UNIVERSIDAD DEL BÍO-BÍO

UNIVERSIDAD DEL BÍOBÍO

FACULTAD DE EDUCACIÓN Y HUMANIDADES

ESCUELA DE PEDAGOGÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Integrales impropias e infinitas

Profesor Guía: Dr. Luis Alberto Friz Roa
Tesista: Francisco Jipoulou Saez

Chillán, 2020

Índice general

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Introducción

El cálculo diferencial e integral es una rama de la matemática que surgió en el siglo XVII con la finalidad de resolver problemas de área, volúmenes de regiones, sólidos de revolución y problemas relacionado con la física. En el siglo XVII nacen las integrales impropias e infinitas desde un enfoque geométrico, pues con este tipo de integrales se pretende resolver ciertos problemas de área, volumen de regiones no acotadas e incluso problemas relacionados con las probabilidades y problemas de convergencia. Existen varios resultados sobre las integrales impropias e infinitas en el estudio de los problemas de convergencia y de existencia, algunos de estos resultados son los teoremas de comparación, comparación por cociente, convergencia absoluta, Abel y Dirichlet, criterio de Cauchy, Dirichlet y M-Weierstrass, que son aplicados de forma similar a las series numéricas.

En este trabajo analizaremos los fundamentos teóricos de la convergencia de integrales impropias e infinitas, los teoremas relacionados con la convergencia de integrales impropias e infinitas y los teoremas vinculados con la existencia de las integrales infinitas. Además de sus aplicaciones al cálculo de área y volumen de regiones no acotadas como por ejemplo, calcular el área de una región de la curva de estrofoide, que se precisará más adelante.

1.2. Formulación del problema

Las teorías matemáticas han sido aplicadas a diferentes conocimientos del saber que se asemejan frecuentemente a los campos ajenos a esta materia, como algo dificultoso, frío y lejano a todo el comportamiento y realidad de una comunidad integradora. Principalmente la historia nos ha mostrado que las contribuciones geométricas han sido uno de los conocimientos que han favorecido en el desarrollo de ciertas teorías matemáticas. Entre éstas, quiero enfocar la atención en las integrales impropias e infinitas, más precisamente, la convergencia y la existencia de las integrales impropias e infinitas aplicadas de acuerdo a su definición y a teoremas o criterios similares a las de las series numéricas. Estos teoremas han sido una poderosa herramienta para el desarrollo de la convergencia y existencia de las integrales impropias e infinitas, pues estos criterios han permitido resolver ciertos problemas de convergencia y existencia, en donde la definición no es suficiente, es por ello que se requiere de estos teoremas. Además su importancia en las aplicaciones geométricas, particularmente el cálculo de área y volumen han permitido simplificar los cálculos. Desde un punto de vista matemático riguroso, es relevante hacer un estudio de la convergencia y existencia de este tipo de integrales y sus aplicaciones al cálculo de área y volumen de regiones no acotadas, así como algunos ejemplos.

1.3. Marco teórico

1.3.1. Antecedentes históricos

Uno de los primeros cálculos de integrales en intervalos infinitos surge en el siglo XVII y el enfoque utilizado para realizar este tipo de cálculos era de carácter geométrico, también llamado enfoque de tipo de Lebesgue. Henri León Lebesgue fue un matemático Francés, que nació el 28 de junio de 1875 en la ciudad de Beauvais y falleció el 26 de julio de 1941 en la ciudad de París. Lebesgue introdujo la integral que lleva su nombre, que generalizaría el concepto de integral de Riemman.
Posteriormente, llega Grégoire de Saint-Vincent que fue un jesuita matemático y geómetra de la escuela Belga, en la cual fue el primero en tratar las integrales impropias de forma explícita. Su principal motivación era la investigación, la búsqueda y la generalización de resultados. Entonces la generalización de la integral impropia aparece en el escenario matemático de forma natural.

Grégoire de Saint-Vincent trabajó en el estudio de las secciones cónicas y da una expresión para el área bajo la hipérbola $y = \dfrac{1}{x}$, en un manuscrito del año 1625, publicado en Amberes en 1647. Saint-Vincent demuestra que si se disponen puntos según una progresión geométrica sobre una de las asíntotas de una hipérbola, las áreas cortadas bajo la curva por las paralelas a la otra asíntota son iguales. Por lo tanto, estudia los valores de las fracciones en términos de área.

$$F(x) = \int_a^x f(t)\ dt.$$

De aquí se deduce, un lenguaje matemático moderno, que la

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x} = \infty.$$

Mucho más tarde, Wallis y Leibniz atribuyen a Saint-Vincent la demostración de que la primitiva de la función $y = \dfrac{1}{x}$, es la función logarítmica. Con este tipo de cálculo, Saint-Vincent daría lugar al concepto de integración.

Luego llega Fermat, que fue un matemático Francés, que desarrolló el cálculo de ciertas integrales importantes. Él trata completamente el problema de una curva que va hasta el infinito cuya área es finita, utilizando las funciones potenciales. Esto fue redactado en el año 1655, pero su publicación fue en el año 1668.

La suma infinita será para Fermat un punto de partida para las cuadraturas. En esta obra aborda las curvas para las cuales es clara la presencia de un producto, o un cociente, de una potencia de la abscisa por una potencia de la ordenada. El carácter impropio de las áreas calculadas esta remarcablemente señalado y el área bajo la hipérbola se demuestra de forma infinita. En su obra de 1668 desarrolla el cálculo integral de la parábola generalizada.

$$\int_0^a x^\alpha\ dx,\ a < 0,\ \int_a^\infty \frac{dx}{x^\alpha}.$$

Fermat utiliza técnicas parecidas a las sumas de Riemman, siendo por tanto una aproximación geométrica. Por otro lado, si consideramos la hipérbola generalizada $x^\alpha \cdot y^\beta = a$, Fermat aborda el caso de $\alpha = 2,\ \beta = 1$, obteniendo el siguiente resultado (con $a = 1,\ x_0 > 0$)

$$\int_{x_0}^{\infty} \frac{dx}{x^2} = x_0 \cdot \frac{1}{x_0^2} = \frac{1}{x_0}.$$

De forma general y utilizando una notación matemática moderna, Fermat muestra que para una hipérbola del tipo $x^\alpha \cdot y^\beta = a$ con $\alpha > \beta > 0$, se obtiene como área

$$I = \ a^{1\backslash\beta} \int_{x}^{\infty} \frac{dt}{t^{\alpha\backslash\beta}} = \frac{a^{1\backslash\beta}}{\dfrac{\alpha}{\beta} - 1} \cdot \frac{x}{x^{\alpha\backslash\beta}} = \frac{xy}{\dfrac{\alpha-\beta}{\beta}}$$

Este trabajo tiende a la generalidad, es decir, utilizando el mismo método y utilizando series geométricas, da la cuadratura de familias de curvas cuyos trozos varían hasta el infinito.

El nuevo enfoque del siglo XVIII es el de reemplazar la integral por un desarrollo de series numéricas. En esta época los extremos de integración de una función no se escribe (notación creada por Fourier), la integral impropia aparece de forma implícita y todos los métodos asintóticos se relacionan con ella. Así, las integrales no plantean problemas, salvo para el cálculo explícito.

Este nuevo enfoque surge en los trabajos de Newton y Leibniz, pues para ellos la aproximación ya no es geométrica, sino formal. Así, se contempla la integración como una anti derivada y esto implica la existencia de la función. Es decir, la función que se quiere derivar está bien definida y por lo tanto no habrá problemas entre los extremos de integración. El problema principal consiste en el desarrollo asintótico de la función.

$$\int_{a}^{x} f(t)\ dt.$$

Esto es,

$$\int_{a}^{x} f(t)\ dt = x^n + \ldots.$$

Lo que puede ser considerado como una variante de la integración impropia. Por lo tanto, las cuestiones que se plantean hacen referencia a una definición precisa de la función, en relación con las integrales impropias de segunda especie. Leibniz se interesó por el cálculo del desarrollo de integrales impropias utilizando la serie alternada del tipo

$$\sum \frac{(-1)^n \cdot a_n}{n} \approx \int_{a}^{x_0} f(t)\ dt.$$

Donde más tarde Bernoulli estudia su convergencia.

La tendencia actual de separar el estudio de las integrales impropias en primera y segunda especie tiene sus razones históricas ya que en el comienzo los autores sólo se dedicaban al estudio de estas integrales utilizando problemas geométricos e intervalos infinitos.
Otra de las evidencias de este cambio, de eliminar los problemas sobre los intervalos finitos o infinitos, es la ausencia de un tratamiento de las integrales impropias en la introducción del análisis infinito de Euler (1748). Euler utilizó el criterio de la integral y reintrodujo algunas consideraciones geométricas. Históricamente el desarrollo de las comparaciones entre la integral y la serie asociada a una función fue tardío, aunque Fermat ya había utilizado las series para calcular integrales.

Luego llega Cauchy un matemático Francés, miembro de la academia de ciencia en Francia que redefine la integral de una función continua por medio de las sumas de Riemman sobre un segmento, de esta forma Cauchy rompe la tradición de considerar la integral como una anti derivada y retomando entonces el enfoque geométrico. Cauchy se enfrenta directamente al problema de las integrales impropias y crea la noción de valores principales. En 1821 en su curso de análisis algebraico, Cauchy estudia las integrales del tipo

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x)\ dx.$$

Lo que da lugar la definición del valor principal de Cauchy. Si la función $f(x)$ no es acotada en $x = 0$, esta integral es impropia. Pero el problema principal es la convergencia de la función, puesto que se puede encontrar funciones f cuyo valor principal es finito, pero la integral impropia cuyo intervalo contiene al cero es divergente. Cauchy definición el valor principal como una alternativa a la divergencia de la integral impropia.

