Universidad del Biobío
Facultad de Educación y Humanidades
Departamento de Ciencias Básicas

$\mathbb{R}^n$ Y l_p

COMO ESPACIOS NORMADOS Y COMPLETOS

JOSÉ TOMAS MORENO Y FRANCISCO YAÑEZ
PROFESOR GUÍA: LUIS FRIZ ROA

Fecha: Chillan, 12 de Julio de 2021

Agradecimientos

En primer lugar, queremos agradecer al profesor Luis Friz Roa quien fue nuestro profesor guía en esta actividad de titulación, quien nos apoyó cada semana, con sus consejos, recomendaciones y arreglos beneficiosos para esta actividad, y principalmente agradecer el hecho de aceptarnos como estudiantes para este dicho proceso. También queremos agradecer al gato Michelino quien nos acompañó en cada tarde trabajo y por último agradecer al juego Age of Empiere II por ser nuestra fuente de antiestrés en días tensos del desarrollo de la actividad de no ser por él no se hubiera concretado de buena manera esta actividad de titulación.

Índice general

Capítulo 1

Preliminares

La siguiente actividad de titulación tratará de una revisión bibliográfica matemática sobre un tema introductorio del análisis funcional específicamente $\mathbb{R}^n$ y l_p como espacios normados y completos. Podemos decir que el análisis funcional es un concepto relativamente nuevo en la matemática (esto a comparación con las matemáticas convencionales) ya que no lleva más de 120 años estudiado. La actividad de titulación estará compuesta de cuatro capítulos, los cuales abordaran temas específicos de dicha revisión bibliográfica. En el primer capítulo se hace referencia a la historia del Análisis funcional, en el cual conoceremos en los años en que se empezo a estudiar y sus principales autores. Se presentarán los objetivos a abordar en esta actividad de titulación

1.1. Historia

Los espacios normados y completos son parte del análisis funcional, el cual nace a principios del siglo XX, como el marco abstracto adecuado para solucionar una serie de problemas del Análisis muy importantes en esos momentos. Algunos autores (Fréchet(1973), Schmidt(1876), F. Riesz(1880), Fisher(1962) entre otros) desarrollaron muchas nociones que hoy en día son fundamentales para el análisis funcional como la distancia en un conjunto abstracto y desde ahí diversas nociones topológicas como completitud, compacidad, separabilidad. En 1922, dentro de la tesis de Banach, se desarrolló una teoría general de espacios normados y operaciones lineales que eran parte del análisis funcional, el cual vivió un gran desarrollo hasta 1932, en ese tiempo se sistematizó la aplicación de métodos topológicos al estudio de los espacios de Banach.

Stefan Banach (1892 - 1945)Nació el 30 de marzo de 1892 Kraków, Imperio Austro-Húngaro, hoy Polonia. Cursó estudios en el Instituto de Tecnología en Lvov y fue profesor en la Universidad de Lvov. En su tesis doctoral de 1920 presentó la definición axiomática de los espacios que hoy llevan su nombre. Contribuyó a lo que hoy es el análisis funcional moderno y a la teoría de los espacios vectoriales topológicos. Su trabajo más destacado es la Theorie des operations lineaires (Teoría de operaciones lineales, 1932). Stefan Banach falleció el 31 de agosto de 1945 Lvov, Ucrania. A partir de 1922, Banach investigó los espacios lineales normados con la propiedad de la completitud -ahora llamados espacios de Banach. Aunque algunos otros matemáticos contemporáneos, como Hans Hahn(1934), Maurice René Fréchet(1973), Eduard Helly (1943) y Norbert Wiener(1964), desarrollaban simultáneamente conceptos de análisis funcional, ninguno realizaba la tarea tan minuciosamente y sistemáticamente como Banach y sus alumnos. Sus tres resultados fundamentales fueron el teorema sobre la extensión de funcionales lineales continuos (ahora llamado teorema de Hahn-Banach, ya que tanto Banach como Hahn lo demostraron independientemente); el teorema sobre las familias acotadas de mapeos (llamado el teorema de Banach-Steinhaus); y el teorema sobre mapeos lineales continuos de espacios de Banach. Introdujo las nociones de convergencia débil y clausura débil, que se ocupan de la topología de los espacios lineales normados.

La noción de espacio métrico también proporciono el marco en el cual se desarrollo el algebra del infinito con que habían soñado los analistas de principios de siglo; a saber, la teoría de espacios normados que permitió comprender mejor gran parte de los problemas del análisis funcional lineal y atacarlo con mas generalidad y eficacia, Forjada por los esfuerzos conjuntos de varios analistas entre 1910 y 1935, principalmente Riesz Helly, Hahn y Banach, esta teoría combina las ideas del algebra lineal y la noción e distancia, siguiendo el modelo proporcionado por la descripción geometría del espacio de Hilbert, debida a Schmidt y Frechet

Otto Holder (1937) fue otro matemático que hizo grandes avances que ayudaron y fueron fundamentales para el estudio de los espacios l^p, este matemático ayudó al desarrollo de las desigualdades de Brunn Minkowski(1909), la cual es una generalización de la desigualdad triangular en el espacio l^p.

Brunn Minkowski nació en Aleksotas, Rusia (actualmente Kaunas, Lituania), y cursó sus estudios en Alemania en las universidades de Berlín y Königsberg, donde realizó su doctorado en 1885. Durante sus estudios en Königsberg en 1883 recibió el premio de matemáticas de la Academia de Ciencias Francesa por un trabajo sobre las formas cuadráticas. Minkowski impartió clases en las universidades de Bonn, Königsberg y Zúrich. En Zúrich fue uno de los profesores de Einstein. Minkowski exploró la aritmética de las formas cuadráticas sobre n variables. Sus investigaciones en este campo le llevaron a considerar las propiedades geométricas de los espacios n dimensionales.

1.2. Objetivos

- Objetivo General

  Comprender los espacios normados y completos en $\mathbb{R}^n$y l^p
- Objetivo Específicos

  (O1)Describir los espacios normados y completos en $\mathbb{R}^n$y l_p

  (O2)Mostrar que $\mathbb{R}^n$y l_p son espacios normados y completos

  (O3)Presentar ejemplos los espacios normados y completos en $\mathbb{R}^n$y l_p

Capítulo 2

Espacios Vectoriales

En el segundo capítulo se definira el espacio $\mathbb{R}^n$, el espacio vectorial acompañados de ejemplos, tambien se definirán conceptos, teoremas, desigualdades y sucesiones los cuales ayudaran a demostraciones que se desarrollaran en los capitulos siguientes.

2.1. Definición de espacio $\mathbb{R}^n$ y espacio vectorial

2.1.1. Espacio Vectorial. Un espacio vectorial V sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) es un conjunto no vacío de elementos llamados vectores, el cual se definen dos operaciones algebraicas.

$$\oplus : V \times V \to V$$
$$\otimes : \mathbb{K} \times V \to V$$

Estas operaciones son llamadas sumas de vectores y multiplicación de vector por escalar, este último, multiplicado por un elemento de $\mathbb{K}$.

