Universidad del Bío – Bío
Facultad de Educación y Humanidades
Escuela de Pedagogía en Educación Matemática

UN ESTUDIO A LA INTEGRAL DE RIEMANN-STIELTJES

Memoria para optar al Título de Profesor de Educación Media en Educación Matemática

AUTORES:

RUBÉN DARÍO QUEZADA QUEZADA

JESÚS FRANCISCO TAPIA DOMÍNGUEZ

Profesor Guía: Dr. Luis Alberto Friz Roa

Chillán, 2020

AGRADECIMIENTOS

En la entrega de este trabajo de tesis va culminando el anhelado sueño de volver a estudiar cuando después de tantos años de terminada la enseñanza media veía en lontananza lo inalcanzable que podría ser. Ha sido un largo camino iniciado un tiempo ya cuando temeroso e incrédulo, entusiasta y esperanzado tomaba el relevo para acometer una tarea que para mí es una de las más nobles misiones de la vida, poder enseñar. No como queriendo saberto todo, sino que con humildad y reconocimiento entregar lo que por gracia Dios me permite ser, un profesor. Mirando en retrospectiva, este sinuoso camino no estuvo exento de muchas dificultades, a veces pedregoso, tortuoso y cuesta arriba, como que la carga se hacía pesada e insostenible y el final lejano y esquivo, algunas veces como queriendo dejarlo todo y apartarme de la ruta pero más las veces que la esperanza me animaba a no flaquear y seguir adelante. Ha sido un camino difícil, sin duda, pero cuando más sacrificio, arduo e improbable el objetivo, más dulce es la recompensa.

Quiero agradecer a todos los compañeros que tuve y a todos los amigos que en el camino conseguí, que no miraron al hombre mayor sino al compañero, que me animaron y ayudaron en mis dudas y en cuantas largas noches de estudio y desvelo tuve, quisiera nombrar a cada uno de ustedes pero sería injusto dejar a alguno en el tintero. Al grupo Gelc, que me sostuvo y fue refrigerio en tiempos de necesidad. A todos y cada uno de ustedes, muchas gracias de corazón.

A los profesores que confiaron en mí y me alentaron a seguir, y también a aquellos que con disimulada desconfianza no lo hicieron, a cada uno de ustedes les agradezco, de cada uno de ustedes aprendí.

Un reconocimiento especial a mi profesor guía Sr. Luis Friz Roa, que por esas paradojas de la vida, quien lo diría, estuvo en el momento de la carrera cuando pensé un instante en dejarlo todo y ahora es quien nos guía en la dirección de este trabajo final. Gracias infinitas por la paciencia y la conversación abierta.

Quiero agradecer a una persona muy especial que me impulsó a tomar este desafío, Carolina Sáez, siempre estarás en mi memoria y siempre te agradeceré.

A mi familia, somos pocos pero lo somos todo, mi madre, mi hermana y mi Meme. No existen palabras que puedan contener todo mi amor y gratitud por ustedes, simplemente los amo.

Finalmente y principalmente, quiero agradecer a la persona más importante en mi vida. Cuando la soledad se hacía dura y la esperanza se tornaba en desaliento, siempre sentí su dulce compañía. Ves mi errores y horrores, y aún así no me abandonas. Dios, eres todo para mi y sin ti, nada soy.

Rubén D. Quezada Q.

DEDICATORIA

A mi querida madre Rosita Quezada. No he conocido mujer en este mundo más noble y con un espíritu tan fuerte de sacrificio, esfuerzo y superación que ella, que luchando sola y desde siempre contra la adversidad, contenga además tanto amor en su corazón y tanta dulzura en su mirar. Todo mi amor, respeto y admiración por siempre.

A mi querida hermana Carola. Mi única y mi muy querida hermana. Me embarcaste en este proyecto sin siquiera consultarme, sólo me enteré cuando avisaste que me habías inscrito para rendir las pruebas de admisión a la Universidad. Confiaste siempre en mí y me apoyaste en las horas difíciles, siempre hermanos en las buenas y en las malas, siempre unidos y yo por siempre agradecido. Te quiero infinitamente.

A mi querido Meme, mi querido sobrino. Tú eres nuestro brillo, la luz que resplandece cada día, el presente y el mañana, la esperanza y el futuro, nuestra alegría en toda su expresión y el motor que impulsa nuestras vidas, como torbellino te paseas en medio y todo gira en torno a tí. Todo. Te quiero tanto, como tú dices, infinito y más...

A ustedes, mi familia, la razón por la que soy y a quienes amo profundamente, les dedico este logro de mi vida.

"...dediqué mi corazón a conocer sabiduría, y a ver la faena que se hace sobre la tierra... y he visto todas las obras de Dios, que el hombre no puede alcanzar la obra que debajo del sol se hace; por mucho que trabaje el hombre buscándola, no la hallará; aunque diga el sabio que la conoce, no por eso podrá alcanzarla".

Eclesiastés 8:16a - 17

"...No se alabe el sabio en su sabiduría, ni en su valentía se alabe el valiente, ni el rico se alabe en sus riquezas. Más alábese en esto el que se hubiere de alabar: en entenderme y conocerme" (dice Jehová).

Jeremías 9:23b - 24a

DEDICATORIA

Agradezco a mi madre Paola Domínguez, por el gran amor y la devoción que tienes a tus hijos, por el apoyo ilimitado e incondicional que siempre me has dado. Por tener siempre la fortaleza de salir adelante sin importar los obstáculos. Por haberme formado como un hombre de bien y lo más importante, por ser la mujer que me dio la vida y me enseñó a vivirla..., no hay palabras en este mundo para agradecerte mamá.

Agradecer al cuerpo docente de la Universidad por entregarme las herramientas y consejos para ser un buen docente y educador.

En conclusión, a todo el que hizo posible mi formación. Gracias.

Jesús Fco. Tapia

ÍNDICE GENERAL

NOTACIÓN

$\alpha \nearrow$	Función α es creciente (α: $alfa, letra\ del\ alfabeto\ griego$)
$\Delta\alpha_k$	Diferencial entre el $\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1})$ término
Δx_k	Longitud del *k-ésimo* subintervalo $x_k - x_{k-1}$
$[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$	Intervalo cerrado de extremos a y b Intervalo, del latín $intervalum$, entre vallas
$Bern$	Bernoulli, la distribución de Bernoulli o distribución dicotómica
$E(X)$	Esperanza matemática de la variable aleatoria X
$Var(X)$	Varianza de la variable aleatoria X
Ω	En la teoría de probabilidades, se refiere al espacio muestral
P	Partición (del intervalo $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$)
P'	Partición más fina que P
$\Vert P \Vert$	Norma de partición, es el $>$ de los n números $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$
P_ε	Partición etiquetada
$\wp[a, b]$	Conjunto de todas las particiones posibles del intervalo
$\mathcal{R}$	Conjunto de las funciones Riemann integrables
$f \in \mathcal{R}(\alpha)$	f es Riemann integrable con respecto a α
$\mathfrak{R}$	Símbolo que reemplazará a $\mathcal{R}$ en este trabajo, sólo para efectos de evitar confusión con la notación $\mathbb{R}$ del conjunto de los reales
inf	Ínfimo, del latín $infimum$, la mayor cota inferior
sup	Supremo, del latín $supremum$, la menor cota superior
m	Mínimo, representa al ínfimo
M	Máximo, representa al supremo
$\sum m_k$	Sumatoria del ínfimo de los valores de la función en el *k-ésimo* subintervalo
$\sum M_k$	Sumatoria del supremo de los valores de la función en el *k-ésimo* subintervalo
$S(P, f, \alpha)$	Suma parcial de Riemann-Stieltjes de la función f con respecto a α
$L(P, f, \alpha)$	Suma inferior de Stieltjes de la función f respecto a α *L*, del inglés $Lower$, inferior
$U(P, f, \alpha)$	Suma superior de Stieltjes de la función f respecto a α *U*, del inglés $Upper$, superior
$\int_{\underline{a}}^{b} f\, d\alpha$	Integral inferior de Stieltjes de f con respecto a α, equivalente a la siguiente expresión: $\underline{I} = (f, \alpha)$
$\int_{a}^{\overline{b}} f\, d\alpha$	Integral superior de Stieltjes de f con respecto a α, equivalente a la siguiente expresión: $\overline{I} = (f, \alpha)$

RESUMEN

El presente trabajo de investigación se centra en el estudio de las bases teóricas que le dan el sustento a la integral de Riemann Stieltjes. Inicia con el desarrollo de los conceptos básicos que permitan entender el concepto de la integral de Riemann, y luego como una extensión de la misma se continúa con el desarrollo de la teoría que le da forma a la integral de Stieltjes mediante la presentación de teoremas y sus demostraciones y finaliza con una aplicación de la misma integral a la teoría de probabilidades.