Durante el siglo XIX se desarrollan las técnicas para asegurar la convergencia de las series de Fourier. Luego a Bertrand se le debe a su gran trabajo sobre la búsqueda de los criterios de convergencia para la serie $\sum f(n)$ según el comportamiento de la función $f(x)$ en el infinito.

De manera similar, se puede hacer para estudiar la convergencia de la integral $\displaystyle\int_a^{\infty} f(x)\,dx$, mirando el comportamiento de la función $f(x)$ hacia el infinito. Parece ser que la teoría de las integrales impropias tuvo un vinculo con la teoría de las series divergente durante el siglo XIX, en donde esta se retoma a un problema de integración impropia.

Cuando los matemáticos estudiaron la teoría de las integrales impropias fue necesario llegar hasta la teoría de la integración de Lebesgue, pues con este tipo de integrales se resolvieron algunos problemas que la integral impropia planteaba. Naturalmente Lebesgue elimina las consideraciones precedentes de Cauchy, tomando el problema con los valores de la función y el valor absoluto de una función de Lebesgue-integrable.

1.4. Marco Conceptual

1.4.1. Integral impropia

Una integral impropia es aquella integral definida en la que la función deja de estar definida en algún punto en el intervalo de integración. Es decir, uno o los dos límites de integración son infinito,o dentro del intervalo de los límites de integración, existe algún punto en el cual la función no existe.

Este tipo de integral se resuelve igual que cualquier otro tipo de integral, aunque al tener algún punto en el cual la función no está definida, es necesario seguir la notación siguiente:

$$\int_a^{\infty} f(x)\ dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\ dx = \lim_{b\to\infty} F(x) - F(a).$$

Existen tres tipos de integrales impropias:

Integral impropia de primera especie

Definición 1.4.1.1 *Sea f una función acotada y definida en el intervalo $[a,\infty), a \in \mathbb{R}.$. Si para todo $b > a$ la función es integrable en $[a,b]$ y además es finito el $\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\ dx < \infty$, se dice que existe la integral impropia de f en $[a,+\infty)$ y es convergente. Si no existe la integral impropia de f en $[a,\infty)$ es divergente.*

Definición 1.4.1.2 *Sea f una función acotada y definida en el intervalo $(-\infty,b]$, $b \in \mathbb{R}$. Si para todo $a < b$ la función es integrable en $[a,b]$ y además es finito el límite $\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\ dx < \infty$, se dice que existe la integral impropia de f en $(-\infty,b]$ y es convergente. Si no existe la integral impropia de f en $(-\infty,b]$ es divergente.*

Definición 1.4.1.3 *Sea f una función acotada y definida en el intervalo $(-\infty,\infty)$. Si para todo $a < b$ la función es integrable en $[a,b]$ y además son finitos los límites $\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\ dx < \infty$ y $\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\ dx < \infty$, se dice que existe la integral impropia de f en $(-\infty,\infty)$ y es convergente, es decir*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^c f(x)\ dx + \lim_{b\to\infty}\int_c^b f(x)\ dx < \infty.$$

Integral impropia de segunda especie

Definición 1.4.1.4 *Sea f una función definida en $(a,b]$ y supóngase que f es integrable en $[a+\varepsilon,\ b]$ $\forall\varepsilon>0$. Si existe y es finito el $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\displaystyle\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\ dx<\infty$, se dice que existe la integral impropia de f en $(a,b]$ y es convergente.*

Definición 1.4.1.5 *Sea f una función definida en un intervalo $[a,b)$ integrable Riemman en todo $[a,x]$ siendo $a\leqslant x<b$ tal que $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=\lim\limits_{x\to b} f(x)=\pm\infty$. Entonces diremos que:*

$$\int_a^b f(x)\ dx=\lim_{x\to b^-}\int_a^x f(x)\ dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\ dx,$$

cuando este límite existe y es finito, en cuyo caso la integral impropia es convergente. Si el límite anterior fuese infinito diríamos que la integral impropia es divergente y si el límite no existe, la función no tiene integral.

Definición 1.4.1.6 *Si la función f es no acotada en $c\in[a,b]$, entonces se define:*

$$\int_a^b f(x)\ dx=\int_a^c f(x)\ dx+\int_c^b f(x)\ dx=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\ dx+\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)\ dx.$$

Integral impropia de tercera especie

Definición 1.4.1.7 *Son aquellas en la que se obtienen combinando las integrales impropias de primera y segunda especie. Por ejemplo:*

$$\int_{-1}^{+\infty}\frac{dx}{x^2}=\int_{-1}^{0^-}\frac{dx}{x^2}+\int_{0^+}^{1}\frac{dx}{x^2}+\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^2}.$$

Este tipo de integral es convergente si y solo si cada una de sus componentes es una integral convergente.

1.4.2. Integral infinita

Definición 1.4.2.1 *Si f es Riemman integrable en $[a,c]$ para cada $c > a$. Sea I_c la integral parcial dado por:*

$$I_c = \int_a^c f.$$

Se dice que es la integral infinita de f sobre $\{x : x \geqslant a\}$ si para todo $\varepsilon > 0$, existe un número real $M(\varepsilon)$ tal que si $c > M(\varepsilon)$ entonces $|I - I_c| < \varepsilon$. En este caso denotamos I por:

$$\int_a^{+\infty} f \quad \int_a^{+\infty} f(x)\ dx.$$

Definición 1.4.2.2 *(Convergencia absoluta) Si la integral infinita $\displaystyle\int_a^{+\infty} |f(x)|\ dx$ existe, entonces decimos que f es absolutamente integrable sobre $\{x : x \geqslant a\}$ o que la integral infinita $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\ dx$ es absolutamente convergente.*

Definición 1.4.2.3 *(Convergencia uniforme) Sea f una función de valor real, definida para (x,t) satisfaciendo $x \geqslant a$ y $a \leqslant t \leqslant \beta$. Supongamos que para cada t en $J = [\alpha, \beta]$ la integral infinita $F(x) = \displaystyle\int_a^{+\infty} f(x,t)\ dx$ existe. Decimos que esta convergencia es uniforme en J si para todo $\varepsilon > 0$ existe un número $M(\varepsilon)$ tal que si $c \geqslant M(\varepsilon)$ y $t \in J$, entonces*

$$\left| F(t) - \int_a^c f(x,t)\ dx \right| < \varepsilon.$$

1.5. Objetivos

1.5.1. Objetivo General

Analizar las integrales impropias e infinitas como herramienta matemática para resolver problemas de convergencia, existencia y geométricas.

1.5.2. Objetivos específicos

• Estudiar la convergencia de integrales impropias de primera, segunda y tercera especie, a través de su definición.

• Estudiar los teoremas de convergencia para integrales impropias (Criterio de comparación, criterio de comparación por cociente, convergencia absoluta, criterio de Abel y Dirichlet) a través de sus demostraciones y ejemplos.

• Estudiar la existencia de la integrales infinitas por medio de teoremas (Criterio de Cauchy, comparación con el límite, Dirichlet) y su definición.

• Demostrar los teoremas de convergencia absoluta y uniforme para integrales infinitas.

• Aplicar el estudio de las integrales impropias a la resolución de problemas geométricos.

Capítulo 2

Integrales Impropias

2.1. Integrales impropias de primera especie

Las integrales impropias de primera especie son aquellas integrales en donde uno o ambos límites de integración tienden al infinito. A continuación se presenta las definiciones formales de la integral impropia de primera especie.

Definición 2.1.1 *Sea f una función acotada y definida en el intervalo $[a, \infty), a \in \mathbb{R}.$. Si para todo $b > a$ la función es integrable en $[a, b]$ y además es finito el $\lim\limits_{b \to \infty} \int_a^b f(x)\, dx < \infty$, se dice que existe la integral impropia de f en $[a, +\infty)$ y es convergente. Si no existe la integral impropia de f en $[a, \infty)$ es divergente.*

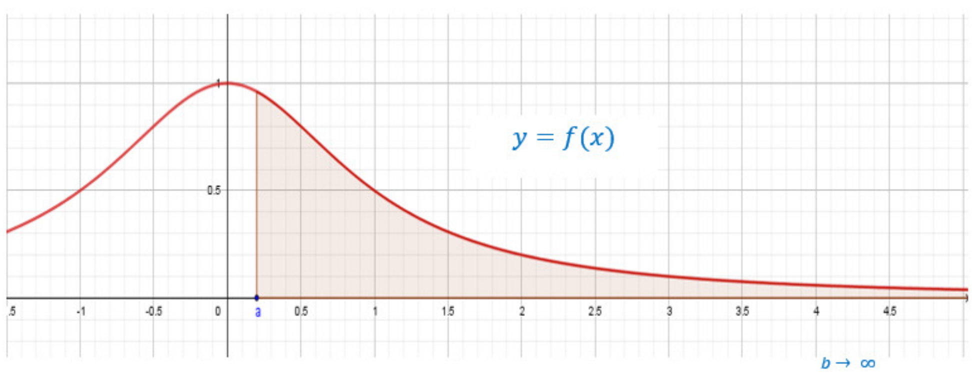

Figura 2.1: Integral impropia de primera especie cuando el límite de integración superior tiende a infinito