A continuación se definen las propiedades del espacio vectorial considerando las leyes de composición interna y composición externa.

Propiedades.

Sean u, v y w elementos de V y α, β son números en el cuerpo $\mathbb{K}$.

1.$u \oplus v = v \oplus u$

2.$(u \oplus v) \oplus w = u \oplus (v \oplus w)$

3.Existe un vector nulo $0_v \in V$, tal que $v \oplus 0_v = v$

4.Para cada v en V , existe un opuesto $-v \in V$ tal que $v \oplus (-v) = 0_v$

5.$\alpha \otimes (u \oplus v) = \alpha \otimes u \oplus \alpha \otimes v$

6.$v \otimes (\alpha \oplus \beta) = \alpha \otimes v \oplus \beta \otimes v$

7.$\alpha \otimes (\beta \otimes v) = (\alpha\beta) \otimes v$

8.$1 \otimes v = v$

Ejemplo. Determinar si $\mathbb{R}^+$ con las operaciones $\oplus$ y $\otimes$ (para este ejemplo considerar $\oplus$ y $\otimes$ como operaciones definidas en el espacio)es un espacio vectorial, donde,

$$\begin{aligned} x \oplus y &= x \cdot y, \\ \lambda \otimes x &= x^{\lambda}. \end{aligned}$$

Aquí, $x \cdot y$ y x^{λ} son el producto y la potencia usuales en $\mathbb{R}^+$, para las cuales valen todas las propiedades definidas en este conjunto.

- Veamos que las $\oplus$ y $\otimes$ son cerradas en $\mathbb{R}^+$:

a) Sean $x, y \in \mathbb{R}^+$, debemos probar que $x \oplus y \in \mathbb{R}^+$

$x \oplus y = x \cdot y$, y como $x, y \in \mathbb{R}^+$, entonces $x > 0$ e $y > 0$ y por lo tanto $x \cdot y > 0$, es decir $x \cdot y \in \mathbb{R}^+$, luego $x \oplus y \in \mathbb{R}^+$

b) Sean $x \in \mathbb{R}^+$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ debemos probar que: $\lambda \cdot x \in \mathbb{R}^+$

$\lambda \cdot x = x^{\lambda}$, y como $x \in \mathbb{R}^+$entonces $x > 0$

$$\therefore \quad \text{se tiene que } x^{\lambda} > 0, \text{es decir } x^{\lambda} \in \mathbb{R}^+ \quad \text{luego } \lambda \cdot x \in \mathbb{R}^+$$

- Veamos que se verificán los siguientes axiomas:

a) Sean $x, y \in \mathbb{R}^+$, debemos probar que $x \oplus y = y \oplus x$

$x \oplus y = x \cdot y$ como el producto es conmutativo en $\mathbb{R}^+$

$$\begin{aligned} x \oplus y &= x \cdot y \\ &= y \cdot x \\ &= y \oplus x. \end{aligned}$$

b) Sean debemos probar que: $x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$, en efecto,

$$\begin{aligned} x \oplus (y \oplus z) &= x\cdot (y\cdot z) \text{ como el producto es asociativo en } \mathbb{R}^+ \\ &= (x\cdot y)\cdot z \\ &= (x \oplus y)\cdot z \\ &= (x \oplus y) \oplus z. \\ \therefore x \oplus (y \oplus z) &= (x \oplus y) \oplus z \end{aligned}$$

Además $x \oplus 1 = x\cdot 1 = x$.

$$\therefore \quad \text{existe } 1 \in \mathbb{R}^+ \text{tal que } 1 \oplus x = x \oplus 1 = x \quad \text{tal que } x \in \mathbb{R}^+$$

c) Debemos probar que existe $a \in \mathbb{R}^+$ tal que que $a \oplus x = x \oplus a$, para todo $x \in \mathbb{R}^+$.
Calculemos el vector a. El vector a debe ser tal que $a \oplus x = x$,
es decir que

$$a\cdot x = x$$

$$\therefore \quad a = \quad 1$$

Verifiquemos que $1 \oplus x = x \oplus 1 = x$, para todo $x \in \mathbb{R}^+$,

$$\begin{aligned} 1 \oplus x &= 1\cdot x \\ &= x. \end{aligned}$$

Además por comnutatividad

$$\begin{aligned} x \oplus 1 &= x\cdot 1 \\ &= x \end{aligned}$$

$$\therefore \quad \text{existe } 1 \in \mathbb{R}^+ \text{tal que } 1 \oplus x = x \oplus 1 = x, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^+$$

d) Debemos probar que para todo $x \in \mathbb{R}^+$existe $b \in \mathbb{R}^+$tal que

$$b \oplus x = x \oplus b = 1$$

Calculamos el vector b :
b debe ser tal que $b \oplus x = 1$, es decir que $b\cdot x = 1$ y

$$\therefore \quad b = \frac{1}{x}, \text{donde } x \neq 0 \quad \text{pues } x \in \mathbb{R}^+$$

Verificamos que $\frac{1}{x} \oplus x = x \oplus \frac{1}{x} = 1$, para todo $x \in \mathbb{R}^+$:

$$\frac{1}{x} \oplus x = \frac{1}{x}\cdot x = 1$$

además

$$x \oplus \frac{1}{x} = x\cdot \frac{1}{x} = 1$$

$$\therefore \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R}^n \text{ existe } \mathbb{R}^n \text{ tal que} \quad \frac{1}{x} + x = x + \frac{1}{x} = 1$$

e) Sean $x, y \in \mathbb{R}^+$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, debemos probar que: $\lambda \otimes (x \oplus y) = (\lambda \otimes x) \oplus (\lambda \otimes y)$

$$\begin{aligned} \lambda \otimes (x \oplus y) &= \lambda \otimes (x \cdot y) \\ &= (x \cdot y)^\lambda \\ &= x^\lambda \cdot y^\lambda \\ &= (\lambda \otimes x) \cdot (\lambda \otimes y) \\ &= (\lambda \otimes x) \oplus (\lambda \otimes y) \end{aligned}$$

$\therefore$ se cumple que $\quad \lambda \otimes (x \oplus y) = \quad (\lambda \otimes x) \oplus (\lambda \otimes y)$

f) Sean $x \in \mathbb{R}^+$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ debemos probar que: $(\lambda + \mu) \otimes x = (\lambda \otimes x) \oplus (\mu \otimes x)$

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu) \otimes x &= x^{\lambda + \mu} \\ &= x^\lambda \cdot x^\mu \\ &= (\lambda \otimes x) \cdot (\mu \otimes x) \\ &= (\lambda \otimes x) \oplus (\mu \otimes x) \end{aligned}$$