INTRODUCCIÓN

Desde la antigüedad los hombres intentaron encontrar soluciones a cuestiones que representaban problemas en la vida cotidiana. El cómo, constituía el desafío fundamental. Desde el registro de las primeras pinturas rupestres con expresiones que señalaban cantidad hasta el desarrollo de las matemáticas griegas, hay una extensa línea de tiempo donde el conocimiento científico de debatía entre la observación de fenómenos de la naturaleza y la religiosidad pagana. Sucesivas civilizaciones establecidas en el Medio Oriente fueron sentado las bases de lo que iba a ser el florecimiento del pensamiento helénico y su influencia en el mundo antiguo. Sin embargo, como todas las civilizaciones, la griega no escapó a su destino y después de una larga supremacía poco a poco fue menguando su poder e influencia a manos del naciente imperio romano. El asesinato de Hypatia en el 415 d.C. suele señalarse como el fin de la escuela matemática griega y su largo reinado milenial.

Debió pasar casi otro milenio para que comenzara a vislumbrarse en Europa los gérmenes de una ola de pensamiento crítico que cuestionaba el razonamiento cristiano para explicar muchos fenómenos. En el intermedio de ese período de oscurantismo, el aporte de herencia matemática griega a los árabes resultó vital para mantener viva y presente la ciencia. Dada la enorme influencia que aún ejercían los postulados de Euclídes, el desarrollo del pensamiento matemático nacía y moría siempre en la búsqueda del lenguaje geométrico para explicar cualquier razonamiento matemático. Conceptos tales como $infinito$ o $indivisibles$ entre otros, se comienzan a tornar habituales entre los pensadores de la época, el interés por el espacio celeste abre aún más el espectro y la necesidad de expresar los descubrimientos acelera el avance de la matemáticas.

Lo restringido de la aritmética para explicar muchos fenómenos físicos y naturales obliga a ir un paso más adelante. El desarrollo del cálculo como herramienta necesaria para suplir esa necesidad hace su aparición con los primeras ideas de Cavalieri, y luego con Wallis, Gregory y Barrow; pero básica y fundamentalmente en las ideas de Newton y Leibniz, a pesar sin embargo de que Arquímides ya lo utilizaba para calcular áreas y volúmenes en lo que hoy conocemos como cálculo integral.

Durante el siglo XVIII los conceptos matemáticos se amplian mucho más y la idea de Newton de la integral de una función como la inversa de la derivada son expandidas con el aporte de otros matemáticos. En su formulación, tanto la derivada como la integral se basan en el concepto de límite para poder calcular expresiones que se van tornando infinitamente pequeñas.

El matemático francés Louis Cauchy (1789-1857) fue el primero en plantear la necesidad de una definición de integral más general y la prueba de su existencia, para una clase de funciones más amplia. Su trabajo consistió en subdividir por primera vez el intervalo de definición en pequeños subintervalos y definir a la integral como el límite de una suma. Sin embargo sería el matemático alemán Bernhard Riemann (1826-1866) quien organizó la información dispersa y desarrolló una definición formal y rigurosa para el uso de la integral. Sucesivamente el concepto se fue ampliando y se agregaron nuevos puntos de vista que generalizaban el concepto de integral.

En 1887 el matemático italiano Giuseppe Peano (1858-1932) publica su trabajo “Aplicaciones geométricas al cálculo infinitesimal” y en ella se define por primera vez el concepto formal de área para el estudio de las funciones continuas.

Todas las sucesivas aportaciones que en las últimas tres décadas del siglo XIX se realizaron a la integral de Riemann, experimentan una nueva transformación cuando el matemático holandés Thomas Stieltjes (1856-1894) desarrolla un método alternativo para definir la integral de Riemann y dar respuesta a problemas que la primera no podía resolver. En 1894 Stieltjes había publicado una investigación sobre fracciones continuas (*Recherches sur les fractions continues*) y en su desarrollo introduce una nueva forma de trabajar la integral de Riemann, con no una sino que con dos funciones. Esta generalización a la integral como una extensión de la misma enseguida presentó grandes ventajas de aplicación en las diferentes ramas de la matemática como también en la física, extendiendo el concepto de área bajo una curva y ocupando dos funciones para integrar variables continuas y discretas.

La integral de Riemann es con toda probabilidad uno de los conceptos que como estudiantes de Análisis Matemático o Cálculo se estudiarán en la Universidad. En el caso de Stieltjes y a diferencia de Riemann, amplía la integral e involucra dos funciones: f y α. Se construye de manera similar a la integral de Riemann, vale decir, dentro de un intervalo $[a, b]$, luego se define una partición P que la entenderemos como un conjunto de puntos finitos $x_0, x_1, \dots, x_n$ donde:

$$\mathrm{a} = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = \mathrm{b}$$

y suponemos que la función f es real y acotada, y definida en el mismo intervalo. Aún más interesante y potente, la integral de Stieltjes conserva aún su identidad cuando la función no es continua y es ahí donde se vuelve manifiesto su valor, o bien también cuando la función no admite ser derivable.

En este proyecto de tesis, dedicado a la integral de Riemann-Stieltjes, introducimos el tema presentando en primer lugar algunas definiciones y principios básicos para entender la integral de Riemann, con esa base posteriormente se desarrollan los teoremas que fundamentan la integral de Riemann-Stieltjes, enunciando las definiciones y demostrando sus teoremas, puesto que nuestro trabajo de tesis es una abstracción de la clásica integral de Riemann. A continuación se presenta el concepto de la $g\text{-}derivada$ y el Teorema Fundamental del Cálculo para la integral de Riemann-Stieltjes.

Finalmente, buscando una aplicación del concepto al campo de la matemática en la enseñanza media, se presenta una aplicación a la teoría de probabilidades en el uso de la esperanza y la varianza matemática.

Formulación del Problema

En el desarrollo de las matemáticas, los avances que experimentan ciertas ramas de la disciplina en el transcurso del tiempo con el aporte de muchos investigadores, a menudo logran que un concepto se amplíe en el sentido de responder a más interrogantes, en cierto modo, aumenta el espectro original que abarcaba el principio estudiado.

Tal es el caso de la integral de Riemann-Stieltjes, que corresponde a una generalización de la integral de Riemann, y que en su extensión permite ampliar enormemente el potencial de la herramienta original.

Conocer mejor la teoría que le da consistencia a la integral de Riemann-Stieltjes mediante el estudio y desarrollo de los teoremas que le dan forma a su estructura, es parte del objetivo del presente trabajo.

Objetivos

1. Objetivo General

Analizar la integral de Riemann-Stieltjes mediante el desarrollo de los teoremas que la sustentan.

2. Objetivos Específicos

I. Describir las generalidades de la integral de Riemann-Stieltjes a través de la demostración paso a paso de sus teoremas.

II. Conocer el teorema fundamental del cálculo para la integral de Stieltjes análogo a la integral de Riemann.

III. Identificar la aplicabilidad de la integral de Riemann-Stieltjes en la teoría de probabilidades.

Capítulo 1. Reseñas Biográficas

1.1. Bernhard Riemann

Bernhard Riemann, de nombre completo Georg Friedrich Bernhard Riemann, nació en la ciudad alemana de Breselenz, Hannover, el 17 de septiembre de 1826. De profesión matemático, realizó contribuciones en las diversas áreas de la matemática y destacan entre ellas sus muy importantes aportes al campo del análisis y la geometría diferencial, cuyos profundos y novedosos enfoques establecieron la matemática que le daría el fundamento a Albert Einstein para el desarrollo de su teoría de la relatividad. Se dice de Riemann que es uno de los ejemplos de entre los varios que pueden encontrarse en la historia de las matemáticas, en el que se da la dualidad de profunda capacidad creativa a la solución de problemas, y a su vez, corta vida.

Riemann, de personalidad tímida e introvertido toda su vida, nació en el seno de una familia pobre pero en la que reinaba un carácter serio y piadoso y una vida hogareña estimulante; fue el segundo de seis hermanos pero su salud frágil fue también el denominador común en la familia y debió lamentar la pérdida de su madre Charlotte y todos sus hermanos, expecto Ilse, a una temprana edad. Su padre Friedrich Bernhard Riemann, era un pastor protestante de economía precaria que le instruyó en historia, aritmética y geometría, había luchado en las guerras napoleónicas y provenía de una larga línea de ministros luteranos, su abuelo materno había sido consejero de la corte de Hannover. El más estrecho cariño unía a Riemann con su familia y así se mantuvo durante toda su vida, como queda de manifiesto en la correspondencia rescatada. Tuvo en su niñez la suerte de tener un maestro de escuela de apellido Schulz, quien le enseñó los fundamentos de la aritmética y geometría avanzada que su padre en su mejor intención, no podía enseñar.

En 1840, su progenitor, preocupado por un mejor desarrollo de su hijo, lo deja con su abuela en Hannover y éste logra ingresar al prestigioso Lyceum, donde estudió hebreo y cosa extraña para sus maestros, trató de probar la certeza del libro de Génesis por medio de razonamientos matemáticos. Dos años más tarde fallece su abuela y el joven Riemann se trasladó al Johanneum Gymnasium, de Lüneburg, no tan prestigioso como el anterior pero donde quedaría de manifiesto la genialidad de Riemann. En ese período se hace asíduo visitante de la biblioteca y estudia entre varios libros uno que le marcaría a futuro en el desarrollo de sus investigaciones, la “Teoría de los números”, del destacado matemático francés Adrien-Marie Legendre, y un tema del que a posterior se haría particularmente famoso, la distribución de los números primos.