Definición 2.1.2 *Sea f una función acotada y definida en el intervalo $(-\infty, b]$, $b \in \mathbb{R}$. Si para todo $a < b$ la función es integrable en $[a, b]$ y además es finito el límite $\lim\limits_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)\, dx < \infty$, se dice que existe la integral impropia de f en $(-\infty, b]$ y es convergente. Si no existe la integral impropia de f en $(-\infty, b]$ es divergente.*

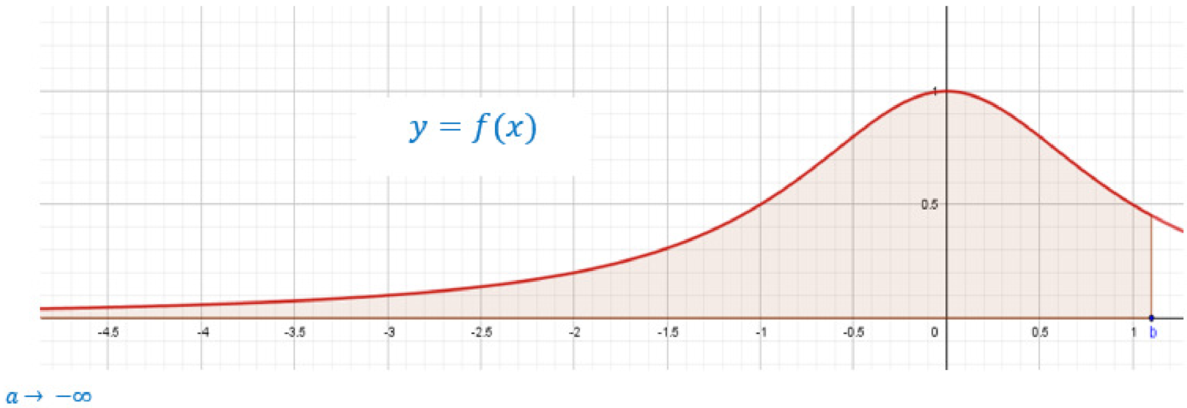

Figura 2.2: Integral impropia de primera especie cuando el límite de integración inferior tiende a menos infinito

Definición 2.1.3 *Sea f una función acotada y definida en el intervalo $(-\infty, \infty)$. Si para todo $a < b$ la función es integrable en $[a, b]$ y además son finitos los límites $\lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)\ dx < \infty$ y $\lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x)\ dx < \infty$, se dice que existe la integral impropia de f en $(-\infty, \infty)$ y es convergente, es decir*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ dx = \lim_{a \to -\infty} \int_a^c f(x)\ dx + \lim_{b \to \infty} \int_c^b f(x)\ dx < \infty.$$

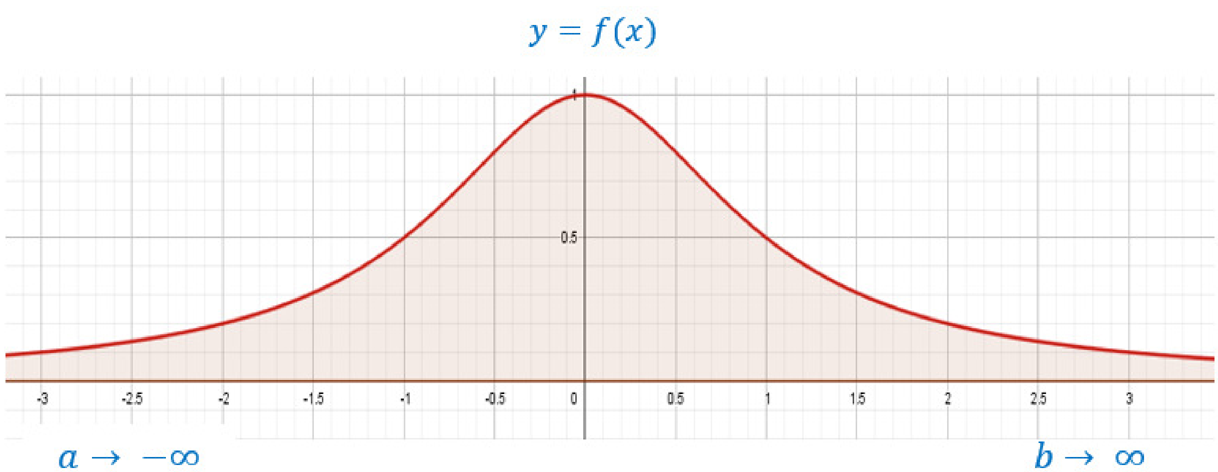

Figura 2.3: Integral impropia de primera especie cuando ambos límites de integración tienden al infinito

2.1.1. Ejemplos de integrales impropias de primera especie

A) Veamos que la integral impropia de primera especie $\int_1^\infty \frac{1}{x^c}\,dx$ converge si y solo si $c > 1$.
Estudiemos primero el caso en que $c \neq 1$.

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^c}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b x^{-c}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{x^{-c\,+\,1}}{-c+1}\right]_{x=1}^{x=b} = \lim_{b\to\infty}\frac{1}{1-c}\cdot\left[\frac{1}{b^{c\,-\,1}}-1\right].$$

Entonces, si $c > 1$, tenemos que $c-1 > 0$, con lo que $\frac{1}{b^{c-1}} \to 0$ cuando $b \to \infty$. Esto implica que

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^c}\,dx = \frac{1}{c-1},\ c > 1.$$

Por lo que la integral converge.

Si $c < 1$, tenemos que $c-1 < 0$, con lo que $\frac{1}{b^{c-1}} \to \infty$ cuando $b \to \infty$, Esto implica que

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^c}\,dx = \infty,\ c < 1.$$

Por lo que la integral diverge.

Únicamente queda estudiar el caso $c = 1$. En efecto

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left[\ln x\right]_{x=1}^{x=b} = \lim_{b\to\infty}[\ln b - \ln 1] = \infty.$$

De modo que la integral diverge.

B) Dados $a > 0$ y $\alpha \neq 1$, estudiar la convergencia de la integral

$$\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}.$$

Nuevamente basta con estudiar el límite

$$\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{x\to\infty}\int_a^x \frac{dt}{t^\alpha} = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{1}{1-\alpha}\cdot\frac{1}{t^{\alpha-1}}\right]_{t=a}^{t=x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{1-\alpha}\cdot\left(\frac{1}{x^{\alpha-1}}-\frac{1}{a^{\alpha-1}}\right)$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{(1-\alpha)} \cdot \dfrac{-1}{a^{\alpha-1}}, & \alpha > 1 \\ \nexists, & \alpha < 1 \end{cases}$$

Por lo tanto, esta integral impropia es convergente cuando $\alpha > 1$ y divergente si $\alpha < 1$.

C) Dado $a > 0$, estudiar la convergencia de la integral

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x}.$$

Claramente $f(x) = \dfrac{1}{x}$ es integrable en $[a, b]$ para cualquier $b > a$. Veamos el límite

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{x\to\infty} \int_a^x \frac{dt}{t} = \lim_{x\to\infty} \left[\ln\left(\frac{x}{a}\right)\right] = \nexists.$$

Por lo tanto, como la integral impropia no existe, la integral es divergente.

D) La integral $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|x|}\, dx$ converge si $a > 0$. En efecto, si $b > 0$, se tiene:

$$\int_0^b e^{-a|x|}\, dx = \int_0^b e^{-ax}\, dx = \frac{e^{-ab} - 1}{-a} \to \frac{1}{a} \text{ cuando } b \to \infty.$$

Por tanto, $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-a|x|}\, dx$ converge y su valor es $\dfrac{1}{a}$. Por otra parte, si $b < 0$, se tiene:

$$\int_{-\infty}^0 e^{-a|x|}\, dx = \int_{-b}^0 e^{ax}\, dx = -\int_b^0 e^{-at}\, dt = \int_0^b e^{-at}\, dt.$$

Por tanto, $\displaystyle\int_{-\infty}^0 e^{-a|x|}\, dx$ también converge y su valor es $\dfrac{1}{a}$. Es decir, se tiene $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|x|}\, dx = \frac{2}{a}$.

E) Estudiar la convergencia de la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{x-e^x}\, dx.$$

Resolvemos en primer lugar la integral indefinida haciendo el cambio de variable $e^x = t$.

$$\int e^{x-e^x}\, dx = \int e^x \cdot e^{-e^x}\, dx = \int e^{-t}\, dt = -e^{-t} = -e^{-e^x}.$$

Calculamos a continuación la integral impropia tenemos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{x-e^x}\, dx = \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to\infty}} \int_a^b e^{x-e^x}\, dx = \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to\infty}} (-e^{-e^b} + e^{-e^a}) = 0 + 1 = 1.$$

De lo que se deduce que la integral es convergente.

2.2. Integral impropia de segunda especie

Definición 2.2.1 *Sea f una función definida en $(a,b]$ y supóngase que f es integrable en $[a+\varepsilon,\ b]$ $\forall \varepsilon > 0$. Si existe y es finito el $\lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\ dx < \infty$, se dice que existe la integral impropia de f en $(a,b]$ y es convergente.*

Definición 2.2.2 *Sea f una función definida en un intervalo $[a,b)$ integrable Riemman en todo $[a,x]$ siendo $a \leqslant x < b$ tal que $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = \lim\limits_{x \to b} f(x) = \pm\infty$. Entonces diremos que:*

$$\int_a^b f(x)\ dx = \lim_{x \to b^-} \int_a^x f(x)\ dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\ dx,$$

cuando este límite existe y es finito, en cuyo caso la integral impropia es convergente. Si el límite anterior fuese infinito diríamos que la integral impropia es divergente y si el límite no existe, la función no tiene integral.

