es referente al lenguaje probabilístico a utilizar, como se muestra en la Tabla 16, donde se pretende que los participantes expresen como la frecuencia relativa tiende a la probabilidad teórica.

Tabla 16

Porcentajes de logro al estimar y comparar la frecuencia relativa con la probabilidad teórica

Lenguaje asociado al Significado Frecuencial	Profesores en Formación		
	Resultados	En Práctica Profesional	No práctica profesional
¿Qué sucede con la frecuencia relativa conforme cambia la cantidad de veces que se tocó la chicharra?	Disminuye	14,28%	42,85%
	Se mantiene en 0,78	0%	4,76%
	Tiende a un número / se aproxima a un número.	9,52%	0%
	Tiende a cero	4,76%	0%
	Respuesta nula	14,28%	9,52%
Observa lo que ocurre a medida que aumenta la cantidad de veces que se toca la chicharra. ¿A qué valor tiende la probabilidad de que esta no suene?	1	0%	4,76%
	0	14,28%	28,57%
	0,078		
	7,8 %	14,28%	0%
	39/500		
	Respuesta Nula	14,28%	23,8%

Fuente: elaboración autoras

Teniendo en cuenta las respuestas entregadas por los encuestados a la primera pregunta planteada, se puede observar que el 9,52% utiliza un lenguaje probabilístico y tiene nociones del concepto límite, puesto que relatan que la frecuencia relativa conforme cambia la cantidad de veces que se toca la chicharra *tiende a un número* (PF-PP 6, Sexo Masculino) o *parece que se aproxima a un número* (PF-PP 7, Sexo Femenino).

Por otra parte, el 57,14% de los encuestados menciona que la frecuencia relativa disminuye, sin embargo no indican hasta qué punto disminuye, si es hasta cero o hasta aproximarse a otro número, tampoco indican en la proporción que decrece. Por lo tanto, se puede inferir que este porcentaje de encuestados asimila la frecuencia relativa con el decrecimiento exponencial.

Del mismo modo, un 4,76% de los participantes señala la frecuencia relativa *tiende a cero* (PF-PP 13, Sexo Femenino). En igual medida, un 4,76% comenta que la frecuencia relativa *se mantiene en 0,78* (PF-NPP 2, Sexo Femenino), por lo cual, se puede inferir que, los participantes deducen como frecuencia relativa tiende a la probabilidad teórica (0,78).

En lo que se refiere al valor al que tiende la probabilidad de que la chicharra no suene, se observan diferentes representaciones numéricas, como fracciones: *39/500* (PF-PP 11, Género Masculino); así como en decimales o porcentajes: *0,078 o 0,78%* (PF-PP 7, Género Femenino).

No obstante, se observa que el 42,86% de los futuros profesores cree que a medida que aumenta el número de experimentos, la probabilidad tiende a cero, deduciendo que el participante cree que la probabilidad del evento se comporta de la misma forma que un ejercicio de decrecimiento exponencial.

En concreto, la interpretación Frecuentista de Von Mises, la que ha sido modificada a lo largo de la historia, convirtiendo el modelo frecuentista en una teoría matemática que fundamenta en el concepto de límite, obteniendo una demostración a partir de la definición de probabilidad, utilizando métodos lógico-matemático (Landro, 2011)

Cabe mencionar, que la definición frecuentista, menciona que,

> si un experimento se repite n veces bajo las mismas condiciones y n_B de los resultados son favorables a un atributo B, el límite de n_B/n conforme n se vuelve grande, se define como la probabilidad del atributo B (Canavos, 1988, p. 31).

En conformidad con las ideas conceptuales del significado frecuencial, la Tabla 17 representa las ideas mencionadas por los participantes al respecto.

Tabla 17

Ideas conceptuales del significado frecuencial de la probabilidad

Resultados	Profesores en Formación En Práctica Profesional	Profesores en Formación No práctica profesional
Plantea la asignación de probabilidades a partir de la frecuencia relativa observada en un gran número de repeticiones, permitiendo estimar la probabilidad del suceso.	0%	4,76%
Permite obtener un valor exacto.	4,76%	0%
Plantea la asignación de probabilidades a partir de la frecuencia relativa observada en un gran número de repeticiones, permitiendo estimar la probabilidad del suceso, no permite obtener un valor exacto, sino aproximaciones, es decir, tiende a cierto valor y la Ley de los Grandes Números indica que la probabilidad de la frecuencia relativa de un experimento repetido en las mismas condiciones tiende a la probabilidad teórica.	14,28%	28,57%
Plantea la asignación de probabilidades a partir de la frecuencia relativa observada en un pequeño número de repeticiones, permitiendo estimar la probabilidad del suceso y no permite obtener un valor exacto, sino aproximaciones, es decir, tiende a cierto valor.	14,28%	19,04%
La Ley de los Grandes Números indica que la probabilidad de la frecuencia relativa de un experimento repetido en las mismas condiciones tiende a la probabilidad teórica.	9,52%	4,76%

Fuente: elaboración autoras

De tal modo, se observa que en general, los participantes dominan algunas nociones de las ideas conceptuales del significado frecuencial de la probabilidad, siendo el 42,86% de los encuestados, quienes relacionan la frecuencia relativa de un gran número de experimentos con la probabilidad teórica y la Ley de los Grandes Números.

No obstante, un 33,33% de los encuestados desconoce Ley de los Grandes Números, por lo cual explicitan que la proximidad entre la frecuencia relativa y la probabilidad teórica se calcula en un número pequeño de experimentos, lo que nos hace suponer que la independencia del evento juega un rol fundamental. A modo de ejemplo, el lanzamiento de una moneda, siempre la probabilidad de obtener cara será ½, por lo cual, repetir el experimento una vez o infinitas veces, siempre la probabilidad será ½.

De tal manera, se deduce que el 4,76% de los participantes, asocia la independencia del evento con la frecuencia relativa, puesto que, comentan que la frecuencia relativa es el valor exacto de la probabilidad, ya sea en uno, cien o mil experimentos bajo las mismas condiciones.

6.5 Significado subjetivo de la Probabilidad

El significado subjetivo de la probabilidad se basa en la confianza de la persona sobre la veracidad o certeza que deposita en una proposición, por lo tanto no es decisivo, la probabilidad depende de lo que el observador conoce (Vásquez *et. al*, 2020).

De igual manera, cabe precisar que existen algunos eventos de carácter aleatorio que son irrepetibles en ciertas condiciones, lo que nos lleva a dejar de lado el uso de la regla de Laplace y el significado frecuencial y comenzar a utilizar el significado subjetivo de la probabilidad para determinar cuantitativamente cuál es la probabilidad adecuada, por medio de la intuición, considerando la información que se conoce de dicho evento y lo que aporta al cálculo de la probabilidad (frecuencias relativas, por ejemplos, entre otras) (Vásquez *et. al*, 2020).

Por otra parte, las representaciones gráficas como la Figura 7, son grandes herramientas de representación de información, puesto que permite aplicar la regla de Laplace o calcular probabilidades condicionadas, como se muestra en la Tabla 18. Donde se les preguntó a los encuestados que si se escoge al azar un caso positivo, ¿Cuál es la probabilidad de que se encuentre entre los 60 y 69 años?

Tabla 18

Respuestas y porcentajes de logro sobre el cálculo de una probabilidad condicional.

Significado subjetivo de la Probabilidad	Respuestas	Profesores en Formación		Total
		En práctica profesional	Sin práctica profesional	
	0,02 %	0%	4,76%	4,76%
	8,1 %	23,8%	23,8%	47,6%
	8,5 %	14,28%	4,76%	19,04%
	10, 5 %	0%	9,52%	9,52%
	Ninguna de las anteriores	4,76%	14,28%	19,04%

Tramos de edad	Distribución de la población	Distribución de casos positivos
menor de 5	1 166 146	1 065
05-17	3 104 422	2 673
18-49	8 220 531	29 045
50-59	2 232 733	6 624
60-69	1 499 917	3 748
70-79	879 498	1 785
80 y más	470 756	1 108
Total	17 574 003	46 048

Fuente: elaboración autoras

En relación al cálculo de probabilidades condicionales, investigadores como Huerta y Arnau (2017), mencionan que un gran factor por el cual se cometen errores al momento de calcular este tipo de probabilidad, se debe, a la forma en que se entregan las instrucciones, generalmente en forma verbal. Sin embargo, el problema planteado en la actividad, fue representado mediante una tabla de distribuciones, donde el 47,6% de los participantes calcula la probabilidad adecuada.

No obstante, se deduce que el 4,76% correspondiente en su totalidad a PF-SPP, calculan la probabilidad de seleccionar al azar una persona de 60-69 años contagiada. Asimismo, se infiere que el 19,04% de los encuestados, calcula la probabilidad de seleccionar aleatoriamente una persona entre 60-69 años. Por otra parte, el 9,52% de los PF-NPP entregan una respuesta al azar, puesto que la opción seleccionada, no corresponde a la probabilidad de algún evento.