$\therefore$ se verifica que $\quad (\lambda + \mu) \otimes x = \quad (\lambda \otimes x) \oplus (\mu \otimes x)$

g) Sean $x \in \mathbb{R}^+$y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, debemos probar que: $(\lambda \cdot \mu) \otimes x = \lambda \otimes (\mu \otimes x)$

$$\begin{aligned} (\lambda \cdot \mu) \otimes x &= x^{\lambda \cdot \mu} \\ &= (x^\mu)^\lambda \\ &= (\mu \otimes x)^\lambda \\ &= \lambda \otimes (\mu \otimes x) \end{aligned}$$

$\therefore$ se verifica que $\quad (\lambda \cdot \mu) \otimes x = \quad \lambda \otimes (\mu \otimes x)$

h) Sean $x \in \mathbb{R}^+$ y $1 \in \mathbb{R}$, debemos probar que: $1 \otimes x = x$

$$\begin{aligned} 1 \otimes x &= x^1 \\ &= x^1 \\ &= x \end{aligned}$$

$\therefore$ se cumple que $\quad 1 \otimes x = x$

De todo lo anterior, $\mathbb{V} = [\mathbb{R}^n, \otimes, \oplus]$ es un espacio vectorial.

2.1.2. Espacio $\mathbb{R}^n$.

Formalmente, se define:

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_i \in \mathbb{R},\ i = 1, \ldots, n\}$$

Como el conjunto formado por todas las n-uplas(es una secuencia o lista ordenada finita de n objetos, y estos elementos se dice que son sus componentes) de números reales ordenados. Sus elementos se pueden sumar componente a componente, y también se pueden multiplicar por un número real, multiplicando cada componente por dicho número. Estas dos operaciones que acabamos de mencionar, hacen de $\mathbb{R}^n$ un espacio vectorial sobre los reales. Como veremos a contunuación.

Definición 1. La primera operación se llama ley de composicion interna y se define como

$$+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

$$((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) \mapsto (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n).$$

Observación. Esta operación tiene la siguientes propiedades:

1. Asociativa. para cada $u, v, w \in \mathbb{R}^n$, $(u + v) + w = u + (v + w)$.
2. Elemento neutro. Existe un elemento $u \in \mathbb{R}^n$ tal que cada, $e + u = u + e = e$ donde $e \in \mathbb{R}^n$
3. Inverso. Dado $u \in \mathbb{R}^n$, existe un $v \in \mathbb{R}^n$, existe $v \in \mathbb{R}^n$,tal que $u + v = v + u = 0$. En nuestro cado, $v = -u$ y se llama el opuesto de u.
4. Conmutativa. Para todo $u, v \in \mathbb{R}^n$, $u + v = v + u$.

Definición 2. La segunda operación se llama ley de composicion externa y se define como

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

$$(\lambda, (x_1, \ldots, x_n)) \quad \mapsto \quad \lambda(x_1, \ldots, x_n)$$

$$\therefore \lambda(x_1, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$$

Observación. La ley de composición externa tiene las siguientes Propiedades:

1. Distributivas. Para cada $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ y cada $u, v \in \mathbb{R}^n$,
   a) $(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u$
   b) $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$
2. $1u = u$
3. Pseudoasociativa Para cada $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ y cada $u \in \mathbb{R}^n$.
   $(\lambda\mu)u = \lambda(\mu u)$:

Observación. Con todo lo anterior $\mathbb{R}^n$ resulta un espacio vectorial.

2.2. Norma

Se considera norma al valor absoluto $|\cdot|$ de un vector, el cual se define como la longitud o magnitud (en línea recta) entre dos puntos A y B, los cuales delimitan al vector. Coincidiendo en un espacio euclídeo la norma de un vector con el módulo del vector AB. En el siguiente capítulo volveremos a mencionar este concepto.

Sabemos que $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ es un espacio vectorial. Se denomina norma, denotada por $\|\cdot\|$, a una aplicación con dominio $\mathbb{R}^n$ y a valores en $\mathbb{R}$, a saber,

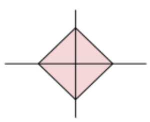
$$\|\cdot\| : \mathbb{R}^{\mathrm{n}} \longrightarrow \mathbb{R}$$

tal que, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ y $\forall z, w \in \mathbb{R}^n$ cumple las siguientes propiedades:

- $\|z\| \geq 0$ y $\|z\| = 0 \Longleftrightarrow z = 0$.
- $\|\lambda z\| = |\lambda| \|z\|$
- $\|z+w\| \leq \|z\|+\|w\|$ (esta propiedad es denominada desigualdad triangular).

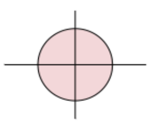
Se puede observar los siguientes ejemplos de normas en $\mathbb{R}^n$:

a) La norma 1 en $\mathbb{R}^n$: $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_1|$



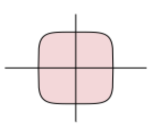
Disco unitario en norma 1

b) La norma 2 o norma euclidiana en $\mathbb{R}^n$: $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_1|^2}$



Disco unitario en la norma euclídea

c) Norma p en $\mathbb{R}^n$: $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}$



2.2.1. Norma-P:.

Dentro de las normas vectoriales, existe un tipo de norma conocida como norma p. Las cuales se definen de la siguiente forma: sea $p \in [1, +\infty[$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\|x\|_p = (|x_1|^p + |x_2|^p + \ldots + |x_N|^p)^{1/p} = \left[\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p\right]^{\frac{1}{p}}.$$

La demostración de que la norma-P es efectivamente una norma se realizará en el Capítulo tres.

2.3. Convexidad de la función exponencial y Desigualdad Young

2.3.1. Convexidad de la funcion exponencial. Convexidad de la funcion exponencial: En este tema denotamos por exp a a función exponencia restringida al eje real

$$\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$

donde $\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$.

La segunda derivada de esta función es positiva en cada punto:

$$\exp''(x) = \exp(x) > 0$$

luego la función exp es convexa. Esto significa que para todo x,y $\in \mathbb{R}$ y todos $\alpha, \beta \geq 0$ con $\alpha + \beta = 1$ se cumple la desigualdad

$$\exp(\alpha x + \beta y) \leq \alpha \exp(x) + \beta \exp(y). \tag{2.3.1}$$

Exponentes conjugados. Dos números $p, q > 1$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ se llaman exponentes conjugados. Tal vez otro nombre adecuado sería exponentes complementarios. Es fácil ver que la condicion $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ se puede escribir tambien en la siguiente forma equivalente

$$(p-1)q = p.$$

2.3.2. Desigualdad de Young.

TEOREMA 3. *Sean $p, q > 1$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. y sean $a, b \geq 0$.Entonces*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

DEMOSTRACIÓN. Si $a = 0$ o $b = 0$, entonces el lado izquierdo de la desigualdad es 0, mientras el lado derecho es no negativo, por tanto la desigualdad se cumple. Sean $a > 0$ y $b > 0$. Entonces la desigualdad de Young se obtiene a partir de la (2.3.1). al hacer el siguiente cambio de variable.