Definición 2.2.3 *Si la función f no acotada en $c \in [a,b]$, entonces se define:*

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^c f(x)\ dx + \int_c^b f(x)\ dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)\ dx + \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)\ dx.$$

2.2.1. Ejemplos de integrales impropias de segunda especie

Para estudiar este tipo de integral nos basaremos en la convergencia de integrales impropias, para ellos se utiliza sus definiciones mencionadas en la sección integral impropia de segunda especie. A continuación se presentarán algunos ejemplos.

A) Estudiar la convergencia de la integral impropia $\displaystyle\int_a^{b^-} \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$

Para $\alpha = 1$. En este caso se tiene:

$$\int_a^{b^-} \frac{dx}{b-x} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} \frac{dx}{b-x} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} [-\ln(b-x)]_{x=a}^{x=b-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} [\ln(b-a) - \ln \varepsilon] = \nexists.$$

Por lo tanto, en este caso, la integral impropia es divergente, pues su límite no existe.

Ahora para el caso $\alpha \neq 1$. En este caso los cálculos son:

$$\int_a^{b^-} \frac{dx}{(b-x)^\alpha} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} \frac{dx}{(b-x)^\alpha} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[\frac{1}{(\alpha-1)(b-x)^{\alpha-1}} \right]_a^{b-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{\alpha-1} \left(\frac{1}{\varepsilon^{\alpha-1}} - \frac{1}{(b-a)^{\alpha-1}} \right)$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{(1-\alpha)} \cdot \dfrac{1}{(b-a)^{\alpha-1}} & si \;\; \alpha < 1 \\ \nexists & si \;\; \alpha > 1 \end{cases}$$

En base a los dos casos, podemos resumir diciendo que:

$$\int_a^{b^-} \frac{dx}{(b-x)^\alpha} = \begin{cases} Converge & si \;\; \alpha < 1 \\ Diverge & si \;\; \alpha \geq 1 \end{cases}$$

B)Estudiar la convergencia de la integral

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx.$$

Como $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} = \infty$, la integral es impropia en ambos extremos de integración. Calculando directamente la integral, obtenemos:

$$\int \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx = -2e^{-\sqrt{x}} \Rightarrow \int_0^\infty \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx = \lim_{\substack{A \to 0^+ \\ B \to \infty}} [-2e^{-\sqrt{x}}]_A^B = \lim_{\substack{A \to 0^+ \\ B \to \infty}} [-2e^{-\sqrt{B}} + 2e^{-\sqrt{A}}] = 2.$$

Por lo tanto, la integral es convergente.

C) Estudiar la convergencia de la integral

$$\int_0^4 \frac{1}{x-3}\, dx.$$

$$\int_0^4 \frac{1}{x-3}\, dx = \int_0^3 \frac{1}{x-3}\, dx + \int_3^4 \frac{1}{x-3}\, dx = \lim_{\varepsilon_1 \to 0} \int_0^{3-\varepsilon_1} \frac{1}{x-3}\, dx + \lim_{\varepsilon_2 \to 0} \int_{3+\varepsilon_2}^4 \frac{1}{x-3}\, dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon_1 \to 0} [\ln|x-3|]_0^{3-\varepsilon_1} + \lim_{\varepsilon_2 \to 0} [\ln|x-3|]_{3-\varepsilon_2}^4 = \lim_{\varepsilon_1 \to 0} (\ln|-\varepsilon_1| - \ln|-3|) + \lim_{\varepsilon_2 \to 0} (\ln 1 - \ln \varepsilon_2) = -\infty + \infty.$$

Como ambos límites son infinitos, la integral impropia es divergente.

D) Considera la integral

$$\int_{-1}^5 \frac{dx}{(x-1)^3}$$

I. Determine si la integral converge en el sentido corriente.

Es necesario tener claro que el integrando no esta acotado en $x = 1$.

Por definición:

$$\int_{-1}^5 \frac{dx}{(x-1)^3} = \lim_{\varepsilon_1 \to 0^+} \int_{-1}^{1-\varepsilon_1} \frac{dx}{(x-1)^3} + \lim_{\varepsilon_2 \to 0^+} \int_{1+\varepsilon_2}^5 \frac{dx}{(x-1)^3} = \lim_{\varepsilon_1 \to 0^+} \left[\frac{-1}{2(x-1)^2}\right]_{-1}^{1-\varepsilon_1} + \lim_{\varepsilon_2 \to 0^+} \left[\frac{-1}{2(x-1)^2}\right]_{1+\varepsilon_2}^5 =$$

$$= \lim_{\varepsilon_1 \to 0^+} \left[\frac{1}{8} - \frac{1}{2\varepsilon_1^2}\right] + \lim_{\varepsilon_2 \to 0^+} \left[\frac{1}{2\varepsilon_2^2} - \frac{1}{32}\right] = \nexists$$

Como los límites no existen, la integral no converge.

II. Determinar si la integral converge en el sentido del valor principal de Cauchy.

Tomando $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$, se tiene que:

$$\int_{-1}^5 \frac{dx}{(x-1)^3} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[\int_{-1}^{1-\varepsilon} \frac{dx}{(x-1)^3} + \int_{1+\varepsilon}^5 \frac{dx}{(x-1)^3}\right] = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[\frac{1}{8} - \frac{1}{2\varepsilon^2} + \frac{1}{2\varepsilon^2} - \frac{1}{32}\right] = \frac{3}{32}$$

Así la integral existe en el sentido del valor principal de Cauchy.

2.3. Integrales impropias de tercera especie

Definición 2.3.1 *Son aquellas en la que se obtienen combinando las integrales impropias de primera y segunda especie. Por ejemplo:*

$$\int_{-1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \int_{-1}^{0^-} \frac{dx}{x^2} + \int_{0^+}^{1} \frac{dx}{x^2} + \int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2}.$$

Este tipo de integral es convergente si y solo si cada una de sus componentes es una integral convergente.

2.3.1. Ejemplos de integral impropia de tercera especie

Son aquellas integrales que tienen simultáneamente las condiciones de las de primera y segunda especie. A continuación se presentan algunos ejemplos.

a) Determinar la convergencia de la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$$

Por definición:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2}\, dx = \lim_{k_1\to\infty} \int_{k_1}^{c} \frac{1}{x^2}\, dx + \lim_{\varepsilon_1\to 0} \int_{c}^{0-\varepsilon_1} \frac{1}{x^2}\, dx + \lim_{\varepsilon_2\to 0} \int_{0+\varepsilon_2}^{d} \frac{1}{x^2}\, dx + \lim_{k_2\to\infty} \int_{d}^{k_2} \frac{1}{x^2}\, dx =$$

$$= \lim_{k_1\to\infty} \left(-\frac{1}{c} + \frac{1}{k_1}\right) + \lim_{\varepsilon_1\to 0} \left(\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{c}\right) + \lim_{\varepsilon_2\to 0} \left(-\frac{1}{d} + \frac{1}{\varepsilon_2}\right) + \lim_{k_2\to\infty} \left(-\frac{1}{k_2} + \frac{1}{d}\right) = \infty$$

Por lo tanto, la integral impropia es divergente.

b) Estudiar la convergencia de la integral

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{(x-1)}\, dx$$

Por definición:

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{(x-1}\, dx = \int_{0}^{2} \frac{1}{(x-1)}\, dx + \int_{2}^{+\infty} \frac{1}{(x-1)}\, dx =$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0^-} \int_{0}^{1-\varepsilon} \frac{1}{(x-1)}\, dx + \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{1+\varepsilon}^{2} \frac{1}{(x-1)}\, dx + \lim_{b\to+\infty} \int_{2}^{b} \frac{1}{(x-1)}\, dx$$

Como $\displaystyle\int_{0}^{1^-} \frac{1}{(x-1)}\, dx$ es divergente, por lo que la integral de tercera especie también lo será.

c) Estudiar la convergencia de la integral

$$B = \int_0^{\infty} \frac{1}{(x+1)\sqrt{x}}\, dx$$

Nótese que si $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)\sqrt{x}}$, f es continua en $]0, +\infty[$ con una asíntota vertical $x = 0$, entonces B se define como una integral impropia de tercera especie. Luego si $u = \sqrt{x}$, entonces, $du = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, en efecto

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{(x+1)\sqrt{x}}\, dx = 2\int_0^{\infty} \frac{dx}{u^2+1}\, du = \lim_{b\to\infty} 2\int_0^{b} \frac{dx}{u^2+1}\, du = \lim_{b\to\infty} 2(\arctan b - \arctan 0) = 2\cdot\frac{\pi}{2} - 0 = \pi$$

Como el limite existe, entonces B converge a π.

El estudio de la convergencia de integrales impropias queda limitada por su definición con el límite, pues hay ejercicios que son mas complejos y engorroso de resolver, por lo cual se requieren de ciertos teoremas o criterios de convergencia aplicadas a las integrales impropias para resolverlas. A continuación se enuncian los teoremas con su respectiva demostración y algunos ejemplos.