Si bien es cierto, la probabilidad condicional o comúnmente conocida como subjetiva, depende de la persona que observa el suceso y la información que incorpora o conoce de este, determinando el grado de veracidad de la proposición. De tal modo, se puede observar que el 19,05% de los profesores en formación, responden que la probabilidad requerida no corresponde a ninguna de las alternativas, por lo cual se deduce que la representación de la información (mediante una tabla) es un factor para que el encuestado calcule otra probabilidad que no está descrita.

Como consecuencia, se deduce que las respuestas de los encuestados, no entregan mayor información sobre el razonamiento subjetivo de los participantes y sus conclusiones, puesto que la resolución del problema plantea dos opciones que son incongruentes con algún razonamiento y se cree que son respuestas aleatorias.

Desde una perspectiva más pedagógica, es preciso conocer cuáles son las herramientas que utilizarán los encuestados al momento de enseñar un problema de probabilidad condicionada a sus estudiantes, como por ejemplo, un diagrama de Venn o un diagrama de árbol.

Del mismo modo, las actividades planteadas en el Cuaderno de Actividades de 3° y 4° Medio (2019, p. 9), se pide utilizar como herramienta el diagrama de árbol. Sin embargo, en el Texto del estudiante utilizan el diagrama de Venn como elemento de modelización de los datos para dar respuesta a dicho problema. Por consiguiente, la Tabla 19, contiene las respuestas proporcionadas por los encuestados en relación a dichas herramientas de modelización.

Tabla 19

Respuestas y porcentajes de logro sobre herramientas de modelización a utilizar para resolver un problema de probabilidad condicional

Significado subjetivo de la Probabilidad	Profesores en Formación			
	Respuestas	En práctica profesional	Sin práctica profesional	Total
Herramientas de modelización a utilizar para resolver un problema de probabilidad condicional.	Un diagrama de árbol.	0%	4,76%	4,76%
	Un diagrama de Venn.	9,52%	4,76%	14,28%
	La Regla de Laplace y un diagrama de árbol.	14,28%	19,04%	33,32%
	Un diagrama de árbol y un diagrama de Venn	14,28%	28,57%	42,85%
	No se puede calcular.	4,76%	0%	4,76%

Fuente: elaboración autoras

En lo que respecta a las herramientas de modelización utilizadas, se menciona que la pregunta estaba basada en las capacidades que el encuestado cree poseer o dominar en su proceso de enseñanza aprendizaje, por lo cual, un 52,36% de los participantes explicita que utilizaría un diagrama de árbol, un diagrama de Venn o ambos.

No obstante, el 33,33% de los profesores en formación, indican que la probabilidad condicionada se puede calcular utilizando la regla de Laplace, por lo cual, se deduce que corresponde al porcentaje de encuestados que confunde la regla de Laplace con el Teorema de Bayes, de igual forma, se omite que el algoritmo mencionado en la afirmación es un elemento propio significado clásico de la probabilidad.

Por otro lado, el 4,76% de los PF-PP indican que el problema de probabilidad condicionada no se puede calcular. Cabe señalar que la probabilidad condicionada es un objetivo de aprendizaje correspondiente a segundo y tercer año medio, por lo cual, es un contenido que ha de enseñar durante el proceso de práctica profesional.

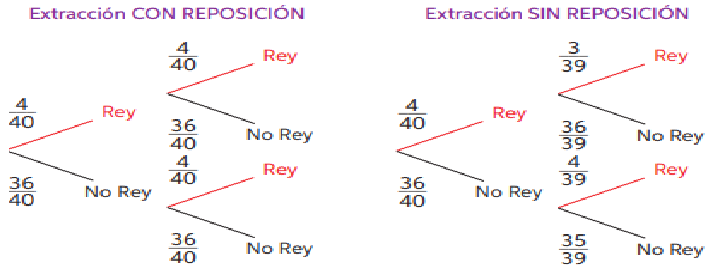
6.6 Sucesos dependientes e independientes y probabilidad condicionada

Los eventos dependientes e independientes generalmente están vinculados con el sentido frecuentista de la probabilidad, a pesar de esto, las autoras de la presente investigación, han decidido asociarlo con el significado subjetivo y el cálculo de probabilidades condicionadas. Como menciona Sánchez (2009), el concepto de probabilidad condicional cambia debido a la creencia de un suceso al momento de incorporar nueva información, como la independencia o dependencia de este, añadiendo así, la predicción y la incertidumbre, debido al grado de conocimiento general de la verosimilitud del evento.

En conformidad con lo anterior, el mismo estudio de Sánchez (2009), plantea un ejemplo sencillo sobre posibles razonamientos erróneos de la dependencia o independencia de probabilidades, como lo es lanzar una moneda al aire cinco veces y en todos los resultados obtener cara, los estudiantes tienden a pensar que al lanzar la moneda nuevamente, se obtendrá cara, dado que, en los lanzamientos anteriores se obtuvo cara. Sin embargo, la probabilidad del evento en el primer o décimo lanzamiento, seguirá siendo ½, debido a que son eventos independientes.

Para tal efecto, la Figura 10, mediante un diagrama de árbol, representa la extracción de cartas de una baraja inglesa con y sin reposición.

Figura 12: Extracción al azar dos cartas de una baraja española



Fuente: Texto del Estudiante 3° y 4° Medio, 2021, p.20

Al mismo tiempo, se les indicó a los participantes que identificaran cuál de los dos eventos corresponde a la noción de independencia, tal como se muestra en la Tabla 20.

Tabla 20

Respuestas y porcentajes de logro sobre extracción con reposición y sin reposición.

Respuestas	Profesores en formación: En práctica Profesional	Profesores en formación: Sin práctica profesional	Total
La extracción con reposición es un evento dependiente y la extracción sin reposición es un evento independiente	9,52%	4,76%	14,28%
La extracción con reposición es un evento independiente y la extracción sin reposición es un evento dependiente	23,8%	23,8%	47,6%
Ambos son eventos independientes	0%	4,76%	4,76%
Ambos son eventos dependientes	9,52%	23,8%	33,32%
Uno es un evento complementario del otro	0%	0%	0%

Fuente: elaboración autoras

Dado que la extracción sin reposición aporta información para el próximo evento, se observa el vínculo que posee con la dependencia de suceso y en oposición, una extracción con reposición no afecta la realización de la siguiente extracción. En tal sentido, se observa que el 47,6% de los participantes logran deducir desde el diagrama de árbol con las extracciones (ver Figura 10), el funcionamiento de las nociones de independencia y dependencia del evento.

Contrariamente, se vislumbra que el 14,29% de los encuestados confunden ambos eventos, así como el 38,09% cree que ambos eventos son dependientes o independientes. Del mismo modo, se deduce que el 52,4% de los participantes desconoce o confunde los fundamentos de los eventos dependientes e independientes, su comportamiento y características, contenidos que son importantes de dominar para el cálculo de probabilidades.

De la misma forma, se puede suponer, que los resultados obtenidos son evidencia de lo frecuente que es incurrir en la falacia del jugador, puesto que, se cree que los resultados de los sucesos pasados afectan a los sucesos futuros.

Por otra parte, resulta importante indagar en los conocimientos conceptuales sobre la dependencia e independencia de eventos que poseen los participantes, los cuales se constituyen en la Tabla 21 junto con sus porcentajes de logro.

Tabla 21

Respuestas y porcentajes de logro sobre sucesos independientes, dependientes y probabilidad condicionada

Sucesos independientes y dependientes			
Respuestas	Profesores en Formación: En práctica profesional	Profesores en Formación: No práctica Profesional	Total
Dos sucesos A y B son independientes si la realización de A no condiciona la realización de B. Y dos sucesos son dependientes si la realización de A condiciona la realización de B.	9,52%	9,52%	19,04%
Si P(B/A) = P(B). Entonces, P(A ⋂ B) = P(A) • P(B), nos indica que A y B son dependientes Si P(B/A) ≠ P(B). Entonces, P(A ⋂ B) = P(A) • P(B/A), nos indica que A y B son independientes.	0%	4,76%	4,76%
Dos sucesos A y B son independientes si la realización de A condiciona la realización de B. Y dos sucesos son dependientes si la realización de A no condiciona la realización de B y si P(B/A) = P(B). Entonces, $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, nos indica que A y B son dependientes. Si P(B/A) ≠ P(B). Entonces, $P(A \cap B)=P(A) \cdot P(B/A)$, nos indica que A y B son independientes.	9,52%	14,28%	23,8%
Dos sucesos A y B son independientes si la realización de A no condiciona la realización de B. Y dos sucesos son dependientes si la realización de A condiciona la realización de B y si P(B/A) = P(B). Entonces, $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, nos indica que A y B son independientes. Si P(B/A) ≠ P(B). Entonces, $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$, nos indica que A y B son dependientes.	23,8%	23,8%	47,6%
Ninguna de las anteriores.	0%	4,76%	4,76%

Fuente: elaboración autoras

Habiendo considerado que la dependencia de un evento aporta información para el cálculo de probabilidades condicionadas, se observa que el porcentaje de logro es de 47,62%. En contraste con lo anterior, el 28,56% de los participantes no tienen claras las nociones de independencia, por lo cual se infiere que, los encuestados presentan dificultades al momento de calcular probabilidades condicionadas.

