Universidad del Bío-Bío
Facultad de Educación y Humanidades
Pedagogía en Educación Matemática
Campus La Castilla
Chillán

"La noción de magnitud en la formación inicial de profesores en la Universidad del Bío-Bío"

Seminario para optar al título de Profesor de Enseñanza Media en Educación Matemática

TESISTAS:
CÁDIZ DURDOS MARITZA
FUENTEALBA TORRES MIRIAM
PINELA CARRASCO JORGE

PROFESORA GUIA: Dra. SARA PASCUAL P.

CHILLAN, ABRIL 2020

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a todos aquellos quienes fueron mi fortaleza en los momentos de debilidad a lo largo de mi carrera, especialmente a mis padres quienes siempre me guiaron y acompañaron. Doy gracias a mis hijos y Javier mi pareja por haber sido pilares fundamentales, ya que con su apoyo y cariño han sabido darme la oportunidad de formarme académicamente.

Maritza Cádiz

Gracias Dios por haberme permitido culminar esta carrera, a mi familia, especialmente a mi padre Miguel quien con mucho esfuerzo luchó por sacarnos adelante y me dio el apoyo para poder aspirar a obtener un título universitario. A mis hermanas por apoyarme en todo momento y a mi hijo y mi pareja por el apoyo y cariño entregado a lo largo de todo este proceso.

Miriam Fuentealba

En este momento cabe dar los agradecimientos, ya que este camino no lo recorrimos solos, muchas personas influyeron para conseguir este logro, desde mi círculo más próximo hasta nuestros compañeros y profesores. Muchas personas para nombrarlas a todas, pero cabe destacar a mis padres que me apoyaron desde temprana edad hasta la fecha, depositando su fe en mí de manera incondicional, mis compañeras de tesis y la profesora guía las cuales decidieron estar juntos en este último paso, a todas esas personas que de una u otra forma son un pilar en mi vida y están ahí cuando más lo necesite.

Jorge Pinela

Agradecemos de todo corazón a la profesora Sara Pascual, quien acepto orientarnos, guiarnos y ayudarnos en este trabajo de tesis sobre todo cuando más lo necesitábamos.

Maritza, Miriam y Jorge

RESUMEN

El error es una posibilidad que está presente permanentemente en la construcción y consolidación del conocimiento, no sólo escolar, sino también científico. Esta investigación tiene por finalidad identificar, categorizar y analizar los errores cometidos por alumnos de primer año de la Universidad del Bio-Bio. En este artículo se estudian los errores cometidos por los alumnos, ya que proporcionan una información rica e interesante sobre cómo se construye el conocimiento matemático. Este análisis nos permitirá encontrar los patrones comunes a que obedecen los errores y, así, poder hacer inferencias sobre los procesos mentales y sobre las estructuras en las que se van organizando los conocimientos. Es precisamente la regularidad con que aparecen ciertos errores lo que nos permite elaborar clasificaciones de los mismos, teniendo en cuenta que las categorías no son compartimentos estancos y se suelen solapar unas con las otras, ya que rara vez un error obedece a una única causa. Por este motivo, para intentar interpretar mejor sus causas, se categorizarán los errores a partir de diferentes criterios.

ABSTRACT

The mistake is a possibility which is permanently present in the construction and consolidation of knowledge, not only academic, but scientific as well. This research has as purpose to identify, categorize and analyze committed mistakes by first year students from Universidad del Bio-Bio. Since provides an interesting and rich information about how is built the mathematical knowledge. This analysis will allow us to find out common patterns in how obey to these mistakes and, that way, being able to make inferences about mental processes and over the structures in which knowledge is organized. It is precisely, the regularity with which certain errors appear that allows us to elaborate classifications of them, having in mind the categories are not tight compartment and they usually overlap each other, since an error is rarely due to a single cause. For this reason, to try to interpret as best as its causes, errors are classified based on different criteria.

TABLA DE CONTENIDOS

LISTA DE TABLAS

LISTA DE FIGURAS

1. PROBLEMÁTICA DE INVESTIGACIÓN

1.1 INTRODUCCIÓN

El presente trabajo es una investigación cualitativa cuyo propósito es explorar los errores y dificultades cometidos por estudiantes de primer año en formación matemática en el uso del concepto magnitud. Este estudio está motivado por la necesidad de indagar cómo el uso de las magnitudes y medidas requiere la articulación entre saberes del contenido geométrico y físico. Nos interesamos en la dificultad de trabajar el concepto de magnitud disociado de los cálculos algebraicos y numéricos que se presentan en los problemas de geometría. Una práctica matemática que conlleva a confundir el concepto de magnitud entre cuatro nociones matemáticas: el tipo de magnitud, el objeto, la magnitud y la medida (Perrin-Glorian, 2002). Problemática presente en la formación matemática escolar donde la enseñanza no propone, ninguna discusión en torno a la invariancia del área por isometrías, que son propiedades esenciales para la construcción del concepto de área independientemente de la superficie y la medida. Creemos que las magnitudes y las medidas implican un conocimiento difícil de comprender debido a que las matemáticas para la enseñanza están definidas poco claras en el curriculum.

Para validar nuestra hipótesis hemos diseñado un instrumento que consta de una secuencia de situaciones problemas, donde se ponen en juego diversos conceptos matemáticos, especialmente el concepto de magnitud, para futuros profesores de la Universidad del Bío Bío. Luego, realizamos una categorización de errores para construir una matriz de errores que nos permita visualizar los errores más recurrentes cometidos por los estudiantes.

Finalmente, realizamos un análisis de los resultados, considerando condiciones y limitaciones de la enseñanza de los conceptos magnitudes y medidas en los programas de formación matemática y damos luz a los indicios del problema que exploramos para la enseñanza práctica de este concepto.

1.2 TRATAMIENTO MATEMÁTICO SOBRE LA MAGNITUD Y LA MEDICIÓN DE UNA FIGURA GEOMÉTRICA.

El proceso de enseñanza-aprendizaje del concepto magnitud se torna una tarea difícil de realizar para cualquier profesor. Como señala Perrin-Glorian (2002), las magnitudes y medidas plantea algunos problemas a los profesores, ya que, la ausencia de las unidades y por lo tanto de magnitud, o su utilización imprecisa en los programas establecidos para los profesores, suscita confusión en cuanto a la enseñanza. En una primera aproximación las magnitudes son consideradas como todo lo que se puede aumentar o disminuir, por ejemplo, la duración de un partido, la velocidad a la que viaja un auto, el número de escalones de una escalera, etc. En otras palabras, magnitud se entiende por todo aquello que se puede medir, lo que puede ser representado por un número y que, a su vez, puede ser estudiado por las ciencias experimentales (que son las que observan, miden, representan, obtienen leyes, etc.). Aunque, la evolución de las matemáticas llevó mucho tiempo antes de que permitiera que los números fueran pensados independientemente de los conceptos de magnitud y medición, la medición está directamente relacionada con los números con los cuales se realiza.

Diversos libros del texto de matemáticas de la escuela recuerdan la historia de la escuela Pitágoras que pensaba que toda magnitud puede expresarse como un número de veces la unidad, este número es una fracción de enteros. También refieren a la revolución que ocasionó cuando se demostró la imposibilidad de medir con una fracción de enteros la longitud de la diagonal de un cuadrado cuyo lado se elige unidad. A pesar de que la medición en geometría ha experimentado avances importantes por razones prácticas, como la medición de las magnitudes inaccesible, por ejemplo, la medición de la Tierra por Eratóstenes o el desarrollo de la trigonometría para la astronomía, los conocimientos que son necesarios para saber conducir la construcción del concepto magnitud en el aprendizaje de la enseñanza básica y media, exprimen mucha inquietud en cuanto al tratamiento matemático.

En particular, los programas chilenos se inscriben también en el tratamiento del área como magnitud y medida y el lugar que ocupan las unidades, lo que constituye una dificultad para los profesores para instaurar prácticas adecuadas al tratamiento de la superficie como magnitud y a la construcción de vínculos entre el objeto, la magnitud y la medida.

Estas dificultades pueden ser provocadas por la falta de enseñanza en función de la teoría que subyace al trabajo y en función del objetivo, o por una mala práctica pedagógica que hace que niños y jóvenes adquieran algunos conceptos deformados o erróneos. Pero ¿qué tipos de actividades apoyan una enseñanza que distinga estos tres conceptos? ¿Cuáles son los vínculos y las diferencias entre ellos, los problemas y los métodos de resolución geométricos? En efecto, las diferencias entre magnitudes, medidas y objetos no son evidentes ni en los alumnos, ni en los profesores.

1.3 DIFICULTADES OBSERVADAS ACERCA DEL CONCEPTO MAGNITUD VERSUS LA MEDIDA DE UNA FIGURA PLANA

Algunos aspectos del aprendizaje de los conceptos de perímetro y área constituyen una parte importante del aprendizaje de medidas. En particular, en los programas de matemáticas del nivel básico y media, los contenidos de área constituyen una parte importante del aprendizaje de medidas. La medida se presenta mayoritariamente de forma algorítmica, centrándose sólo en el cambio de unidades; la proporcionalidad es la que soporta los cambios de unidades. Así, si se pide a los alumnos que conviertan 60 km/h a m/s, los alumnos utilizarán el coeficiente de proporcionalidad 5/18 (y multiplicarán 60 por 5/18 para obtener 50/3, podrán añadir la unidad m/s al final de sus cálculos. Los cambios de unidades se estudian en relación con cada magnitud (longitudes, áreas, volúmenes, etc.) en el ámbito «magnitudes y medidas».

Según Chevallard y Bosch, (2000) "uno de los obstáculos más difíciles de superar en la enseñanza es el cambio de unidades". Efectivamente, en el proceso de enseñanza existen varias técnicas para cambiar las unidades, pero en su mayoría eliminan las unidades del cálculo. El origen de este problema reside en la falta de técnicas disponibles para resolver las situaciones relativas a las unidades entre los profesores y, en consecuencia, entre los alumnos (Chevallard & Bosch 2000)

En todos los casos, parece que un tratamiento aritmético precoz, donde no se hace hincapié a estas diferencias y la utilización inadecuada de las unidades, reduce y debilita la enseñanza de la magnitud en el colegio (Pressiat, 2005). Los autores hacen hincapié en promover el aprendizaje de este concepto mediante la diferenciación del objeto, la magnitud y la medición. Por una parte, sobre el acompañamiento de magnitudes y medidas señalan que un "objeto puede ser soporte de varias magnitudes de diferentes especies", y, por otra parte, indican la importancia del paso por las magnitudes que conduce a las mediciones del objeto. Ya que es imposible "operar directamente sobre los objetos, y el paso por las magnitudes es necesario para poder definir las operaciones que no se pueden hacer sobre los objetos" (Rouche, 1992, 1994; Chevallard et Bosch, 2000). Ante estas dificultades recurrentes, los autores recomiendan suprimir la enseñanza de las fórmulas en los programas de formación, recomendado a los profesores que insistan más en el sentido de las nociones, utilizando más la función de la magnitud, ya que las magnitudes son las que facilitan la construcción cognitiva de los conceptos matemáticos. Señalando que los conceptos de perímetro y área no deben reducirse para el alumno a números o fórmulas asociados a figuras[1].

Guzmán (2017) nos señala que por tradición las tareas de medición en las escuelas chilenas tienen un lugar importante en las clases tradicionales de geometría". El objeto central de estudio es la fórmula. El trabajo que se inscribe en un cálculo numérico, que se traduce en una pérdida del sentido de la unidad de medida, la magnitud y la medición, debido a que se encuentran relacionadas por la operatoria matemática. Menciona que este tipo de tareas son de bajo nivel cognitivo ya que, no favorecen un aprendizaje constructivo, no plantean actividades geométricas reales y no favorece el desarrollo de razonamiento argumentativo, inferencias o deducciones (Guzmán, 2017). Agrega, además, que se observa una confusión entre magnitudes, fórmulas y resoluciones de situaciones matemáticas sin un entendimiento acabado de lo que se solicita y su posterior ejecución. Así, por ejemplo, en el hecho de justificar la utilización de «cm^2» por la dimensión del espacio de trabajo, se podría llevar a los alumnos a confundir los conceptos del área y el perímetro, ya que para una superficie plana representada en «dimensión 2» también podemos ver su perímetro. Esta dificultad ha sido ampliamente documentada por la investigación (Douady & Perrin-Glorian, 1989, Huang, 2014, Moreira-Baltar, 1999, Zacharos, 2012).

Perrin-Glorian (2002) se refiere también a los problemas que tienen los profesores en el aprendizaje de las magnitudes y medidas. Los análisis realizados por Perrin-Glorian

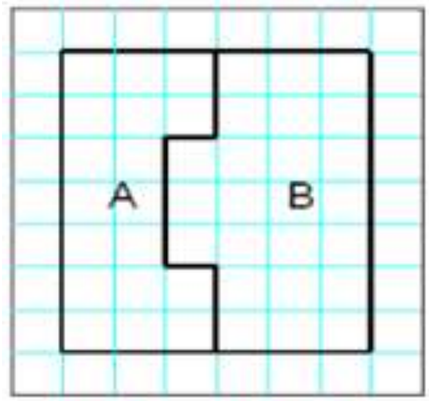
[1] Graciela Beatriz García Amadeo. (2013). La construcción del concepto de área a través de la resolución de problemas : las interacciones y el análisis cognitivo. Huelva, España: Universidad de Huelva.

advierten las consecuencias estructurales y funcionales en el ámbito de las “magnitudes y medidas” de los programas en formación; un cierto número de dificultades están vinculadas con la identificación demasiado pronta de las magnitudes con los números, que parecen favorecer la confusión entre diferentes magnitudes. Perrin-Glorian plantea la importancia del desarrollo de la enseñanza del objeto de área como magnitud, de modo que le permitiría al alumno establecer las relaciones necesarias entre los cuadros geométricos y numéricos, además, de posibilitarle la identificación rápida del área como un concepto independiente de la unidad de medida escogida. Pero, desde el punto de vista del futuro profesor ¿cuál es la dificultad subyacente? ¿Es consciente de los efectos que una futura enseñanza de este tipo podría tener en el aprendizaje? ¿O es una incomprensión del concepto de la magnitud por parte del profesor?

1.4 DIFICULTADES RELATIVAS A LAS MAGNITUDES DE ÁREA Y PERÍMETRO

- ***El área y el perímetro están diseñados como tamaños relacionados:*** cuando se trata de comparar dos figuras, muchos alumnos piensan que si el área es más grande (o igual), el perímetro también lo es - y viceversa

En la figura 1, la comparación esperada de los resultados se refiere a las dos figuras A y B. Para la figura, los resultados son diferentes: las parcelas tienen el mismo perímetro, pero áreas diferentes. La conclusión que se espera es, por tanto, «dos figuras que tienen el mismo perímetro pueden tener áreas diferentes». Por tanto, el objetivo es probablemente hacer tomar conciencia de que el área y el perímetro son dos magnitudes independientes referido a tal dificultad.



Marca la respuesta adecuada y explica tu elección:

a. • *El área de la parcela A es el más grande* • *Las dos parcelas tienen la misma área* • *La superficie de la parcela B es la mayor*	*b.* • *El perímetro de la parcela A es el más grande* • *Las dos parcelas tienen el mismo perímetro* • *El perímetro de la parcela A parcela B es el más grande*

Figura 1. Comparación de áreas

Muchos alumnos tienen dificultades para concebir el concepto de perímetro, que relacionan al concepto de área: los alumnos consideran que el área de la parcela B es la más grande (para el 90% de ellos), pero el éxito a la pregunta no es más que del 60% porque el 30% de los alumnos no justifican su respuesta, por ejemplo, explicando que «B es tres azulejos más que A». Tal explicación no revela una mala comprensión del área. Las respuestas a la pregunta sobre el perímetro muestran, en cambio, una relación de las dos medidas en muchos estudiantes: sólo el 30% de ellos responden correctamente y el 45% afirman que el perímetro de la parcela B es el más grande.

- ***Dificultad relacionada con el diseño de la unidad de área cm^2***:
  el objetivo del ejercicio es utilizar un conocimiento para evaluar el perímetro o el área cuya actividad señala evaluar el perímetro de una figura dibujada sobre un papel cuadriculado y un área por diferencia.