2.4. Criterios de convergencia

Teorema 2.4.1 *(Criterio de comparación). Sean $f, g : [a, +\infty] \to \mathbb{R}$ integrables y no negativa en $[a, b]$ con $b \geq a$. Si existe $k \geq 0$ y $c \geq a$ tales que $0 \leq f(x) \leq kh(x)$, para todo $x \geq c$, entonces:*

i. Si $\displaystyle\int_a^{+\infty} h(x)\,dx$ es convergente, entonces $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ es convergente.
ii. Si $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ es divergente, entonces $\displaystyle\int_a^{+\infty} h(x)\,dx$ es divergente.

Demostración: Si $0 \leq f(x) \leq kh(x)$, para todo $x \geq c$, entonces $\displaystyle\int_c^b f(x)\,dx \leq k\int_c^b h(x)\,dx$.
i. Si $\displaystyle\int_a^{+\infty} h(x)\,dx$ es convergente, entonces $\displaystyle\int_c^{+\infty} h(x)\,dx$ es convergente, entonces existe un número real M tal que $\displaystyle\int_c^b h(x)\,dx \leq M, \quad \forall b \geq a$. Por tanto:

$$\int_c^b f(x)\,dx \leq k\int_c^b h(x)\,dx \leq k \cdot\ M = M', \quad \forall b \geq c \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\,dx \ \text{ es convergente.}$$

ii. Si $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ es divergente, entonces $\displaystyle\int_c^{+\infty} f(x)\,dx$ es divergente, entonces existen $M > 0$ y $b \geq a$ tales que:

$$\int_c^b f(x)\,dx > M \ \Rightarrow\ k\int_c^b h(x)\,dx \geq \int_c^b f(x)\,dx > M \Rightarrow \int_c^b h(x)\,dx > \frac{M}{k} = M'$$

$$\Rightarrow \int_c^{+\infty} h(x)\,dx \ \text{ es divergente , por tanto} \int_a^{+\infty} h(x)\,dx \ \text{ tambien lo es.} \ \square$$

Teorema 2.4.2 *(Criterio de comparación por cociente). Sea $f, g : [a, b) \to \mathbb{R}$, con $a, b \in \mathbb{R}$, dos funciones positivas $(f, g \geq 0)$ para las que se verifica que:*

$$\lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = l > 0, \quad l \in \mathbb{R}$$

Entonces la integral $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx$ *existe si y solo si, existe la* $\displaystyle\int_a^b g(x)\ dx$.

Demostración: De la definición de límite, si $\displaystyle\lim_{x\to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = l > 0$, para $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$ existe un $\delta > 0$ de modo que si $x \in (b-\delta, b)$, entonces:

$$\frac{1}{2} \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq \frac{3l}{2}$$

Por lo tanto,

$$\frac{1}{2}g(x) \leq f(x) \leq \frac{3l}{2}g(x), \quad \forall x \in (b-\delta, b)$$

Como las integrales de Riemann $\displaystyle\int_a^{b-\delta} f(x)\ dx$ y $\displaystyle\int_a^{b-\delta} g(x)\ dx$ existen. Se aplica el criterio de comparación a las integrales $\displaystyle\int_{b-\delta}^{b} f(x)\ dx$ y $\displaystyle\int_{b-\delta}^{b} g(x)\ dx$, de esa forma queda demostrada. □

Teorema 2.4.3 *(Convergencia absoluta). Sea* $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$, *se tiene que, si* $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ *converge absolutamente, entonces, la* $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ *converge.*

Demostración: Es claro que:

$$-|f| \leq f \leq |f| \qquad / + |f|$$

$$0 \leq f + |f| \leq 2|f|$$

Luego, por el criterio de comparación, como por hipótesis $\displaystyle\int_a^{+\infty} |f|$ converge, entonces, $\displaystyle\int_a^{+\infty} f+|f|$ converge.

Además, para $x \in [a, +\infty)$, tenemos que:

$$f(x) = (f(x) + |f|(x)) - |f|(x) \Rightarrow \int_a^x f = \int_a^x (f + |f|) - \int_a^x |f|$$

Como $x \to +\infty$ y gracias a que ambos límites a la derecha existen, el teorema queda demostrado. □

Teorema 2.4.4 *(Criterio de Abel y Dirichlet).*

i. Sea $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ una función monótona en $[a, b)$.

ii. Sea $g : [a, b) \to \mathbb{C}$ una función integrable en todo intervalo de la forma $[a, t]$, $\quad a < t < b$, y sea

$$G(x) = \int_a^x g \quad a \leq x < b$$

Además, supongamos que se cumple al menos una de las siguientes condiciones:

a) f es acotada en $[a, b)$ y la integral impropia $\displaystyle\int_a^b g$ es convergente.

b) $\lim_{x\to b} f(x) = 0$ y G es acotada en $[a, b)$.

Entonces la integral impropia $\displaystyle\int_a^b fg$ es convergente.

Demostración: Notemos que en la condición a) existe un límite finito $\lim\limits_{t\to b} G(t)$. Por eso la función G es acotada en ambos casos a) y b).

Para demostrar la convergencia de la integral impropia $\displaystyle\int_a^b fg$, apliquemos el criterio de Cauchy. Supongamos que $a \leq x_1 < x_2 < b$ y acotamos la integral $\displaystyle\int_{x_1}^{x_2} fg$ usando el segundo teorema del valor medio de Bonnet:

$$\left|\int_{x_1}^{x_2} fg\right| \leq \ (|f(x_1)| + 2\ |f(x_2)|) \sup_{x_1 \leq\ t\ \leq\ x_2} \left|\int_{x_1}^{t} g\right|$$

$$= (|f(x_1)| + 2\ |f(x_2)|) \sup_{x_1\ \leq\ t\ \leq\ x_2} |G(t) - G(x_1)|$$

Si se cumple a) y $L = \lim\limits_{x\to b} G(x)$, entonces aplicamos la desigualdad:

$$|G(t) - G(x_1)| \ \leq\ |G(t) - L| + |G(x_1) - L|$$

Y obtenemos:

$$\left|\int_{x_1}^{x_2} fg\right| \ \leq\ 6 \left(\sup_{x\ \in\ [a,b)} |f(x)|\right) \sup_{t\ \geq\ x_1} |G(t) - L|$$

Si se cumple b), entonces:

$$\left| \int_{x_1}^{x_2} fg \right| \leq 6|f(x_1)| \sup_{x \in [a,b)} |G(x)|$$

En ambos casos, la integral considerada tiende a cero cuando x_1 tiende al punto b. Así queda demostrado el teorema. $\square$

Para tener mayor claridad del usos de estos teoremas en la aplicación de la convergencia de integrales impropias, se estudiaron algunos ejemplos.

2.4.1. Ejemplos de los criterios de convergencia

A) Estudiar la integral impropias

$$\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^2}\, dx$$

Claramente se tiene que:

$$0 \leq \frac{|\sin x|}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}, \quad \forall x \geq 1$$

Luego como la integral $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ es convergente. Se concluye por el criterio de comparación, que la integral $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^2}\, dx$ es también convergente.

B) Estudiar si $\displaystyle\int_{0^+}^{\pi/4} \frac{\sin x}{x^2}\, dx$ es convergente o divergente.

Por el criterio de comparación por cociente:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\dfrac{\sin x}{x^2}}{\dfrac{1}{x}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Por tanto la integral $\displaystyle\int_{0^+}^{\pi/4} \frac{\sin x}{x^2}\, dx$ y la integral $\displaystyle\int_{0^+}^{\pi/4} \frac{1}{x}\, dx$ tiene el mismo carácter. Por el criterio de comparación, la última integral es divergente y la primera integral también es divergente.

C) Estudiar la convergencia de la integral

$$\int_{0^+}^{k\pi} \frac{\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)}{\sqrt{x}}\,dx, \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

Por criterio de comparación:

$$\left|\frac{\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)}{\sqrt{x}}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Como $\displaystyle\int_{0^+}^{k\pi} \frac{1}{\sqrt{x}}$ es convergente, pues $\left(r = \dfrac{1}{2} < 1\right)$, entonces $\displaystyle\int_{0^+}^{k\pi} \left|\frac{\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)}{\sqrt{x}}\right|\,dx$ es convergente también y por lo tanto la integral dada es absolutamente convergente.

D) Estudiar la convergencia de la integral

$$\int_{1}^{\infty} \frac{\sin x}{x^{\alpha}}\,dx \quad \text{para} \quad \alpha > 0$$

Como la función $f(x) = \sin x$, tiene primitiva $F(x) = -\cos x$ acotada y la función $g(x) = \dfrac{1}{x^{\alpha}}$ es derivable y decreciente, con $\displaystyle\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$, por el criterio de Abel - Dirichlet, se deduce que la integral es convergente.

Capítulo 3

Integrales infinitas

3.1. Existencia de la integral infinita

Definición 3.1.1 *Si f es Riemman integrable en $[a, c]$ para cada $c > a$. Sea I_c la integral parcial dado por:*

$$I_c = \int_a^c f.$$

Se dice que es la integral infinita de f sobre $\{x : x \geqslant a\}$ si para todo $\varepsilon > 0$, existe un número real $M(\varepsilon)$ tal que si $c > M(\varepsilon)$ entonces $|I - I_c| < \varepsilon$. En este caso denotamos I por:

$$\int_a^{+\infty} f \quad \int_a^{+\infty} f(x)\, dx.$$

3.1.1. Ejemplos de la existencia de la integral infinita

A continuación se presentan algunos ejemplos de la existencia de la integral infinita. Para su estudio, se utilizó la definición.

A) Si $f(x) = \dfrac{1}{x}$ para $x > a > 0$, entonces la integral parcial es:

$$I_c = \int_a^c \frac{1}{x}\, dx = \ln(c) - \ln(a)$$

Como $\ln(c)$ se vuelve infinito cuando $c \to +\infty$, la integral infinita de f no existe.