Teniendo en cuenta que, al calcular la probabilidad condicionada de dos eventos independientes, esta será igual a la probabilidad del segundo evento puesto que la realización del primero no afecta al segundo, en consecuencia, su intersección corresponderá a la multiplicación de ambos eventos. Lo que permite dilucidar la gran importancia de instruir a los profesores en formación sobre la familiaridad que existe entre la independencia de eventos con la probabilidad condicionada y no solamente contemplarlo desde el significado frecuencial de la probabilidad.

6.7 Significado axiomático de la probabilidad

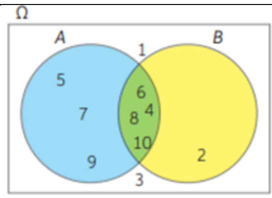
En lo que respecta al significado axiomático de la probabilidad, los investigadores Alvarado, Estrella, Retamal y Galindo (2008), comentan que Kolmogorov formalizó el concepto de probabilidad aplicando la teoría de conjuntos y de la medida. De igual forma, comentan que esta axiomática ha sido aceptada como un aporte al conocimiento científico y matemático, el cual permite modelar, describir e interpretar fenómenos estocásticos emergentes en toda actividad humana (Alvarado *et. al*, 2008).

En lo referente a las representaciones de sucesos mediante diagramas de Venn, se debe mencionar que es un elemento importante para la modelización del significado axiomático de la probabilidad, aunque no favorece la experimentación por parte de los alumnos utilizando gráficos, por ejemplo (Arnaldos y Fauras, 2012). Cabe señalar, que hay conceptos asociados a la probabilidad como, los sucesos incompatibles, comprender las leyes de Morgan o trabajar con tres o más sucesos, los que pueden ser percibidos con mayor facilidad mediante la experimentación (Arnaldos y Fauras, 2012).

Para tal efecto, se pidió a los participantes que dedujeran la expresión que describa la intersección de la probabilidad representada a través de un diagrama de Venn, como se muestra en la Tabla 22.

Tabla 22

Porcentajes de logros sobre la inferencia de una intersección de eventos a través de un diagrama de Venn

Significado Axiomático de la probabilidad	Respuestas	Profesores en Formación En práctica profesional	No práctica profesional	Total
	$P(A) \times P(B)$	9,52%	14,28%	23,8%
	$P(\Omega) - (P(A) + P(B))$	0%	4,76%	4,76%
	P(A) + P(B)	4,76%	0%	4,76%
	P(A) + P(B) – P(A ∪ B)	19,04%	28,57%	47,61%
	Ninguna de las anteriores	9,52%	9,52%	19,04%

Fuente: elaboración autoras

Teniendo en cuenta que el problema planteado está dentro del contexto escolar, en el texto del estudiante de 3° y 4° medio (2019, p. 20). Se percibe que el 47,61% de los profesores en formación infiere del diagrama de Venn, que la expresión que representa la intersección de los eventos, corresponde a P(A) + P(B) – P(A ∪ B) = P(A∩B).

Sin embargo, el 23,81% de los encuestados indica que la probabilidad de la intersección de los eventos, corresponde a la multiplicación de la probabilidad de cada evento por separado, aplicando la regla de la multiplicación. La cual se puede aplicar cuando los eventos son independientes. Lo que contradice al problema planteado, puesto que no son eventos disjuntos y su intersección no es vacía, por lo que se desprende la dependencia de ambos eventos.

Por otro lado, el 19,04% de los encuestados indican que ninguna de las proposiciones es verdadera. Lo que permite deducir que la técnica de cálculo, en concreto, el mecanicismo que requieren las operaciones matemáticas, como lo es el cálculo de probabilidades representadas en un diagrama de Venn, supera a lo que hay de fondo, a su axiomática.

En lo que se refiere a las reglas de la probabilidad, como lo es la regla aditiva, se plantea una situación problema presente en la Tabla 23, donde los participantes, deben aplicar la regla aditiva de la probabilidad y tomar decisiones al respecto.

Tabla 23

Respuestas y porcentajes de logros en la aplicación de la regla aditiva de la probabilidad

Problema Planteado	Profesores en Formación			Total
	Respuestas	En práctica profesional	No práctica profesional	
Suponga que Mateo, Pamela y Camilo están jugando adivinar cartas, par esto, Mateo extrae de un naipe inglés una carta y luego observa el número (considere que J = 11, Q= 12 y K= 13). Pamela dice que la carta será mayor que 5 o un diamante y Camilo indica que será menor que 5 o mayor que 10. ¿Cuál de los dos tiene mayor probabilidad de acertar? Fuente: Texto del Estudiante Matemática 1° Medio, 2021, p. 169.	La probabilidad de Camilo es de 28/52. La probabilidad de Pamela es de 37/52.	0%	0%	0%
	La probabilidad de Pamela es de 37/52. La probabilidad de Pamela es de 27/52.	19,04%	14,28%	33,33%
	La probabilidad de Camilo es de 28/52. La probabilidad de Pamela es de 37/52. Tiene mayor probabilidad de acertar Camilo.	4,76%	19,04%	23,8%
	La probabilidad de Camilo es de 28/52. La probabilidad de Pamela es de 37/52. La probabilidad de Pamela es de 27/52.	9,52%	23,8%	33,32%
	La probabilidad de Camilo es de 28/52. La probabilidad de Pamela es de 27/52. Tiene mayor probabilidad de acertar Camilo	9,52%	0%	9,52%

Fuente: elaboración autoras

Por otra parte, es importante indicar que para dar respuesta al problema, se deben reconocer los eventos, tanto para Camilo, como para Pamela, posteriormente, analizar que la proposición de ambos corresponde a la probabilidad de la unión de los eventos y que estos no son disjuntos, por lo tanto, la intersección es distinta de vacío. Es así como el 33,32% de los encuestados calculando ambas probabilidades y tomando una decisión sobre cuál es mayor.

Asimismo, se puede observar que el 33,33% de los participantes, asignan dos probabilidades a un mismo evento, en efecto, explicitan que la probabilidad de extraer una carta mayor que 5 o un diamante, es de 37/52 (la probabilidad correcta) y a su vez, es de 27/52. Cabe mencionar, que la representación numérica (fracciones), está centrada en la aplicación de la propiedad aditiva de la probabilidad y simboliza la razón entre casos favorables y casos totales. En resumen, se deduce que los encuestados omiten la unicidad de la probabilidad de un evento, por ejemplo, la probabilidad de lanzar una moneda al aire y obtener cara no puede ser ½ y 1/3 a la vez.

De igual forma ocurre con el 23,81% de los encuestados, quienes calculan ambas probabilidades correctamente, no obstante, al momento de tomar una decisión lo hacen en forma errónea. Otro aspecto a mencionar es que, el 23,81% de los participantes indican que 28/52 es mayor que 37/52, se observa que cometen un error básico en el tratamiento de fracciones con igual denominador.

En tal sentido, se debe explicitar que los participantes aplicaron correctamente la regla aditiva de la probabilidad, no obstante, se percibe la existencia de un error elemental en matemática y a su vez, muy común entre los estudiantes de Educación Básica al momento de interiorizar los números racionales. Cabe señalar, que dentro es este porcentaje, un 9,52% corresponden PF-PP y un 23,8% a PF-NPP.

6.8 Habilidades y conocimientos que debe poseer un futuro profesor al momento de enseñar probabilidad

Las habilidades y conocimientos que un profesor y un futuro profeso debe de haber adquirido durante su proceso formativo, son elementos esenciales al momento de enseñar matemática o cualquier otra ciencia, puesto que jamás se debe de enseñar algo que no se domina correctamente (Vásquez y Alsina, 2015).

Investigacione s un tanto más recientes, como las de Rodríguez et. al (2018), son un claro ejemplo de cómo los profesores se encuentran mal preparados en algunas áreas, como lo es la probabilidad y estadística, donde se cometen los mismos errores que los estudiantes, debido a lo complejo que es comprender estos conceptos y categorizarlos en forma cualitativa o cuantitativa.

De igual forma, se presentan dificultades al realizar cálculos o aplicar las reglas de la probabilidad como la multiplicativa o de la adición, por mencionar algunas y asimismo, la comprensión de la independencia de eventos tampoco es algo fácil de entender (Vásquez y Alsina, 2015).

Al respecto, se le planteó la siguientes situación problema a los participantes: En el curso de Investigación Cuantitativa se realizó una encuesta que reveló que el 70% de los estudiantes utiliza celular para conectarse a las clases, el 20% tablet y el 12% usa ambos elementos. Si se elige un estudiante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que emplee al menos uno de estos dispositivos?

Al mismo tiempo, se les pidió indicar las habilidades y conocimientos (presentes en la Tabla 24), que creen necesarios de dominar por los estudiantes al momento de dar respuesta al problema.