$$\alpha = \frac{1}{p},\ \beta = \frac{1}{q}, x = p\ln(a), y = q\ln(b).$$

□

2.4. Desigualdad de Holder

TEOREMA 4. *Sean* $x_1, ..., x_n,\ y_1, ..., y_n > 0$ *y sean* $p, q > 1$ *tal que satisfacen,*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Entonces se satisface la siguiente desigualdad,

$$\sum_{i=1}^{n} x_1 y_1 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^q\right)^{1/q}. \tag{2.4.1}$$

Con igualdad si y sólo si (x_i^p) *e* (y_i^p) *son proporcionales; es decir, si y sólo si, para algunos* α, β*, ambos no nulos, tenemos* $\alpha x_i^p = \beta y_i^q$ *para todo* $i = 1, ..., n$*. El caso* $p = q = 2$ *se conoce generalmente como desigualdad de cauchy-schwarz.*

DEMOSTRACIÓN. Podemos asumir que

$$u = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{1/p} \neq 0, v = \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^q\right)^{1/q} \neq 0$$

en cuyo caso tenemos, por la desigualdad de young, que

$$\frac{x_1}{u} \cdot \frac{y_1}{v} \leq \frac{1}{p}\left(\frac{x_i}{u}\right)^p + \frac{1}{q}\left(\frac{y_i}{v}\right)^q \tag{2.4.2}$$

para cada i, con igualdad si y sólo si $\left(\frac{x_i}{u}\right)^p = \left(\frac{y_i}{v}\right)^q$. Sumando en i, obtenemos

$$\frac{1}{uv}\sum_{i=1}^{n} x_1 y_1 \leq \frac{1}{pu^p}\sum_{i=1}^{n} x_i^p + \frac{1}{qv^q}\sum_{i=1}^{n} y_i^q = 1$$

de donde se deduce la desigualdad. Debemos tener en cuenta que la igualdad en (2,4,1), implicaria la igualdad en (2,4,2) para todo i y por lo tanto, $\left(\frac{x_i}{u}\right)^p = \left(\frac{y_i}{v}\right)^q$ para todo i; esto es, x_i^p e y_i^q serían proporcionales. Si $0 < p < 1$ la desigualdad cambia de sentido. □

2.5. Desigualdad de Minkowski

TEOREMA 5. *Para* $1 \leq p < \infty$ *y* $N \in \mathbb{N}$ *para* $a_1 \dots a_n,\ b_1 \dots b_n \in \mathbb{R}_0^+$ *se tiene:*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^p\right)^{1/p}.$$

DEMOSTRACIÓN. Veamos primero para $p = 1$. Se reduce a la desigualdad triangular. Consideraremos $p > 1$, además, sea $q > 1$, tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Si $\sum (a_j + b_j)^p \neq 0$, sabemos que $(a_j + b_j) \leq a_j + b_j$. Utilizando $(p-1)\ q = p$ y la desigualdad de Holder, tenemos.

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^p = \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)(a_i + b_i)^{p-1}$$

$$=\sum_{i=1}^{n} a_i(a_i+b_i)^{p-1}+\sum_{i=1}^{n} b_i(a_i+b_i)^{p-1}.$$

Aplicando la desigualdad de holder para cada una de las sumas anteriores se tiene:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(a_i+b_i)^{p-1} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} (a_i+b_i)^{q(p-1)}\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\sum_{i=1}^{n} b_i(a_i+b_i)^{p-1} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} (a_i+b_i)^{q(p-1)}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Donde $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$, de esto, $q=\dfrac{p}{p-1}$, y por lo tanto, $(p-1)q=p$. considerando esto tenemos:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (a_j+b_j)^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{i=1}^{n} (a_j+b_j)^{p}\right)^{1-\frac{1}{p}},$$

retomando las desigualdades anteriores obtenemos

$$\sum_{i=1}^{n} (a_j+b_j)^p \leq \left((\sum_{i=1}^{n} a_j^p)^{\frac{1}{p}} + (\sum_{i=1}^{n} b_j^p)^{\frac{1}{p}})\right) \left(\sum_{i=1}^{n} (a_j+b_j)^p\right)^{1-\frac{1}{p}},$$

y como $\sum(a_i+b_i)^p \neq 0$, podemos dividir por el segundo factor obteniendo

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (a_j+b_j)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)^{1/p'}.$$

□

2.6. Sucesión de Cauchy

Definición 6. Sea $\{x_k\}$ una sucesión de puntos de $\mathbb{R}^n$. Se dice que $\{x_k\}$ es una sucesión de Cauchy si para todo $\varepsilon>0$, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$k,l \geq N_0 \Rightarrow \|x_k - x_l\| < \varepsilon.$$

Teorema 7. *Una sucesión $\{x_k\} \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ es convergente si y sólo si cumple el criterio de Cauchy.*

Demostración. Supongamos que $x_k \to x$, cuando $k \to \infty$,

$$\therefore \|x_k - x\| < \varepsilon \forall k > N_0.$$

Se tiene entonces que

$$\|x_k - x\| = \|x_k - x + x - x_l\| \quad \leq \|x_k - x\| + \|x - x_l\| \quad < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$\forall k,l > N_0 \therefore \{x_k\}$ cumple la condición de Cauchy □

Ejemplo. Las sucesiones de términos generales

$$a_n = \frac{1}{n} b_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

son de Cauchy. En el caso de la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ esto es muy fácil ya que fijado $\in > 0$ existe, por la propiedad arquimediana, $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $1/n_0 < \varepsilon/2$ y en consecuencia

$$| a_n - a_m | = \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right| \leq \left| \frac{1}{n} \right| + \left| \frac{1}{m} \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Para la sucesión $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hay que observar en primer lugar que

$$\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = \frac{1}{n(n-1)} > \frac{1}{n^2},$$

con lo que, si $m > n$, se tiene

$$|b_m - b_n| = |\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + ... + \frac{1}{m^2}|$$

$$\leq \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{(n+1)} \right) + \left(\frac{1}{(n+1)} - \frac{1}{(n+2)} \right) + ... + \left(\frac{1}{m-1} - \frac{1}{m} \right)$$

$$= \frac{1}{n} - \frac{1}{m} < \frac{1}{n}.$$

Dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $1/n_0 < \varepsilon$ y en consecuencia si $n, m > n_0$, se tiene $|b_m - b_n| < \varepsilon$. Esto acaba la prueba de que ambas sucesiones son de Cauchy.

Capítulo 3

$\mathbb{R}^n$ como espacio normado

El tercer capítulo trata específicamente $\mathbb{R}^n$ como espacio normado. Se conocerá como $\mathbb{R}^n$ es un espacio normado y completo realizando una serie de demostraciones y ejemplos.

3.1. Espacio normado

En matemática un espacio vectorial se dice que es normado si en él se puede definir una norma.