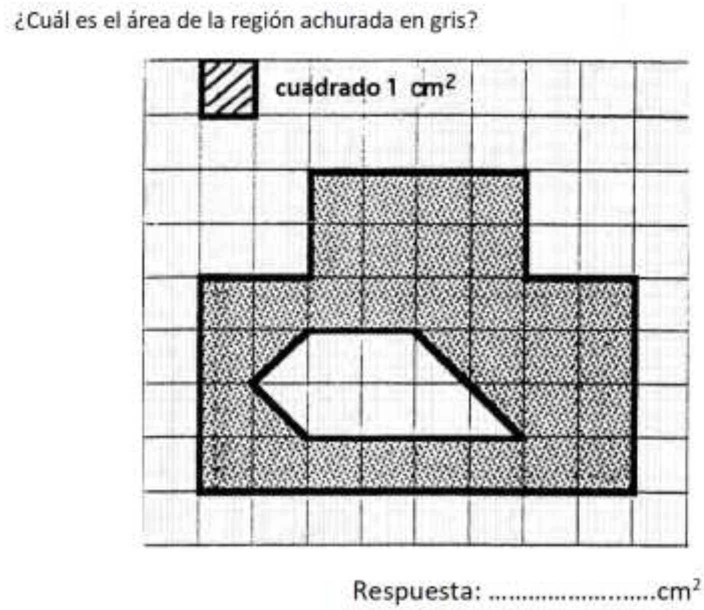


Figura 2. Cálculo de área.

En la situación de la figura 2, solamente alcanzaron un 56,2% de respuestas correctas para el cálculo del área.

Según las respuestas (9 o 31 o 35) se puede pensar que los pequeños cuadrados parcialmente grises (o parcialmente blancos) "cuentan" como cuadrados completos (o por el contrario no son contados) en el cálculo del área de la región achurada en gris (o en la región encerrada blanca). El alumno puede buscar el número de cuadrados necesarios para cubrir la superficie considerada: como el ejercicio puede sugerir, el cm^2 corresponde sólo como unidad de un pequeño cuadrado. Para el caso del cálculo del área de la figura 2, algunos alumnos respondieron que el área solicitada es 9 al confundirse con el área de la región blanca (posiblemente por la no comprensión del problema), contando por igual los cuadrados pequeños completos o y los parcialmente (región triangular, mitad de un cuadrado pequeño). Así mismo ocurre con aquellos que señalaron 35 ser la respuesta del área solicitada contando también por igual cuadrados pequeños completos y los parcialmente completos. Otro grupo de alumnos, teniendo presente que la unidad de medida es el cuadrado pequeño completo, señalo 31 como respuesta del área sólo al contar los cuadrados pequeños completos.

- ***Comparación según las áreas («pequeño, grande» ligado a «espacio ocupado»***

  Sobre la conservación del área, las investigaciones llevadas a cabo por Hart (1984), con alumnos de secundaria entre 12 y 14 años, reconocen que la conservación del área, no lo dominan más de la cuarta parte de los alumnos. Por ejemplo, algunos alumnos señalan que si se reordenan las partes de una región el área cambia ya que deja de ser la figura inicial. Además, Hutton (1978) en Dickson (1991) enuncia que la dificultad relacionada con la conservación del área y el desconocimiento de ella causa obstáculo a la producción de las fórmulas en el cálculo de la medida del área, causando a la vez, que estas fórmulas sean aplicadas de forma automática, provocando que se ignoren las relaciones entre la forma y las propiedades geométricas de las figuras.

En resumen, las principales dificultades que poseen los estudiantes estarían relacionadas con el tratamiento cuantitativo de la medida del área mediante el uso de fórmulas sin tener en cuenta el enfoque cualitativo que señala la conceptualización del área, así, como señalan Zacharos & Chassapis (2012) “desde un punto de vista pedagógico, es más importante desarrollar primero las capacidades para distinguir conceptualmente atributos asociados y elegir qué atributo debe medirse cada vez”

1.5 PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN

En conclusión, mientras que algunos de las dificultades de aprendizaje del concepto magnitud parecen característicos de la confusión en cuanto a la enseñanza – como su utilización imprecisa en los programas establecidos por MINEDUC - otros, tales como el carácter algorítmico de la medida y la ausencia de unidades de medidas inherentes al contenido de la materia de área y perímetro enseñada. Así pues, nuestra pregunta de investigación tiene por objeto precisar y comprender mejor estas dificultades y, por lo tanto, puede formularse de la siguiente manera: ¿Cuáles son las dificultades y los errores con que chocan los estudiantes futuros profesores sometidos a una secuencia de situaciones aplicables al concepto magnitud? ¿Cómo se pueden categorizar?

1.6 OBJETIVO DE LA INVESTIGACIÓN

El propósito de nuestro estudio es doble: proponemos en primer lugar una identificación y una categorización de las dificultades y errores inherentes al aprendizaje del concepto magnitud y luego, presentamos una secuencia didáctica para evaluar las producciones de estudiantes en primer año de Pedagogía en Educación Matemática de la Universidad del Bío Bio.

2. MARCO TEÓRICO

2.1 NOCIONES DIDÁCTICAS RELATIVAS A LA SECUENCIA DIDÁCTICA

2.1.1 Transposición didáctica del concepto de área

Y. Chevallard dice "Todo proyecto social de enseñanza y aprendizaje se constituye dialécticamente con la identificación y la designación de los contenidos de saberes como contenidos para enseñar. [...] Un contenido de un saber el cual se constituye como un saber a enseñar sufre un conjunto de transformaciones adaptables que van a volverlo apto para tomar un lugar entre los objetos de enseñanza. El "trabajo" que hace que un objeto de saber a enseñar se convierta en un objeto de saber de enseñanza se llama ***transposición didáctica.***

(Y. Chevallard, 1985).

Yves Chevallard ha definido la transposición didáctica como "el trabajo" en que un objeto de saber a enseñar se convierta en un objeto de enseñanza", pero precisa inmediatamente que "el estudio científico del proceso de transposición didáctica supone tener en cuenta la transposición didáctica **en el sentido amplio** representado por el esquema → objeto de saber → objeto a enseñar → objeto de enseñanza". En cuanto a la noción de área de superficie plana, nos centramos en la última época, aunque para iluminar la secuencia didáctica de nuestra investigación, el análisis se refiere principalmente a un período relativamente reciente (desde 1960).

La medición de las superficies es un problema que en la práctica se ha planteado al hombre de todos los tiempos; en el plano teórico, es también un problema muy antiguo (por ejemplo, los trabajos de Arquímedes sobre el área del segmento de parábola que se estudia en el curso de cálculo). Los objetos de conocimiento a este respecto han evolucionado con el tiempo, sobre todo en un período relativamente reciente con la aparición de la teoría de la medida desde Jordan, Riemann, Banach, Lebesgue... (Perrin-Glorian, 2016). Con la noción de área, nos encontramos en el que el objeto a enseñar existió incluso antes de que el objeto de saber fuera bien reconocido e identificado: se admitía implícitamente la existencia de una medida y el problema era calcular las medidas de superficies dadas. La cuestión de la existencia de una medida y de su conjunto de definiciones sólo se ha planteado y resuelto recientemente (Hausdorff, 1914; Banach, 1923; 1924)[2]. Por otra parte, no podía serlo hasta que se dispusiera de una buena definición de los números reales, es decir, antes de Dedekind.

Sólo a partir de 1980 aparece en los programas de la escuela primaria un nuevo objeto de enseñanza: la magnitud que debe medirse por el término "área", considerada invariante de una clase de superficies. Se distingue el área a la vez de la superficie y del número que la mide. Hemos encontrado que este objeto de enseñanza no existe realmente en el conocimiento matemático donde, por la elección de una superficie unitaria, se establece una correspondencia entre superficies y números: el invariante de las superficies de una misma clase es el número. Este objeto de enseñanza se basa más bien en las tradiciones de la enseñanza de la física (MECESUP; 2016). El vocabulario utilizado en la enseñanza plantea, pues, un problema. En el lenguaje cotidiano, se dispone de dos términos más o menos equivalentes: superficie y área. Así, el Petit Larousse (edición 1998) define

- **Superficie**
  1º en lo cotidiano; parte externa de un cuerpo que lo limita en todas las direcciones; cara visible - área, superficie…
  2º en geometría; figura geométrica bidimensional del espacio que puede considerarse…
  3º en lo físico; límite entre dos entornos diferentes.
  4º en didáctica; superficie de un cuerpo considerada sobre todo en su extensión y en su carácter exterior - número que caracteriza la extensión de una superficie.
- **Área**
  1º toda superficie plana ... espacio plano donde anidan las aves rapaces...
  2º en geometría; porción limitada de la superficie, número que la mide.
  3º región más o menos extensa ocupada por algunos seres, lugar de ciertas actividades.

Por primera vez, se utiliza el término de magnitud con el sentido que tiene en física y se introduce una distinción entre magnitudes mensurables y magnitudes detectables. Al objetivo de utilizar los instrumentos de medición, MECESUP (1980), añadió la construcción del concepto de medida, añadiendo ahora (MECESUP; 2016) la construcción del concepto

[2] Citado por Perrin «*Petit X*» n°4 pp.5 à 36, 1989-1990

de magnitud para cada una de las magnitudes previstas en el programa. Anteriormente se suponía que la magnitud que había que medir era preexistente, pero no se preveía explícitamente su construcción.

Ahora bien, la medida permite identificar todas las magnitudes (incluidas las longitudes y áreas) a $\mathbf{R}^+$. Esto es valioso desde el punto de vista de la modelización matemática. Sin embargo, una identificación demasiado temprana parece favorecer la amalgama de las diferentes magnitudes, mientras que el objetivo a nivel de enseñanza básica o media es más bien diferenciarlas.

2.1.2 Elecciones didácticas para la secuencia didáctica

Nuestra hipótesis nos conduce a elegir problemas en los que las magnitudes (longitudes, áreas) se separan por una parte de los objetos (segmentos, superficies), por otra parte, de los números, problemas en los que juegan de manera significativa las diferencias entre perímetro y área, para abordar la medición en función de una unidad elegida y las relaciones entre las mediciones de estas magnitudes.

Esto nos llevan a distinguir tres elementos importantes en la construcción de la secuencia:

a) <u>construir el concepto de área como magnitud autónoma</u> comparando directamente superficies por inclusión, o indirectamente por recolección, y luego asignando a una superficie medidas por pavimentación con la ayuda de papel cuadriculado. Esto nos lleva a explorar posibles ambigüedades sobre la confusión del área de la forma diferenciando área y superficie (dos superficies de formas diferentes pueden tener áreas iguales) y a saber si distinguen el área del número (a una misma superficie pueden corresponder números diferentes según la unidad elegida, pero el área, ella, no cambia).
b) <u>extender la aplicación de la medida a superficies no paviméntales</u> con la unidad del papel cuadriculado a la vez utilizando un razonamiento del tipo geométrico en relación con el área del triángulo a través de propiedades: por ejemplo, igual base y altura para los dos triángulos, o bien, en la utilización de superficies intermedias si los paralelogramos tienen un lado de la misma longitud, las superficies están en el mismo orden que las alturas correspondientes, una mediana comparte un triángulo en dos triángulos de la misma área. Dichos procedimientos no son de la misma naturaleza que los

procedimientos numéricos de cálculo del área, requieren el dominio del aspecto multidimensional de la medida de las áreas mientras que el cálculo requiere solamente la aplicación de una fórmula y el reconocimiento de los elementos pertinentes del objeto geométrico.

c) señalar las diferencias y establecer relaciones entre áreas y longitudes: por variaciones respectivas durante diversas transformaciones, por ejemplo, calcular el perímetro y el área una figura poligonal compleja sobre un papel cuadriculado si los paralelogramos tienen un lado de la misma longitud, las superficies están en la misma disposición que las alturas correspondientes, …

Además, optamos por hacer hincapié en los juegos de cuadros de **superficies - números** para hacer medir el conocimiento de los estudiantes sobre el concepto de área, sobre la medida, sobre los números.

2.1.3 Cambios de cuadros

El hecho de pasar de un cuadro de resolución a otro constituye sin ninguna duda una etapa necesaria en la adquisición de una noción. R. Douady ha estudiado este aspecto del aprendizaje, a este respecto dice:

> *Un cuadro está constituido por objetos de una rama de la matemática, por relaciones entre los objetos, por sus formulaciones eventualmente diversas y por imágenes mentales asociadas a estos objetos y a estas relaciones. [...] El cambio de cuadro es un medio de obtener formulaciones diferentes de un problema que, sin ser necesariamente equivalentes, permiten un nuevo acceso a las dificultades encontradas y la puesta en marcha de herramientas y técnicas que se imponían en la primera formulación. (R. Douady,1983)*[3].

- El conteo de los cuadrados sobre el papel cuadriculado, la unidad (o varios ejemplares de la unidad yuxtapuestos) permite extender la aplicación medida entre superficies y

[3] DOUADY, R. (1983). *Rapport enseignement-apprentissage: Dialectique, outil-objet, jeux de cadres*. Cahiers de didactique des mathématiques. Nº **3**, IREM, Université Paris VII. Paris.

números. En el juego de marcos **superficies-áreas-números** se recoge así la información de las dificultades sobre los términos empleados.

- La extensión del campo de las superficies que se sabe comparar áreas de dos triángulos permite prever al menos dos tipos de dificultades; 1. bloqueo, duda en el trabajo de manipulación, por la ausencia de conocimientos suficientemente seguros. 2. recurso sistemático a la medición de los anchos y cálculo sin análisis de la figura.
- La señalización de las diferencias y establecer relaciones entre áreas y longitudes sirve para detectar un posible teorema del alumno muy persistente

> *"Un **teorema del alumno** es un teorema juzgado verdadero por el alumno y utilizado en una acción. Este teorema permite la toma de decisiones y es más o menos implícito. Tiene su propio campo de validez, pero produce resultados falsos fuera de este campo de validez"* (Brousseau, 1998).

En todo el trabajo sobre las áreas, el cambio de cuadros superficies-áreas-números continúa y permite desarrollar los conocimientos sobre la medición manteniendo al mismo tiempo un control geométrico, en particular, en la elaboración de las fórmulas de cálculo de área de las superficies habituales, entre otros. Para tratar estos problemas se recurre, a través de diversos cortes de superficies, a la pavimentación, junto con la adición y multiplicación de números, a la interacción entre el marco geométrico y el marco numérico, el área que es el invariante permite conectar los dos cuadros.

2.1.4 Las concepciones de los estudiantes, las dificultades.

La secuencia didáctica interactúa en general con los marcos geométricos y numéricos. Los estudiantes pueden encontrarse con dificultades específicas de cada uno de estos cuadros, además de las dificultades de la medida, ya que las tareas que hemos caracterizado contienen subtareas geométricas o analógicas.

Nos limitaremos a lo que es específico de la medida: división de las superficies en partes disociadas, pavimentación, reconocimiento de los elementos geométricos relevantes para utilizar las fórmulas. Nos situamos en un plano cercano a las matemáticas mismas, tratando de identificar las concepciones que los estudiantes ponen en práctica para tratar los problemas del área y señalar puntos clave en el aprendizaje de sus futuros alumnos. Como hemos analizado en la parte teórica y como se desprende de las elecciones didácticas de las situaciones relativas a la medición de las áreas, los alumnos pueden disponer de procedimientos relativos al marco numérico o al marco geométrico, la dificultad reside en las interrelaciones entre los dos marcos.

R. Douady (1989), identifica dos concepciones del área,

- una está vinculada al marco digital -el área es un número que se calcula-
- lo otro está relacionado con el marco geométrico -es un invariante de una familia de superficies.

Las dificultades de los alumnos pueden analizarse a partir de la dificultad de articular estas dos concepciones.

En el diseño de la secuencia didáctica el riesgo consiste en no distinguir las diferentes magnitudes en juego, confundir las unidades y extender el uso de las fórmulas a casos en los que no son válidas (por ejemplo, hacer el producto de las longitudes de los lados para calcular el área del paralelogramo). En el plano geométrico, el riesgo consiste en ser sensible a la forma de las superficies y a los diferentes índices perceptivos (por ejemplo, difícilmente se concebirá la posibilidad de evaluar el área de un triángulo en cm^2) y también de amalgamar las diferentes características de la superficie, lo que lleva, por ejemplo, a pensar que el área y perímetro varían necesariamente en el mismo sentido porque es verdad en el caso de las ampliaciones o reducciones.