Tabla 24

Porcentajes de logro en ejercicios correspondientes significado axiomático de la probabilidad

Habilidades y conocimientos que debe poseer un futuro profesor para abordar un problema sobre probabilidades	Respuestas	Profesores en Formación		
		En práctica profesional	No práctica profesional	Total
I. Ser capaz de transformar porcentajes a números racionales. II. Conocer que la probabilidad de cualquier suceso es menor que 1 y mayor que 0. III. Saber modelar el problema mediante un diagrama de árbol, tabla o mediante conjuntos. IV. Conocer la regla aditiva de la probabilidad. V. Comprender cuando dos eventos son disjuntos o no.	I, II y III	0%	19,04%	19,04%
	II, III y IV	9,52%	0%	9,52%
	II, III y V	4,76%	14,28%	19,04%
	I, II, III y VI	4,76%	9,52%	14,28%
	I, II, III, IV y V	19,04%	14,28%	33,32%
	Sin respuesta	4,76%	0%	4,76%

Fuente: elaboración autoras

En lo que respecta al trasfondo matemático del problema, concierne la aplicación de la regla aditiva de la probabilidad y trasformación entre representaciones numéricas (las probabilidades están dadas en porcentajes). A pesar que, el 23,81% de los participantes cree que conocer la regla aditiva de la probabilidad y la transformación numérica de porcentajes a fracciones no son conocimientos necesarios para el estudiante al momento de resolver el problema. Lo que permite inferir, que los encuestados tienen dificultades al momento de transformar el saber sabio en saber enseñado o derechamente, desconocen cómo abordar el problema.

Por otra parte, el 42,86% de los participantes explicitan que conocer eventos disjuntos o no, tampoco es pertinente al problema. No obstante, si los eventos fueran disjuntos, la intersección sería vacío y la probabilidad de la unión sería la suma de la probabilidad de ambos eventos por sí solos. Lo que nos permite inferir que los encuestados no conocen la naturaleza de la regla aditiva de la probabilidad cuando la intersección es vacío o en su defecto, desconocen cuales eventos son disjuntos.

En relación a la axiomática de Kolmogorov, el 100% de los participantes señalan la necesidad de conocer los axiomas 1 y 2, los cuales dicen que cualquier suceso es mayor que 0 (no es negativo) y menor que 1 (suceso seguro). De igual manera, mencionan la importancia de modelar el problema mediante un diagrama de árbol, tabla o conjuntos, herramientas que favorecen la visualización de los problems para el cálculo de probabilidades.

Finalmente, se concluye que el 33,33% de los encuestados considera necesario conocer los axiomas de Kolmogorov, poseer la habilidad de realizar transformaciones numéricas y comprender las propiedades de la probabilidad, correspondiendo el 19,04% a PF-PP y el 14,28% a PF-NPP.

6.9 Conocimiento de las ideas conceptuales del azar y los significados de la Probabilidad

En la actualidad calcular probabilidades, es considerada una herramienta esencial para la toma de decisiones en situaciones de incerteza. Al respecto se han realizado variadas investigaciones de las cuales se permite infiere, que no todos los estudiantes manejan, conocen y aplican los mismos conceptos sobre la probabilidad (Osorio, Suárez y Uribe, 2013).

Teniendo en cuenta los obstáculos emergentes en el proceso de aprendizaje de la probabilidad, se han de mencionar algunos, como: un deficiente dominio de los conceptos básicos, poca motivación intrínseca, intuiciones erróneas, dificultad para extrapolar conocimientos desde un nivel a otro, un pobre lenguaje probabilístico y la compleja relación entre la probabilidad y el aprendizaje determinista que se genera constantemente en matemática (Osorio, Suárez y Uribe, 2013).

En cuanto a los conocimientos conceptuales que poseen los participantes, se resumen algunas ideas esenciales sobre la probabilidad, basándose en el artículo de Vásquez y Alsina (2015), como se muestra en la Tabla 25.

Tabla 25

Porcentaje de logro en relación a las ideas conceptuales del azar y la probabilidad

Ideas conceptuales vinculadas a la Probabilidad en artículos leídos durante la Formación Profesional en la Asignatura de Didáctica de la Estadística.	Resultados	Profesores en formación		Total
		En práctica Profesional	No práctica profesional	
I. El Azar es la ocurrencia de un suceso no condicionada por la relación de causa efecto.	I, II y III	0%	0%	0%
II. La Probabilidad es igual que la Estadística III. Un juego justo es un juego de azar en el cual los jugadores tienen igual esperanza matemática de ganar	II, III y IV	0%	9,52%	9,52%
IV. La Probabilidad como grado de creencia personal se puede definir como:	III, IV y V	14,28%	0%	14,28%
la proporción entre casos favorables y posibles; el número al que tiene la frecuencia en una serie larga; grado de creencia en el que un suceso ocurra.	I, III, IV y V	14,28%	47,61%	61,89%
V. Casos favorables: un resultado es favorable a un suceso o evento cuando observar este resultado implica la ocurrencia del suceso o evento.	I, IV y V	14,28%	0%	14,28%

Fuente: elaboración autoras

En lo que respecta a los conocimientos conceptuales de los participantes, se observa que el 9,52% correspondiente a los PF-NPP mencionan que la probabilidad es igual a la estadística, lo que nos permite inferir la familiaridad que existe con el eje de Estadística y Probabilidad en el currículo escolar.

Teniendo en cuenta que ambos contenidos matemáticos son complementarios, puesto que, la probabilidad permite modelar y resolver problemas de diferentes contextos (destacando que es el modelo matemático que predice el comportamiento azaroso de situaciones aleatorias) y es una herramienta para crear un razonamiento estadístico, tal como se describe en la Figura 13 (Vásquez *et. al*, 2020).

Figura 13: Vínculo entre la probabilidad y la estadística descriptiva

Fuente: Vásquez *et. al*, 2020

Como se observa, la probabilidad es el puente o vínculo ente la estadística y la inferencia, por lo que se puede mencionar, que la realización del experimento es el factor que permite trabajar desde los supuestos (debido al azar y aleatoriedad), a trabajar con datos reales, después de realizada la experiencia.

Otro aspecto importante de analizar, es que el 14,28% que corresponde a PF-PP, descartan que un juego justo es un juego de azar, en el cual los jugadores tienen igual esperanza matemática de ganar. En particular, el término igual esperanza matemática se comprende como la misma probabilidad de ocurrencia, por lo cual, se puede inferir que los participantes, descartan esta opción como correcta, debido a que en estadística la esperanza de una variable aleatoria se define como su valor medio (es la media aritmética de toda la población estudiada).

En lo que respecta a las ideas conceptuales sobre el azar y la probabilidad (ver Tabla 26), se ha tomado como referentes algunas nociones descritas por del Pino y Estrella (2012).

Tabla 26

Porcentaje de logro en relación a las ideas conceptuales del azar y la probabilidad

Ideas conceptuales vinculadas a la Probabilidad en artículos leídos durante la Formación Profesional en la Asignatura de Didáctica de la Estadística.	Resultados	Profesores en Formación		Total
		En práctica profesional	Sin práctica Profesional	
I. El azar tiene implicancia en la ciencia, deportes, meteorología, juegos de azar.	I, II, III y IV	9,52%	0%	9,52%
II. La probabilidad se vincula con experimentos o con expresiones numéricas del grado de incertidumbre.	I, II, IV y V	28,57%	33,33%	61,9%
III. La probabilidad no forma parte de la matemática.	III, IV y V	4,76%	9,52%	14,28%
IV. La probabilidad permite conceptualizar la variabilidad y la incerteza como un subproducto de la acción de mecanismos aleatorios.	I, III, IV y V	0%	4,76%	4,76%
V. La incerteza, la variabilidad y los errores de medición son usualmente ignorados en los modelos matemáticos. Fuente: del Pino y Estrella, 2012.	Todas las anteriores	0%	9,52%	9,52%

Fuente: elaboración autoras

Se puede observar que el 14,28% de los encuestados, descartan al azar como grado de ocurrencia que no está condicionado por la causa-efecto y tiene implicancia en la ciencia, deportes, juegos de azar, meteorología, entre otros eventos, a los que nos enfrentamos cotidianamente. Deduciendo que la tendencia a explicar todas las situaciones bajo el determinismo, es predominante en el razonamiento de un grupo considerable.

De forma similar, el 14,29% de los participante cree que la probabilidad no se vincula con experimentos relacionado con la incertidumbre, por lo cual se infiere que dicho porcentaje de encuestados asocia la probabilidad con fenómenos donde se conoce su causa-efecto (deterministas). Cabe mencionar que el 9,52% de los participantes identifica el concepto de casos favorables al momento de aplicar la regla de Laplace y no desde una definición formal (su foco es el algoritmo y no el concepto).

Por otra parte, se observar que el 38,1% de los encuentados explicita que la probabilidad no forma parte de la matemática, viéndolo como un contenido diferente, aunque en el currículo escolar, la probabilidad corresponda a un eje de la asignatura de matemática. aislado.