DEFINICIÓN. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) donde se define una norma, tal que la norma es una función en V

$$\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}.$$

Sea $x, y \in V$ y $\alpha \in \mathbb{K}$, Ves un espacio normado si satisface las siguientes propiedades:

1. $x \neq 0 \Rightarrow \|x\| > 0$.
2. $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|, \forall \alpha \in \mathbb{K}$.
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall x \in V$ (desigualdad triangular)

EJEMPLO. $\|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\propto} |x(n)|^p \right)^{1/p}$

I)$\|x\|_p = 0$ si y solo si $x = 0$; tambien se cumple para $\|x\|_p \geq 0$

$$\left(\sum_{n=1}^{\propto} |x(n)|^p \right)^{1/p} = 0 \Rightarrow \|x\|_p = 0$$
$$\therefore \|x\|_p \geq 0$$

II)$\|\lambda x\|_p = |\lambda| \|x\|_p$

$$\|\lambda x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\propto} |\lambda x(n)|^p \right)^{1/p} = \left(\sum_{n=1}^{\propto} |\lambda|^p |x(n)|^p \right)^{1/p} = |\lambda| \left(\sum_{n=1}^{\propto} |x(n)|^p \right)^{1/p} = |\lambda| \, \|x\|_p .$$

III) $\|x + y\|_p = \|x\|_p + \|y\|_p$, para este paso basta utilizar la desigualdad de Minskowski.

$$\|x + y\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\propto} |x(n) + y(n)|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{n=1}^{\propto} |x(n)|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{n=1}^{\propto} |y(n)|^p \right)^{1/p} = \|x\|_p + \|y\|_p$$

EJEMPLO. b$\|f\|_{\propto} = \sup_{t \epsilon T} |f(t)|$.

I)$\|f\|_{\propto} = 0 \Longrightarrow \sup_{t \epsilon T} |f(t)| = 0$; tambien se cumple para $\|f\|_{\propto} \geq 0$
como $f(t) \geq 0 \forall t \epsilon T$

$$x = 0 \Longrightarrow f(t) = 0 \therefore \sup_{t \epsilon T} |f(t)| = 0$$

II)$\|\lambda f\|_{\propto} = |\lambda| \, \|f\|_{\propto}$

$$\|\lambda f\|_{\propto} = \sup_{t \epsilon T} |\lambda f(t)| = \sup_{t \epsilon T} |\lambda| \, |f(t)| = |\lambda| \sup_{t \epsilon T} |f(t)| = |\lambda| \, \|f\|_{\propto} .$$

III) $\|f(t) + g(t)\|_{\propto} = \|f(t)\|_{\propto} + \|g(t)\|_{\propto}$, para este paso utilizamos desigualdad triangular.

$$\|f(t)+g(t)\|_{\propto} = \sup_{t\epsilon T}|f(t)+g(t)| \leq \sup_{t\epsilon T}|f(t)| + \sup_{t\epsilon T}|g(t)| = \|f(t)\|_{\propto} + \|g(t)\|_{\propto}$$

3.2. El espacio normado $\mathbb{R}^n$

En $\mathbb{R}^n$, se define una norma la cual se asocia al producto escalar de la siguiente manera. Sea un vector $x \in \mathbb{R}^n$, y la norma euclidea $\|\cdot\|_2$ una aplicación en $\mathbb{R}^n$, entonces

$$\|x\|_2 = \|(x_1,\ldots,x_n)\| = \sqrt{x\cdot x} = \sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2}.$$

Tal como fue mencionado en la definición anterior, para que $\mathbb{R}^n$ sea un espacio normado, éste debe cumplir con las propiedades de espacios normados, las cuales seran demostradas a continuación.

Sea $(\mathbb{R}^n, \mathbb{K}, +, \cdot)$ un espacio vectorial, y sea una norma $\|\cdot\|$, una aplicación en $\mathbb{R}^n$, entonces $\mathbb{R}^n$ es un espacio normado si y sólo si se cumplen las siguientes propiedades.

1. $x \neq 0 \Rightarrow \|x\| > 0$.
2. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|, \forall \alpha \in \mathbb{K}$.
3. $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall x \in V$ (desigualdad triangular)

Demostración. Para demostrar que $\mathbb{R}^n$ es un espacio normado, se va considerar la norma-p, la cual como en el capítulo dos es definida como

$$\|x\|_P = (|x_1|^p + |x_2|^p + \ldots + |x_n|^p)^{1/P} = \left[\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p\right]^{1/p}.$$

A continuación se procederá a realizar la demostración : Se prueba la propiedad 1 $x \neq 0 \Rightarrow \|x\| > 0$:

-Se considera la norma-p de la siguiente manera

$$\|x\|_p = (|x_1|^p + |x_2|^p + \ldots + |x_n|^p)^{1/p} = \sqrt[p]{|x_1|^p + |x_2|^p + \ldots + |x_N|^p}$$

Se puede observar que :

$$\|x\|_P = \sqrt[p]{|x_1|^p + |x_2|^p + \ldots + |x_N|^p} > 0 \Rightarrow \|x\|_p > 0,$$

con esto la demostración de la propiedad 1 queda realizada.

-Se prueba la propiedad 2. a saber,

$$\|\alpha x\|_p = |\alpha|\|x\|_p$$

Donde el producto dentro de la norma, es un producto escalar.

Sea $\forall \alpha \in \mathbb{K}$ y $x \in \mathbb{R}^n$ considerando la norma-p

$$\|\alpha x\|_P = (|\alpha x_1|^p + |\alpha x_2|^p + \ldots + |\alpha x_n|^p)^{1/p} = \sqrt[p]{|\alpha x_1|^p + |\alpha x_2|^p + \ldots + |\alpha x_N|^p},$$

podemos observar:

$$= \sqrt[p]{|\alpha x_1|^p + |\alpha x_2|^p + \ldots + |\alpha x_N|^p} = \sqrt[p]{|\alpha^p x_1^p \mid + |\alpha^p x_2^p \mid + \ldots + |\alpha^p x_n^p \mid}_1$$

$$= \sqrt[p]{|\alpha|^p \mid x_1 \mid^p + |\alpha|^p \mid x_2 \mid^p + \ldots + |\alpha|^p \mid x_n \mid^p} = \sqrt[p]{|\alpha|^p (\mid x_1 \mid^p + \mid x_2 \mid^p + \ldots + \mid x_n \mid^p)}$$

$$\sqrt[p]{|\alpha|^p} \sqrt[p]{\mid x_1 \mid^p + \mid x_2 \mid^p + \ldots + \mid x_N \mid^p} = |\alpha| \sqrt[p]{\mid x_1 \mid^p + \mid x_2 \mid^p + \ldots + \mid x_N \mid^p} = |\alpha| \|x\|_p,$$

es decir,

$$\therefore \|\alpha x\|_P = |\alpha| \|x\|_p,$$

con esto la demostración de la propiedad 2 queda realizada.