En la primavera de 1846, a la edad de 19 años ingresó a la Universidad de Göttingen. Desde pequeño había estado inmerso en un ambiente religioso y le pareció natural seguir el camino tomado por su padre, a quien profesaba gran cariño, por lo que se anotó en la carrera de teología. Su asistencia a algunas clases de matemáticas de Moritz Stern y en particular a un curso impartido por Gauss, de 69 años a la fecha y por aquel entonces el matemático más importante del mundo, sobre el Método de los mínimos cuadrados, le decidió a querer esa ciencia por profesión. En 1847 su padre, con quien Riemann siempre mantuvo una relación afectiva muy cercana y del que nunca hubiera tomado una decisión sin consultar y esperar su venia, logró no sin menos esfuerzo reunir el dinero suficiente para que su hijo se pudiera cambiar desde la facultad de teología y comenzar a estudiar matemáticas. A sugerencia de Gauss, se marchó a mediados de 1847 a la Universidad de Berlín (1847-1849) a estudiar con la brillante generación de matemáticos que había en aquel momento, donde sería alumno de otros ilustres matemáticos: Jacobi, Steiner, Eisenstein y Dirichlet. Su permanencia en la universidad fue fructífera en cuanto a que en esa época comenzó a trabajar en la elaboración de lo que sería su teoría general de variables complejas y además porque la influencia que recibió de Dirichlet en su modo particular de razonar los problemas sería manifiesto en el futuro, pues adoptó su forma intuitiva y trabajó de acuerdo con sus métodos. En marzo de 1848 estallaron manifestaciones y movimientos obreros por toda la Confederación Germánica (Alemania) en lo que se conoce como la Revolución de Marzo y el joven Riemann rápidamente se vió envuelto en las manifestaciones tomando partido en la defensa de la monarquía y siendo llamado a la milicia, incluso ayudó a proteger al rey Federico Guillermo IV de Prusia en su palacio de Berlín. Permaneció allí por dos años y volvió nuevamente a la Universidad de Göttingen en 1849. En su período de vuelta, Riemann fue asistente durante 18 meses de Weber, quien había retornado de Leipzig a ocupar una cátedra de física en Göttingen en el tiempo en que Riemann estuvo en Berlín. Este acercamiento con Weber más su relación con el profesor Listing, también físico, marcaron en Riemann una sólida formación en física teórica y también en topología, que resultaron cruciales en sus posteriores investigaciones. El 16 de diciembre de 1851 presenta su tesis, que había sido supervisada por Gauss, "*Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Funktionen einer veränderlichen complexen Grösse*" (Conceptos básicos para una teoría general de las funciones de variable compleja), una tesis doctoral considerada una joya matemática jamás presentada por un estudiante de postgrado, basada en las hoy llamadas ecuaciones de Cauchy-Riemann y en la que aparecen el tipo de superficies que se conocen con su nombre. En su informe sobre la tesis, Gauss describió este trabajo como "...*una disertación propia de una mente creativa, activa y genuinamente matemática y de una fértil y gloriosa originalidad*". Tras volver a la Universidad de Göttingen, Riemann pretende alcanzar un puesto remunerado de profesor, el cargo era de profesor auxiliar, un *Privatdozent*, y para ello había que superar una prueba de habilitación, para lo cual era preceptivo dar una conferencia ante el claustro sobre un tema de la materia.

El postulante al cargo debía proponer tres temas y el jurado escogía cuál de ellos era el que iba a tener que defender el ponente. El criterio tomado por el jurado para elejir el tema de exposición oral seguía cierta pauta lógica, es decir, el ponente presentaba la terna con el tema de sus exposiciones en orden de preferencia descendente, y el jurado en virtud de ello generalmente elegía el primer o segundo tema, pero casi nunca el tercero. Para la exposición, Riemann trabajó durante largos 30 meses sobre la representación de funciones por series trigonométricas, en el cual analizó las condiciones de Dirichlet para el problema de representación de funciones en serie de Fourier como primer tema de la terna. El segundo tema era una idea que Riemann llevaba trabajando un tiempo; y el tercero, a sólo un par de meses de la exposición surgió por una petición de Gauss basado en una geometría que discutía algunos principios de Euclides. La terna con los nombres de las exposiciones que Riemann propuso fueron en orden de preferencia como sigue:

1. *Sobre la representación de una función por una serie trigonométrica.*
2. *Sobre la resolución de dos ecuaciones de segundo grado con dos cantidades indeterminadas.*
3. *Sobre las hipótesis en las que se funda la geometría.*

Contra toda previsión, Gauss, en su condición de presidente del tribunal examinador, eligió el tema en el que Riemann menos preparación -en teoría por el tiempo que tuvo de prepararlo- tenía, el tercero. Gauss había estado trabajando el último tema durante largo tiempo, sabía de su complejidad y tenía curiosidad por saber cómo Riemann lo abordaría. El 10 de junio de 1854, un año antes de la muerte del viejo profesor Gauss y después de esperar que su delicado estado de salud se restableciera, presentó su ensayo "*Ueber die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen"* (Sobre las hipótesis en las que se funda la geometría), considerada quizás como la mayor lección científica individual jamás presentada por el hombre. Una extraordinaria clase magistral impartida por Riemann la cual versa sobre los fundamentos de la geometría, se desarrolla como una generalización de los principios de la geometría euclidiana y la no euclídea. La unificación de todas las geometrías se conoce hoy en día como geometría de Riemann y es básica para la formulación de la teoría de la relatividad de Einstein. Lo que transforma en extraordonario el texto es que está redactado de una manera simple y con demostraciones matemáticas breves y claras. La profundidad de los pensamientos de Riemann superaron todas las expectativas de Gauss y la audiencia. Al regresar a la reunión de la facultad, le comentó al físico alemán Wilhelm Weber su más alta estima por las ideas presentadas por Riemann, hablando con un entusiasmo que era raro en Gauss. Un año después, al fallecer Gauss, su cátedra sería ocupada por Dirichlet.

En 1855 la pérdida de su querido padre y la pesada carga financiera que tuvo que soportar para mantener a su familia afectaron su salud, minándole y provocando una crisis nerviosa, refugiándose en la montaña donde encontró salud a su enfermedad. Ascendió en la profesión académica a través de una sucesión de trabajos mal remunerados, hasta que se convirtió en profesor titular en 1859, ocupando la cátedra de Göttingen un 30 de julio para suceder a Dirichlet, sentándose en un trono que era considerado lo más grande para un matemático y disfrutando al fín de una seguridad económica que siempre le había sido negada. Al poco tiempo fue elegido miembro de la Academia de Ciencias de Berlín, y como tal, un recién electo debía informar sobre sus más recientes hallazgos, y Riemann escribió y envió su única publicación, sobre los números primos, la "*Ueber die Anzahl der Primzahlem unter einer gegebenen Grösse"* (Sobre el número de primos menores que una cantidad dada), una de las grandes obras maestras que cambiaron de manera significativa la dirección de la investigación matemática, el más célebre trabajo de Riemann y el tema que le había apasionado 15 años antes, en esa publicación consta la famosa Hipótesis de Riemann. A los 36 años, en junio de 1862 se casó con Elise Koch, amiga de su hermana, y con quien tuvo una hija. En el otoño de ese año nuevamente su salud se pone a prueba cuando un fuerte resfriado se transformó en tuberculosis. Trató de luchar contra la enfermedad refugiándose por períodos en el clima más benigno del sur de Italia, gracias a la ayuda económica que le proporcionó el gobierno alemán. Tras volver a Göttingen para atender sus compromisos académicos sintió la necesidad de poner en orden todos sus papeles, pues presentía su final. Para el invierno de 1865-1866 la salud de Riemann se deteriora y parte de Göttingen en su tercer viaje a Italia, pero una guerra con Austria le hace muy penoso el viaje y le impide llegar a su destino, Sicilia, quedándose entonces en Selasca, en las márgenes del lago Maggiore, frontera con Suiza, donde muere de tuberculosis el 16 de junio de 1866, poco antes de cumplir los cuarenta años. La mala de salud impidió que

Riemann publicara todo su trabajo y algunos de sus mejores trabajos sólo vieron la luz a título póstumo, por ejemplo la *Gesammelte Mathische Werke* (Colección de trabajos matemáticos), editado y publicado en 1876 por su amigo y alumno, Richard Dedekind.