2.2 NOCIONES TEÓRICAS RELATIVAS A LA MEDICIÓN

2.2.1 Los objetos en juego, los cuadros en juego.

En un problema de medición, a priori hay al menos tres tipos de objetos en juego, referidos a tres cuadros o áreas de actividad diferentes: un objeto material que remite a la realidad física (por ejemplo, un cubo de madera) una magnitud física o geométrica que se refiera a la física o a las matemáticas (por ejemplo, la masa de este cubo o su volumen o la longitud de su arista) y un número que refleje la medida de la magnitud considerada una vez que se haya elegido una unidad.

Hay que señalar que en el caso de las magnitudes geométricas (longitudes, áreas, volúmenes), hay que distinguir el objeto geométrico, como parte del espacio $\mathbf{R}^3$ (con isometría cercana o no según el caso), distinto del objeto material y de la magnitud. Como aquí nos interesan las magnitudes geométricas, consideraremos los objetos geométricos, es decir, desatendemos, la relación entre el objeto material y el objeto geométrico que lo modeliza. Por lo tanto, en la mayoría de los casos identificaremos el objeto geométrico y el material o su representación en una hoja de papel, lo que da el siguiente esquema:

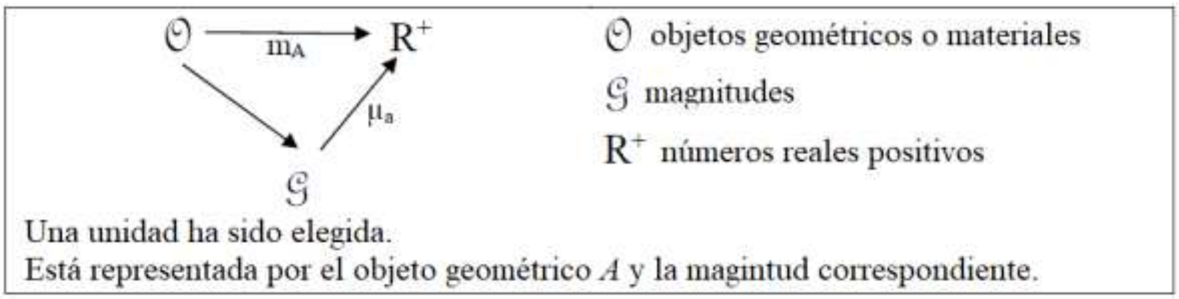


Figura 3. Representación objetos geométricos y materiales. (Marie-Jeanne Perrin-Glorian; 2016)

2.2.2 Concepto de magnitud, ejemplo de las áreas.

La utilidad de la medida es traducir en número los problemas sobre objetos materiales (comparación, reunión …). La magnitud permite decir desde qué punto de vista se considera el objeto: longitud del borde, área lateral, volumen, masa.

Pero, como dice Lebesgue (1931-1935, reed.1975, p.56), en matemáticas se puede prescindir de la noción de magnitud:

> *"el uso de la palabra medida en la denominación "medida de las áreas" tiene el mismo significado que para la "medida de las longitudes": recuerda que uno debe haber elegido una unidad para hablar del área o de la longitud, que son números. Son estos números los que, por sí solos, sirven en matemáticas; cada uno tiene la libertad de sobreañadir a estas nociones matemáticas nociones metafísicas, pero éstas no deben intervenir en la enseñanza".*

Sin embargo, a raíz de las investigaciones sobre la enseñanza de las áreas (Douady y Perrin-Glorian, 1989), a las autoras les parece que la identificación desde el principio del aprendizaje de la magnitud y del número lleva a confusiones entre los alumnos, como lo hemos informado en el punto 1.2 de este documento, por eso las distinciones entre estos tres polos (Perrin-Glorian, 2016) parecen esenciales en la enseñanza básica y secundaria, no para que se pida al alumno que los distinga sino para que el profesor esté bien claro sobre estas distinciones y sea siempre consciente del nivel en el que se sitúa, para analizar correctamente su enseñanza y las dificultades que pueden encontrar los alumnos.

El problema de la elección de una unidad se plantea en dos niveles para las magnitudes geométricas. Se coloca de manera directa como para todas las magnitudes:

- medir una superficie con cualquier superficie unidad, arrastrándola o cortándola, es lo que denominaremos el aspecto unidimensional de la medición de las superficies.

Pero se plantea de otro modo cuando se elige una unidad de área definida a partir de una unidad de longitud:

- las mediciones de áreas se deducirán de las mediciones de longitudes mediante un cálculo y el establecimiento de fórmulas, esto es lo que llamaremos el aspecto bidimensional de la medida de las áreas.

Queda por ver cómo se puede definir una magnitud y si se puede dar un fundamento matemático a esta noción. Rouche (1994) define la magnitud como una clase de equivalencia de objetos. Sin embargo, según el caso, esta relación de equivalencia puede definirse o no directamente sobre los objetos.

- En el caso de los segmentos se trata en detalle: en este caso se dispone de un instrumento que permite trasladar las longitudes, el compás; además, dos segmentos de la misma longitud son superpuestos.
- El caso de las áreas es un poco diferente y por eso es interesante: no disponemos de instrumentos que permitan comparar directamente las áreas; si se quiere definir la magnitud no limitándose a los polígonos, uno está obligado a pasar por la medida o por otra magnitud, para la cual, la comparación directa es posible (por ejemplo, masa o volumen de pintura) realizando un objeto material que cumpla ciertas condiciones (material homogéneo en un caso, bien liso y no poroso en el otro).

Para dar un fundamento matemático al concepto de magnitud, en ausencia de un medio de comparación directa, siempre se puede pasar por la medida definida en los objetos (Perrin-Glorian, 2016). Por lo tanto, difícilmente se puede definir la magnitud de la superficie sin pasar por la medida definida sobre los objetos geométricos: el área de una superficie será la clase de equivalencia de esa superficie para la relación "tener la misma medida". Sin embargo, se puede dar sentido a la expresión "dos superficies tienen incluso área", sin pasar por la medición en contextos, aunque limitados, pero suficientemente significativos, como el corte y la recolección sin solapamiento.

2.2.3 Definiciones de la medida de áreas

En la enseñanza, a partir de la elección de una unidad se admite la existencia de una función que, a una superficie no muy excéntrica, asocia su medida y se limita a encontrar los medios para calcular sus valores a partir de ciertas medidas de longitud. De hecho, no es necesario suponer la existencia y se puede definir la función de medida al mismo tiempo que el conjunto de superficies en las que se define. Perrin-Glorian (2013) esboza las líneas generales de dos exposiciones, la de Lebesgue (1931; 1975), porque es la más económica en el plano teórico y la de Hadamard (1900), porque se acerca al enfoque que se adopta, en general, en la enseñanza elemental.

En ambos casos, puede decirse, en términos modernos, que se trata de definir una función μ definida en una parte $\mathcal{S}$ de $\mathcal{P}(\mathbf{R}^2)$, $\mu : \mathcal{S} \longrightarrow \mathbf{R}^+$ que verifica las siguientes propiedades:

- μ es positiva: $(\forall S \in \mathcal{S})(\mu(S) \geq 0)$
- μ es *aditiva*: $(\forall S_1 \in \mathcal{S})(\forall S_2 \in \mathcal{S})(S_1 \cap S_2 = \emptyset \implies \mu(S_1 \cup S_2) = \mu(S_1) + \mu(S_2))$
- μ es invariante por isometría: para toda isometría f de $\mathbf{R}^2$ se tiene $(\forall S \in \mathcal{S})(\mu(f(S)) = \mu(S))$.

Una tal medida se denomina *medida aditiva* o *ampliada*. Obsérvese que no se pide la aditividad para un conjunto numerable de superficies: esta solicitud podría dar otra familia de superficies, las superficies Lebesgue-integrables. Se puede mostrar que las condiciones anteriores implican que si se elige un cuadrado *C*, que llamaremos cuadrado unidad, para el cual se fija $\mu(C) = 1$, μ queda determinada de manera única en un determinado conjunto de superficies (partes de $\mathbf{R}^2$) que contiene a los polígonos, está contenida en el conjunto de partes acotadas y que se llaman conjunto de superficies *cuadrables*.

a) Exposición de Lebesgue

Para definir el área que identifica con su medida, Lebesgue considera una cuadrícula de malla cuadrada (fija) Q_0 y refinamientos Q_i de esta cuadrícula obtenidos cortando los lados de los cuadrados de Q_0 en 10 (por ejemplo) cada vez. Si D es una parte del plano, consideramos el número n_i de cuadrados de la cuadrícula Q_i que están contenidos en D y el número N_i de cuadrados de la cuadrícula que se encuentran con D. Si $\frac{N_i - n_i}{100^i} \rightarrow 0$, se dice que D es cuadrable y se define $F(D) = \lim_{i\to\infty} \frac{N_i}{100^i} = \lim_{i\to\infty} \frac{n_i}{100^i}$

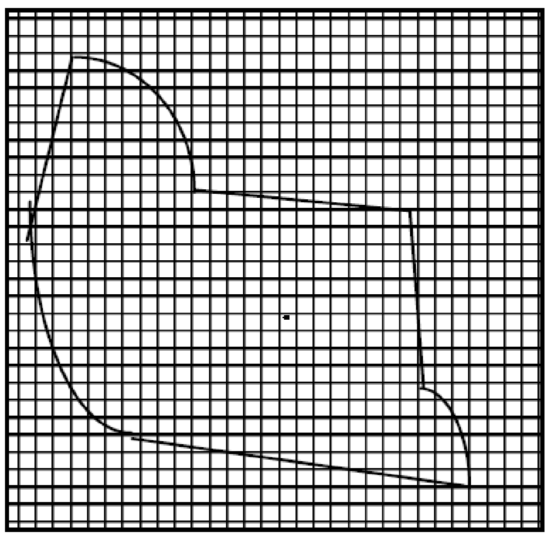


Figura 4. Definición de área Lebesgue. (Marie-Jeanne Perrin-Glorian; 2016)

No es fácil ver que el área así definida satisface las propiedades de más arriba, en particular la invariancia por isometría e incluso el hecho que los polígonos son cuadrables. En este contexto de comprobación, Lebesgue primero trata el caso de los polígonos basando en dos hechos cruciales: que un segmento tiene área cero y la invariancia del área de un polígono por simetría ortogonal (Perrin-Glorian, 2016).

b) Exposición de Hadamard

El método que propone Hadamard en su curso de geometría elemental (1898) consiste en tratar, en primer lugar, el caso de los polígonos utilizando la aditividad y utilizar los encuadramientos sólo en el caso de superficies más complejas. En su primera edición, admite la existencia del área y se conforma con dar los medios para calcularla, pero en las siguientes ediciones añade la nota D donde demuestra que es inútil suponer la existencia del área: se puede demostrarla.

Hay que señalar en primer lugar que Hadamard define el área como una magnitud y que distingue la magnitud de su medida que es un número. Enuncia sus resultados en términos de magnitudes, señalando que todo esto solo tiene sentido de acuerdo con la convención formulada al principio (n°18, 106)[4]. Por ejemplo, decir que *"el área de un rectángulo es el producto de sus dimensiones"* significa que *"el número que mide el área de un rectángulo es igual al producto de los números que miden respectivamente su base y su altura"*. Esto equivale a decir que trata de definir el área como una "*magnitud cuantificada*" (Janvier, 1996)[5] tomando como unidad el área del cuadrado que tiene por lado la unidad de longitud o que sólo se puede definir la magnitud pasando por la medición. Ese es exactamente el punto de vista que se adopta en el párrafo anterior. Primero establece que el área de un rectángulo es igual al producto de las dos dimensiones. De ello, deduce el área de un paralelogramo cortando y pegando, luego la del triángulo (medio paralelogramo) y de un polígono cortando en triángulos, en especial los casos del trapecio y el polígono regular.

Para la definición de la nota D, Hadamard muestra en primer lugar que, para cualquier triángulo, el producto de un lado por la altura correspondiente es el mismo para los tres lados (utilizando triángulos similares). Llama área del triángulo este producto multiplicado por un factor fijo *k*. Esta definición asegura la invariancia por isometría. Para definir el área de un polígono a partir de una descomposición en triángulos, el problema es demostrar que el resultado no depende de la descomposición. Para ello, Hadamard procede muy hábilmente mostrando la equivalencia de dos definiciones del área. Dándose un punto cualquiera *O* del plano del triángulo *ABC*, considera los tres triángulos *ABO, ACO, BCO*. Cada uno de estos triángulos se denominará aditivo si *O* está en el mismo lado que *ABC* respecto a la base común, en caso contrario se considerará sustractivo. A continuación, examinando todos los casos posibles, muestra la siguiente propiedad para un triángulo *ABC* y un punto cualquiera

[4] HADAMARD J. (1928) *Leçons de géométrie élémentaire I géométrie plane*. Armand Colin, Paris. Citado por Perrin-Glorian, 2016.

[5] Citado por Perrin-Glorian, 2016.

O de su plano: *la diferencia S entre la suma de las áreas de los triángulos aditivos y la suma de las áreas de los triángulos sustractivos (si existe) de vértice O es igual al área del triángulo ABC.*

Luego extiende esta propiedad a los polígonos por recurrencia sobre el número de triángulos que particionan al polígono: *"Sea un polígono que se descompone en un número de n de triángulos, y un punto cualquiera O del plano que se une a todos los vértices del polígono. La diferencia S entre la suma de las áreas de los triángulos aditivos y la suma de las áreas de los triángulos sustractivos de vértice O es igual a la suma de las áreas de los n triángulos en los que se descompuso el polígono"*

Esta propiedad no depende de la elección del punto O ni de la descomposición en triángulos y, por lo tanto, define el área del polígono como el valor común de S y de Σ. Luego extiende esta definición de área a superficies no poligonales recurriendo a los encuadramientos con polígonos y a la noción de límite como lo hace Lebesgue.

3. METODOLOGIA

3.1 CONTEXTO Y SUJETO

El contexto del estudio se enmarca en un grupo de futuros profesores, estudiantes de primer año de la carrera de Pedagogía en Educación Matemática de la Universidad del Bio-Bio de la comuna de Chillan, la intervención se realizó a un grupo de 31 estudiantes durante una clase de la asignatura Geometría Plana (240142) dirigida por el profesor Jorge Torres, quien facilito un bloque de clases (90 min) correspondiente a las horas prácticas de la asignatura a cargo de la profesora Isabel Sandoval, quien participo como observadora.

La actividad fue desarrollada de manera individual por los estudiantes, para así obtener las concepciones de cada individuo sin intervención ni validación de algún par. La actividad consto de tres ítems con preguntas del tipo de comparación de áreas donde los estudiantes deben determinar la relación que existe entre las áreas de las superficies presentadas. Esta actividad fue guiada por las tres personas a cargo de la investigación quienes no pudieron responder dudas con respecto a los conceptos implicados, con la intención de obtener la mayor cantidad de características, errores y dificultades, para así contrastar, aquellas que permitan que los estudiantes se acerquen principalmente al concepto de magnitud disociada de los cálculos numéricos.

Una vez presentada la tarea a los estudiantes, éstos comenzaron a conjeturar sobre cómo poder realizar la comparación y obtener la alternativa correcta. De esta forma, tuvieron que buscar una estrategia que facilite el cálculo de la medida del área, presentándose la posibilidad de manipular la superficie de la tarea planteada.

Esta sesión promovió la capacidad de argumentación para justificar sus ideas, por lo que se esperó una participación activa por parte del grupo curso.

Además, en la tarea, se esperó que los estudiantes utilicen el embaldosado, propiedades geométricas, y establezcan una unidad de medida no estandarizada y así eviten recurrir al cálculo algebraico a través de la utilización de la formula.

La organización de la situación didáctica fue de la siguiente manera:

CRONOGRAMA SITUACION DIDACTICA		
Tiempo	**Actividad**	**Desarrollo**
10 min.	Presentación	Se da a conocer el objetivo de la actividad y el propósito de la investigación, leyendo las instrucciones para todo el curso y el consentimiento para la participación.
5 min.	Resolución de dudas	Se resuelven dudas solo sobre los enunciados para no intervenir en los conceptos empleados para verificar que las instrucciones se hayan entendido.
5 min.	Firma Consentimiento	Los estudiantes que desean participar en la investigación leen nuevamente el consentimiento y lo firman para posteriormente comenzar el desarrollo de las situaciones problemas presentadas.
40 min.	Desarrollo	Los estudiantes desarrollaron la actividad sin presentar dudas el respecto

Tabla 1. Cronograma Situación Didáctica.