-Se prueba la propiedad 3. Sea $x \in \mathbb{R}^n$ e $y \in \mathbb{R}^n$, y la norma-p $\| \cdot \|_p$, entonces

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$$

conocida como propiedad de desigualdad triangular. Se observa en primer instancia el caso $p = 1$ entonces

$$\|x + y\|_1 \leq \|x\|_1 + \|y\|_1,$$

en efecto, se puede observar de la siguiente manera que la desigualdad triangular se cumple. Dados $x, y \in \mathbb{R}^n$, por un lado,

$$\begin{aligned} \|x\|_1 &= |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|, \\ \|y\|_1 &= |y_1| + |y_2| + \ldots + |y_n|. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|x + y\|_1 &= |x_1 + y_1| + |x_2 + y_2| + \ldots + |x_n + y_n|, \text{por desigualdad triangular en } \mathbb{R}, \\ &\leq |x_1| + |y_1| + |x_2| + |y_2| \ldots + |x_n| + |y_n| \\ &= (|x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|) + (|y_1| + |y_2| + \ldots + |y_n|) \\ &= \|x\|_1 + \|y\|_1 \end{aligned}$$

es decir,

$$\|x + y\|_1 \leq \|x\|_1 + \|y\|_1.$$

-Para el caso $p > 1$,aplicando desigualdad de minkosky

$$(|x_i + y_i|^p = (|x_i + y_i| \, |x_i + y_i|^{\,p-1}) = (|x_i| \, |x_i + y_i|^{\,p-1} + |y_i| \, |x_i + y_i|^{\,p-1})$$

sumando en i,

$$\sum_{i=1}^{n} (|x_i + y_i|^{\,p}) = \sum_{i=1}^{n} (|x_i| \, |x_i + y_i|^{\,p-1} + |y_i| \, |x_i + y_i|^{\,p-1}),$$

aplicando desigualdad triangular

$$\sum_{i=1}^{n} (|x_i + y_i|^{\,p}) \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| \, |x_i + y_i|^{\,p-1} + \sum_{i=1}^{n} |y_i| \, |x_i + y_i|^{\,p-1},$$

para completar la demostración utilizamos la desigualdad de Holder, a tener en cuenta que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, de esta conjugación se obtiene que $(p-1)q=p$

$$\sum_{i=1}^{n}(|x_i+y_i|^{p}) \leq \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^{(p-1)q}\right)^{1/q}+\left(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^{(p-1)q}\right)^{1/q}$$

$$\sum_{i=1}^{n}(|x_i+y_i|^{p}) \leq \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^{p}\right)^{1/q}\left[\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^{p}\right)^{1/q}+\left(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^{p}\right)^{1/q}\right]$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(|x_i+y_i|^{p})}{\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^{p}\right)^{1/q}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^p\right)^{1/p}$$

$$\sum_{i=1}^{n}(|x_i+y_i|^{p})^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^p\right)^{1/p}$$

se desmuestra la propiedad. Por lo tanto se puede concluir, que $\mathbb{R}^n$ es un espacio normado, dado que las 3 propiedades se cumplen. □

Como se vio en esta demostración, fue utilizada la norma-p, esto dado que como fue mencionado en el capítulo anterior, las normas 1,2, o norma 3, son caso puntuales de la norma-p, por lo tanto al considerar la norma como una generalización de los mencionados, implica que cualquier norma es válida en el espacio normado $\mathbb{R}^n$.

3.3. Espacio Banach

Definición 8. Se dice que un espacio normado X es una espacio de Banach si todas sucesión de Cauchy en X es convergente a un punto de X. En este caso diremos que la norma de X es completa

Un espacio de Banach es un espacio normado, completo con respecto a la métrica inducida por la norma $\|\cdot\|$, o sea un espacio normado tal que para toda sucesión $\{x_n\}$ de cauchy existe un $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que x_0 es el límite de la sucesión, en el sentido habitual, es decir,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists\ N_0 \in \mathbb{N} \|x_n - x_0\| < \varepsilon \Leftrightarrow n \geq N_0.$$

Ejemplos: Los siguientes son ejemplos de espacios de Banach.
1)$\mathbb{R}$ con la norma dada por el valor absoluto
2)$\mathbb{C}$ con la norma dada por el módulo.
3)Para $1 \leq p < \infty$, sea

$$l_p = \left\{(x_n)_{n\geq 1} : x_n \in \mathbb{R} \text{ y } \sum \mid x_i \mid^p < \infty\right\}.$$

Donde para $x=(x_n)_{n\geq 1} \in l_p$ se define la norma,

$$\| x \|_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} | x_p |^p \right)^{1/p}.$$

Entonces l_p con esta norma es un espacio de Banach. Hacemos notar que la desigualdad triangular falla para $0 < p < 1$.

Los detalles de este ejemplo se dáran en el proximo capítulo

Ejemplo. $(B[a,b], \| \cdot \|)$ es de Banach

Vamos a ver que $(B[a,b], \| \cdot \|)$ es de banach y entonces lo tendremos demostrado en particular para $T = [a,b]$

Vemos que $(B(T), \| \cdot \|)$ es completo

Sea $\{f_n\}_{n \in N}$ de Cauchy entonces $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|f_n - f_m\| < \varepsilon\ \forall n, m \geq n_0$$

entonces $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ es de Cauchy $\forall x \in T$

$$(|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|) \Longrightarrow \exists f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)\ \forall x \in T.$$

Luego en principio tenemos una función $f : T \to \mathbb{R}$ y utilizando que $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|f_n - f_m| < \varepsilon\ \forall n, m \geq n_0\ \forall x \in T \tag{3.3.1}$$

Haciendo tender m al infinito se tiene que $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}$tal que

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \forall n \geq n_0$$

$\forall x \in T \Longrightarrow |f(x)| \leq |f_n(x)| + \varepsilon \leq \|f_n\| + \varepsilon \leq M + \varepsilon \forall n \in \mathbb{N} \Longrightarrow$ f $\in$ B(T)

Por (3.3.1) $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|f_n - f\| \leq \varepsilon \forall n \geq n_0 \Longrightarrow f_n \text{ convergente } f.$$

Luego este espacio es completo y por lo tanto es de Banach

3.3.1. $\mathbb{R}^n$ como espacio normado completo. Para demostrar que $\mathbb{R}^n$ es un espacio normado completo vamos a considerar a $\mathbb{R}^2$, el cual demostraremos que es normado y completo.

En $\mathbb{R}^2$ definimos la norma $\| \cdot \|_p$, donde $p = 2$ de la siguiente manera

$$\|(x,y)\|_2 = \left(\sum_{k=1}^{2} | x_k |^2 \right)^{1/2} = \left(|x|^2 + |y|^2 \right)^{1/2} = \sqrt{|x|^2 + |y|^2}$$

Se demostrará que $\mathbb{R}^2$ es un espacio normado, para esto se deben cumplir las siguientes propiedades:

1. $x \neq 0 \Rightarrow \|x\| > 0$.
2. $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|, \forall \alpha \in \mathbb{K}$.
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall x \in V$ (desigualdad triangular).