La influencia de Riemann fue inicialmente menor de lo que podría haber sido. Göttingen era una universidad pequeña, Riemann era un profesor pobre y, para empeorar las cosas, varios de sus mejores estudiantes murieron jóvenes. Pero su trabajo se ganó el respeto de algunos de los mejores matemáticos de Alemania, incluido su amigo Dedekind y su rival en Berlín, Karl Weierstrass. Otros matemáticos fueron atraídos gradualmente a sus trabajos por su profundidad intelectual y de esta manera estableció una agenda para el pensamiento conceptual sobre el cálculo. Este énfasis fue tomado por Felix Klein y David Hilbert, quienes más tarde establecieron Göttingen como un centro mundial para la investigación matemática, con Carl Gauss y Bernhard Riemann como figuras icónicas. Gracias a la intervención de Hilbert a principios del siglo XX que la figura de Riemann alcanza gran popularidad, quien utilizó para sus explicaciones el cálculo de variaciones. Además de sus importantes trabajos en teoría de números, series trigonométricas, ecuaciones diferenciales, geometría no-euclídea, geometría diferencial, también son conocidas sus aportaciones al análisis matemático, y entre ellas, una idea de integral definida más general que incluye el caso de una función acotada que admite infinitas discontinuidades desarrollada más tarde por Thomas Stieltjen; también se dedica a las funciones de variable compleja y pone los fundamentos de la topología.

En el año 1900 se celebró la segunda versión del Congreso Internacional de Matemáticas, en París, Francia, donde David Hilbert anunció la ahora famosa lista de 23 problemas no resueltos en matemáticas, hoy llamados los Problemas de Hilbert. En el número ocho está la Hipótesis de Riemann, aún irresoluta. Dice la historia que poco antes de su muerte en 1943, alguien le preguntó cuál sería su primera pregunta si fuera resucitado al cabo de 500 años, a lo que respondió inmediatamente, ¿Ha demostrado alguien la hipótesis de Riemann?.

Su mujer Elise rescató la mayor parte de sus artículos privados de ser destruidos por un descuido de su ama de casa y los mantuvo bajo llave hasta que murió. En 1920 se hicieron públicos gracias al matemático y editor C.L. Siegel.

1.2. Thomas Stieltjes

Thomas Jan Stieltjes, nació el 29 de noviembre de 1856 en la ciudad de Zwolle, Overijssel, Países Bajos. Fue un matemático holandés del siglo XIX cuyos trabajos están ligados al análisis matemático: teoría de fracciones continuas funcionales, teoría de integración aproximada, teoría de polinomios ortogonales y el problema de los momentos, además de realizar enormes contribuciones tales como la cuadratura de Gauss, entre otras. Sin embargo, para la mayoría de los matemáticos su nombre se recuerda en asociación con la integral de Riemann-Stieltjes y la integral de Lebesgue-Stieltjes.

Su padre, del mismo nombre, fue un reconocido ingeniero civil como también un activo miembro del Parlamento holandés. Sin embargo, más que en la política se destacó como ingeniero, famoso es por la construcción de varios puertos alrededor de Rotterdam y se le recuerda con una estatua erigida en su honor en reconocimiento a sus servicios prestados en Noordereiland, en Burgemeester Hoffman Plein, Rotterdam. Resulta curioso que al ser figuras con el mismo nombre, la biografía del padre destaque en el diccinario de personas famosas de los Países Bajos en relación con el hijo matemático, a pesar de los importantes aportes de este último. Thomas Stieltjes padre tuvo siete hijos, y Stieltjes hijo fue el segundo de los siete, tuvo dos hermanos y cuatro hermanas.

En 1873 comenzó sus estudios universitarios en la Escuela Politécnica de Delft, pero esos años los pasó encerrado en la biblioteca leyendo las obras de Gauss y Jacobi en lugar de asistir a clases. Su pasión estaba en el disfrute de leer las obras de estos grandes matemáticos en lugar de asistir y estudiar los cursos, por lo que la consecuencia natural fue reprobar los exámenes finales. Sucesivos fracasos en los exámenes finales en 1875 y 1876 tuvieron a su padre al borde de la desesperación. Éste, en un intento por enmendar el rumbo de su hijo y procurando que pudiera adquirir un oficio que le sustentara en el futuro, intervino ante quien era su amigo, el astrónomo holandés Hendricus Gerardus van de Sande-Bakhuyzen, director del Observatorio de Leiden, para conseguirle un trabajo para su hijo.

En abril de 1877 comenzó un trabajo como Asistente en el Observatorio, pero su padre que había hecho todo lo posible para ayudar a su hijo en cuanto pudo, no iba a vivir mucho tiempo después y murió el 23 de junio de 1878 en Rotterdam. No se sabe mucho del período inmediatamente posterior, pero sin duda el hecho que marcará un antes y un después en el rumbo que tomaría su vida en lo que respecta a la matemática, ocurrió el 8 de noviembre de 1882, cuando comenzó una fructífera correspondencia con el matemático francés, Charles Hermite, a la época titular de la cátedra de álgebra superior en la Facultad de Ciencias de Paris, correspondencia que duraría el resto de su vida y en la cual intercambiaron 432 cartas. El motivo por el que Stieltjes escribió a Hermite se refería a su trabajo en mecánica celeste, en concordancia con su trabajo en el Observatorio, pero el tema rápidamente derivó hacia las matemáticas y comenzó a dedicar su tiempo libre a la investigación en esa ciencia.

El año 1883 comenzaría frenético en la vida de Stieltjes. El 1 de enero el director del Observatorio de Leiden, van de Sande-Bakhuyzen, con gran visión y en un gesto extraordinario aceptó la solicitud de Stieltjes para detener su trabajo como observador y permitir dedicar su tiempo libre hacia los temas matemáticos. El mismo año en el mes de mayo, contrajo matrimonio con Elizabeth Intveld, y aunque claramente es un evento importante en su vida personal, este hecho también marcaría un giro en cuando a su vida profesional, puesto que su esposa lo alentó fuertemente a dejar el trabajo astronómico y dedicarse a tiempo completo a las matemáticas. En el mes de septiembre, desde la Universidad de Delft se le pidió a Stieltjes que sustituyera a F.J. van den Berg, quien había caído enfermo, para ocupar su plaza en la enseñanza de la geometría. En el corto período de septiembre a diciembre impartió clases sobre geometría analítica y geometría descriptiva, y ello lo convenció en forma definitiva que el estudio de la matemática eran la única forma posible de valerse profesionalmente, por lo que presentó su renuncia el 1 de diciembre de 1883 al cargo de Asistente en el Observatorio.

En los primeros días de 1884 le ofrecieron un puesto en la cátedra de análisis en la Universidad de Groningen, cargo al que sin embargo debía concursar con otros postulantes. Y aunque era el primer candidato a ocupar el puesto, su falta de certificación académica lo privó de ello. El 13 de marzo de 1884 le escribió a Hermite: "*...La Facultad de Groningen me ha puesto en primer lugar para la vacante, pero el Ministro ha nombrado a uno de los otros. Probablemente la razón haya sido que no tuve ninguna posibilidad de seguir el camino estándar, ya que no he recibido ningún título de la Universidad"*.

Ese duro golpe no lo desanimó y en abril de 1885 a instancias de Hermite se muda con su familia a París, en el mismo año fue elegido miembro de la Real Academia de Ciencias de Amsterdam. En el año siguiente recibió su doctorado en ciencias por su tesis sobre series asintóticas y es nombrado profesor titular en la Universidad de Toulouse en la cátedra de cálculo.

Stieltjes trabajó en casi todas las ramas del análisis, fracciones continuas y teoría de números. Su trabajo sobre las fracciones continuas le valió el reconocimiento de sus pares y en 1893 la Academia de Ciencias de París lo galardonó con el Premio Ormoy.

Ese desarrollo queda plasmado cuando el 18 de junio 1894 publicó *"Recherches sur les fractions continues"* (Investigación sobre fracciones continuas), una obra profunda en la que menudo a Stieltjes se le considera, en virtud de ello, como el "padre de la teoría analítica de las fracciones continuas" por su valioso aporte en esta área.

El trabajo de Stieltjes también es visto como un primer paso importante hacia la teoría de los espacios de Hilbert. Su trabajo en series divergentes y funciones discontinuas fue notable y contribuyó además en el campo de las ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales, la función gamma, la interpolación y las funciones elípticas.

Thomas Stieltjes murió el 31 de diciembre de 1894 y fue enterrado en el cementerio de Terre Cabade, en Toulouse, el 2 de enero. Falleció a la temprana edad de 38 años recién cumplidos y lo une a Riemann, entre otras cosas, por el inestimable aporte al desarrollo de las matemáticas y su inesperada partida estando aún en la plenitud de sus capacidades intelectuales.

Capítulo 2. Definiciones y Principios Básicos

En el siguiente capítulo se presentan las definiciones y conceptos básicos mínimos necesarios para entender el concepto que da forma a la integral de Riemann, y posterior a ello ampliarlo luego a la generalización hecha por Stieltjes.