3.2 ANÁLISIS DE LA SITUACIÓN DIDÁCTICA

3.2.1 Descripción de la secuencia didáctica

El objetivo de la situación didáctica fue identificar los posibles errores y dificultades que los estudiantes tienen en el tratamiento del área como una magnitud. Esta secuencia consto de tres ítems de los cuales los primeros dos se enmarcan según Perrin (1989) en las Situaciones estáticas de comparación en la que se trata de comparar varias áreas dadas. Con datos que pueden ser objetos geométricos o cantidades cuantificadas o no, la respuesta esperada es una comparación. Según los datos, son posibles varios procedimientos, una es la comparación directa mediante inclusión, el procedimiento más básico, pero no siempre es posible llegar a la conclusión, y la equidescomposición que consiste en cortar cada superficie en partes isométricas, el otro proceso es digital es decir utilizando la comparación de número.

El tercer ítem fue una tarea de tipo de comparación dinámicos: Se trata de ver cómo el área varía cuando algunos elementos de la geometría varían, por lo general en el caso de áreas comunes, sino también el efecto de las transformaciones geométricas en el área, la relación entre el área y el perímetro. su objetivo es dominar el aspecto multidimensional de las variables involucradas (longitudes, áreas, volúmenes), así como a la articulación de los diferentes tamaños de los estudiantes: disociación, sino también el establecimiento de relaciones entre ellos; que pueden variar de manera diferente sin ser totalmente independiente. Los estudiantes pueden implicar el punto de vista dinámico, incluso cuando la cuestión es una comparación estática de dos áreas.

Además, los tres ítems están estrechamente ligados a Situaciones de medición donde se trata de producir un número a partir de los datos de un objeto geométrico, esta tarea puede decidirla el alumno mismo para responder, por ejemplo, a un problema de comparación. Encontramos aquí los aspectos unidimensionales o multidimensionales de la medición según si la unidad suministrada es un área representado por un objeto geométrico (por ejemplo, un cuadrado pequeño) o si es una unidad derivada de las unidades de longitud. Entre los procedimientos, encontramos los ya mencionados para la comparación: medición directa por transferencia de la unidad, división de la superficie o el volumen en elementos disjuntos (aditividad), recurso a las fórmulas.

3.2.2 Análisis a priori de la secuencia didáctica

<u>Actividad matemática 1</u>

Consigna

1. Para cada situación, señalar el número de la respuesta correcta :

   1. el área de la superficie rayada A es mas grande que la de B.
   2. el área de la superficie rayada A es igual que la de B.
   3. el área de la superficie rayada A es mas pequeña que la de B.

a) Objetivo

Identificar los conocimientos y representaciones iniciales que utilicen los estudiantes para los procedimientos de medida de área de polígonos; de modo que permita eliminar posibles ambigüedades sobre los términos empleados.

b) Posibles estrategias de resolución

A continuación, se presentan algunas de las posibles estrategias de resolución de los estudiantes, para cada una de las a), b) y c) de la actividad 1.

Pregunta 1. a)

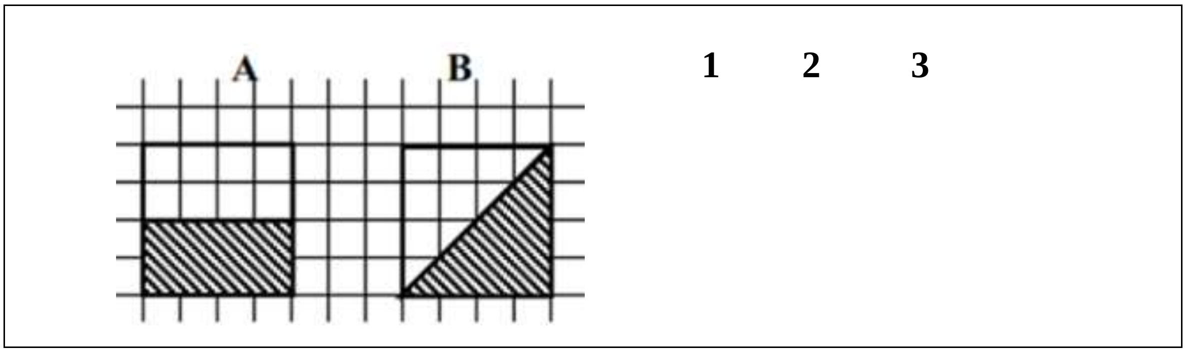


Figura 5. Pregunta 1.a. Situación Didáctica

Respuesta 1:

Una posible resolución de los estudiantes es la aplicación de las expresiones algebraicas (fórmulas) que permiten calcular numéricamente el área de A (región rectangular achurada) y de B (región triangular achurada). Para esto, fijan como unidad de medida igual al lado del cuadrado pequeño de la cuadricula (todo indica que los cuadrados pequeños jugarán un rol central en las mediciones). Si denotamos esta longitud por k, entonces mediante fórmulas:

Área de la superficie A es: $4k \cdot 2k = 8\,k^2$

Área de la superficie B es: $\frac{4k \cdot 4k}{2} = 8\,k^2$

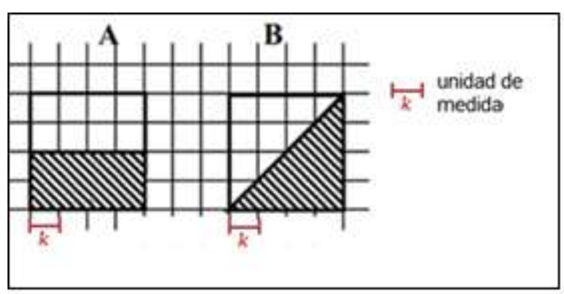


Figura 6. Utilización de unidad de medida "k"

Este desarrollo, obedece a un pensamiento numérico por medición de las superficies A y B, para responder que la relación entre las superficies A y B, es que " A y B tienen la misma área".

Respuesta 2:

Otro posible desarrollo de los estudiantes es que por yuxtaposición de una superficie común se obtiene la superficie A y B. Para ello eligen como superficie común la del cuadrado pequeño de la cuadrícula, la cual denotamos por u. En base a esta unidad se obtiene que, por yuxtaposición, la superficie A ocupa 8 de estas unidades y por su parte la superficie B utiliza 6 de estas unidades y 4 mitades de esta unidad ocupando así un total de 8 unidades. En consecuencia, A y B tienen la misma superficie y por consiguiente poseen la misma área. Luego la respuesta correcta es 2.

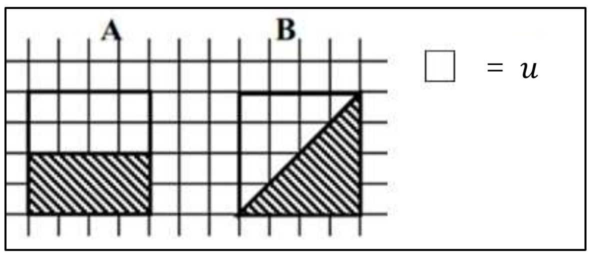


Figura 7. Utilización de superficie común "cuadrado pequeño de la cuadrícula"

Respuesta 3:

Teniendo como referencia común la superficie del cuadrado mayor, los estudiantes podrían utilizar dos simetrías. La primera, considerando como eje de simetría la mediana horizontal del cuadrado mayor, donde se obtiene que A ocupa la mitad de la superficie del cuadrado de referencia. La segunda, tomando como eje de simetría la diagonal secundaria del cuadrado mayor, lo cual permite deducir que B es la mitad de la superficie del cuadrado de referencia. De acuerdo a lo anterior, como ambas superficies A y B ocupan la mitad de una superficie común (cuadrado de referencia mayor), se concluye que A y B representan la misma superficie y por consiguiente poseen la misma área.

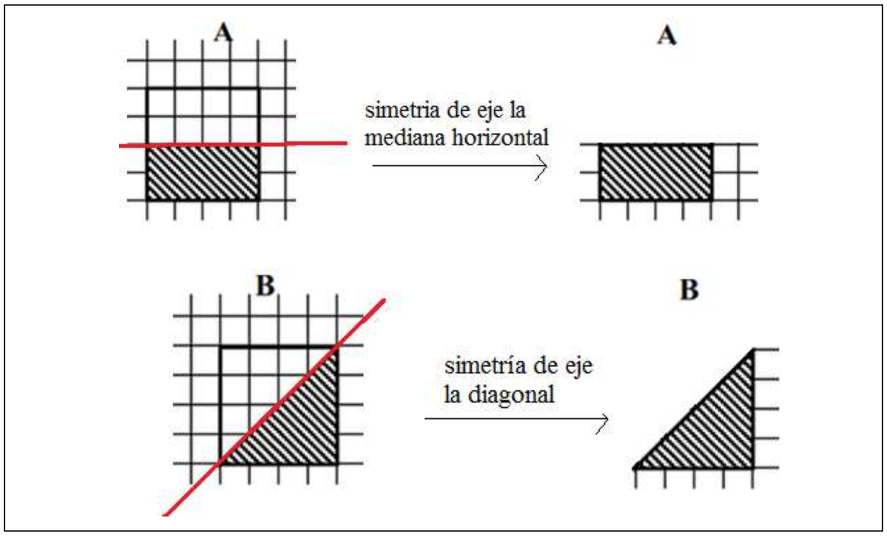


Figura 8. Utilización de ejes de simetría para comparación de áreas.

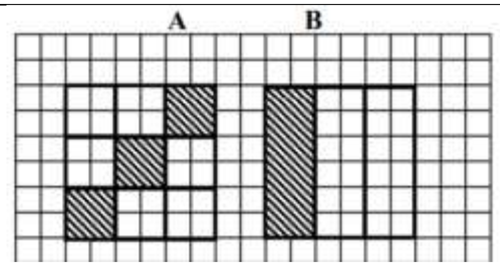
Respuesta 4:

Otra posible respuesta de los estudiantes es por medio de "la acción de plegar". Esto es, que para ambas superficies A y B consideren en común el cuadrado mayor, que por pliegue (doblez) a lo largo de la mediana horizontal se obtiene la superficie A, y del mismo modo por pliegue a lo largo de la diagonal, se obtiene la superficie B. Luego, a partir de esto concluir que A y B ocupan la mitad de la superficie del cuadrado mayor, por consiguiente, poseen la misma área.

Respuesta 5:

Mediante visualización los estudiantes pueden señalar que ambas superficies poseen áreas iguales ya que representan la mitad del área del cuadrado mayor. Esta estrategia realiza la comparación de las áreas de A y B por medio de la medición de las respectivas áreas.

Pregunta 1. b)



1 2 3

Figura 9. Pregunta 1.b. Situación Didáctica.

Respuesta 1:

El área de la superficie B se obtiene por cálculo directo (región rectangular), fijando como unidad de medida basal el lado del cuadrado pequeño de la cuadricula, esto es $2 \cdot 6 = 12$,. Para el área de A, observarán que la superficie A es la unión de tres superficies iguales, la de un cuadrado de área $2 \cdot 2 = 4$. Luego el área de A es $4 + 4 + 4 = 12$. Como en ambos casos la unidad común es la longitud del lado del cuadrado pequeño de la cuadrícula, entonces ambas superficies poseen la misma área.

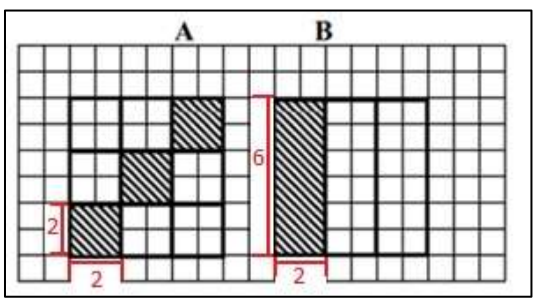


Figura 10. Cálculo directo de área, fijando longitudes como unidad de medida.

Respuesta 2:

Otra posible respuesta de los estudiantes es por medio de congruencia. Para ellos, lo inmediato es que B es una región rectangular cuyas dimensiones son visibles desde la figura. Para la superficie A, se observa que esta forma por tres cuadrados, dos de ellos (los de arriba) desplazados respecto del tercero (de abajo). Los estudiantes pueden utilizar la transformación geométrica de traslación; a saber, aquella de vector director horizontal hacia la izquierda y de longitud 2 (considerando como unidad unitaria la longitud del lado del cuadrado pequeño de la cuadrícula). Aplicando esta traslación dos veces al primer cuadrado (superior) y una vez al cuadrado central, el resultado es una región rectangular que es completamente congruente con B. Como el área permanece invariante respecto de la traslación, se deduce entonces que el área de A es la misma que la de B.

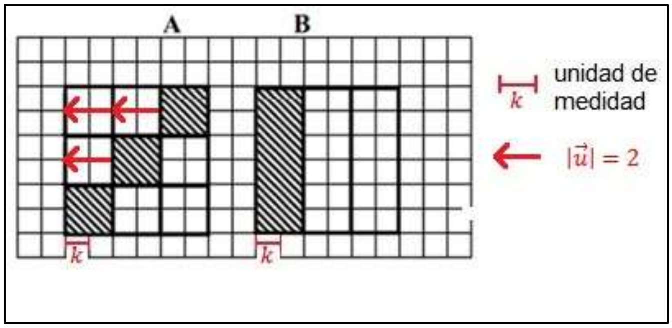


Figura 11. Cálculo de área por medio de congruencia.

Respuesta 3:

Es posible que los estudiantes visualicen que la superficie B es la yuxtaposición de cada cuadrado de la superficie A, que son tres. Luego concluir, que ambas superficies poseen la misma área.

Respuesta 4:

Para ambas superficies proceder a realizar pliegues del cuadrado de referencia mayor; 2 pliegues simétricos verticales que dividen la figura en tres partes iguales y luego 2 pliegues simétricos horizontales (o primero los horizontales y luego los verticales) que dividen finalmente la figura en partes iguales. Así obtenemos una superficie cuadrada que es la novena parte de la superficie del cuadrado mayor. En base a esta superficie cuadrada obtenida por los pliegues, se deduce que ambas superficies A y B son iguales a tres de estos cuadrados. Por lo tanto, ambas superficies A y B poseen la misma área.

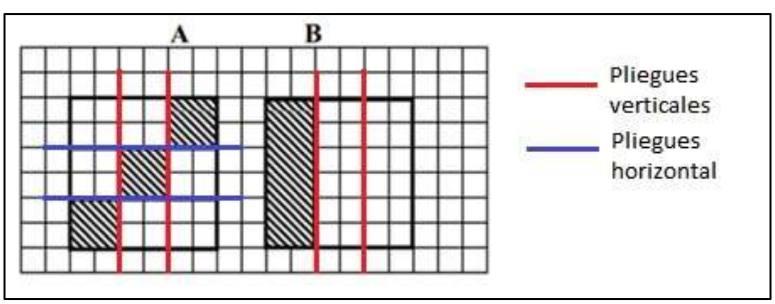


Figura 12. Comparación de áreas a través de pliegues verticales y horizontales.

Respuesta 5:

Mediante la observación los estudiantes pueden señalar que ambas áreas son iguales ya que representan un tercio del cuadrado mayor.

Pregunta 1. c)

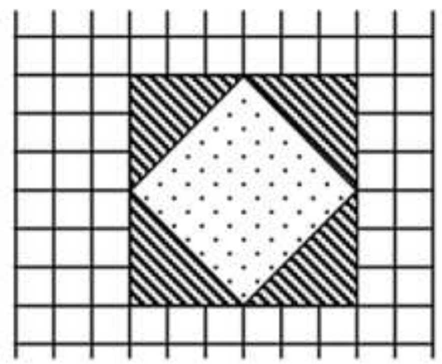


Figura 13. Pregunta 1.c. Situación Didáctica

Respuesta 1:

Una estrategia es observar que la superficie A es el complemento de B en el cuadrado de referencia mayor. Luego, para calcular el área de las superficies involucradas utilizaremos como unidad unitaria común, la longitud del lado del cuadrado pequeño de la cuadrícula que denotaremos por k. Entonces el área de la superficie de cuadrado de referencia mayor es

$$6k \cdot 6k = 36k^2.$$

Por otra parte, el área de la superficie B corresponde al área de un rombo cuya longitud de sus diagonales es igual a $6k$, de donde el área de B es:

$$\text{Área de superfice } B\text{: } \frac{6k \cdot 6k}{2} = \frac{36}{2}k^2 = 18k^2$$

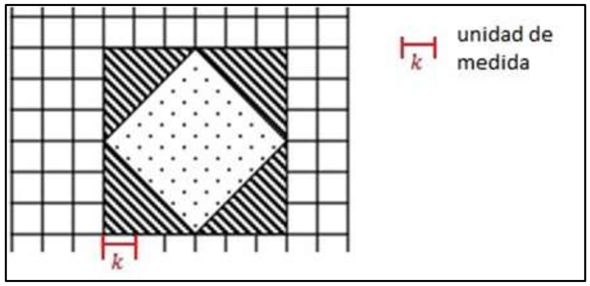


Figura 14. Comparación de áreas por complemento y utilización de fórmulas.