Si bien es cierto que la probabilidad es un cálculo matemático vinculado a sucesos o fenómenos que ocurren bajo el azar o la aleatoriedad (conocidos como fenómenos aleatorios, no determinísticos o estocásticos), existen investigaciones que indican que ambos conocimientos tienen objetos de estudio diferentes, por lo cual, consideran que la probabilidad no forma parte de la matemática en sí.

6.10 Problemas de los Textos del Estudiante entregados por el MINEDUC

En lo que respecta al rol de un futuro profesor, es imprescindible el favorecer el aprendizaje de sus estudiantes, utilizando los recursos y materiales didácticos que el gobierno pone a su disposición, como los libros de textos, por lo cual es preciso observar la naturaleza de los problemas presentes en ellos. En efecto, los libros de texto son una ayuda para el profesor y contienen el saber institucionalizado, además, el profesor es quien debe hacer una transposición didáctica, para trasformar el saber sabio en saber escolar (Ortiz, Batanero y Serrano, 2001).

Cabe señalar, que el delicado proceso de realizar una transposición didáctica está sesgado, en ocasiones, por carencias o errores que posee el mismo profesor y afectan significativamente el aprendizaje de sus estudiantes. Por otra parte, es importante conocer el lenguaje probabilístico y estadístico aparente en los textos escolares, así como el tipo de problemas o contenidos que en ellos hay, para poder prever que los errores o desconocimientos del profesor sean traspasados a sus estudiantes (Ortiz, Batanero y Serrano, 2001).

En consecuencia, la Tabla 27 contiene un problema a nivel de quinto básico, donde se debe de identificar cuál experimento es aleatorio.

Tabla 27

Porcentajes de logro sobre fenómenos aleatorios

Problemas extraídos del Texto del Estudiante Definir un evento aleatorio	Respuestas	Profesores en Formación En práctica profesional	 Sin práctica profesional	Total
Logre identificar cuál de los siguientes experimentos es aleatorio.	a)	0%	0%	0%
a) Lanzar una piedra al aire para ver si cae al suelo. b) Pesar 2 litros de bebida.	b)	4,76%	14,28%	19,04%
c) Contar los segundos que tiene un minuto.	c)	0%	0%	0%
d) Lanzar una moneda al aire y ver si cae cara o sello. Fuente: Cuaderno de actividades 5° Básico, 2020.	d)	38,09%	42,85%	80,94%

Fuente: elaboración autoras

En vista de que el 80,94 % de los encuestados conoce y distingue un evento aleatorio, cabe señalar que el 19,04% de los participantes señala que pesar 2 litros de bebida es un evento aleatorio. En concreto, el 4,76% corresponde a PF-PP y el 14,28% a PF-NPP. De donde resulta preocupante que este porcentaje de futuros profesores desconozca un fenómeno aleatorio básico, un conocimiento base para enseñar probabilidad, puesto que la situación mencionada, no se vincula con el azar, es un fenómeno determinístico, 2 litros de bebida si se pesan cien o infinitas veces, siempre serán 2 litro de bebida.

Así mismo, a nivel de enseñanza media, se requiere que los estudiantes sean capaces de analizar y describir si la probabilidad de un evento es real, subjetiva o experimental, entendiéndose la probabilidad real, como la probabilidad clásica, donde se puede aplicar la regla de Laplace.

Cabe señalar que el Texto del Estudiante de 2° Medio (2019), indica que la frecuencia relativa tiende a la probabilidad teórica a medida que la cantidad de repeticiones aumente, a lo que se le denomina probabilidad experimental. A su vez, menciona que la probabilidad subjetiva es el juicio personal acerca de un evento no determinístico, por lo cual, se denomina como el grado de creencia en la ocurrencia de dicho evento o suceso.

Para tal efecto, se presentan en la Tabla 28, los eventos mencionados que corresponden a una probabilidad subjetiva y las respuestas entregadas por los participantes.

Tabla 28

Preguntas del Texto del Estudiante 2° Medio sobre la probabilidad subjetiva

Probabilidad subjetiva	Respuestas	Profesores en formación: En práctica profesional	Profesores en formación: Sin práctica profesional	Total
Un estudiante estima que tiene una probabilidad de 0,76 de aprobar un examen. Es muy probable que mañana haya mucho tráfico porque comienzan las clases.	Binomial	0%	2,38%	2,38%
	Intuitiva	9,52%	2,38%	11,9%
	Clásica	4,76%	7,14%	11,9%
	Frecuencial	4,76%	4,76%	9,52%
	Subjetiva	16,66%	14,29%	30,95%
	Condicionada	0%	4,76%	4,76%
	Lógica	2,38%	2,38%	4,76%
	Objetiva	0%	4,76%	4,76%
	Matemática	0%	4,76%	4,76%
	Casos Favorables	0%	2,38%	2,38%
	Casos no favorables	0%	2,38%	2,38%
	Nula	4,76%	4,76%	9,52%

Fuente: elaboración autoras

En lo que respecta al tipo de probabilidad que involucran ambos eventos, se observa que son probabilidades subjetivas, puesto que el grado de creencia personal prevalece en ambos casos, debido a la información que proporcionan las frases “un estudiante estima” o “es muy probable”, siendo el porcentaje de logro de un 30,95%. Cabe señalar, que el 4,76% menciona que es una probabilidad *condicionada* (PF-NPP 1, Sexo Masculino), infiriendo que se hace mención al significado subjetivo de la probabilidad, donde se realizan cálculo de probabilidades condicionadas.

Teniendo presente, la gran diversidad de respuestas proporcionadas por los participantes, se exploró en dicha información. En particular, el 2,38% de los PF-NPP, mencionan que los enunciados corresponden a una probabilidad *binomial* (PF-NPP 1, Sexo Masculino). De manera que asignan una distribución binomial discreta, como un tipo de probabilidad, por lo cual, se deduce que dicho porcentaje de encuestados no diferencia una probabilidad de un tipo de distribución de probabilidad o desconoce que una distribución de probabilidad de una variable aleatoria corresponde al conjunto de cada valor de la variable con su probabilidad.

Asimismo, se observa que el 11,9% % de los participantes indica que es una probabilidad *intuitiva* (PF-PP 7, Sexo Femenino), por lo cual se infiere que existe una confusión entre el tipo de probabilidad presente, con el significado intuitivo de la probabilidad. Agregando que, dicho significado entrega una valoración en una escala cualitativa y la primera proposición menciona la creencia de una probabilidad 0,76 de aprobar.

De igual manera, el 11,9% de los encuestados responde que es una probabilidad *clásica* (PF-NPP 4, Sexo Masculino) o probabilidad *clásica simple* (PF-NPP 14, Sexo Masculino), entendiendo que la probabilidad clásica comprende el uso de la regla de Laplace, la cual no se puede aplicar porque no se observan *casos favorables* (PF-NPP 10, Sexo Femenino), como menciona el 2,38% de los PF-NPP y *casos no favorables* (PF-NPP 10, Sexo Femenino), lo explicitado el 2,38% de los PF-NPP. Sin embargo, la frase casos no favorables permite deducir que son el complemento de los casos favorables o tal vez, sean los casos totales.

Al mismo tiempo, el 9,52% de los participantes menciona que es una probabilidad *frecuencial* (PF-PP 17, Sexo Masculino), confundiendo el tipo de probabilidad con el significado frecuencial de la probabilidad, o de igual manera, se puede inferir que se hace mención a la frecuencia relativa. Por otra parte, los enunciados no mencionan repeticiones de los eventos o que la frecuencia relativa tienda a la probabilidad teórica (0,76). En dicho caso, correspondería a una probabilidad experimental, aunque como se observa, los enunciados señalan de la posibilidad de aprobar un examen y la posibilidad de un alto tráfico.

Por otro lado, se observa que el 7,76% de los PF-NPP comentan que es una probabilidad *matemática* (PF-NPP 2, Sexo Femenino), el 23,81%. Lo que permite deducir que se confunde el tipo de probabilidad con la definición básica de la probabilidad, en concreto, un cálculo matemático que permite evaluar (cuantitativamente o cualitativamente) la posibilidad de ocurrencia de un evento aleatorio o estocástico.

Igualmente, se observa que el 4,76% comenta que los enunciados corresponden a una probabilidad *lógica* (PF-NPP 3, Sexo Femenino). Lo que permite vincular la interpretación logicista de la probabilidad, donde el modelo general de la noción de probabilidad, pensada como el grado de creencia racional sobre la posibilidad de ocurrencia de un fenómeno no determinístico, es consecuencia de un conjunto de argumentos propios o externos al observador, los cuales él percibe en relación a la lógica que existe entre las proposiciones (Landro, 2011).

Una última respuesta encontrada en la Tabla 27, corresponde a la probabilidad *objetiva* (PF-PP 6, Sexo Masculino), mencionada por el 4,76% de los participantes. Cabe mencionar que la probabilidad objetiva está fundada bajo la expectativa e interpretación deductiva de la aleatoriedad y de la definición frecuentista (Landro, 2011). Por lo que se infiere, el grado de creencia del observador en los eventos mencionados, como la expectativa de que la probabilidad asignada por ellos, ocurra.