Definición 2.1. *Una función f tiende hacia el límite l en el punto a si para todo $\varepsilon < 0$ existe un $\delta > 0$, tal que para todo x, si $0 < |x - \mathrm{a}| < \delta$, entonces $|f(x) - l| < \varepsilon$, lo que se denota por $\lim_{x \to \mathrm{a}} f(x) = l$.*

Definición 2.2. *Una partición del intervalo $[\mathrm{a}, \mathrm{b}] \subset \mathbb{R}$ es un conjunto finito y ordenado $\{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$ de puntos en $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$ que satisfacen lo siguiente:*

$$\mathrm{a} = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = \mathrm{b}$$

Denotaremos la partición P por $P = \{x_i\}_{i=0}^{n}$, que reescrito para su mejor comprensión se puede leer del siguiente modo:

$$P = \{x_i\}_{i=0}^{n} = \{\mathrm{a} = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = \mathrm{b}\}$$

y llamaremos a los elementos x_i puntos de la partición. Cuando una partición P' contiene los puntos de P, diremos que P' es un refinamiento de P y lo denotaremos por $P \subset P'$, es decir, la partición P' es más fina que P, o un afinamiento de P. Así que, $P \subset P'$ implica que $|P'| \leq |P|$, pero el recíproco no es cierto.

Si para cada intervalo de la partición P elegimos un punto $t_k \in [x_{i-n}, x_i]$ diremos que P es una "partición etiquetada", es decir, un intervalo identificado con t_i, y la denotaremos por la expresión $P = \{t_i, [x_{i-1}, x_i]\}_{i=1}^{n}$. El símbolo $\Delta\alpha_k$ expresa lo siguiente:

$$\Delta\alpha_k = \alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1}),$$

de modo que esa diferencia en cada longitud se puede entender como la variación del $k - \acute{e}simo$ subintervalo, expresado en la sumatoria de tales diferencias como:

$$\sum_{k=1}^{n} \Delta\alpha_k = \alpha(\mathrm{b}) - \alpha(\mathrm{a})$$

Definición 2.3. Sea $P = \{t_k, [x_{k-1}, x_k]\}_{k=1}^{n}$ *una partición de* $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$. *Lo anterior se puede expresar para su mejor comprensión con la siguiente definición: Sea $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ una partición del intervalo $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$ y sea t_k un punto del subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$. Una suma de la siguiente forma:*

$$S(f, P, \alpha) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\, \Delta\alpha_k,$$

Se denomina una *suma de Riemann-Stieltjes de la función f con respecto a la función α.*

Diremos que una función f es Riemann integrable con respecto a la función α en el intervalo $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$, y se describe "$f \in \Re(\alpha)\ en\ [\mathrm{a}, \mathrm{b}]$" si existe un número A con la siguiente propiedad: dado un $\varepsilon > 0$ existe una partición P_ε de $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$ tal que para toda partición P más fina que P_ε y para todo t_k en $[x_{k-1}, x_k]$, tenemos:

$$|S(f, P, \alpha) - A| < \varepsilon$$

Siempre que P es una partición etiquetada que refina P_ε. Cuando dicho número A existe, está determinado de manera única y será denotado por $\int_{\mathrm{a}}^{b} f\, d\alpha$. En este caso, decimos que la integral de Riemann-Stieljtes existe y escribimos $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ en $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$.

Observación: *$\mathcal{R}$ representa el conjunto de las funciones integrables según Riemann, pero para evitar confundir al lector con la notación $\mathbb{R}$ del conjunto de los reales, en lo sucesivo se reemplazará por la letra $\mathfrak{R}$.*

Nos referiremos a las funciones $\boldsymbol{f}$ y $\boldsymbol{\alpha}$ como el integrando y el integrador respectivamente.

En el caso particular en que $\alpha(x) = x$, la integral se llama simplemente integral de Riemann y se denota $\int_{\mathrm{a}}^{b} f\, dx$, o bien por $\int_{\mathrm{a}}^{b} f(x)\, dx$ y se escribe $S(P, f)$ en vez de $S(P, f, \alpha)$. Un alcance importante es que según la literatura que se consulte, el valor numérico de la integral $\int_{\mathrm{a}}^{b} f(x)\, d\alpha(x)$ no depende de x, siendo ésta una "variable ficticia" que puede ser reemplazada por el símbolo más conveniente según el caso, pero sí depende y únicamente de las variables $f, \alpha,$ a y b.

Las principales propiedades de la integral de Riemann-Stieltjes se presentan en los teoremas del siguiente capítulo. Debemos considerar además que la integral de Riemann-Stieltjes es lineal en ambos, integrando e integrador.

Teorema 2.4. *Si f es continua en $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$, entonces f es Riemann integrable en $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$.*

Demostración: Supongamos que f es continua en $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$ y además $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$ es cerrado y acotado, es decir compacto, entonces f es uniformemente continua, por tanto, dado un $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para todo x e y de $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$, tenemos:

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{3(\mathrm{b} - \mathrm{a})}\ ,$$

tomemos una partición $P = \{x_0, x_1, \dots, x_\eta\}$ del intervalo $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$ con $n \in \mathbb{N}$;

dado que $n > \frac{\mathrm{b}-\mathrm{a}}{\delta}$, entonces $\delta > \frac{b-\mathrm{a}}{\delta}$,

tenemos que x, y en (x_{i-1}, x_i) tal que,

$$f(x) > M_i - \frac{\delta}{3(\mathrm{b} - \mathrm{a})}$$

$$f(y) < m_i + \frac{\varepsilon}{3(\mathrm{b} - \mathrm{a})}$$

se tiene que $|x - y| < (x_i - x_{i-1}) = \frac{\mathrm{b}-\mathrm{a}}{n}$, así ,

$$f(x) - f(y) < \frac{\varepsilon}{3(\mathrm{b} - \mathrm{a})}$$

$$M_i - \frac{\varepsilon}{3(\mathrm{b} - \mathrm{a})} - m_i\, \frac{\varepsilon}{3(\mathrm{b} - \mathrm{a})} < f(x) - f(y) < \frac{\varepsilon}{3(\mathrm{b} - \mathrm{a})}$$

$$M_i - \frac{\varepsilon}{3(\mathrm{b} - \mathrm{a})} - m_i \frac{\varepsilon}{3(\mathrm{b} - \mathrm{a})} < \frac{\varepsilon}{3(\mathrm{b} - \mathrm{a})}$$

$$M_i - m_i < \frac{\varepsilon}{3(\mathrm{b}-\mathrm{a})} + \frac{\varepsilon}{3(\mathrm{b}-\mathrm{a})} + \frac{\varepsilon}{3(\mathrm{b}-\mathrm{a})}$$

$$M_i - m_i < \frac{3\varepsilon}{3(\mathrm{b}-\mathrm{a})}$$

$$M_i - m_i = \frac{\varepsilon}{(\mathrm{b}-\mathrm{a})},$$

Luego, para todo i tenemos que:

$$U(f,P) - L(f,P) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\,(x_i - x_{i-1})$$

$$< \frac{\varepsilon}{(\mathrm{b}-\mathrm{a})} \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})$$

$$= \frac{\varepsilon}{(\mathrm{b}-\mathrm{a})} \cdot (\mathrm{b}-\mathrm{a})$$

$$= \varepsilon \qquad\qquad qed$$

Nota: En el desarrollo de los siguientes capítulos, en algunas ocasiones aparecen escritas las expresiones $integral\ de\ Riemann$ y de $Riemann\text{-}Stieltjes$ respectivamente, con frecuencia en un espacio de texto breve. Para evitar la redundancia, se reemplazará el uso de $integral\ de\ Riemann\text{-}Stieltjes$ por el de $integral\ de\ Stieltjes$, que es absolutamente equivalente.

Capítulo 3. Integral de Riemann

En el estudio de la integral de Riemann, una referencia importante a considerar es que su desarrollo se hace sobre espacios acotados, por lo que enseguida debemos pensar en una integral definida. A pesar del enorme salto en el desarrollo cualitativo y cuantitativo de la matemática que significó el descubrimiento de la herramienta del cálculo por Newton y Leibniz, la rigurosidad de la misma estaba entredicho a pesar de los métodos de integración desarrollado por ambos y de su enfoque sistemático. Aún debieron pasar casi 200 años hasta que Bernhard Riemann estableciera los cimientos que le daban la rigurosidad necesaria para poder ser formalizada, en una publicación de 1854. Caracterizada desde un comienzo por lo intuitivo en cuando a su uso, en el desarrollo de los teoremas se nota la enorme influencia de Dirichlet sobre Riemann en cuanto a evitar hacer de las demostraciones, largos y complejos cálculos matemáticos. Lo hecho por Riemann fue un primer paso serio en sentar las bases, posteriores generalizaciones evitaron algunas situaciones que la integral de Riemann no podía solucionar. En este capítulo y a modo de introducción al tema de estudio, comenzaremos por entregar algunas definiciones necesarias que nos servirán para el desarrollo de éste y el próximo capítulo y que serán útiles para comprender mejor la demostración de los teoremas.