Por complemento obtenemos el área de la superficie de A

$$\text{Área cuadrado mayor} - \text{Área de } B = 36k^2 - 18k^2 = 18k^2$$

Por lo tanto, las superficies A y B poseen la misma área.

Respuesta 2:

Por un pliegue a lo largo de la mediana vertical u horizontal del cuadrado de referencia mayor, se obtiene la figura (para pliegue a lo largo de la mediana vertical):

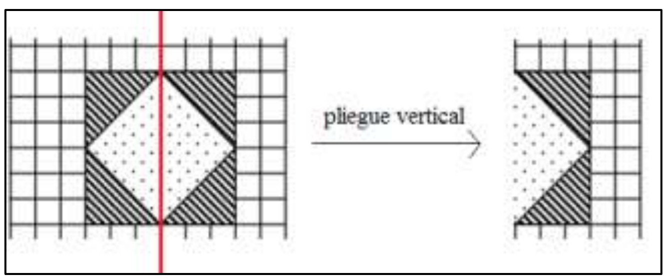


Figura 15. Utilización de pliegue vertical.

El rectángulo de referencia mayor que se ha obtenido por este pliegue tiene dimensiones $3k$ y $6k$ (siendo k la longitud del lado del cuadrado pequeño de la cuadrícula). Luego su área es

$$3k \cdot 6k = 18k^2.$$

Por otro el área del triángulo inscrito (región punteada) en este rectángulo, de base $6k$ y altura $3k$, es

$$\frac{3k \cdot 6k}{2} = \frac{18}{2}k^2 = 9k^2$$

Por complemento, la diferencia entre ambas áreas, la del rectángulo de referencia y la del triángulo inscrito es

$$18k^2 - 9k^2 = 9k^2$$

Por la acción de plegar, estas dos áreas corresponden a la mitad del área de la superficie B y A respectivamente, luego tanto A como B poseen la misma área.

También es posible, que algunos estudiantes utilicen el mismo razonamiento y estrategia, pero en lugar de utilizar la acción de plegar utilicen la simetría de eje cualquiera de las medianas del cuadrado de referencia mayor. Como las simetrías dejan invariante el área, entonces el área de A y B es el doble de las áreas de las regiones obtenidas por aplicación de esta simetría.

Respuesta 3:

otra posible resolución, similar a la anterior, es aplicar dos pliegues, vertical y luego horizontal (u horizontal y luego vertical) a lo largo de las respectivas medianas, resultado una figura

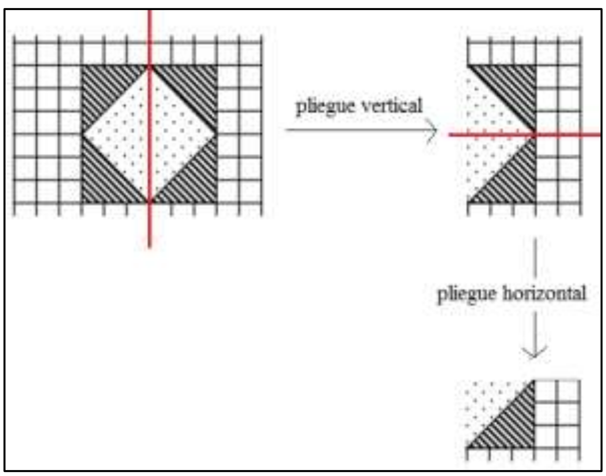


Figura 16. Utilización de pliegue vertical y horizontal.

El resultado de estos dos pliegues, es una figura de un cuadrado de referencia mayor que contiene dos triángulos inscritos simétrico respecto de la diagonal, luego de igual área. El área de este triángulo rectángulo es:

$$\frac{3k \cdot 3k}{2} = \frac{9}{2}k^2$$

Luego por efecto del doble pliegues, el área de las superficies A y B es el cuádruple del área del triángulo rectángulo anterior:

$$4 \cdot \frac{3k \cdot 3k}{2} = 4 \cdot \frac{9}{2} k^2 = 18k^2$$

Luego ambas superficies poseen la misma área.

Respuesta 4:

Otra posible respuesta de los estudiantes es mediante la partición simétrica de las regiones expresadas en una superficie más simple. Las diagonales del rombo (superficie B) particionan la superficie B en cuatro triángulos rectángulos congruentes entre sí y congruentes a cada triángulo rectángulo achurado que son parte de la superficie A. Llamemos a este triángulo rectángulo como triángulo unidad. Luego como este triángulo es la cuarta parte, en superficie, tanto de A como de B, se tiene entonces que el área de ambas superficies es igual a:

$$4 \cdot (\text{Área triángulo unidad}) = 4 \cdot \frac{3k \cdot 3k}{2} = 4 \cdot \frac{9}{2} k^2 = 18k^2$$

Esta estrategia utiliza la descomposición o partición de figuras complejas en figuras más simples.

Actividad matemática 2

Consigna

2. En la figura de mas abajo, las rectas (*CD*) y (*AB*) son paralelas.
   Señalar la respuesta correcta y describa en el recuadro la(s) estrategia(s) utilizada(s):
   1. El área del triángulo *ABC* es mayor que la del triángulo *ABD*.
   2. El área del triángulo *ABC* es igual que la del triángulo *ABD*.
   3. El área del triángulo *ABC* es menor que la del triángulo *ABD*.

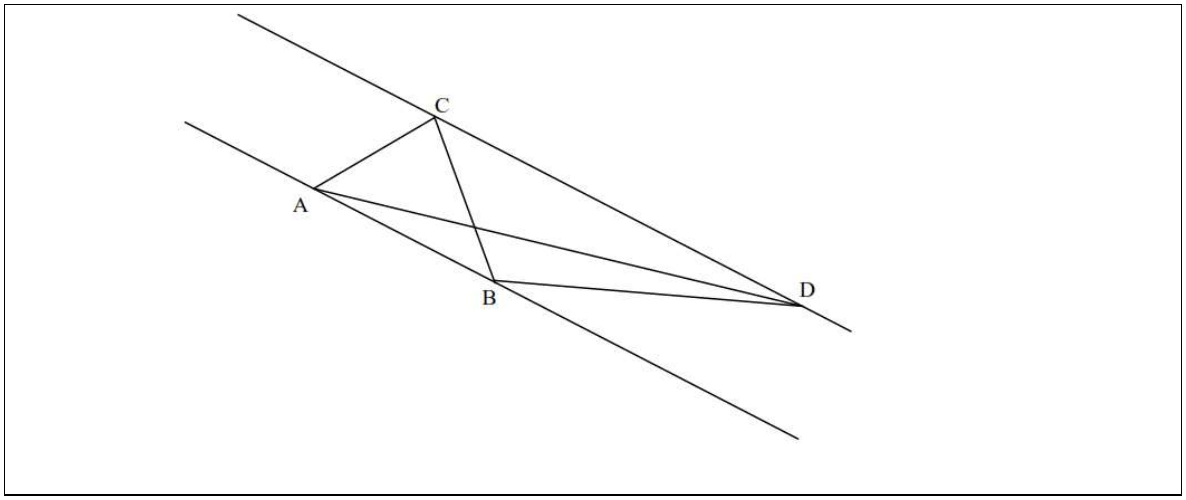


Figura 17. Pregunta 2. Situación Didáctica

a) Objetivo

Identificar los procedimientos utilizados por los estudiantes, para así establecer los diferentes niveles de conocimiento de los estudiantes en relación al área del triángulo.

b) Posibles estrategias de resolución

A continuación, se presentan algunas de las posibles estrategias de resolución de los estudiantes de la actividad 2.

Respuesta 1:

Considerando que ambos triángulos tienen en común el lado AB, utilizaremos este lado como lado basal de ambos triángulos. Respecto de este lado basal y/o de su extensión, la altura al vértice C en el triángulo ABC y la altura al vértice D en el triángulo ABD son iguales, ya que ambos vértices se encuentran sobre la recta (CD) que es paralela a la recta (AB) donde se encuentra la base de ambos triángulos. En base a lo anterior, el área de ambos triángulos es la misma. Por lo tanto, la respuesta correcta es la alternativa 2. En esta resolución la estrategia es; primero es la utilización de la expresión (fórmula) del área de un triángulo cualquiera:

$$\text{Área triángulo} = \frac{b \cdot h}{2}$$

donde b es la base y h la altura del triángulo. Luego, la comparación de ambos triángulos para encontrar elementos comunes (lados basal y altura).

Respuesta 2:

Una posible respuesta de los estudiantes es que particionen ambos triángulos, esto es considerando F el punto de intersección de los lados BC y AD, consideren la siguiente partición:

- el triángulo ABC es la unión (o yuxtaposición) de los triángulos ABF y AFC,
- el triángulo ABD es la unión (o yuxtaposición) de los triángulos ABF y BDF

En base a esto, como el triángulo ABF es común, entonces todo se reduce a comparar las áreas de y AFC y BDF. Y para estos últimos, es posible que por visualización considere que el área del triángulo AFC es mayor que la del triángulo BDF dado la forma de cada uno. De todo esto, entonces concluiría que el área del triángulo ABC es mayor que la del triángulo ABD, señalando que la respuesta correcta es la alternativa 1, y por consiguiente 2 y 3 las considera falsas.

Respuesta 3:

Un posible desarrollo es que hagan la comparación de las áreas individualmente por la comparación de la base y altura. Esto es, para el triángulo ABC, de acuerdo a su posición, es natural que consideren como lado basal el segmento AB. Sin embargo, para el triángulo ABD por su posición, es posible que consideren como lado basal el segmento AD, en cuyo caso la altura es la del vértice B. Luego proceder como sigue:

Lado basal AB del triángulo ABC es menor que el lado basal AD del triángulo ABD, y Altura en C del triángulo ABC es mayor que la altura en B del triángulo ABD

En esta situación, es posible dos respuestas:

- que el estudiante no pueda concluir una respuesta,
- que, al multiplicar la base y altura, se compensen las diferencias, es decir que el lado basal AB del triángulo ABC que es menor que la del lado basal AD del triángulo ABD, se compense con las respectivas alturas, concluyendo que el resultado es el mismo.

Respuesta 4:

Considerar la altura del triángulo ABD la longitud del segmento BF, y para el triángulo ABC aquella del lado AB en el vértice C, la longitud del segmento CE.

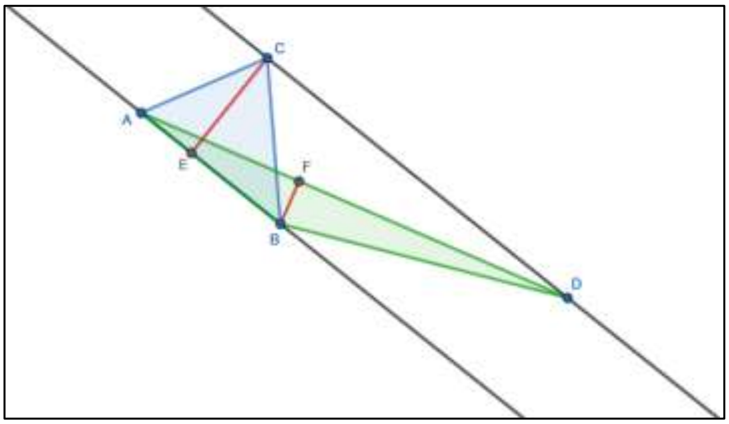


Figura 18. Utilización de altura de los triángulos *ABD* y *ABC*.

Luego para ambos triángulos, considerar la misma base AB, y dado que (visualmente) la altura CE es mayor que la BF, se concluye que el área del triángulo ABC es mayor la del triángulo ABD, es decir la respuesta correcta es la alternativa 1.

En este posible desarrollo, el error del estudiante es que en el triángulo ABD si ha considerado la altura BF no puede asociar como la base el lado AB, si no más bien el lado AD (la altura de un triángulo es cada uno de los segmentos que une un vértice con un punto de su lado opuesto o de su prolongación y perpendicular a dicho lado o prolongación).

Respuesta 5:

Aplicación de la fórmula para el cálculo del área para el caso de triángulos rectángulos: semiproducto de los catetos. En este caso,

- en el triángulo ABD, el semiproducto de los lados (como catetos) AB y BD

$$\text{Área triángulo } (ABD) = \frac{AB \cdot BD}{2}$$

- en el triángulo ABC, el semiproducto de los lados (como catetos) AC y CB

$$\text{Área triángulo } (ABC) = \frac{AC \cdot CB}{2}$$

Por visualización de las figuras, los lados AB y CB son iguales (en longitud), es decir el estudiante asumiría este hecho. En ese caso entonces, se tendría

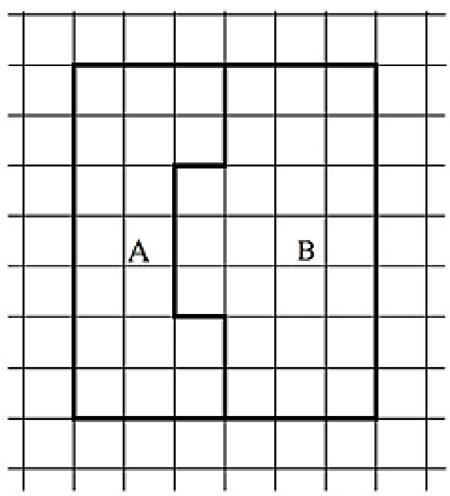
$$\text{Área triángulo } (ABC) = \frac{AC \cdot CB}{2} = \frac{AC \cdot AB}{2} < \frac{BD \cdot AB}{2} = \text{Área triángulo } (ABD)$$

pues $AC < BD$. Luego, el área del triángulo ABC es menor que la del triángulo ABD. Por lo tanto, la respuesta correcta es la alternativa 3.

<u>Actividad matemática 3</u>

Consigna

3. Un terreno ha sido dividido como lo indica la siguente figura.



En cada caso, en las siguientes preguntas a) y b), encierra en un circulo la respuesta que consideres correcta y explica tu eleccion en el recuadro correspondiente.

Figura 19. Pregunta 3. Situación Didáctica

a) Objetivo:

Detectar un posible teorema persistente en el estudiante. Identificar fenómenos en los estudiantes.

b) Posibles estrategias de resolución

A continuación, se presentan algunas de las posibles estrategias de resolución de los estudiantes de la actividad 3.

Pregunta 3. a)

a) *El área de la parcela A es es la más grande.*	*Las dos parcelas tienen igual área.*	*El área de la parcela B la más grande.*

Respuesta 1:

Una primera respuesta, por visualización de la figura, es la percepción que la superficie B sobrepasa la "posible línea perimetral recta" en su parte central con la superficie A, de donde, se deduce que la parcela B tiene un área mayor que la de A. La confirmación de esto se puede establecer numéricamente por el conteo del número de pequeños cuadrados que contiene cada parcela, constatando que la parcela B sobrepasa en tres de estos cuadrados pequeños respecto de la parcela A.

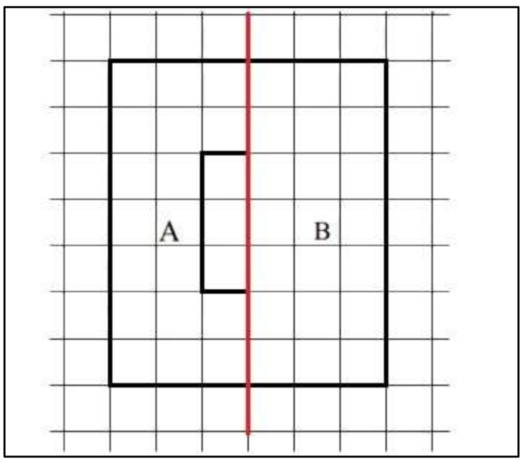


Figura 20. Línea perimetral recta.