En relación a la probabilidad real, o probabilidad teórica, la Tabla 29 contiene las respuestas entregadas por los participantes al respecto.

Tabla 29

Preguntas del Texto del Estudiante 2° Medio sobre la probabilidad real

Determinar el tipo de probabilidad que se plantea (Real, subjetiva o experimental).	Respuestas	Profesores en formación		Total
		En práctica profesional	Sin práctica profesional	
Al lanzar una moneda, hay una probabilidad de 0,5 de que salga cara.	Binomial	0%	9,52%	9,52%
	Condicionada	0%	4,76%	4,76%
	Clásica	23,8%	19,04%	42,84%
	Frecuencial	4,76%	14,28%	19,04%
	Matemática	4,76%	0%	4,76%
	Objetiva	4,76%	0%	4,76%
	Sucesos	0%	4,76%	4,76%
	Nula	4,76%	4,76%	9,52%

Fuente: elaboración autoras

En lo que respecta al tipo de probabilidad, se observan respuestas similares a las entregadas que en la Tabla 27. Cabe mencionar que, lanzar una moneda al aire es uno de los experimentos más utilizados al momento de enseñar probabilidades, tanto en el significado clásico, como en el frecuencial y a su vez, la probabilidad teórica del evento es 0,5.

Como se ha mencionado, permite comprender las respuestas entregadas por los participantes, en concreto, el 42,86% de los encuestados, la categoriza como probabilidad *clásica* (PF-NPP 9, Sexo Femenino) y el 4,76% lo asocia con el término *sucesos* (PF-NPP 10, Sexo Femenino). Considerando que la proposición relaciona el significado clásico de la probabilidad, la regla de Laplace, la independencia del evento y los axiomas de Kolmogorov.

Por otra parte, el 19,04% de los participantes categorizan el evento como *probabilidad frecuencial* (PF-NPP 16, Sexo Masculino), lo que permite deducir la familiaridad del experimento con el significado frecuencial de la probabilidad, así como su utilización dentro del contexto escolar para introducir el concepto de frecuencia relativa y analizar el vínculo con la probabilidad teórica luego de un gran número de repeticiones.

De igual manera se observa que el 4,76% de los encuestados, menciona que es una probabilidad *condicionada* (PF-NPP 3, Sexo Femenino). No obstante, una probabilidad condicionada requiere de al menos dos eventos, donde el primero entregue o no, información del segundo, sin embargo, el evento menciona solo un lanzamiento.

Otro tipo de probabilidad, es presentado en la Tabla 29, donde se muestran los eventos correspondientes a la probabilidad experimental.

Tabla 29

Preguntas del Texto del Estudiante 2° Medio sobre la probabilidad experimental

Determinar el tipo de probabilidad que se plantea (Real, subjetiva o experimental).	Respuestas	Profesores en formación		Total
		En práctica profesional	Sin práctica profesional	
Se estima que la probabilidad de tener un accidente en carretera es del 7% en septiembre de 2021. Esto, considerando los accidentes de septiembre de 2020. Estudios científicos indican que en 20 años más será menos probable que las personas fumen.	Condicionada	0%	7,14%	7,14%
	Objetiva	0%	11,9%	11,9%
	Hipergeométrica	0%	2,38%	2,38%
	Empírica	0%	4,76%	4,76%
	Frecuencial	14,29%	4,76%	19,05%
	Matemática	4,76%	0%	4,76%
	Clásica	4,76%	0%	4,76%
	Intuitiva	4,76%	7,14%	12,16%
	Porcentual	0%	2,38%	2,38%
	Subjetiva	7,14%	9,52%	16,66%
	Sucesos favorables	0%	2,38%	2,38%
	Nula	7,14%	4,76%	11,9%

Fuente: elaboración autoras

En lo que respecta a los eventos que involucran una probabilidad experimental, se observan respuestas similares a las encontradas en las dos tablas anteriores. Sin embargo, se perciben algunas nuevas, como *hipergeométrica* (PF-NPP 3, Sexo Femenino), considerando que la distribución hipergeométrica es una distribución de probabilidad discreta y esta se relaciona con los muestreos aleatorios sin reemplazamiento.

Al mismo tiempo, el 2,38% menciona una probabilidad *porcentual* (PF-NPP 10, Sexo Femenino), por lo que se infiere, que al entregar los datos en porcentajes y no en un número racionales, el encuestado denomina el tipo de probabilidad como porcentual. No considera que la proposición tiene información relacionada con la frecuencia relativa tras estudios de años anteriores.

Asimismo, el 9,52% señala que es una probabilidad *condicionada* (PF-NPP, Sexo Masculino). A pesar de que no existe un evento que condicione a otro, simplemente, la frecuencia de los accidentes en el año 2020, tiende al 7% y en 20 años más será menos probable que las personas fumen.

De manera análoga, el 4,76% de los encuestados menciona que los eventos corresponden a una probabilidad *empírica* (PF-NPP 4, Sexo Masculino), en consecuencia, se puede mencionar que desde la experiencia y durante el tiempo de formación profesional, en la literatura, en ocasiones a la frecuencia relativa se le denomina con el término de probabilidad empírica.

En definitiva, se deduce que la cantidad de años mencionados, es relacionada por los participantes con la frecuencia relativa. No obstante, esta debería tender a la probabilidad teórica del evento, cuando la cantidad de repeticiones aumenta. En dicho caso, correspondería a una probabilidad del tipo experimental, como lo indica el Texto del Estudiante de 2° Medio (2019).

7. Conclusiones

A partir de los resultados obtenidos, se puede interpretar que el conocimiento común de los participantes en torno a los significados de la probabilidad, es deficiente, debido a que en promedio, la gran mayoría de las preguntas planteadas no superan el 50% de logro.

Por otra parte, se desprende que los participantes logran calcular probabilidades pero no conocen o distinguen bajo qué significado de la probabilidad se está trabajando. Cabe mencionar que, menos de un quinto del total de los encuestados, no logra distinguir fenómenos aleatorios de fenómenos deterministas. Asimismo, existen confusiones entre los tipos de probabilidades con las distribuciones discretas de probabilidad, como la binomial o hipergeométrica.

En relación a los significados de la probabilidad y comparando los resultados obtenidos en la presente investigación con los conceptos de la POPS (Vásquez y Alsina, 2019). Se concluye que los participantes tienen nociones y conocimientos básicos de las características del significado intuitivo de la probabilidad, puesto que, utilizan términos del tipo estocástico, lo vinculan con el lenguaje probabilístico y realizan una valoración en una escala cualitativa los sucesos. No obstante, se evidenciaron confusiones entre el significado intuitivo con el significado clásico, vinculando el lenguaje coloquial con porcentajes o números racionales.

En consecuencia, los participantes asignan probabilidades en una escala cuantitativa, a través de dos representaciones numéricas, porcentajes y fracciones, infiriendo que la cuantificación (el número) es el medio más factible y común para comparar probabilidades y tomar decisiones en situaciones de incerteza.

A su vez, se puede resumir que existen débiles conocimientos de conceptos y propiedades sobre el significado clásico de la probabilidad, debido a que se confunde el Teorema de Bayes y la regla de Laplace y por consecuencia, el significado subjetivo y el significado clásico de la probabilidad. Asimismo, se percibieron dificultades para representar la probabilidad de ocurrencia por medio de una escala cuantitativa.

Al momento de enfocarse en situaciones problemas que estén centradas en el cálculo de probabilidades, casi un tercio de los profesores en formación construye el espacio muestral para distinguir entre casos favorables y no favorables, aplicando la regla de Laplace. No obstaste, se resume, que existen problemas al momento de decodificar información desde los enunciados, lo que implica el cálculo erróneo de la probabilidad planteada en el problema, o en el peor de los casos, confunden un problema de aplicación de la regla de Laplace con uno de probabilidades condicionadas.

En cuanto al significado frecuencial de la probabilidad, en síntesis, menos de un cuarto de los encuestados realiza predicciones a partir de los datos observados en un experimento aleatorio, diferenciando la probabilidad teórica de la frecuencia relativa.

Por consecuencia, un alto porcentaje de encuestados (76,19%) tiene dificultades al momento realizar predicciones a partir de los datos observados, así como estimar probabilidades a partir de repeticiones de un mismo experimento aleatorio, ya sea de forma tabular o gráfica. Además, se cree que el conocimiento teórico del significado frecuencial es débil y les es complejo decodificar información presente en tablas de frecuencia. De forma similar, el uso de términos y expresiones verbales específicas de las probabilidades es otro aspecto deficiente, debido a que menos de un décimo de los participantes tiene nociones del concepto límite como frecuencia relativa al analizar ejemplos o simulaciones de experimentos.

En resumen, el significado subjetivo de la probabilidad es el más débil, debido a que tres cuartas partes de los participantes no comprenden las situaciones problemas donde la probabilidad de ocurrencia se puede ver afectada en base a la información de la que se dispone. Por otro lado, dentro de los procedimientos y algoritmos centrados en la asignación subjetiva de probabilidades, se concluye que existen confusiones entre el Teorema de Bayes y la regla de Laplace.