Definición 3.1. *Sea* $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$ *un intervalo cerrado cualquiera. Definimos una partición* P *de dicho intervalo como un subconjunto finito de puntos* $x_0, x_1, \ldots, x_n$*, donde:*

$$\boldsymbol{P} = \{\mathrm{a} = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n = \mathrm{b}\}$$

y además, $x_{i-1} < x_i$, para todo $i = 1, 2, \ldots, n$.

El conjunto de todas las particiones de $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$ lo indicamos como $P([\mathrm{a}, \mathrm{b}])$. Una partición como la indicada divide al intervalo $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$ en n subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$, cada uno de longitud $x_i - x_{i-1}$.

Luego, el $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, con $i = 1, 2, \ldots, n$.

De todos los valores del subintervalo x_n escogidos, se pueden encontrar multitud de sumas de Riemann y todas ellas relacionadas, independendiente de la parte del intervalo tomado, a la misma función.

Junto con la partición P elegimos para cada $i = 1, 2, \ldots, n$ los correspondientes puntos intermedios $c_i \in (x_{i-1}, x_i]$. Podemos ver el detalle en la siguiente figura:

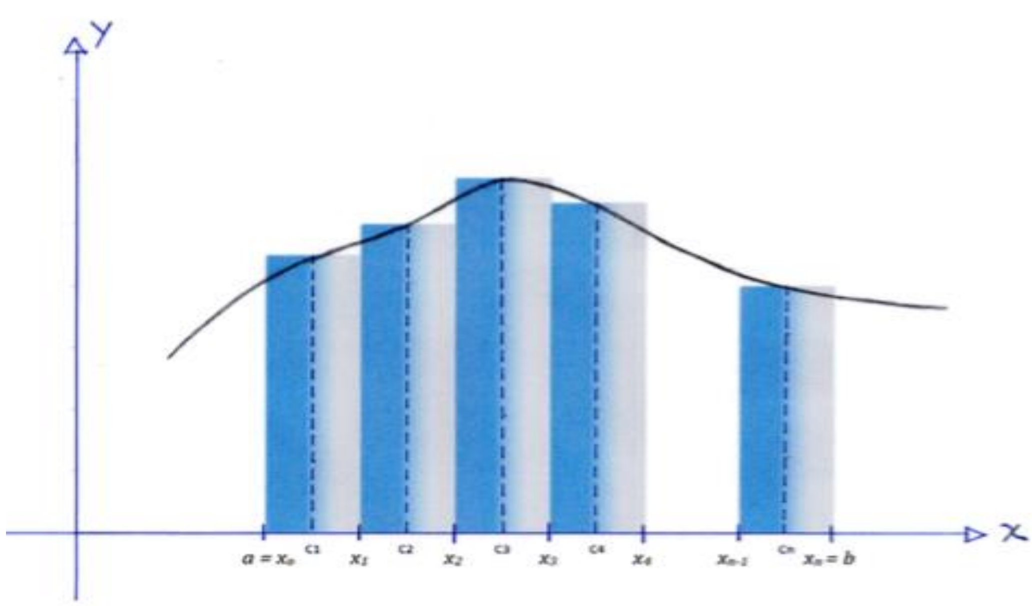


Figura 1: Partición de un intervalo

<u>Definición 3.2.</u> *Dada una partición P del intervalo $[\mathrm{a},\mathrm{b}]$, definimos como la norma de la partición al segmento de longitud más grande de dicho intervalo:*

$$\|P\| = \text{máx}\,\{x_i - x_{i-1}\}, \qquad para\ todo\ i = 1,2,\ldots,n$$

es decir, consideramos la norma infinito $\| \quad \|_\infty$. (el lector fácilmente puede deducir que a más particiones, más exacto es el resultado de calcular un área).

Sea f es una función real definida y acotada en $[\mathrm{a},\mathrm{b}]$ (que f sea una función definida y acotada en el intervalo $[\mathrm{a},\mathrm{b}]$ significa que $[\mathrm{a},\mathrm{b}] \subseteq Dom(f)$, es decir, $f(x)$ existe $\forall\ x \in [\mathrm{a},\mathrm{b}]$), y sea $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ *una partición de $[\mathrm{a},\mathrm{b}]$. Como f es acotada en $[\mathrm{a},\mathrm{b}]$, también lo es para cada subintervalo $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ de P, luego podemos definir el mínimo y el máximo como:*

$$m_i = \text{ínf}\,\{f(x)\ /x \in [x_{i-1}, x_i]\}, \qquad (donde\ x_{i-1} \leq x \leq x_i)$$

y también:

$$M_i = sup\,\{f(x)\ /x \in [x_{i-1}, x_i]\}, \qquad (donde\ x_{i-1} \leq x \leq x_i)$$

<u>Observación:</u> La existencia de $m_i(f)$ y de $M_i(f)$ está garantizada por ser f una función acotada en $[x_{i-1}, x_i]$.

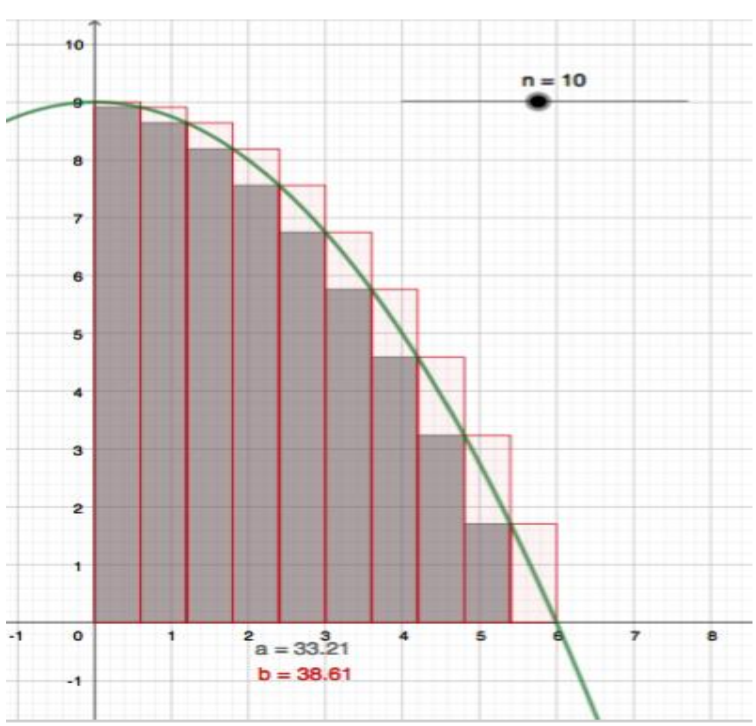
<u>Definición 3.3.</u> *(Sumas inferior y superior) La suma inferior y superior de f con respecto a P están dados respectivamente por:*

$$I(f,P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(\,x_i - x_{i-1})$$

$$S(f,P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(\,x_i - x_{i-1})$$

- **<u>Interpretación Geométrica:</u>**

  Si $f(x) \geq 0\ \ \forall\, x \in [\mathrm{a},\mathrm{b}]$, entonces las sumas superior e inferior de la función f tienen una interpretación geométrica sencilla. $I(f,P)$ corresponde al área de los rectángulos inscritos. Mientras que $S(f,P)$ es el área de los rectángulos circunscritos. (*Figura 2*)



Definición 3.4. *(Integral inferior y superior). Definimos la integral inferior de f como:*

$$\underline{\int_{a}^{b}} f(x)\,dx = sup\ I(f,P)$$

y análogamente a la integral superior de f como:

$$\overline{\int_{a}^{b}} f(x)\,dx = inf\ S(f,P)$$

Definición 3.5. *(Integral de Riemann) Si las integrales superior e inferior son iguales, decimos que f es Riemann integrable en el intervalo $[\mathrm{a},\mathrm{b}]$ y la escribimos como $f \in \Re$ ($\Re$ representa el conjunto de todas las funciones Riemann integrables):*

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx$$

Como f es función acotada, existen dos números, m y M, tales que:

$$m = \acute{\imath}nf\{f(x)\ /\ x \in [\mathrm{a},\mathrm{b}]\}$$

$$M = sup\{f(x)\ /\ x \in [\mathrm{a},\mathrm{b}]\ \}$$

Es claro que para $\forall i = 1, \ldots, n$ se tiene que:

$$m \leq m_i(f(x)) \leq M_i(f(x)) \leq M, \qquad \textit{para } \mathrm{a} \leq x \leq \mathrm{b}$$

Luego:

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}\ \ m(x_i - x_{i-1}) \leq m_i(f)(x_i - x_{i-1}) \leq M_i(f)(x_i - x_{i-1}) \leq M(x_i - x_{i-1})$$

De aquí que para cualquier partición P, sumando desde $i = 1$ hasta $i = n$ tenemos que:

$$m(\mathrm{b}-\mathrm{a}) \leq I(f,P) \leq S(f,P) \leq M(\mathrm{b}-\mathrm{a})$$

Como P es una partición cualquiera, se concluye entonces que las sumas de los números $I(f,P)$ y $S(f,P)$ también forman parte de un conjunto acotado y con esto se demuestra que las integrales inferior y superior están definidas para toda función acotada f (por la definición 3.4.)