B) Sea $f(x) = x^\alpha$ para $x \geq a > 0$ y $\alpha \neq -1$, entonces,

$$I_c = \int_a^c x^\alpha \, dx = \left[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_{x=a}^{x=c} = \left(\frac{c^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{a^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right) = \frac{1}{\alpha+1}(c^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}).$$

Si $\alpha > -1$, entonces $\alpha + 1 > 0$ y la integral infinita no existe. Sin embargo, si $\alpha < -1$, entonces,

$$\int_a^{+\infty} x^\alpha \, dx = -\frac{a^{\alpha+1}}{\alpha+1}$$

C) Sea $f(x) = e^{-x}$ para $x \geq 0$, entonces,

$$\int_0^c e^{-x} \, dx = [-e^{-x}]_{x=0}^{x=c} = -(e^{-c} - 1).$$

Por lo tanto, la integral infinita de f sobre $\{x : x \geq 0\}$ existe y es igual a 1.

Ahora abordaremos algunos criterios para la existencia de la integral infinita sobre el conjunto $\{x : x \leq \pm a\}$. Aunque también se pueden aplicar para dar condiciones para la integral infinita sobre $\mathbb{R}$.

3.2. Criterios de existencia de la integral infinita

Teorema 3.2.1 *(Criterio de Cauchy). Supongamos que f es integrable sobre $[a, c]$ $\forall c \geq a$. Entonces la integral infinita $\int_a^\infty f$ existe si y solo si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $K(\varepsilon)$ tal que si $b \geq c \geq K(\varepsilon)$, entonces:*

$$\left|\int_c^b f\right| < \varepsilon.$$

Demostración: Supongamos que se cumple la condición y dejamos que I_n sea la integral parcial definida para $n \in \mathbb{N}$ por:

$$I_n = \int_a^{a+n} f.$$

Vemos que I_n es una secuencia de Cauchy de números reales. Si $I = \lim(I_n)$ y $\varepsilon > 0$, entonces, existe un $N(\varepsilon)$ tal que si $n \geq N(\varepsilon)$, entonces $|I - I_n| < \varepsilon$. Sea $M(\varepsilon) = \sup\{K(\varepsilon),\ a + N(\varepsilon)\}$ y sea $c \geq M(\varepsilon)$; entonces la integral parcial I_c es dada por:

$$I_c = \int_a^c f = \int_a^{a+N(\varepsilon)} f + \int_{a+N(\varepsilon)}^c f.$$

Donde se deduce que $|I - I_c| < 2\varepsilon$. Así queda demostrado. $\square$

Teorema 3.2.2 *Supongamos que $f(x) \geq 0$ para todo $x \geq a$ y que f es integrable $[a, c]$ para todo $c \geq a$. Entonces la integral infinita de f existe si y solo si el conjunto $\{I_c : c \geq a\}$ es acotado. En este caso:*

$$\int_a^{+\infty} f = \sup\left\{\int_a^c f : c \geq a\right\}.$$

Demostración: Si $a \leq c \leq b$, entonces la hipótesis que $f(x) \geq 0$ implica que $I_c \leq I_b$, entonces I_c es una función monótona creciente de c. Por lo tanto, la existencia de $\lim I_c$ es equivalente a la delimitación de $\{I_c : c \geq a\}$. $\square$

Teorema 3.2.3 *(Comparación de límites). Supongamos que f y g no son negativos e integrable sobre $[a, c]$ para todo $c \geq a$ y que:*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \neq 0.$$

Entonces ambas o ninguna de las integrales infinitas $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$, $\displaystyle\int_a^{+\infty} g$ existen.

Demostración: En relación al $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \neq 0$, podemos inferir que existe un número positivo $A < B$ y $K \geq a$ tal que:

$$Ag(x) \leq f(x) \leq Bg(x) \quad \text{para} \quad x \geq K.$$

La prueba de comparación y esta relación muestra que ambos o ninguna de las integrales infinitas $\int_k^{+\infty} f$, $\int_k^{+\infty} g$ existen. Dado que tanto f como g son integrables en $[a,k]$. Así queda demostrado el teorema. $\square$

Teorema 3.2.4 *(Dirichlet). Supongamos que f es continua para $x \geq a$ y que la integral parcial:*

$$I_c = \int_a^c f, \quad c \geq a.$$

Es acotada y φ es monótona creciente a cero cuando $x \to +\infty$, entonces la integral infinita $\int_a^{+\infty} f\varphi$ existe.

Demostración: Sea A un límite para el conjunto $\{|I_c| : c \geq a\}$. Si $\varepsilon > 0$, sea $K(\varepsilon)$ tal que si $x \geq K(\varepsilon)$, entonces, $0 \leq \varphi(x) \leq \frac{\varepsilon}{2A}$. Si $b \geq c \geq K(\varepsilon)$, entonces se desprende de la forma de Bonnet del segundo teorema del valor medio, que existe un número ε en $[a,b]$ tal que:

$$\int_c^b f\varphi = \varphi(c) \int_c^{\varepsilon} f.$$

En vista de la estimación:

$$\left| \int_c^{\varepsilon} f \right| = |I_\varepsilon - I_c| \leq 2A.$$

Resulta que:

$$\left| \int_c^b f\varphi \right| < \varepsilon.$$

Cuando $b \geq c$ ambos existen $K(\varepsilon)$. Entonces podemos aplicar el criterio de Cauchy, de esa forma queda demostrada el teorema. $\square$

Para tener mayor claridad del uso de estos teoremas en la aplicación de la existencia de integrales infinitas, se estudiaron los siguientes ejemplos.

3.2.1. Ejemplos de los criterios de existencia de las integrales infinitas

A) Si $f(x) = \dfrac{1}{(1+x^2)}$ y $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$, para $x \geq a > 0$, entonces, $0 \leq f(x) \leq g(x)$. La integral infinita $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$ existe.

Del teorema de comparación, se puede deducir que la integral infinita:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx \text{ también existe.}$$

Esto podría mostrarse directamente señalando que:

$$\int_1^{c} \frac{1}{1+x^2}\, dx = \arctan c - \arctan 1.$$

y $\arctan c \to \dfrac{\pi}{2}$ cuando $c \to +\infty$.

B) Sea $p > 0$ y considera la existencia de la integral infinita

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p}\, dx.$$

Si $p > 1$, entonces el integrando es denominado por $\dfrac{1}{x^p}$ y es convergente. En este caso el teorema de comparación implica que la integral infinita converge. Si $0 < p \leq 1$, este argumento falla; sin embargo si establecemos $f(x) = \sin x$ y $\varphi(x) = \dfrac{1}{x^p}$, entonces el teorema de Dirichlet muestra que la integral infinita existe.

C) Si $h(x) = e^{-x^2}$ y $g(x) = e^{-x}$, entonces $0 \leq h(x) \leq g(x)$ para $x \geq 1$. La integral infinita $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\ dx$ existe, de donde se deduce del teorema de comparación, que la integral infinita $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\ dx$ también existe. Esta vez, una directa evaluación de la integral parcial no es posible, usando funciones elementales. Sin embargo, hay un artificio elegante que puede ser usado para evaluar esta integral. Sea I_c denota la integral parcial:

$$I_c = \int_0^c e^{-x^2}\ dx.$$

Y considerar la función continua positiva de plano $f(x, y) = e^{-x^2+y^2}$ en el primer cuadrante (x, y). La integral de f sobre el cuadrado $S_c = [0, c] \times [0, c]$ puede ser evaluada como una integral iterada.

$$\int_{S_c} e^{-(x^2+y^2)} = \int_0^c \left\{ \int_0^c e^{-x^2} e^{-y^2}\ dx \right\}\ dy.$$

Está claro que esta integral iterada es igual a:

$$I_{c^2} = \left\{ \int_0^c e^{-x^2}\ dx \right\} \left\{ \int_0^c e^{-y^2}\ dy \right\}.$$

Ahora, sea $R_c = \{(x, y) : 0 \leq x,\ 0 \leq y,\ x^2 + y^2 \leq c^2\}$ y notamos que el sector R_c está contenido en el cuadrado S_c y contiene el cuadrado $S_{c/2}$.

Ya que f es positivo, esta integral sobre R_c se encuentra entre su integral sobre $S_{c/2}$ y S_c.

Por lo tanto,

$$\left(I_{c/2}\right)^2 < \int_{R_c} f < (I_c)^2.$$

Si cambiamos a coordenadas polares es fácil evaluar esta integral. De hecho:

$$\int_{R_c} f = \int_0^{\pi/2} \left\{ \int_0^c e^{-r^2} r\ dr \right\}\ d\theta = \left[\frac{\pi}{2} \left(-\frac{1}{2} \right) e^{-r^2} \right]_{r=0}^{r=c} = -\frac{\pi}{4}(e^{-r^2}) = -\frac{\pi}{4} e^{-r^2} = \left(-\frac{\pi}{4} \cdot 1 \right) + \frac{\pi}{4} \cdot e^{-c^2}$$
$$= -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \cdot e^{-c^2}$$

En vista de las desigualdades anteriores:

$$\sup(I_c)^2 = \sup \int_{R_c} f = \frac{\pi}{4}.$$

Y se deduce del **Teorema 3.2.2** que:

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\ dx = \sup I_c = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

Por lo que la integral infinita existe.