Se debe observar que, cada parcela comparte el mismo perímetro exterior, en longitud y forma, y la división perimetral interior se realiza con una línea poligonal (objeto unidimensional) por consiguiente la longitud de ésta permanece constante independiente de la curvatura que puede tener en su trayecto. Esto no es el caso, si esta línea poligonal produce una curvatura hacía la parcela A, haciendo ganar superficie a la parcela B en disminución de la superficie de A, esto obedece al hecho que superficie (plana en este caso) es un objeto de bidimensional (dos dimensiones).

Respuesta 2:

Una posible respuesta de los estudiantes es que establezcan que la parcela A es de menor área que la de B, por medición del área de cada una utilizando el número de cuadrados pequeños (como una unidad común) que ocupa cada parcela. Por ejemplo, dos posibles alternativas son:

Área parcela A: $2 \cdot 7 + 4 = 18$ cuadrados pequeños.

Área parcela B: $3 \cdot 7 + 3 = 24$ cuadrados pequeños.

O equivalentemente, otra alternativa es:

Área parcela A: $3 \cdot 7 - 3 = 18$ cuadrados pequeños.

Área parcela B: $3 \cdot 7 + 3 = 24$ cuadrados pequeños.

Respuesta 3:

Los estudiantes proceden por medición del área y perímetro de ambas parcelas. Para ello, se elige como unidad de medida común y basal el lado del cuadrado pequeño de la cuadrícula. Denotemos por k la longitud de este cuadrado unidad. En ese caso la medición de las respectivas áreas sería:

Área parcela A: $3k \cdot 7k - 1k \cdot 3k = 18k^2$

Área parcela B: $3k \cdot 7k + 1k \cdot 3k = 24k^2$

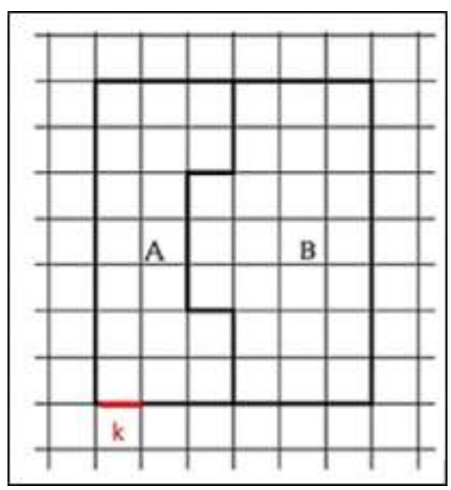


Figura 21. Unidad de medida "*k*"

Respuesta 4:

Otra posible estrategia de los estudiantes para el área de cada parcela es, fijarse que la división del lado superior o inferior de cada una, es el punto medio. Esto produce, en un primer cálculo, que el cuadrado de referencia mayor (línea perimetral de ambas parcelas) ha sido dividido en dos partes iguales, donde cada una de estas partes iguales es igual, en superficie, a:

$$\frac{6 \cdot 7}{2} = 21 \text{ cuadrados pequeños}$$

Luego, en un segundo cálculo ajustar el efecto de la división interior (que no es una línea poligonal recta, sino poligonal con curvatura) la cual produce un plus de superficie de $1 \cdot 3 = 3$ cuadrados pequeños. para la parcela B en disminución de la parcela A. Así finalmente, se obtiene el siguiente resultado:

$$\text{Área parcela } A\text{:} \ \frac{6 \cdot 7}{2} - 1 \cdot 3 = 18 \ \text{ área de los cuadrados pequeños}$$

$$\text{Área parcela } B\text{:} \ \frac{6 \cdot 7}{2} + 1 \cdot 3 = 24 \ \text{ área de los cuadrados pequeños}$$

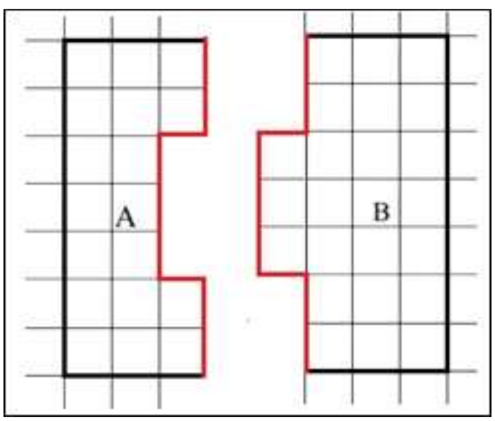


Figura 22. Separación de las parcelas

Por lo tanto, el área de la parcela A es mayor que la de la parcela B.

Pregunta 3. b)

b) *El perímetro de la parcela parcela A es el más grande.*	*Las dos parcelas tienen el mismo perímetro.*	*El perímetro de la B es el más grande.*

Respuesta 1:

En relación al perímetro de cada parcela se constata que cada una tiene el mismo perímetro externo, en cuanto a longitud, y la división perimetral interior tiene también la misma longitud por tratarse una división unidimensional. Por consiguiente, ambas parcelas tienen igual perímetro.

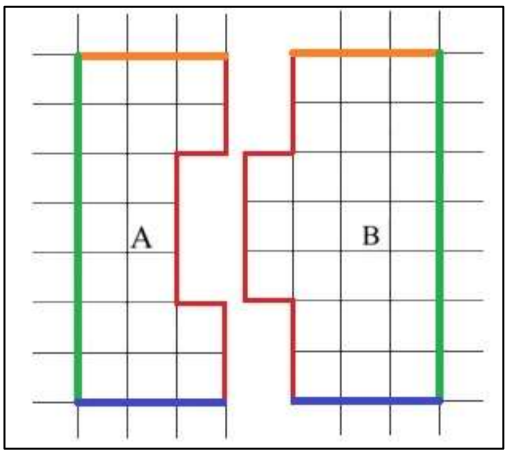


Figura 23. División perimetral

Respuesta 2:

Para el perímetro, es posible que los estudiantes utilicen la afirmación falsa "a mayor área, mayor perímetro", deduciendo que la parcela B tiene mayor perímetro.

Respuesta 3:

Los estudiantes proceden por medición del perímetro de ambas parcelas. Para ello, se elige como unidad de medida común y basal el lado del cuadrado pequeño de la cuadrícula. Denotemos por k la longitud de este cuadrado unidad. En ese caso la medición del perímetro (en sentido reloj):

Perímetro parcela A: $3+2+1+3+1+2+3+7=22$ unidades de longitud k

Perímetro parcela B: $3+7+3+2+1+3+1+2=22$ unidades de longitud k

En conclusión, ambas parcelas tienen el mismo perímetro.

Respuesta 4:

Otra posible estrategia de los estudiantes para el perímetro de cada parcela es, medir el perímetro total del cuadrado de referencia mayor (lo que equivale al perímetro externo de cada parcela), de donde el perímetro externo de cada parcela es la mitad de este perímetro total, es decir:

$$\frac{2\cdot(6+7)}{2}=13 \text{ unidades de longitud del cuadrado pequeño}$$

Luego a este perímetro se debe sumar la longitud del perímetro interior, que es común a ambas parcelas y que es igual a 9 unidades de longitud del cuadrado pequeño (por conteo lineal). Así finalmente, los estudiantes establecerían que el perímetro de cada parcela es igual a:

$$\frac{2\cdot(6+7)}{2}+9=22 \text{ unidades de longitud del cuadrado pequeño}$$

Por lo tanto, ambas parcelas tienen el mismo perímetro.

3.3 ANÁLISIS DE LAS PRODUCCIONES DE LOS ESTUDIANTES

3.3.1 Análisis de producciones de los estudiantes y modo de recolección de datos

Para la realización del análisis de las producciones de los estudiantes en primer lugar se dejaron fuera todos los test en los cuales los estudiantes respondieron de manera correcta cada problema planteado. Por consiguiente, solo se trabajó con 17 muestras de las 31 en total. para el análisis de las producciones conformamos 2 grupos; el primero constaba de los estudiantes que tuvieron problemas o no respondieron la primera pregunta del test, lo cual nos permitió observar las ambigüedades que existían entorno a los términos empleados. Un segundo grupo se formó con las muestras que presentaban algún error o no existió respuesta para la pregunta dos y tres de la situación didáctica. Este grupo tuvo como objetivo analizar el nivel de conocimiento de cada estudiante y la aparición de algún teorema en acto como "a mayor área mayor perímetro".

3.3.2 Análisis de los errores

Para facilitar el análisis de las respuestas de los estudiantes hemos diseñado una tipología especifica de los posibles errores que cometieron los estudiantes en el desarrollo de la actividad.

3.3.2.1 Concepción numérica

Incluye los errores que aparecen por una distorsión de un principio, una regla, teorema o definición. En esta categoría se encuentran los errores por aplicaciones de teoremas sin las condiciones necesarias, por aplicación de propiedades que no corresponden, por la realización de una valoración inadecuada de una definición, teorema o formula. Los errores de cálculo, los errores en la manipulación de símbolos algebraicos elementales. Incluyen las deficiencias en el contenido y los problemas específicos de conocimiento, necesarios para desenvolverse satisfactoriamente en la tarea matemática. Estas deficiencias pueden originarse en el desconocimiento de algoritmos, manejo inadecuado de conceptos básicos, realización de procedimientos incorrectos, incomprensión de símbolos, etc.

3.3.2.2 Concepción geométrica:

Incluye los Errores debidos a dificultades para obtener información espacial: Muchos errores matemáticos surgen de las diferencias entre las imágenes espaciales y el pensamiento espacial de los alumnos. Estos errores aparecen cuando es necesario hacer una representación espacial de una situación matemática o de un problema geométrico y no se logra realizarlo con éxito. Además, incluye los Errores debidos a la rigidez del pensamiento que surgen por la falta de flexibilidad en el pensamiento, es decir el alumno no puede adaptar lo que ya sabe a situaciones nuevas. En esta categoría están los errores de asociación, de inferencia, de asimilación y los errores generados por la aplicación de reglas y propiedades válidas solo en algunos casos.

3.3.2.3 Incumplimiento de las normas de redacción

Errores debidos a la redacción y comprensión de las instrucciones de trabajo: Surgen por la dificultad que tienen los alumnos para comprender los enunciados de las actividades o situaciones problemáticas propuestas. Errores debidos a inferencias no validas lógicamente: Incluye los errores cometidos por un razonamiento incorrecto. Esta nueva información, inválida, es luego utilizada para resolver el problema planteado ocasionando una respuesta errónea.

3.3.2.4 Errores con el lenguaje natural

Para muchos alumnos el aprendizaje de conceptos matemáticos, los símbolos, y el vocabulario es una "lengua extranjera”. Esta dificultad es, en muchos casos, la causal del error.

4. RESULTADOS DE LOS ANÁLISIS DE DATOS

4.1 ANÁLISIS DE LA SECUENCIA DIDÁCTICA

Debido a la estructura de la secuencia didáctica, es importante destacar que, para resolver la primera pregunta, el alumno solo debía conocer los conceptos involucrados y las fórmulas correspondientes a cada uno, mientras que el segundo ítem apuntaba a evaluar la capacidad del estudiante de aplicar diferentes conceptos y propiedades geométricas: “ dos triángulos que comparten base y tienen igual altura tienen la misma área” y la última pregunta se quería evaluar la capacidad de los estudiantes de poner en juego otro tipo de habilidades, hacer relaciones, comprender el enunciado e imaginar correctamente la situación. Es decir, quien intentaba resolver este problema tenía más probabilidades de cometer errores.

A continuación, se muestra un compilado de producciones de los estudiantes donde se ejemplifican algunos de los errores dentro de los ejercicios de interés, para las actividades de la situación didáctica.

Actividad 2: Producciones de los estudiantes

En la siguiente ilustración podemos observar como el estudiante no es capaz de utilizar los conceptos geométricos conocidos sobre el triángulo, ya que no considera que la altura del triángulo *ABD* se encuentra fuera de este, el hecho que en este ejercicio el estudiante no pueda acceder de manera concreta a la utilización de la formula, crea un obstáculo en el desarrollo de la respuesta.

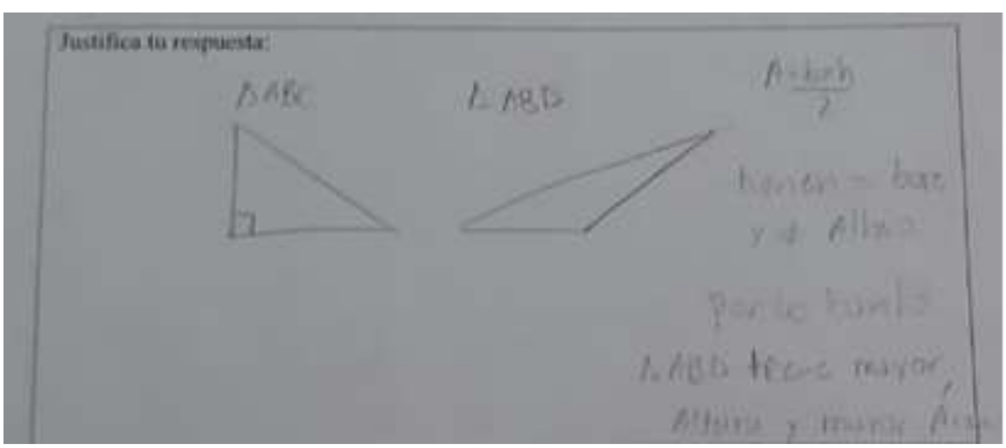


Figura 24. Ausencia de conceptos geométricos del triángulo.

En los siguientes casos los estudiantes no hacen uso de los conceptos geométricos. El primero utiliza criterios de congruencia para calcular el área, lo cual no tiene relación con el problema planteado (área de una figura). El segundo utiliza un teorema en acto, ya que hace referencia que el perímetro varía en relación al área.

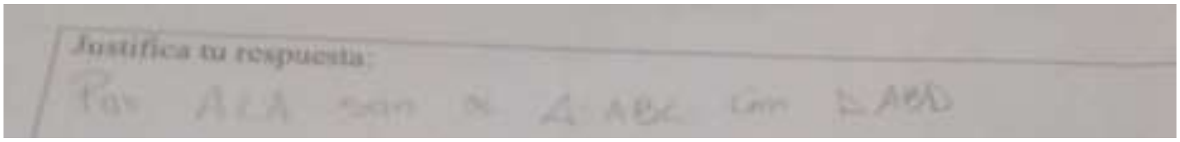


Figura 25. Utilización de criterios de congruencia para calcular el área.

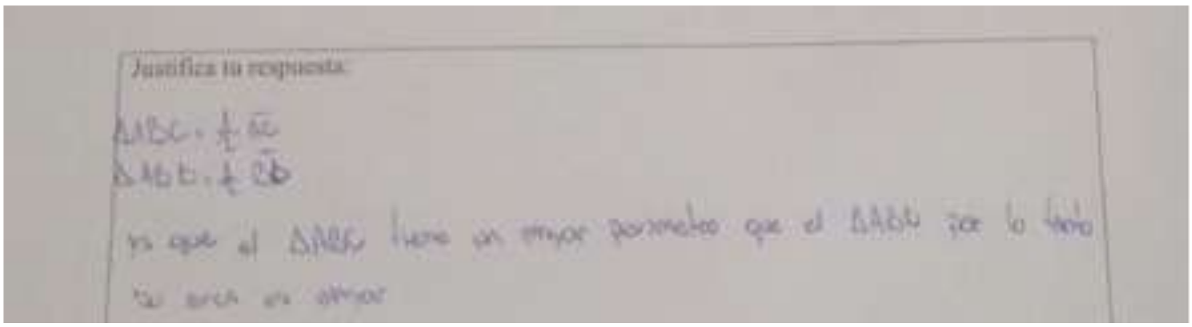


Figura 26. Utilización teorema en acto “variación de perímetro según el área”

En el siguiente caso el estudiante, recurriendo a conocimientos de trigonometría, relaciona la distancia de estos, es directamente proporcional a su área, sin tener en consideración la amplitud del ángulo seleccionado.