Ejemplo: Determinar el área bajo la curva en el intervalo de $\mathrm{a} = 0$ y $\mathrm{b} = x > 0$, para la función $f(x) = x^2$.

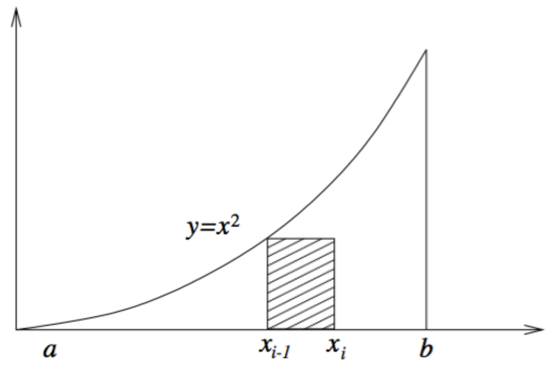
- Paso 1: Como el ejercicio no nos entrega el dato del número de intervalos, sea entonces n el número que dividirá al intervalo $[0,\mathrm{b}]$, por lo tanto, cada "parte" tiene una longitud $h = {}^{\mathrm{b}}/_{n}$. Si a cada punto de la división llamamos como un x_i, tenemos que:

  $$x_i = i\left(\frac{\mathrm{b}}{n}\right)$$

  Se ha dividido $[0,\mathrm{b}]$ en n subintervalos $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ de longitud h cada uno.

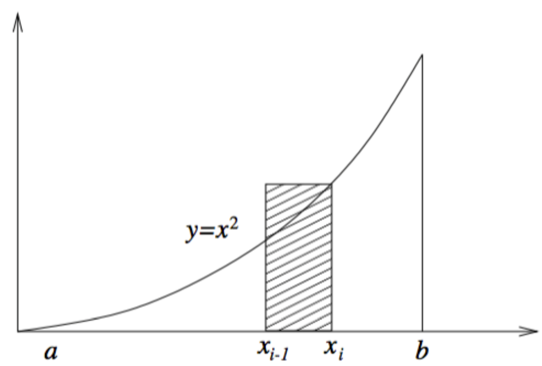
- Paso 2: Se extiende un rectángulo inscrito bajo la curva en cada intervalo I_i lo más alto posible. Cada uno de los cuales posee las siguientes características:

Base	h
Altura	$f(x_{i-1})$
Área	$= \quad h \cdot f(x_{i-1})$ $= \frac{\mathrm{b}}{n} \cdot \left((i-1)\frac{\mathrm{b}}{n}\right)^2 = \left(\frac{\mathrm{b}}{n}\right)^3 \cdot (i-1)^2$



- Paso 3: Se replica el procedimiento anterior y en cada intervalo se levanta un rectángulo circunscrito a la curva de la función, de la menor altura posible. Cada $i - \acute{e}simo$ rectángulo posee las siguientes características:

Base	h
Altura	$f(x_i)$
Área	$= \quad h \cdot f(x_{i-1})$ $= \quad \frac{\mathrm{b}}{n} \cdot \left(i \cdot \frac{\mathrm{b}}{n}\right)^2 = \left(\frac{\mathrm{b}}{n}\right)^3 \cdot (i)^2$



- Paso 4: Con la construcción gráfica se puede apreciar claramente que el área que se desea calcular está acotada como sigue:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\mathrm{b}}{n}\right)^3 \cdot (i-1)^2 \leq A \leq \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\mathrm{b}}{n}\right)^3 \cdot (i)^2$$

Las sumatorias se calculan recordando que:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

De este modo tenemos:

$$\sum_{i=1}^{n} (i-1)^2 = \sum_{i=0}^{n-1} i^2 = \sum_{i=1}^{n-1} i^2 = \frac{(n-1)\,n\,(2n-1)}{6}.$$

Luego las cotas buscadas para el área A son:

$$\frac{\mathrm{b}^3}{6} \cdot \frac{(n+1)(2n-1)}{n^2} \;\leq\; A \;\leq\; \frac{\mathrm{b}^3}{6} \cdot \frac{(n+1)(2n+1)}{n^2}$$

La desigualdad presentada es válida para todo $n \in \mathbb{R}$, por lo tanto, dejando a un lado la expresión geométrica, se puede pensar en una sucesión en los $\mathbb{R}$, tal que si tomamos el límite de la sucesión cuando $n \longrightarrow \infty$, se tiene que:

$$\frac{\mathrm{b}^3}{3} \;\leq\; A \;\leq\; \frac{\mathrm{b}^3}{3},$$

Por lo tanto, el área A buscada es:

$$A = \frac{\mathrm{b}^3}{3}$$

Capítulo 4. Integral de Riemann-Stieltjes

Después de la formulación de la integral de Riemann se intentaron varias generalizaciones y una de las más exitosas fue la llamada integral de Riemann-Stieltjes, en honor de quien la desarrolló, el matemático holandés Thomas J. Stieltjes, quien la publicó en 1894. A diferencia de Riemann, Stieltjes trabaja con dos funciones, $\boldsymbol{f}$ y $\boldsymbol{\alpha}$, que llama *integrando* e *integrador,* $f(x)$ y $\alpha(x)$ respectivamente, donde de las sumas por diferencia del integrador de $\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})$ se obtienen los valores que permitirán resolver una integral. De esta transformación entre las sumas de Riemann por las diferencias de α, se obtiene un diferencial $\Delta\alpha_x$, tal que la función cumple que $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}$. La notación habitual con el que se le reconoce es:

$$\int_{\mathrm{a}}^{b} f(x)\, d\alpha(x), \qquad o\ bien\ por\ este{:}\ \int_{\mathrm{a}}^{b} f\, d\alpha$$

Cualquiera de ambos a alguno similar son aceptados. Una situación especial se da cuando la integral de Riemann se presenta como $\alpha(x) = x$, ocurre entonces que si la función α tiene derivada continua, por la definición se cumple que la integral de Stieltjes $\int_{\mathrm{a}}^{b} f(x)\, d\alpha(x)$ se transforma en una de Riemann $\int_{\mathrm{a}}^{b} f(x)\alpha'(x)dx$, mientras que la notación de la diferencial $d\alpha(x)$ puede entenderse como el diferencial $\alpha'(x)\, dx$. La importancia de la integral de Stieltjes se hace manifiesta cuando se presentan casos tales que la función no tiene derivada o bien esta se comporta de forma discontinua, su uso en la teoría de las probabilidades lo hace una poderosa herramienta cuando se trabajan con variables que son en parte discretas y en parte continuas. De hecho, tal como lo expresa Tom Apostol (Análisis matemático, pág. 185) [2], la clave será siempre tomar "*... una elección adecuada de una función discontinua α, puesto que una suma finita o infinita puede expresarse como una integral de Stieltjes, y la sumación y la integración Riemann ordinaria llegan a ser entonces casos particulares de este proceso más general.*" Su alcance en el campo de la física y los problemas que se abordan es muy amplio pero escapan al desarrollo del presente trabajo. Sin embargo, hay que dejar presente que la generalización de Stieltjes no explica todos los problemas que la integral de Riemann no podía solucionar, pero es el primer paso serio en remediar esas dificultades y que terminan casi por desaparecer con una generalización aún más amplia en base a la teoría de Stieltjes, la integral de Lebesgue.

A continuación presentaremos los teoremas y sus demostraciones que dan forma a la integral de Stieltjes, concepto más general que las del capítulo anterior dedicado a Riemann. Existen varios enfoques para estudiar y evaluar las integrales, siendo alguna de ellas la linealidad, integración por partes, cambio de variables, entre otras.

4.1. Propiedades Lineales

En la integral de Riemann-Stieltjes decimos que conserva la linealidad respecto al integrando y al integrador, es decir, satisface los contenidos de los dos próximos teoremas.