3.3. Convergencia uniforme y absoluta

Definición 3.3.1 *(Convergencia absoluta) Si la integral infinita* $\int_a^{+\infty} |f(x)|\ dx$ *existe, entonces decimos que* f *es absolutamente integrable sobre* $\{x : x \geqslant a\}$ *o que la integral infinita* $\int_a^{+\infty} f(x)\ dx$ *es absolutamente convergente.*

Definición 3.3.2 *(Convergencia uniforme) Sea* f *una función de valor real, definida para* (x, t) *satisfaciendo* $x \geqslant a$ *y* $a \leqslant t \leqslant \beta$*. Supongamos que para cada* t *en* $J = [\alpha, \beta]$ *la integral infinita* $F(x) = \int_a^{+\infty} f(x, t)\ dx$ *existe. Decimos que esta convergencia es uniforme en* J *si para todo* $\varepsilon > 0$ *existe un número* $M(\varepsilon)$ *tal que si* $c \geqslant M(\varepsilon)$ *y* $t \in J$*, entonces*

$$\left| F(t) - \int_a^c f(x, t)\ dx \right| < \varepsilon.$$

A continuación abordaremos algunos teoremas para la convergencia absoluta y uniforme de integrales infinitas.

3.4. Criterios de convergencia absoluta y uniforme

Teorema 3.4.1 *(M - Weierstrass). Supongamos que* f *es Riemann integrable sobre* $[a, c]$ *para todo* $c \geq a$ *y para todo* $t \in J$*.*

Supongamos que existe una función positiva M *definida para* $x \geq a$ *tal que:*

$$|f(x, t)| \leq M(x)\text{para } x \geq a,\ t \in J.$$

y tal que la integral

$$\int_a^{+\infty} M(x)\ dx \text{ existe,}$$

entonces para cada $t \in J$, la integral

$$F(t) = \int_a^{+\infty} f(x,t)\ dt,$$

es absolutamente convergente y la convergencia es uniforme en J.

Demostración: La convergencia de

$$\int_a^{+\infty} |f(x,t)|\ dt \text{ para } t \in J.$$

Es inmediatamente consecuencia del teorema de comparación y la hipótesis. Por lo tanto, la integral $F(t)$ es absolutamente convergente para $t \in J$. Si utilizamos el criterio de Cauchy junto con la estimación:

$$\left| \int_c^b f(x,t)\ dx \right| \leq \int_c^b |f(x,t)|\ dx \leq \int_c^b M(x)\ dx.$$

Podemos establecer fácilmente la convergencia uniforme en J y es absolutamente convergente. $\square$

El teorema de M - Weierstrass es útil cuando la convergencia es absoluta y uniforme, pero no es lo suficientemente fino como para manejar caso de convergencia uniforme no absoluta.

Teorema 3.4.2 *(Dirichlet para convergencia uniforme y absoluta). Sea f continua en (x,t) para $x \geq a$ y $t \in J$ y supongamos que existe una constante A tal que:*

$$\left| \int_a^c f(x,t)\ dx \right| \leq A \quad \text{para } c \geq a,\ t \in J.$$

Supongamos que para cada $t \in J$, la función $\varphi(x,t)$ es monótona decreciente para $x \geq a$ y converge en 0 cuando $x \to +\infty$ uniformemente para $t \in J$, entonces la integral

$$F(t) = \int_a^{+\infty} f(x,t)\varphi(x,t)\ dx \quad \text{converge uniformemente en J.}$$

Demostración: Sea $\varepsilon > 0$ y asignar $K(\varepsilon)$ tal que si $x \geq K(\varepsilon)$ y $t \in J$, entonces $\varphi(x,t) < \dfrac{\varepsilon}{2A}$.

Si $b \geq c \geq K(\varepsilon)$ entonces se deduce de la forma de Bonnet del segundo teorema del valor medio, que para cada $t \in J$, existe un número $\varepsilon(t)$ en $[c,b]$ tal que:

$$\int_c^b f(x,t)\varphi(x,t)\ dx = \varphi(c,t)\int_c^{\varepsilon(t)} f(x,t)\ dx.$$

Por lo tanto, si $b \geq c \geq K(\varepsilon)$ y $t \in J$ tenemos que:

$$\left|\int_c^b f(x,t)\varphi(x,t)\ dx\right| \leq \varphi(c,t)\cdot 2A < \varepsilon.$$

Entonces la uniformidad de la convergencia, se deriva del criterio de Cauchy. $\square$

Para tener mayor claridad del uso de los critrios en la aplicación de la convergencia absoluta y uniforme de integrales infinitas, se estudiaron algunos ejemplos.

3.4.1. Ejemplos de los criterios de convergencia absoluta y uniforme

A) Si f es dado por:

$$f(x,t) = \frac{\cos tx}{1+x^2}, \quad x \geq 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Y si definimos M por $M(x) = (1+x^2)$, entonces $|f(x,t)| \leq M(x)$, ya que la integral infinita $\displaystyle\int_0^{+\infty} M(x)\ dx$ existe.

Del teorema de M - Weierstrass, se deduce que la integral infinita

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos tx}{1+x^2}\ dx \ \text{ converge uniformemente para t} \in \mathbb{R}.$$

B) Sea $f(x,t) = e^{-x}x^t$ para $x \geq 0$, $t \geq 0$. Esto vemos que la integral

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}x^t \, dx$$

converge uniformemente para t en el intervalo $[0, \beta]$ para algún $\beta > 0$. Sin embargo, no converge uniformemente en $\{t \in \mathbb{R} : \ t \geq 0\}$.

C) Si $f(x,t) = e^{-tx} \sin x$ para $x \geq 0$ y $t \geq \gamma > 0$, entonces:

$$|f(x,t)| \leq \ e^{-tx} \leq \ e^{-\gamma x}.$$

Si establecemos $M(x) = e^{-\gamma x}$, entonces, el teorema de M - Weierstrass implica que la integral

$$\int_0^{+\infty} e^{-tx} \sin x \, dx \ \text{ converge uniformemente,}$$

para $t \geq \gamma > 0$ y un calculo elemental muestra que converge a $(1+t^2)^{-1}$ (Nota: si $t = 0$, entonces la integral no converge).

D) Considerar la integral infinita

$$\int_0^{+\infty} e^{-tx} \frac{\sin x}{x} \, dx \ \text{ para } t \geq 0,$$

donde interpretamos que el integrando es 1 para $x = 0$. Dado que el integrando está dominado por 1, es suficiente mostrar que la integral sobre $\varepsilon \leq x$ converge uniformemente para $t \geq 0$. El teorema de M - Weierstrass no aplica en este integrando. Sin embargo, si tomamos $f(x,t) = \sin x$ y $\varphi(x,t) = \dfrac{e^{-tx}}{x}$, entonces la hipótesis del teorema de Dirichlet satisface.

Capítulo 4

Aplicaciones

4.1. Área y volumen

Las integrales impropias tienen bastantes aplicaciones en geometría, particularmente con los conceptos de área y volumen. A continuación se presentan algunos ejemplos.

A) Hallar el área comprendida entre la estrofoide $y^2(a+x) = x^2(a-x)$ y su asíntota.

Solución

En forma explicita, la ecuación es $y = \pm\, x\sqrt{\dfrac{a-x}{a+x}}$ y su asíntota es la recta $x = -a$.

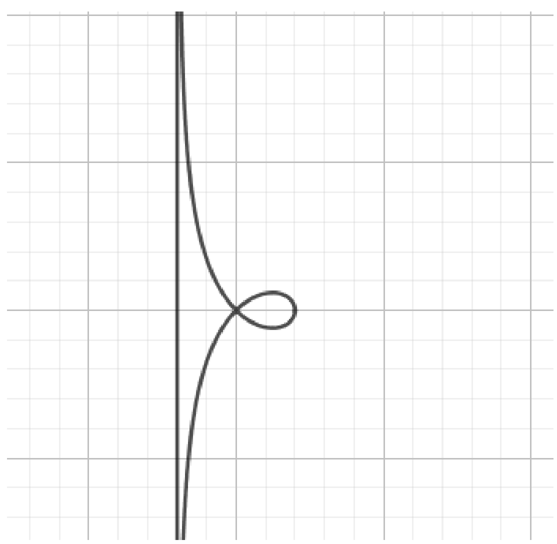

Figura 4.1: Estrofoide

De acuerdo con la **figura 4.1** y teniendo en cuenta la simetría, el área es:

$$A = 2\int_{-a}^{0} x\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\; dx = 2\lim_{r\to -a^+}\int_{r}^{0} x\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\; dx = \frac{a^2(4+\pi)}{2}$$

B) Hallar el área situada a la derecha de $x = 3$ y acotada por la curva $y = \dfrac{1}{x^2 - 1}$ y el eje x.
Solución