Acerca del significado axiomático de la probabilidad, las situaciones problemas que involucran la axiomática de la probabilidad para cuantificar la incertidumbre en situaciones abstractas, se evidenció un error elemental en matemática al momento de interiorizar los números racionales y en la toma de decisiones.

Finalmente, se ha de mencionar que los participantes logran aplicar propiedades de la probabilidad, sin embargo, más del 50% de los participantes desconoce o confunde los fundamentos de los eventos dependientes e independientes, su comportamiento y características, incurriendo en la falacia del jugador.

Así pues, los resultados obtenidos, reflejan que casi en su totalidad, los participantes de esta investigación, poseen un débil dominio y conocimiento sobre los significados y propiedades de la probabilidad, por lo cual se cree que es necesario poner mayor énfasis en las asignaturas de estadística y probabilidad impartidas por la universidad a la cual pertenece la muestra, con el objeto de abordad exitosamente la enseñanza y calidad de la educación que impartirán los profesores formados en esta.

8. Bibliografía

Alsina, Ángel (2009). *El aprendizaje realista: una contribución de la investigación en Educación Matemática a la formación del profesorado.* En González, María José; González, María Teresa; Murillo, Jesús (Eds.), Investigación en Educación Matemática XIII (pp. 119-128). Santander: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM. Disponible en: http://funes.uniandes.edu.co/1638/1/293_Alsina2009Elaprendizaje_SEIEM13.pdf

Alvarado, Hugo; Estrella, Soledad; Retamal, Lidia; Galindo, Maritza Intuiciones probabilísticas en estudiantes de ingeniería: implicaciones para la enseñanza de la probabilidad Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME, vol. 21, núm. 2, 2018 Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, Organismo Internacional Disponible en: https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33555954002

Alveal, Francisco Enrique Rodríguez, Fuentes, Ana Carolina Maldonado, & Rubilar, Pedro Rodrigo Sandoval. (2016). Comprensión de las medidas de tendencia central: un estudio comparativo en estudiantes de pedagogía en matemática en dos instituciones formadoras chilenas. Avaliação: Revista da Avaliação da Educação Superior (Campinas), 21(3), 929-952. https://dx.doi.org/10.1590/S1414-40772016000300013

Alveal, Francisco Rodríguez, & Rubilar, Pedro Rodrigo Sandoval. (2012). Habilidades de codificación y descodificación de tablas y gráficos estadísticos: un estudio comparativo en profesores y alumnos de pedagogía en enseñanza basica. Avaliação: Revista da Avaliação da Educação Superior (Campinas), 17(1), 207-235. https://dx.doi.org/10.1590/S1414-40772012000100011

Arnáez Muga, Pablo. (2005). Algunos principios pedagógicos derivados de la teoría de piaget aplicados en el área de lengua. *Paradígma*, *26*(1), 07-34. Recuperado en 09 de diciembre de 2020, de http://ve.scielo.org/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1011-22512005000100002&lng=es&tlng=es

Arnaldos García, Fuensanta; Faura Martínez, Úrsula Aprendizaje de los fundamentos de la probabilidad apoyado en las TICs @tic. Revista d'innovació educativa, núm. 9, julio-diciembre, 2012, pp. 131-139 Universitat de València Valencia, España. Disponible en: https://www.redalyc.org/pdf/3495/349532305017.pdf

Batanero Bernabeu, C. y Serrano Romero, L. (1995). La aleatoriedad, sus significados e implicaciones educativas. *UNO* 5, 15-28. Recuperado de: https://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/aleatoriedad.pdf

Batanero Bernabeu, Carmen y Gómez Torres, Emilse y Contreras García, José Miguel y Díaz Batanero, Carmen (2015). Conocimiento matemático de profesores de primaria en formación para la enseñanza de la probabilidad: un estudio exploratorio. Práxis Educativa (Brasil), 10 (1). ISSN: 1809-4031. Disponible en: https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=894/89438282001

Batanero Bernabeu, Carmen y López Martín, María. (2015). El lenguaje del azar en alumnos de Educación Secundaria Obligatoria. Recuperado de: http://www.ugr.es/~batanero/documentos/Hdez.pdf

Batanero, C. & Serrano, L. (1995). Aleatoriedad, sus significados e implicaciones educativas. Recuperado de https://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/aleatoriedad.pdf

Batanero, Carmen (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME, 8 (3), 247-263. [Fecha de Consulta 3 de Abril de 2021]. ISSN: 1665-2436. Disponible en: https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33508302

Bunge, Mario, 2013. Intuición y razón. Disponible en: https://books.google.es/books?hl=es&lr=&id=GSsBAgAAQBAJ&oi=fnd&pg=PT2&dq=mario+bunge+2013&ots=UgzSd5klMO&sig=yu5VWuSOboi_v8PvJgQ8BKDitKM#v=onepage&q=mario%20bunge%202013&f=false

Centro de estudios del Ministerio de Educación, Septiembre 2013. Disponible en: https://centroestudios.mineduc.cl/wp-content/uploads/sites/100/2017/06/A2N21_Curriculum_EMedia.pdf

Centro de perfeccionamiento, experimentación e investigación pedagógica, 2019. Recuperado de: https://www.cpeip.cl/formacion-inicial-docente/

Chirinos Bossio, Ricardo. (2007). El problema de la explicación en la ciencia: Las explicaciones causales en Bas Van Fraassen. *Opción*, *23*(53), 140-155. Recuperado en 11 de noviembre de 2020, de http://ve.scielo.org/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1012-15872007000200009&lng=es&tlng=es

Del Pino, Guido y Estrella, Soledad, 2012. Educación estadística: relaciones con la matemática. Pensamiento Educativo. Revista de Investigación Educacional Latinoamericana 49(1), 53-64. Disponible en: https://www.researchgate.net/profile/Soledad-Estrella/publication/272908651_Educacion_estadistica_relaciones_con_la_matematica_Statistical_Education_Relationships_with_Mathematics/links/554cf25c0cf21ed2135f5a74/Educacion-estadistica-relaciones-con-la-matematica-Statistical-Education-Relationships-with-Mathematics.pdf

Estándares orientadores para carreras de pedagogía en educación media, mayo2012. Ministerio de Educación, Chile. Recuperado de http://educacion2020.cl/documentos/estandares-orientadores-para-carreras-de-pedagogia-en-educacion-media/

Estándares orientadores para egresados de pedagogía en educación básica, pág. 19, 2020. https://www.cpeip.cl/wp-content/uploads/2016/07/librobasicaokdos.pdf

Estrella, Soledad, Olfos, Raimundo, & Mena-Lorca, Arturo. (2015). El conocimiento pedagógico del contenido de estadística en profesores de primaria. *Educação e Pesquisa*, *41*(2), 477-493. https://doi.org/10.1590/s1517-97022015041858

García García, Emilio. (2003). Neuropsicología y género. Revista de la Asociación Española de Neuropsiquiatría, (86), 7-18. Recuperado en 29 de julio de 2021, de http://scielo.isciii.es/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0211-57352003000200002&lng=es&tlng=es

Hacking, Ian, 1990. La domesticación del azar. Disponible en: https://books.google.es/books?hl=es&lr=&id=ud7EzIBwQBwC&oi=fnd&pg=PP15&dq=hacking+1990&ots=fmJVIwa-KX&sig=1bi1hZsbByH1O-s0Vr68ol40qqA#v=onepage&q&f=false

Hernández Ortiz, Héctor, & Parra Dorantes, Roberto. (2013). Problemas sobre la distinción entre razonamientos deductivos e inductivos y su enseñanza. Innovación educativa (México, DF), 13(63), 61-73. Recuperado en 05 de diciembre de 2020, de http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-26732013000300005&lng=es&tlng=es

Inzunsa Cazares, Santiago y Guzmán Reyes, Martha Catalina (2011). Comprensión que muestra profesores de secundaria acerca de los conceptos de probabilidad: un estudio exploratorio. Educación Matemática, 23 (1), 63-95.ISSN: 0187-8298. Disponible en:

http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-58262011000100004

Landro, Alberto Acerca de la existencia del verdadero valor de una probabilidad Cuadernos del CIMBAGE, núm. 13, 2011, pp. 55-78 Facultad de Ciencias Económicas Buenos Aires, Argentina. Disponible en: https://www.redalyc.org/pdf/462/46218718003.pdf

Matus-Zúñiga, Claudia, 2014. Principios para la acción, resumen ejecutivo. Recuperado de: https://www.nctm.org/uploadedFiles/Standards_and_Positions/Principles_to_Actions/PtAExecutiveSummary_Spanish.pdf

McMillan, J. H; Schumacher, S. Investigación educativa. Una investigación conceptual. Madrid: Pearson, 2005 Madrid: Pearson Addison Wesley (5th Edición), 656. Recuperado de: https://des-for.infd.edu.ar/sitio/upload/McMillan_J._H.__Schumacher_S._2005._Investigacion_educativa_5_ed..pdf