Demostración. 1.-Probaremos que la propiedad 1 se cumple, sea $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, se observa:

$$\|(x,y)\|_2 = \sqrt{|x|^2 + |y|^2}.$$

Si consideramos $(x,y) \neq (0,0)$, entonces,

$$\|(x,y)\|_2 = \sqrt{|x|^2 + |y|^2} > 0 \Rightarrow \|(x,y)\|_2 > 0.$$

2.- Probaremos que la propiedad 2 se cumple. Sea $(x_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ y sea $\alpha \in \mathbb{K}$ entonces se observa que

$$\|(\alpha x, \alpha y)\|_2 = \sqrt{|\alpha x|^2 + |\alpha y|^2} = \sqrt{|\alpha^2 x^2| + |\alpha^2 y^2|}$$
$$= \sqrt{\alpha^2(|x|^2 + |y|^2)} = \alpha\sqrt{|x|^2 + |y|^2}$$
$$\therefore \|(\alpha x, \alpha y)\|_2 = |\alpha| \|(\alpha x, \alpha y)\|_2$$

3.- Probaremos la propiedad 3 Sea $x, y \in \mathbb{R}^2$ entonces

$$\|x_k + y_k\|_2 = \|x_k\|_2 + \|y_k\|_2$$

Para probar la desigualdad de triangular basta con aplicar la desigualda de minkoski que ya fue probada anteriormente y que viene dada como

$$\sum_{i=1}^{n} (|x_i + y_i|^2)^{1/2} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^2\right)^{1/2}$$

entonces

$$\left(\sum_{k=1}^{2} | x_k + y_k |^2\right)^{1/2} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^2\right)^{1/2}$$

Como$\mathbb{R}^2$ con la norma 2 $\|\cdot\|_2$,cumple las tres propiedades de espacio normado, entonces $\mathbb{R}^2$ es un espacio normado. □

Teorema 9. *Sucesión de Cauchy en* $\mathbb{R}^2$

Demostración. Consideremos una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}^2$,$\{(x_n, y_n)\}_{n>1}$. Asi, para cada $\varepsilon > 0$ existe $N > 0$ de modo que

$$n, m > N \Rightarrow \| (x_n, y_n) - (x_m, y_m) \|_p < \varepsilon$$

$$n, m > N \Rightarrow \| (x_n, x_m - y_m, y_n) \|_p < \varepsilon$$

$$n, m > N \Rightarrow |x_n - x_m| \leq \| (x_n - x_m, y_m - y_n) \|_p < \varepsilon$$

de donde se deduce que $\{x_n\}$ es de Cauchy. Del mismo modo, $\{y_n\}$ es de Cauchy. Así existen, $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$$
$$\lim_{n\to\infty} y_n = y_0$$

pero $\| (x, y) \|_p \leq 2^{1/p}(|x| + |y|)$. Para cada $\varepsilon > 0$ existe N_1 de modo que

$$n \geq N_1 \Rightarrow |x_n - x_0| < \frac{\varepsilon}{2}$$

también existe $N_2 > 0$ de modo que

$$n \geq N_2 \Rightarrow |y_n - y_0| < \frac{\varepsilon}{2}$$

sea ahora $N = max\{N_1, N_2\}$ se tiene

$$n > N \Rightarrow |x_n - x_0| < \frac{\varepsilon}{2} \wedge |y_n - y_0| < \frac{\varepsilon}{2},$$

sumando,

$$\Rightarrow 2^{-1/P} \parallel (x_n, y_n) - (x_0, y_0) \parallel_p \leq |y_n - y_0| + |y_n - y_0| < \varepsilon$$

$\square$

OBSERVACIÓN. Ya que se a probado que $\mathbb{R}^2$ es un espacio normado completo podemos genaralizar para $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$. Así queda demostrado que $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ es un espacio normado completo.

Capítulo 4

Los Espacios l_p

El cuarto capítulo se conocerá como l_p es un espacio normado y completo realizando una serie de demostraciones acompañado de un ejemplo, se conoceran la inclusión que tiene los espacios l_p

4.1. $l_p$como espacio normado

Espacios l_p con $1 \leq p < \infty$. Para $1 \leq p < \infty$, denotaremos por l_p al conjunto de todas las sucesiones $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tales que

$$\sum_{n \geq 1}^{\infty} | x(n) |^p < \infty$$

Demostraremos que es un espacio vectorial. Debemos tener en cuenta que la suma de los elementos de este conjunto está también en el conjunto. para ello comprobemos que la siguiente expresión es una norma en l_p.

$$\| x \|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} | x_n |^p \right)^{1/p}$$

Demostración. Probaremos los axiomas de norma

1.Si$\|x\|_p = 0$si y sólo si $x = 0$

Si $\|x\|_p = 0 \Rightarrow \left(\sum_{n=1}^{\infty} | x_n |^p \right)^{1/p} = 0$ pero esto significa que la suma de infinitos números positivos es cero, y esto sólo puede ocurrir cuando todos los números son 0, de esto

obtenemos que $x_n = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Es decir,

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} | x_n |^p \right)^{1/p} = 0 \Rightarrow \|x\|_p = 0.$$

2.$\|\alpha x\|_p = |\alpha| \, \|x\|_p$para cualquier $x \in l_p$y para cualquier $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\Big\|\alpha x\Big\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} | \alpha x_n |^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} | \alpha |^p | x_n |^p \right)^{\frac{1}{p}} = | \alpha | \left(\sum_{n=1}^{\infty} | x_n |^p \right)^{\frac{1}{p}} = |\alpha| \Big\|x\Big\|_p$$

3.Propiedad de desigualdad triangular $\|x + y\|_p = \|x\|_p + \|y\|_p$

$$\|x + y\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} | x_n + y_n |^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} | x_n |^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} | y_n |^p \right) = \|x\|_p + \|y\|_p$$

Para el ultimo axioma hemos utilizado la desigualdad de Minskowski. □

4.2. l_p como espacio normado completo

Teorema 10. *Vamos ahora a probar que l_p es un espacio de Banach. Sea $\{x_n\}$ una sucesion de Cauchy en l_p y, fijado $k \in \mathbb{N}$, consideremos la sucesión de escalares $\{x_n(k)\}$. Para cualesquiera $m, n \in \mathbb{N}$ es claro que $|x_n(k) - x_m(k)| \leq \|x_n - x_m\|_p$, asi que $\{x_n(k)\}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{K}$, luego convergente. Definiendo, para cada $k \in \mathbb{N}, x(k) = \lim_{n \to \infty} x_n(k)$ obtenemos una sucesión $x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Nuestro objetivo es comprobar que $x \in l_p$ y que $\{\|x_n - x\|_p\} \to 0$, cuando $n \to \infty$, concluyendo la demostración.*