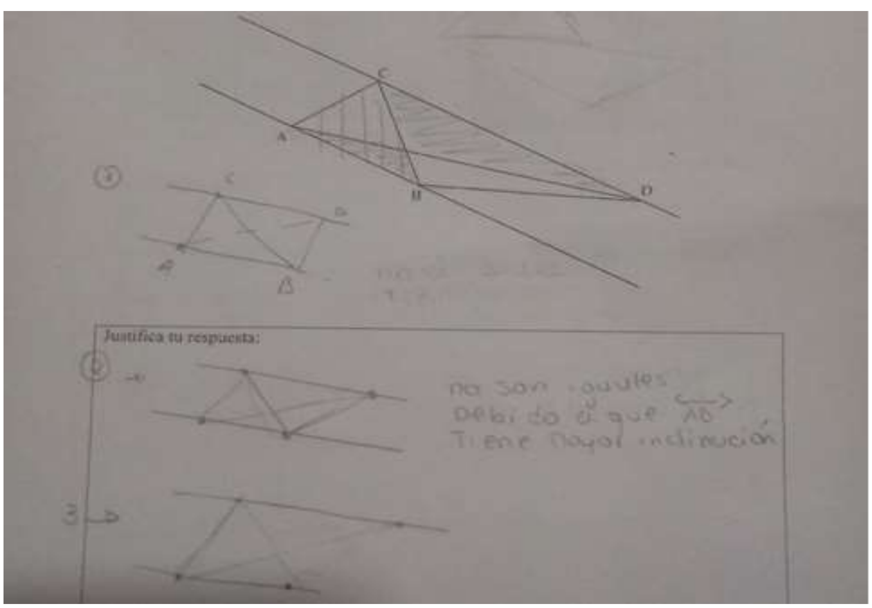


Figura 27. Utilización de conocimientos de trigonometría.

Actividad 3: Producciones de los estudiantes

El estudiante utiliza la fórmula del área del rectángulo para calcular el área de la figura sin considerar la forma de la superficie, lo cual nos lleva a pensar que el estudiante acude al uso de fórmulas premeditadamente.

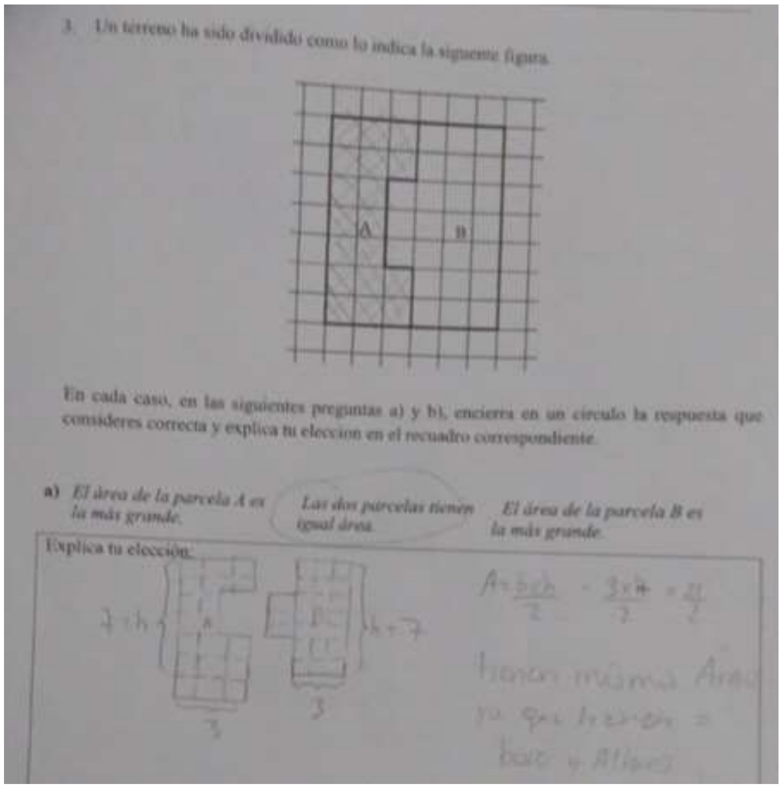


Figura 28. Aplicación de fórmula sin considerar la forma de la figura.

El estudiante realiza un juicio al ojo para determinar cuál de las dos parcelas es más grande, en cuanto a la superficie, de donde, utilizando el teorema en acto *"a mayor área, mayor perímetro"*, determina su respuesta a la pregunta. Errónea, por cierto. Tampoco establece una justificación matemática.

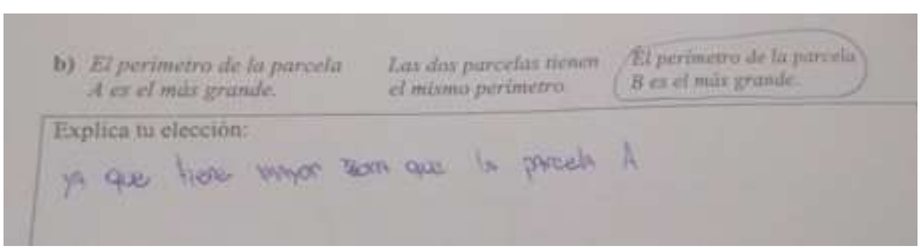


Figura 29. Utilización de "juicio al ojo" para comparar dos superficies.

4.2 PRESENTACION DE LOS RESULTADOS

4.2.1 Categorización de los errores

Tras un análisis de las faltas cometidas y un trabajo de reagrupación, hemos clasificado en 4 grupos, los cuales se han subdividido en subgrupos de la siguiente manera:

A. Concepción numérica

<table>
<tr><th colspan="4">CATEGORIAS A</th></tr>
<tr><td>A_1</td><td colspan="3">No distinguir las diferentes magnitudes: Asignar la misma letra (b) a dos dimensiones distintas, para luego aplicar la fórmula correspondiente según la figura</td></tr>
<tr><td>A_2</td><td colspan="3">Confundir las unidades: Utilizar como unidad de medida un cuadradito para calcular el perímetro.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">A_3</td><td rowspan="2">Extender el uso de fórmulas a casos en los que no son válidos:</td><td>A_3.1</td><td>Utilizar fórmula del cuadrado para encontrar el área del triángulo.</td></tr>
<tr><td>A_3.2</td><td>Utilizar la fórmula para calcular el área del rectángulo sin considerar la forma de las superficies presentes.</td></tr>
</table>

Tabla 2. CATEGORÍA A: concepción numérica.

B. Concepción geométrica

<table>
<tr><th colspan="6">CATEGORIAS B</th></tr>
<tr><td rowspan="2">B_1</td><td rowspan="2">Ser sensible a la forma de la superficie:</td><td>B_1.1</td><td colspan="3">Considerar que el área del triángulo varía según la “inclinación”</td></tr>
<tr><td>B_1.2</td><td colspan="3">Intentar transformar de manera visual una superficie para ver si encaja con la otra.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">B_2</td><td rowspan="2">Ser sensible a los diferentes índices perceptivos (por ejemplo, es difícil concebir la posibilidad de evaluar el área de un triángulo en:</td><td>B_2.1</td><td colspan="3">No percibir la altura fuera del triángulo.</td></tr>
<tr><td>B_2.2</td><td colspan="3">Percibir que el área de una superficie es mayor a la otra porque tiene más lados rayados (juicio al ojo).</td></tr>
<tr><td rowspan="3">B_3</td><td rowspan="3">Confundir las diferentes características de la superficie (por ejemplo, pensar que área y perímetro varían necesariamente en el mismo sentido).</td><td rowspan="2">B_3.1</td><td rowspan="2">Utilizar teorema en acto:</td><td>B_3.1.1</td><td>A mayor perímetro, mayor área</td></tr>
<tr><td>B_3.1.2</td><td>“Si las rectas son paralelas, las áreas de los triángulos son iguales”</td></tr>
<tr><td>B_3.2</td><td colspan="3">Utilizar un teorema inapropiado para resolver el problema (Thales y ALA).</td></tr>
<tr><td>B_4</td><td colspan="5">Dividir las superficies en partes disociadas: Separar la figura en 4 triángulos iguales y 1 cuadrado, calculando sólo el área de un triángulo y el área del cuadrado para luego comparar las superficies.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">B_5</td><td rowspan="2">Reconocer los elementos geométricos relevantes para utilizar las fórmulas:</td><td>B_5.1</td><td colspan="3">No identificar la altura del triángulo.</td></tr>
<tr><td>B_5.2</td><td colspan="3">No identificar que dos triángulos comparten un lado (la base).</td></tr>
</table>

Tabla 3. CATEGORÍA B: concepción geométrica.

C. Incumplimiento de las normas de redacción

CATEGORIAS C			
C_1	Ausencia o formulación incorrecta de soluciones intermedias:	**C_1.1**	Error en el procedimiento de la adición.
		C_1.2	Concluir que las áreas de dos triángulos son iguales, considerando que están entre dos rectas paralelas, sin tomar en cuenta que las bases son iguales.
C_2	Ausencia de solución general: No hay respuesta.		

Tabla 4. CATEGORÍA C: incumplimiento de las normas de redacción.

D. Errores con el lenguaje natural

CATEGORIAS D			
D_1	Vocabulario inadaptado (por ejemplo, una confusión semántica entre los términos)	**D_1.1**	Mezclar lenguaje natural con lenguaje matemático.
		D_1.2	Utilizar criterios de congruencia y símbolos matemáticos inadecuados en el contexto.
		D_1.3	Utilizar términos de semejanza para referirse a igualdad de perímetro.
D_2	Uso incorrecto de conectores lingüísticos		

Tabla 5. CATEGORÍA D: errores en el lenguaje natural.

4.2.2 Matriz de Errores

La compilación y distribución de todos los errores figuran en la siguiente matriz en forma de una tabla en la que hemos identificado los errores cometidos por los estudiantes, observemos que se trata de una apreciación cualitativa y no todos los errores, incluso dentro de una misma categoría, son de la misma magnitud. Para mejor comprensión de la matriz señala se ha realizado una codificación de cada error así cada letra (A, B, C, D) indica la categoría del error cometido y los números indican el error preciso que se ha observado. Así, el estudiante 2 cometió 3 errores, uno del tipo B, específicamente dividió las superficies en partes disociadas.

Categorías	Errores	Problemas	ALM 1	ALM 2	ALM 3	ALM 4	ALM 5	ALM 6	ALM 7	ALM 8	ALM 9	ALM 10	ALM 11	ALM 12	ALM 13	ALM 14	ALM 15	ALM 16	ALM 17	N° Total de Errores
ERROR TIPO A Concepción numérica	A1: No distinguir las diferentes magnitudes en juego.	1												A_1						1
		2																		0
		3																		0
	A2: Confundir las unidades.	1																		0
		2																		0
		3						A_2	A_2		A_2									3
	A3: Extender el uso de las fórmulas a casos en los que no son válidas (por ejemplo, hacer el producto de las longitudes de los lados para calcular el área del paralelogramo).	1														A_3.1				1
		2																		0
		3			A_3.2											A_3.1				2
ERROR TIPO B Concepción geométrica	B1: Ser sensible a la forma de las superficies.	1																		0
		2							B_1.2							B_1.1				2
		3																		0
	B2: Ser sensible a los diferentes índices perceptivos (por ejemplo, es difícil concebir la posibilidad de evaluar el área de un triángulo en cm2).	1														B_2.2				1
		2																		0
		3																		0
	B3: Confundir las diferentes características de	1																		0
		2												B_3.1.1	B_3.2		B_3.2			3

	la superficie (por ejemplo, pensar que área y perímetro varían necesariamente en el mismo sentido).	**3**												**B_3.1.1**						**1**
	B4: Dividir las superficies en partes disociadas.	**1**		**B_4**																**1**
		2																		**0**
		3																		**0**
	B5: Reconocer los elementos geométricos relevantes para utilizar las fórmulas.	**1**																		**0**
		2			**B_5.1**		**B_5.1**													**2**
		3																		**0**
ERROR TIPO C Incumplimiento de las normas de redacción	**C1: Ausencia o formulación incorrecta de soluciones intermedias.**	**1**																		**0**
		2																**C_1.2**		**1**
		3		**C_1.1**																**1**
	C2: Ausencia o formulación incorrecta de solución general.	**1**														**C_2**			**C_2**	**2**
		2	**C_2**	**C_2**		**C_2**	**C_2**	**C_2**		**C_2**	**C_2**	**C_2**	**C_2**							**9**
		3																**C_2**		**1**
ERROR TIPO D Errores con el lenguaje natural	**D1: Vocabulario inadaptado (por ejemplo, una confusión semántica entre los términos…)**	**1**																		**0**
		2															**D_1.2**		**D_1.1**	**2**
		3																		**0**
	D2: Uso incorrecto de conectores lingüísticos (y, por tanto, porque…).	**1**																		**0**
		2																		**0**
		3																		**0**

Tabla 6. Matriz de Errores.

En los resultados de las evaluaciones se observaron que los errores en la resolución de la situación planteada que se repitieron con mayor frecuencia fueron el error C_2: en la cual el alumno no entrega una solución, y los errores pertenecientes a la familia B_3: donde el alumno confunde características de la superficie, la siguiente tabla muestra la frecuencia con que se cometieron errores pertenecientes a cada familia.

Tipo de error	**Total de errores**	
	N°	**%**
Tipo A	7	21,21
Tipo B	10	30,30
Tipo C	14	42, 42
Tipo D	2	6,06
Total	**33**	**100,00**

Tabla 7. Frecuencia de errores cometidos.

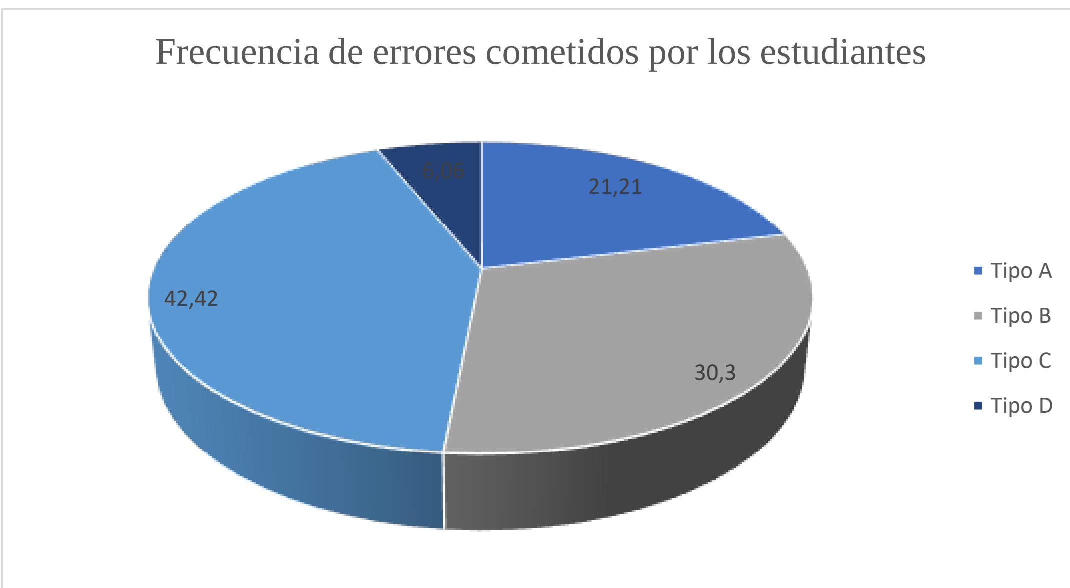


Figura 30. Frecuencia de errores cometidos por los estudiantes

En la siguiente tabla podemos apreciar los distintos tipos de errores cometidos en cada uno de los ítems

Ítem	A	B	C	D
I	2	2	2	0
II	0	7	10	2
III	5	1	2	0

Tabla 8. Cantidad de errores cometidos por ítems.

De esta tabla de cada error cometido por los alumnos, podemos apreciar que gran cantidad de los errores fueron realizados en el "ítem II" con 19 de los 33 errores (58% aproximadamente) cometidos por los estudiantes debido a que este representaba un desafío para determinar el conocimiento del área como magnitud. Por otro lado, los tipos de errores más frecuente son el ERROR TIPO C "Incumplimiento de las normas de redacción" (42%), seguido del ERROR TIPO B "Concepción geométrica" (30%), con estos datos, podemos sospechar que nuestra muestra tiene un bajo conocimiento en geometría y en las normas de escritura de la matemática.

Ítem	I	II	III
Correctamente	11	0	7
Cometido errores en el procedimiento	4	8	10
En blanco	2	9	0

Tabla 9. Resumen tipo de respuesta por ítem.

En la tabla anterior podemos ver las respuestas correctas, las que cometió algún error o dejo en blanco. podemos apreciar que el ítem I gran parte respondió de manera satisfactoria el ítem, por otra parte, ninguno lo hizo en el ítem II. Cabe destacar que en el ítem III todos los alumnos respondieron, aunque sea erróneo.