MINEDUC, 2020. Evaluación Nacional Diagnóstica de la Formación Inicial Docente ENDFID. Recuperado de https://www.diagnosticafid.cl/#:~:text=La%20Ley%20de%20Sistema%20de,%C3%BAltimo%20a%C3%B1o%20de%20la%20carrera

Ministerio de Educación de Chile, 2015. Bases curriculares de 7° básico a 2° medio. Disponible en: https://media.mineduc.cl/wp-content/uploads/sites/28/2017/07/Bases-Curriculares-7%C2%BA-b%C3%A1sico-a-2%C2%BA-medio.pdf

Moder, Maximiliano. (2014). El Currículo: la cara oculta de la calidad de la educación. Recuperado de: https://www.elmostrador.cl/noticias/opinion/2014/06/20/el-curriculo-la-cara-oculta-de-la-calidad-de-la-educacion/

National council of teachers of mathematics. Principios para la acción. Disponible en: https://www.nctm.org/uploadedFiles/Standards_and_Positions/Principles_to_Actions/PtAExecutiveSummary_Spanish.pdf

Ortiz, Juan Jesús, & Batanero, Carmen y Contreras, José Miguel (2012). Conocimiento de futuros profesores sobre la idea de juego equitativo. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, relime, 15 (1), 63-91. ISSN: 1665-2436. Disponible en: http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-24362012000100004

Ortiz, Juan Jesús, Batanero, Carmen y Serrano, Luis. El Lenguaje probabilístico en libros de textos. Suma, en prensa. Disponible en: https://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/SUMALENGUAJE2001.pdf

Osorio Angarita, María Alejandra; Suárez Parra, Augusto; Uribe Sandoval, Carmen Constanza Revisión de alternativas propuestas para mejorar el aprendizaje de la Probabilidad Revista Virtual Universidad Católica del Norte, núm. 38, febrero-mayo, 2013, pp. 127-142 Fundación Universitaria Católica del Norte Medellín, Colombia. Disponible en: https://www.redalyc.org/pdf/1942/194225730010.pdf

Parraguez, Rafael, 2016. Relación entre los significados clásico y frecuencial de la probabilidad: un estudio con futuros profesores. Universidad de Granada. Disponible en: http://www.ugr.es/~batanero/documentos/TFMRafaPa.pdf

Restrepo B, Luis F; González L, Julián La Historia de la Probabilidad Revista Colombiana de Ciencias Pecuarias, vol. 16, núm. 1, marzo, 2003, pp. 83-87 Universidad de Antioquia Medellín, Colombia. Disponible en: https://www.redalyc.org/pdf/2950/295026121011.pdf

Rodríguez Alveal, Francisco, Vásquez Ortiz, Claudia, & Rojas Sateler, Francisco. (2019). Teaching initial training in mathematics teachers: a look from the national diagnostic assesment. *Estudios pedagógicos (Valdivia)*, *45*(2), 141-153. Disponible en: https://dx.doi.org/10.4067/S0718-07052019000200141

Rodríguez Alveal, Francisco, Vásquez Ortiz, Claudia, & Rojas Sateler, Francisco. (2019). Formación inicial docente en profesores de matemática: una mirada desde la evaluación nacional diagnóstica. Estudios pedagógicos (Valdivia), 45(2), 141-153. Disponible en: https://dx.doi.org/10.4067/S0718-07052019000200141

Rodriguez-Alveal, Francisco y Díaz-Levicoy, Danilo, Diciembre, 2019. Evaluación de la alfabetización gráfica del profesorado de Educación Básica en formación y en activo. Educar em revista, 35 (78). Disponible en: https://www.scielo.br/j/er/a/g9VbR7DhHgsHCzJ6XVxJFvt/?lang=es#

Rodríguez-Alveal, Francisco, & Díaz-Levicoy, Danilo. (2019). Evaluación de la alfabetización gráfica del profesorado de Educación Básica en formación y en activo. Educar em Revista, 35(78), 85-103. Epub December 05, 2019. Disponible en: https://dx.doi.org/10.1590/0104-4060.68977

Rodríguez-Alveal, Francisco, Díaz-Levicoy, Danilo, & Vásquez-Ortiz, Claudia. (2018). Evaluación de la alfabetización probabilística del profesorado en formación y en activo. Estudios pedagógicos (Valdivia), 44(1), 135-156. https://dx.doi.org/10.4067/S0718-07052018000100135

Sánchez, Ernesto. (2009). La probabilidad en el programa de estudio de matemáticas de la secundaria en México. Educación matemática, 21(2), 39-77. Recuperado en 24 de junio de 2021, de http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-58262009000200003&lng=es&tlng=es

Sánchez, Ernesto. (2009). La probabilidad en el programa de estudio de matemáticas de la secundaria en México. *Educación matemática*, *21*(2), 39-77. Recuperado en 29 de junio de 2021, de http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-58262009000200003&lng=es&tlng=es

Vásquez Ortiz, Claudia y Parraguez González, Marcela (2014). Construcciones mentales para el aprendizaje del concepto de probabilidad: un estudio de caso. Educación Matemática, 26 (3), 37-74. ISSN: 0187-8298. Disponible en: http://www.scielo.org.mx/scielo.php?pid=S1665-58262014000300037&script=sci_abstract&tlng=pt https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=405/40540689003

Vásquez Ortiz, Claudia, & Alsina, Ángel. (2017). Aproximación al conocimiento común del contenido para enseñar probabilidad desde el modelo del Conocimiento Didáctico-matemático. *Educación matemática*, *29*(3), 79-108. https://doi.org/10.24844/em2903.03

Vásquez, C. &Alsina, A. (2015).El conocimiento del profesorado para enseñar probabilidad: Un análisis global desde el modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático. Avances de Investigación en Educación Matemática, 7, 27 -48. Disponible en: https://aiem.es/index.php/aiem/article/view/104

Vásquez, C. y Alsina, A. (2013). Enseñanza de la Probabilidad en Educación Primaria. Un Desafío para la Formación Inicial y Continua del Profesorado. Recuperado de http://www.sinewton.org/numeros/numeros/85/Articulos_01.pdf

Vásquez, C. y Alsina, Á. (2015). Un modelo para el análisis de objetos matemáticos en libros de texto chilenos: situaciones problemáticas, lenguaje y conceptos sobre probabilidad. Recuperado de:

https://www.researchgate.net/publication/281455467_UN_MODELO_PARA_EL_ANALISIS_DE_OBJETOS_MATEMATICOS_EN_LIBROS_DE_TEXTO_CHILENOS_SITUACIONES_PROBLEMATICAS_LENGUAJE_Y_CONCEPTOS_SOBRE_PROBABILIDAD

Vásquez, C. y Alsina, Á. (2019). Diseño, construcción y validación de una pauta de observación de los significados de la probabilidad en el aula de Educación Primaria. Recuperado de: https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2019.e62434/40953

Vásquez, Claudia y Alsina, Angel, Enero-Marzo 2019. Conocimiento especializado del profesorado de educación básica para la enseñanza de la probabilidad. Profesorado, revista de curriculum y formación del profesorado, 23 (1). Disponible en: http://funes.uniandes.edu.co/14777/1/Vasquez2019Conocimiento.pdf

Vásquez, Claudia, & Alsina, Ángel. (2015). Conocimiento Didáctico-Matemático del Profesorado de Educación Primaria sobre Probabilidad: diseño, construcción y validación de un instrumento de evaluación. Bolema: Boletim de Educação Matemática, 29(52), 681-703. https://doi.org/10.1590/1980-4415v29n52a13

Vásquez, Claudia; Alsina, Ángel Conocimiento Didáctico-Matemático del Profesorado de Educación Primaria sobre Probabilidad: diseño, construcción y validación de un instrumento de evaluación Boletim de Educação Matemática, vol. 29, núm. 52, agosto, 2015, pp. 681-703 Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho Rio Claro, Brasil. Disponible en: https://www.redalyc.org/pdf/2912/291241073014.pdf

Vásquez, Claudia; Alsina, Ángel (2014). *Enseñanza de la probabilidad en educación primaria. Un desafío para la formación inicial y continúa del profesorado.* Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 85, pp. 5-23. Disponible en: http://funes.uniandes.edu.co/3677/

Veiga de Cabo, Jorge, Fuente Díez, Elena de la, & Zimmermann Verdejo, Marta. (2008). Modelos de estudios en investigación aplicada: conceptos y criterios para el diseño. *Medicina y Seguridad del Trabajo*, *54*(210), 81-88. Recuperado en 20 de diciembre de 2020, de https://scielo.isciii.es/pdf/mesetra/v54n210/aula.pdf

Velásquez, Sergio, & Velásquez, Ronny. (2012). Modelado con variables aleatorias en simulink utilizando simulación montercarlo. Universidad, Ciencia y Tecnología, 16(64), 203-211. Recuperado en 05 de enero de 2021, de

http://ve.scielo.org/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1316-48212012000300006&lng=es&tlng=es