Para ello, empezamos fijando $\varepsilon > 0$ y usando que $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy en l_p, para encontrar un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para $n, m \geq n_0$ se tenga $\|x_n - x_m\|_p < \varepsilon$. Por tanto, para cualquier $N \in \mathbb{N}$, tendremos

$$\sum_{k=1}^{N} |x_n(k) - x_m(k)|^p \quad \leq (\| x_n - x_m \|_p)^p \quad < \varepsilon^p$$

Fijado un natural $n \geq n_0$, la desigualdad anterior, valida para $m \geq n_0$ nos permite escribir

$$\sum_{k=1}^{N} |x_n(k) - x(k)|^p \quad = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{N} |x_n(k) - x_m(k)|^p \quad \leq \varepsilon^p,$$

y puesto que $N \in \mathbb{N}$ es arbitrario, deducimos que

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_n(k) - x(k)|^p \leq \varepsilon^p.$$

Hemos probado que $x_n - x \in l_p$, luego tambien $x = x_n - (x_n - x) \in l_p$, pero entonces la ultima desigualdad nos dice que $\|x_n - x_m\|_p \leq \varepsilon$. Como esto último es válido para $n \geq n_0$, tenemos que la sucesion $\{x_n\}$ converge a x, como queríamos.

Analizamos ahora brevemente la relación entre los espacios l_p, para distintos valores de p. Si tomamos $1 \leq p < q < \infty$ y fijamos un sucesión $x \in l_p$, como quiera que $\lim\limits_{n\to\infty} x(n) = 0$, tendremos $|x(n)|^q \leq |x(n)|^p$ para n suficientemenre grande, con lo que el criterio de comparación para series de terminos positivos nos dice que $x \in l_q$. La implicación contraria no es cierta: la sucesión $\{n^{1/p}\}$esta en l_q pero no en l_p.En resumidas cuentas, el conjuto l_p se agranda estrictamente al aumentar p.

Ejemplo. q Demostrar que para cualquier $p \geq 1$ todo elemento del espacio l_p es un elemento del espacio c_0

pero el elemento $x = (1, \frac{1}{\ln 2}, \frac{1}{\ln 3}, ..., \frac{1}{\ln n}, ...) \in c_0$($c_0$es un conjunto cualquiera) l_p para ningun $p \geq 1$

Solución: si $x \in l_p \Longrightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty$esto significa que esta serie es convergente, entonces sabemos por el criterio del límite para series, que $\lim\limits_{k\to\infty} |x_k|^p = 0$

$$\Longrightarrow x_k|^p < \varepsilon \ \forall k \geq k_0$$
$$\Longrightarrow |x_k| < \varepsilon^{1/p} \ \forall k \geq k_0$$
$$\Longrightarrow \lim_{k\to\infty} |x_k| = 0$$

Pero como $-|x_k| \leq x_k \leq |x_k| \Longrightarrow \lim\limits_{k\to\infty} x_k = 0 \Longrightarrow x \in c_0$

Vemos ahora que $x = (1, \frac{1}{\ln 2}, \frac{1}{\ln 3}, ..., \frac{1}{\ln n}, ...) \in c_0 \ y \ x \notin l_p$

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} x_k \quad &= \quad \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\ln k} = 0 \\ \Longrightarrow x \quad a = \quad &(1, \frac{1}{\ln 2}, \frac{1}{\ln 3}, ..., \frac{1}{\ln n}, ...) \in c_0 \end{aligned}$$

Por otro lado

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} |\frac{1}{\ln k}|^p > 1 + \sum_{k=2}^{n_0} |\frac{1}{\ln k}|^p + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Esta desigualdad se tiene porque sabemos que para un número suficientemente grande se verifica que $(\ln n)^p < n$.

Un vez que ya tenemos esta desigualdad y utlizando que el ultimo sumando es divergente se tiene que $x \notin l_p$

4.3. Inclusiones

Si $0 < p < q < \infty$, entonces $l_p \subset l_q$

Demostración. Se $x \in l_p$entonces $\sum |x_n|^p < \infty$, en virtud de esto existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$, entonces $|x_n| < 1$

Ahora, como $0 < p < q$, entonces $0 < q - p$, asi $|x_n|^{q-p} < 1$ si $n > n_0$, por lo cual

$$|x_n|^q < |x_n|^p \quad si \quad n > n_0$$

Sea $M = \max\{|x_n|^{q-p}, |x_n|^{q-p}, ..., |x_n|^{q-p}, 1\}$ luego a

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^q &= \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p |x_n|^{q-p} \\ &< M \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < +\infty \\ &\therefore x \in l_q \end{aligned}$$

□

Observación 11. La inclusión $l_p \subset l_q$es propia, en efecto, sea $x_n = n^{-1/p}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ con $1 \leq p < q \leq \infty$, luego puesto que $p < q$, entonces $\frac{q}{\mathrm{p}} > 1$, ahora consideremos

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{q/p}} < \infty$$

La útima serie es convergente en virtud del criterio de las series p, asi $x_n \in l_q$, por otra parte

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \to \infty \text{ (serie armónica)}$$

$$\therefore \quad x_n \notin l_p.$$

Asi pues para $1 \leq p < q \leq \infty$ vemos que l_p esta contenido en l_q. Tal inclusión es estricta como muestran las series armonicas. En concreto, definiendo $x_n = n^{-1/p}$ como se realizo anteriormente para todo $n \in \mathbb{N}$, es claro que $x \in l_q$ pero $x \notin l_p$.

Debe quedar claro que l_p esta contenido en l_q como espacio vectorial, pero en l_p usamos la norma $\|\cdot\|_p$, que no coincide con la norma inducida por l_q, que es la restriccion a l_p de la norma $\|\cdot\|_q$. Estas dos normas en l_p no son equivalentes, pues $\|\cdot\|_p$ es completa pero la norma inducida por l_q no lo es, ya que l_p no es cerrado en l_p

Bibliografía

[1] Albert, R. P. (sin año). Tesis Apuntes de Análisis Funcional. Granada : Universidad de Granada.
[2] Algebra, D. d. (sin año). Tesis Analisis Matematico . Valladolid: Universidad de Valladolid.
[3] Fúster, A. A. (2005). Teoríıa, procedimientos de demostración . Cuba: Universidad Central.
[4] González, F. J. (2010). ANÁLISIS FUNCIONAL EN ESPACIOS DE BANACH. Granada: Universidad de Granada.
[5] R, L. M. (2000). Minimización en espacios de Hilbert y Espacios de Banach . Merida, Venezuela : Trabajo de ascenso.
[6] Wawrzynczyk, A. (1965). Analisis 1 . Iztapalapa: Universidad Autónoma Metropolitana.
[7] Balmohan V. Limaye. (1981). FUNCTIONAL ANALYSIS. New York: New York