5. CONCLUSIONES

5.1 DOS ÁNGULOS DE ANÁLISIS

5.1.1 Ámbito didáctico

Es necesario aclarar que el resultado de este trabajo no puede considerarse de ninguna manera concluyente debido al escaso tamaño de las muestras, a la conformación no aleatoria de los grupos evaluados y a la heterogeneidad de los cuestionarios utilizados.

El aprendizaje de la magnitud longitud y su medida es un proceso que requiere de la intervención de la escuela, pues su construcción está ligada al desarrollo de desempeños y habilidades como la percepción, la comparación, la medición y la estimación, que les permiten a los estudiantes acercarse a los diferentes contextos en los que la magnitud longitud está presente.

La enseñanza del concepto magnitud debe involucrar diversas situaciones donde esta tenga utilidad. Su enseñanza debe hacerse a partir de procesos de medición en los que los estudiantes visualicen todas las aplicaciones de este concepto, pues a través de ello construirán el verdadero sentido y significado de aprender sobre la magnitud de longitud y su medida.

El trabajo en la escuela se debe redimensionar pues el tratamiento que se le debe dar a la magnitud área debe ser a partir de situaciones de aprendizaje donde el estudiante construya el concepto de ésta, viendo bajo los procesos de medición la importancia que tiene comunicar las diferentes medidas, y la necesidad de utilizar técnicas de cálculo más apropiadas para hallar el área de una superficie.

Se cumplieron los objetivos propuestos, al identificar y analizar los errores cometidos por los alumnos en el instrumento aplicado. Con dichos errores propusimos diversas categorizaciones y se obtuvieron conclusiones destacándose que:

- Desarrollos muy apegados a lo algebraico y escasamente relacionados con la resolución de problemas.

- Abordaje de contenidos completamente descontextualizados y poco articulados con los restantes.
- Escasa importancia otorgada al desarrollo de competencias relacionadas con la lectura crítica de datos y análisis de gráficas.
- Tratamientos de problemas demasiado centrados en lo numérico.

Un mismo error puede aparecer en diferentes procesos de resolución, lo que dificulta una clasificación definitiva y una jerarquía del mismo.

Las categorizaciones realizadas son empíricas y por lo tanto debemos tener en cuenta las limitaciones del modelo; sin embargo, se pueden fundamentar desde la práctica y ser de utilidad para docentes y autoridades interesados en el diagnóstico, tratamiento y superación de errores.

5.1.2 Ámbito matemático

Podemos evidenciar diversos procedimientos empleados por los estudiantes en las distintas situaciones problemas presentadas, tales como:

Realizar procedimientos que no tienen relación con el problema planteado, (ejemplo: utilizar criterios de congruencia para calcular el área de una figura).

Aplicación de teoremas en acto: "el perímetro varía en relación al área"

Extender el uso de fórmulas a casos en los que no son válidos (ejemplo, utilizar la fórmula del área del cuadrado para calcular el área de un triángulo)

Falta de conocimientos previos para aplicar en situaciones, lo cual por ejemplo no percibir la altura fuera del triángulo.

Hemos evidenciados dificultades en la utilización de conceptos, símbolos y vocabulario matemático, y al efectuar el pasaje del lenguaje corriente al lenguaje matemático, en la representación espacial de una situación matemática o de un problema geométrico. Deficiencias en el manejo de algoritmos, hechos básicos, procedimientos, símbolos y conceptos matemáticos, falta de flexibilidad en el pensamiento para adaptarse a situaciones nuevas; comprenden los errores por perseveración, los errores de asociación, los errores de interferencia, los errores de asimilación.

Como cierre queremos dejar planteadas algunas cuestiones, ya que el trabajo realizado puede abrir nuevas vías de investigación, estableciendo diversos problemas a indagar. Algunos aportes que nos ofrece este estudio y que se pueden abordar en futuros trabajos son:

- Análisis de los enunciados de problemas en términos de posibles inductores de errores
- Análisis cualitativo de errores a partir de entrevistas
- Aplicación y evaluación de las propuestas realizadas.
- Teniendo en cuenta los errores aquí analizados se puede hacer un tratamiento curricular de los mismos, organizando, implementando y evaluando unidades didácticas que los contemplen.
- Realización de estudios para constatar hipótesis alternativas que justifiquen el origen o causa de determinados errores algebraicos analizados en el presente trabajo.

6. BIBLIOGRAFIA

BALTAR, P. (1996). Á propos de l'apprentissage du concept d'aire. Petit X.

BROUSSEAU, G. (1986) : Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques*.

BROUSSEAU, G. (2007). Théorie des situations didactiques. Grenoble, Francia: La Pensée Sauvage (primera edición en francés, 1998).

CHAMORRO, M. (1995). Aproximación a la medida de las magnitudes en la Enseñanza Primaria. Uno: Revista de didáctica de las matemáticas.

CAMACHO, M., DEPOOL, R. & GARBÍN, S. (2008). Integral definida en diversos contextos: Un estudio de casos. Educación matemática.

CHEVALLARD Y., La Transposition didactique : du savoir savant au savoir enseigné. 1986. pp. 89-91

CHEVALLARD Y. BOSCH M. (2000), Les grandeurs en mathématiques au collège.

DICKSON, L. Y OTROS (1991). El aprendizaje de las matemáticas. Editorial Labor, S.A.

DOUADY, R. (1983). *Rapport enseignement-apprentissage : Dialectique, outil-objet, jeux de cadres*. Cahiers de didactique des mathématiques. Nº **3**, IREM, Université Paris VII. Paris Madrid.

DOUADY, R; (1984) Relación enseñanza aprendizaje. Dialéctica Instrumento-objeto, juego de marcos. Cuadernos de didáctica de las matemáticas.

DOUADY, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. Recherches en Didactiquedes Mathématiques.

DOUADY, R. Y PERRIN-GLORIAN, M.J. (1983). Mesures des longueurs et des aires. Cahier de didactique des mathematiques.48. IREM Université Paris 7.

DOUADY R. et PERRIN-GLORIAN M.J. (1989) : Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane Educational Studies in Mathematics

GODINO, J. D., BATANERO, C. Y ROA, R. (2003). *Medida y su didáctica para maestros*. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada. ISBN:84-932510-2-X. [87 páginas; 0,9 MB] (Recuperable en, http://www.ugr.es/local/jgodino/)

GODINO, J. D. (2004). Matemáticas para maestros. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada. (Recuperable en, http://www.ugr.es/local/jgodino/).

GUZMAN, I. (2017). Lo esencial de las actividades geométricas. Segundo Seminario de Educación Matemática, Universidad Católica del Maule.

HART, K. M. (1984). Ratio: children´s strategies and errors. Windsor, NFER-Nelson.

MECESUP (2016). Programa MECESUP 3. (Memoria de Proyectos 2011-2016), Ministerio de Educación.

MINEDUC (2018) Programa de estudio Matemática 4to básico.

MINEDUC (2018) Guía del Docente Matemática 4to básico.

MINEDUC (2015) Programas de estudios de 7mo a 2do Medio.

MINEDUC (2018) Texto del estudiante Matemáticas 1ero Medio.

MOREIRA, M.A. BALTAR (1999). Aprendizagem significativa. Brasília: Editora da UnB.

ROUCHE N. (1992). Le sens de la mesure. Des grandes aux nombres rationnels.

ROUCHE N. (1994), Qu'est-ce qu'une grandeur? Analyse d'un seuil épistémologique, *in Repères-IREM*, n°15

PERRIN-GLORIAN, (1993). "Questions Didactiques soulevées á partir de i´enseignement des mathématiques dans des classes ´faibles´", en Recherches en didactique des mathématiques.

PERRIN-GLORIAN, (1999). Le problème de l'enseignement des mesures des grandeurs géométriques à partir de l'exemple des aires.

PERRIN-GLORIAN, (2002). Didactique des mathématiques, in Bressoux P. (éditeur) Les stratégies de l'enseignant en situation d'interaction.

MARIE-JEANNE PERRIN-GLORIAN, ANNE-CÉCILE MATHÉ, RÉGIS LECLERCQ. Comment peut-on penser la continuité de l'enseignement de la géométrie de 6 à 15 ans? Le jeu sur les supports et les instruments. *Repères-IREM*, 2013, pp.5-41.

PIAGET, J., INHELDER, B., & SZEMINSKA, A. (1960). The child's conception of geometry. Oxford, England: Basic Books.

ZACHAROS, K., CHASSAPIS, D. (2012). Teaching suggestions for the measurement of area in Elementary School. Measurement tools and measurement strategies. University of Patras, Greece.

7. ANEXOS

7.1 CONSENTIMIENTO

Título de la investigación: *Una ingeniería didáctica hacia una aproximación a la noción de magnitud en la formación de profesores de primer año de la Universidad del Bío- Bío*

Investigadoras: Estudiantes de Pedagogía en Educación Matemática de la Universidad del Bío-Bío.

Maritza Araceli Cádiz Durdos
Miriam Yesenia Fuentealba Torres
Jorge Andrés Pinela Carrasco

Directora de la Investigación: Sara Pascual, Ph.D

A) INFORMACIONES A LOS PARTICIPANTES

1. Objetivos de la investigación

Este proyecto tiene por finalidad analizar nuevas formas de enseñanza en torno a los conceptos de magnitud y medida. Adaptar tipos de tareas que favorezcan la comprensión y su utilización n la resolución de problemas.

2. Participación en la investigación

Su participación en la investigación nos aportará información que nos permitirá identificar dificultades de resolución para la mejora de la enseñanza de estos tipos de problemas. Además, su compromiso con el desarrollo de la actividad favorecerá el aprendizaje y contribuirá a la autonomía y motivación de ejercitarse.

3. Confidencialidad

La información que se reúna será confidencial y no se usará para ningún otro propósito fuera de los de esta investigación de tesis.

B) CONSENTIMIENTO

Declaro haber tomado conocimiento de las informaciones descritas más arriba, haber obtenido las respuestas a mis preguntas sobre mi participación en la investigación y comprender el objetivo, las ventajas e inconvenientes de esta investigación.

Apellidos: ___________________________________

Nombres:___________________________________

Firma:_______________________________________

Correo Electrónico: ___________________________

Doy mi consentimiento para que los datos anónimos recogidos en esta investigación serán utilizados en el proyecto de tesis, en marco de respeto confidencialidad y de protección de las informaciones.

Sí ☐ No ☐

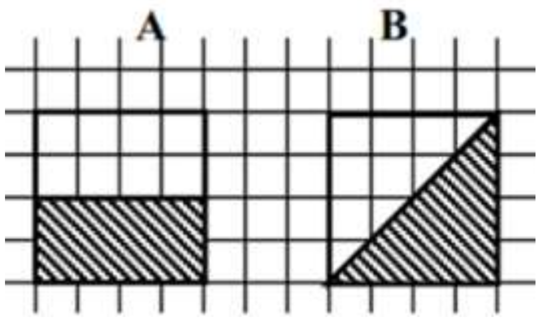
7.2 EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA

MAGNITUDES Y MEDIDAS

1. Para cada situación, señalar el número de la respuesta correcta :

   1. el área de la superficie rayada A es mas grande que la de B.
   2. el área de la superficie rayada A es igual que la de B.
   3. el área de la superficie rayada A es mas pequeña que la de B.

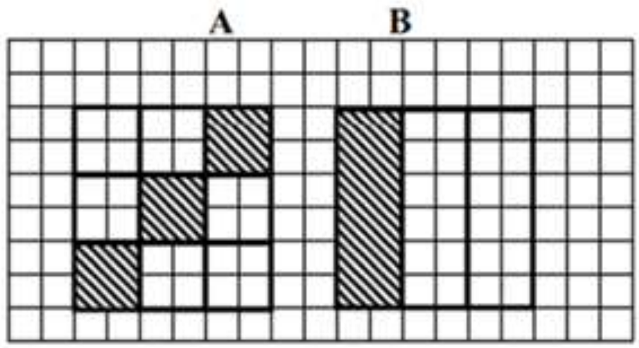
a)



1 **2** **3**

Justifica tu respuesta:

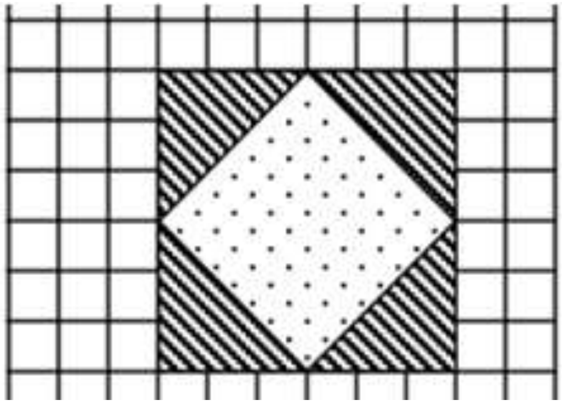
b)



1 **2** **3**

Justifica tu respuesta:

c)



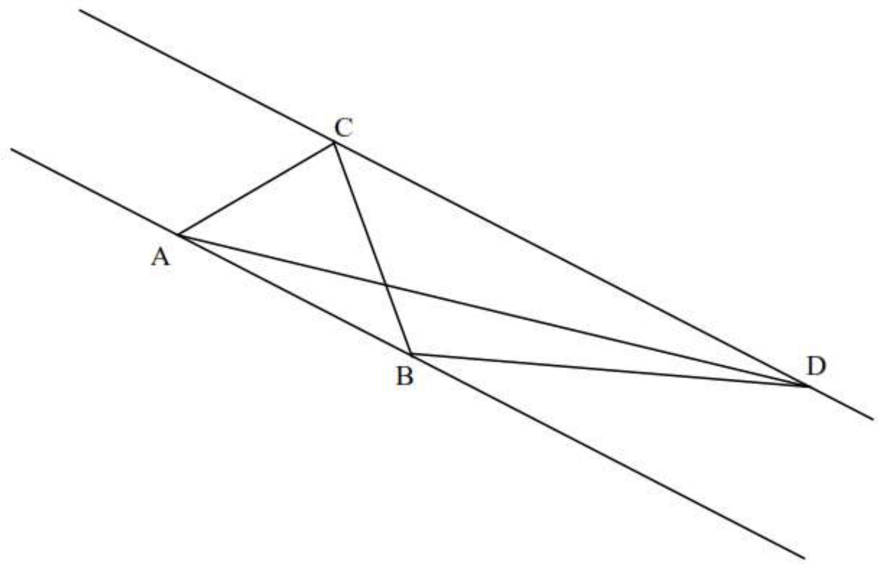
1 **2** **3**

A: superficie achurada

B: superficie punteada

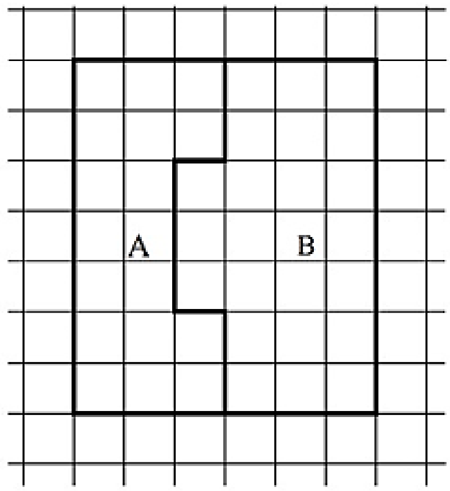
Justifica tu respuesta:

2. En la figura de más abajo, las rectas (CD) y (AB) son paralelas.
   Señalar la respuesta correcta y describa en el recuadro la(s) estrategia(s) utilizada(s):
   1. El área del triángulo ABC es más mayor que la del triángulo ABD.
   2. El área del triángulo ABC es igual que la del triángulo ABD.
   3. El área del triángulo ABC es menor que la del triángulo ABD.



Justifica tu respuesta:

3. Un terreno ha sido dividido como lo indica la siguente figura.



En cada caso, en las siguientes preguntas a) y b), encierra en un circulo la respuesta que consideres correcta y explica tu eleccion en el recuadro correspondiente.

a) *El área de la parcela A es es la más grande.* *Las dos parcelas tienen igual área.* *El área de la parcela B la más grande.*

Explica tu elección:

b) *El perímetro de la parcela A es el más grande.* *Las dos parcelas tienen el mismo perímetro.* *El perímetro de la parcela B es el más grande.*

Explica tu elección:	