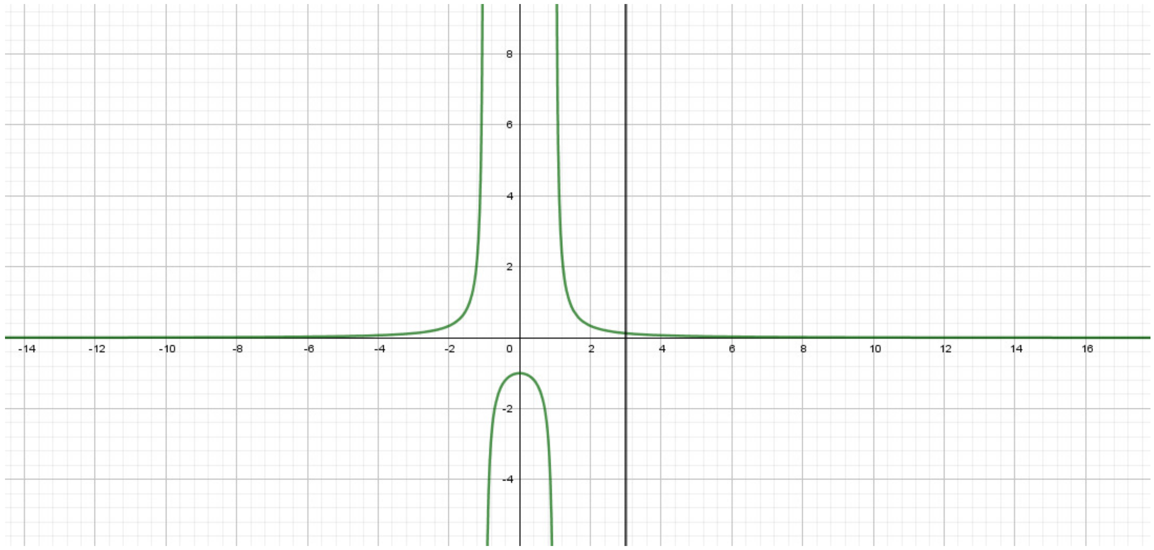

Figura 4.2:

De acuerdo con la gráfica de la **figura 4.2**, el área viene dada por la formula $A = \displaystyle\int_3^{\infty} \frac{dx}{x^2 - 1}$ que es una integral impropia. Resolviendo la integral indefinida por el método de fracciones simples, obtenemos:

$$A = \lim_{b \to \infty} \int_3^b \frac{dx}{x^2 - 1} = \frac{1}{2} \lim_{b \to \infty} \left[\ln \frac{x - 1}{x + 1} \right]_3^b$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{b \to \infty} \ln \frac{b - 1}{b + 1} - \frac{1}{2} \ln \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \lim_{b \to \infty} \ln \frac{1 - \frac{1}{b}}{1 + \frac{1}{b}} + \frac{1}{2} \ln 2 = \frac{1}{2} \ln 2.$$

Por lo tanto el área de la **figura 4.2** es de $\dfrac{1}{2} \ln 2$.

C) Calcular el área acotada por las curvas $y = \dfrac{1}{x}$, $\;y = \dfrac{x}{1 + x^2}$ en el intervalo $x \in [1, \infty)$.
Solución

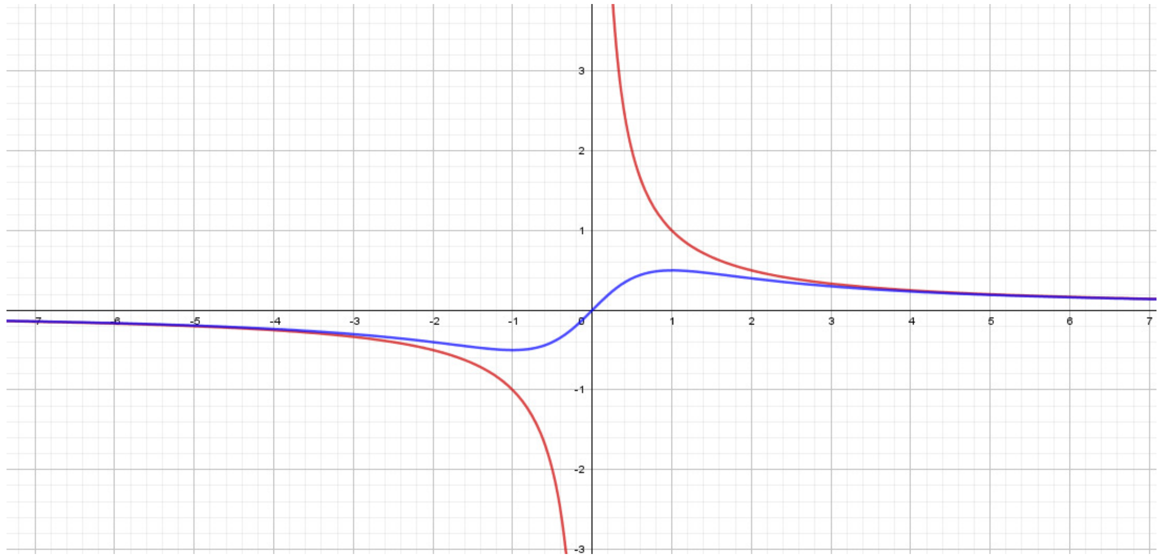

Figura 4.3:

De acuerdo con la gráfica de la **figura 4.3** y por definición de integral impropia, tenemos:

$$A = \int_1^{\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2} \right) \, dx = \lim_{b \to \infty} \int_1^{b} \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2} \right) \, dx$$

$$= \lim_{b \to \infty} \left[\ln x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right]_1^b = \lim_{b \to \infty} \left(\ln \frac{b}{\sqrt{1+b^2}} - \ln \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \ln \sqrt{2}.$$

D) Se considera la región R acotada por las curvas $y(x^2+1) + \arctan x = 0$ y $x^2 y^3 = 1$ en el intervalo $x \in [0,1]$.

i) Calcular el área de la región R.

ii) Calcular el volumen del sólido obtenido al girar R alrededor del eje x.

Solución:

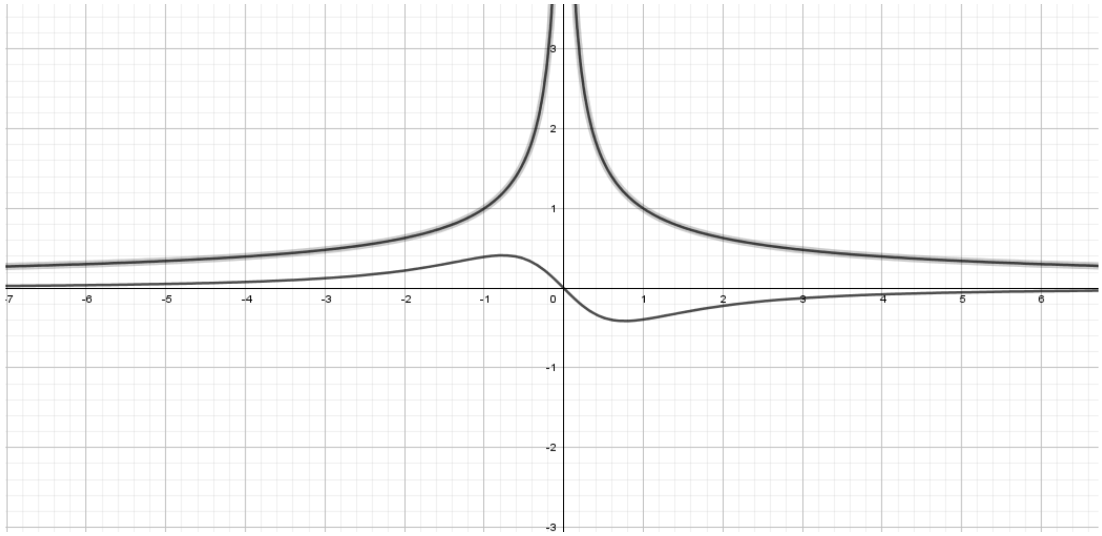

Figura 4.4:

i) De acuerdo con la **figura 4.4**, el área viene dada por:

$$A = \int_0^1 \left(x^{-2/3} + \frac{\arctan x}{x^2+1} \right) \, dx = \lim_{a \to 0^+} \left[\frac{x^{1/3}}{1/3} + \frac{(\arctan x)^2}{2} \right]_a^1$$

$$= \lim_{a \to 0^+} \left(3 + \frac{(\pi/2)^2}{2} - 3a^{1/3} - \frac{(\arctan x)^2}{2} \right) = 3 + \frac{\pi^2}{32}.$$

ii) El volumen pedido es el mismo que el de la región comprendida entre la curva $y = x^{-2/3}$ y el eje x en el intervalo $[0, 1]$ (Basta observar que al girar está región ya queda incluida la parte comprendida en el cuarto cuadrante).

$$V = \pi \int_0^1 y^2 \, dx = \pi \int_0^1 x^{-4/3} \, dx = \lim_{a \to 0^+} \pi \cdot \left[\frac{x^{-1/3}}{-1/3} \right]_a^1$$

$$= -3\pi \lim_{a \to 0^+} (1^{-1/3} - a^{-1/3}) = \infty.$$

Bibliografía

[1] Apostol, T. Cálculo con funciones de una variable con una introducción al álgebra lineal. Barcelona: REVERTÉ, S.A, 2010.

[2] Gardner, R. The Elements of real Analysis. New York: John Wiley and Sons, Inc, 1976.

[3] Lima, E. Análisis Real. Instituto de Matemática y Ciencias Afines, 1997.

[4] Mateus, E. Evolución histórica - epistemológica del concepto de integral. Universidad externado de Colombia. Maestría en Educación, Dpto. de Matemática, 2015.

[5] Cominetti, R. San Martin, J. Cálculo - 2do semestre, Apuntes 1er año FCFM, U. de Chile, 2003.

[6] Ruiz, C. Criterios de convergencia de Integrales impropias, Análisis matemático. Facultad de Matemática, Universidad Complutense, 28040. Madrid, Spain 2017.

[7] Universidad Politecnica. Integrales impropias Eulerianas, ETSI en topografía, Geodesia y cartografía. Madrid.