Teorema 4.1.1. *Sean $f, g\colon \rightarrow \mathbb{R}$, si la función $f \in \Re(\alpha)$ y la función $g \in \Re(\alpha)$* en el intervalo $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$, *entonces $c_1 f + c_2 g \in \Re(\alpha)$ en* $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$ *para cualesquiera de las constantes c_1 y c_2, y tenemos:*

$$\int_{a}^{b}(c_1 f + c_2 g)\, d\alpha = c_1 \int_{a}^{b} f\, d\alpha + c_2 \int_{a}^{b} g\, d\alpha$$

Demostración: Sea $h = c_1 f + c_2 g$, y P una partición cualquiera del intervalo $[a, b]$, se puede escribir:

$$S(P, c_1 f + c_2 g, \alpha) = S(P, h, \alpha) = \sum_{i=1}^{n} h(t_k)\, \Delta\alpha_k$$

$$= \sum_{i=1}^{n} c_1\, f(t_k)\, \Delta\alpha_k + \sum_{i=1}^{n} c_2\, g(t_k)\, \Delta\alpha_k$$

$$= c_1 \sum_{i=1}^{n} f(t_k)\, \Delta\alpha_k + c_2 \sum_{i=1}^{n} g(t_k)\, \Delta\alpha_k$$

$$= c_1 S(P, f, \alpha) + c_2 S(P, g, \alpha)$$

Dado un valor $\varepsilon > 0$, tomemos una partición P_ε' tal que $P_\varepsilon' \subset P$ implique que:

$$\left| S(P, f, \alpha) - \int_{a}^{b} f\, d\alpha \right| < \varepsilon$$

Tomando una partición P_ε'' tal que $P_\epsilon'' \subset P$ implique que:

$$\left| S(P, g, \alpha) - \int_{a}^{b} g\, d\alpha \right| < \varepsilon$$

Luego, sea $P_\varepsilon = P_\varepsilon' \cup P_\varepsilon''$, entonces para una P más fina que P_ε se tiene que:

$$\left| S(P, h, \alpha) - c_1 \int_{a}^{b} f\, d\alpha - c_2 \int_{a}^{b} g\, d\alpha \right| \le |c_1|\varepsilon + |c_2|\varepsilon$$

$$qed$$

Teorema 4.1.2. *Si* $f \in \Re(\alpha)$ *y* $f \in \Re(\beta)$ en $[a, b]$, *entonces* $f \in \Re(c_1\alpha + c_2\beta)$ *en* $[a, b]$ *para cualesquiera par de constantes* c_1 *y* c_2, *y se tiene que:*

$$\int_{a}^{b} f\, d(c_1\alpha + c_2\beta) = c_1 \int_{a}^{b} f\, d\alpha + c_2 \int_{a}^{b} f\, d\beta$$

Demostración: Tómese un $\lambda = c_1\alpha + c_2\beta$ y una partición P cualquiera del intervalo $[a, b]$, tenemos que:

$$S(P, f, \lambda) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\, \Delta\lambda_k = c_1 \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\, \Delta\alpha_k + c_2 \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\, \Delta\beta_k$$

$$= c_1 S(P, f, \alpha) + c_2 S(P, f, \beta)$$

Dado un $\varepsilon > 0$, elijamos un P_ε' tal que $P \supseteq P_\varepsilon'$ implique que:

$$\left|S(P,f,\alpha) - \int_a^b f\,d\alpha\right| < \varepsilon,$$

y ahora tómese un P_ε'' tal que $P \supseteq P_\varepsilon''$ implique que:

$$\left|S(P,f,\beta) - \int_a^b f\,d\beta\right| < \varepsilon.$$

Si se toma $P_\varepsilon = P_\varepsilon' \cup P_\varepsilon''$, se tiene que para una P más fina que P_ε, entonces:

$$|S(P,f,\alpha) + S(P,f,\beta) - A| \leq |c_1|\varepsilon + |c_2|\varepsilon$$

$$\Rightarrow \left|S(P,f,\alpha) + S(P,f,\beta) - (c_1\int_a^b f\,d\alpha + c_2\int_a^b f\,d\beta\right| \leq |c_1|\varepsilon + |c_2|\varepsilon$$

$$\Rightarrow \left|S(P,f,\lambda) - \left(c_1\int_a^b f\,d\alpha + c_2\int_a^b f\,d\beta\right)\right| \leq |c_1|\varepsilon + |c_2|\varepsilon$$

Pero como $\left|S(P,f,\lambda) - \int_a^b f\,d\lambda\right| \leq |c_1|\varepsilon + |c_2|\varepsilon$ y por la definición 2.3. de la integral de Riemann-Stieltjes $\int_a^b f\,d\lambda$ es único y se obtiene que:

$$\int_a^b f\,d\lambda = c_1\int_a^b f\,d\alpha + c_2\int_a^b f\,d\beta$$

$$\Leftrightarrow \int_a^b f\,d(c_1\alpha + c_2\beta) = c_1\int_a^b f\,d\alpha + c_2\int_a^b f\,d\beta \qquad qed$$

<u>Teorema 4.1.3.</u> *Sea* $c \in (a,b)$. *Si dos de las tres integrales de* 1) *existen, entonces la tercera también existe y se tiene que:*

$$\int_a^c f\,d\alpha + \int_c^b f\,da = \int_a^b f\,d\alpha \qquad 1)$$

<u>Demostración:</u> Tomando P una partición de $[a,b]$, con $c \in P$, sea $P' = P \cap [a,c]$ y $P'' = P \cap [c,b]$ donde P' es una partición de $[a,c]$ y P'' una partición de $[c,b]$ respectivamente, por definición de las sumas de Riemann-Stieltjes se tiene la siguiente igualdad:

$$S(P,f,\alpha) = S(P',f,\alpha) + S(P'',f,\alpha)$$

$i)$ Suponiendo que $\int_a^c f\,d\alpha$ existe y $\int_c^b f\,d\alpha$ también, entonces dado un $\varepsilon > 0$ existe una partición P_ε' de $[a,c]$ tal que $P' \supseteq P_\varepsilon'$ se tiene que:

$$\left|S(P',f,\alpha) - \int_a^c f\,d\alpha\right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad , \qquad (1)$$

y dado que existe un P_ε'' del intervalo $[c,b]$, tal que $P'' \supseteq P_\varepsilon''$, entonces se tiene que:

$$\left|S(P'',f,\alpha) - \int_c^b f\,d\alpha\right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad , \qquad (2)$$

Ahora si $P_\varepsilon = P_\varepsilon' \cup P_\varepsilon''$ es una partición de $[a,b]$ tal que P es una partición más fina P_ε, combinando (1) y (2) tenemos que:

$$\left|S(P',f,\alpha)+S(P'',f,\alpha)-\int_{\mathrm{a}}^{c} f\,d\alpha-\int_{c}^{b} f\,d\alpha\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}$$

lo cual implica que:

$$\left|S(P,f,\alpha)-\int_{\mathrm{a}}^{c} f\,d\alpha-\int_{c}^{b} f\,d\alpha\right|<\varepsilon$$

y por la definición de la integral de Riemann-Stieltjes, resulta:

$$\int_{\mathrm{a}}^{c} f\,d\alpha=\int_{\mathrm{a}}^{c} f\,d\alpha+\int_{c}^{b} f\,d\alpha$$

$ii)$ Suponiendo la existencia de la $\int_{\mathrm{a}}^{b} f\,d\alpha$ y la $\int_{\mathrm{a}}^{c} f\,d\alpha$, entonces dado un $\varepsilon>0$ existe una partición P_ε del intervalo $[\mathrm{a},\mathrm{b}]$ tal que si $P\supseteq P_\varepsilon$, se tiene que:

$$\left|S(P,f,\alpha)-\int_{\mathrm{a}}^{b} f\,d\alpha\right|<\varepsilon \qquad (3)$$

y dado que existe una partición P_ε' del intervalo $[\mathrm{a},c]$ tal que si $P'\supseteq P_\varepsilon'$ se tiene la igualdad (1). Si $P_\varepsilon''=P_\varepsilon-P_\varepsilon'$ es una partición del intervalo $[c,\mathrm{b}]$ tal que $P''\supseteq P_\varepsilon''$, combinando las igualdades (1) y (3) se tiene que:

$$\left|S(P,f,\alpha)-S(P',f,\alpha)-\int_{\mathrm{a}}^{b} f\,d\alpha+\int_{\mathrm{a}}^{c} f\,d\alpha\right|<\varepsilon-\frac{\varepsilon}{2}\ ,$$

lo cual implica que:

$$\left|S(P'',f,\alpha)-\int_{\mathrm{a}}^{b} f\,d\alpha+\int_{\mathrm{a}}^{c} f\,d\alpha\right|<\frac{\varepsilon}{2}\ ,$$

y por la definición de la integral de Riemann-Stieltjes, se tiene que:

$$\int_{c}^{b} f\,d\alpha=\int_{\mathrm{a}}^{b} f\,d\alpha-\int_{\mathrm{a}}^{c} f\,d\alpha$$

$iii)$ Suponiendo la existencia de la $\int_{\mathrm{a}}^{b} f\,d\alpha\ y \int_{c}^{b} f\,d\alpha$, entonces dado un $\varepsilon>0$ existe una partición P_ε del intervalo $[\mathrm{a},\mathrm{b}]$ tal que si $P\supseteq P_\varepsilon$ se tiene la igualdad (3) y existe una partición P_ε'' del intervalo $[c,b]$ tal que si $P''\supseteq P_\varepsilon''$ se tiene la igualdad (2). Por otro lado, si $P_\varepsilon'=P_\varepsilon-P_\varepsilon''$ una partición del intervalo $[\mathrm{a},c]$ tal que $P'\supseteq P_\varepsilon'$, combinando las igualdades (2) y (3) se tiene que:

$$\left|S(P,f,\alpha)-S(P'',f,\alpha)-\int_{\mathrm{a}}^{b} f\,d\alpha+\int_{c}^{b} f\,d\alpha\right|<\varepsilon\ -\ \frac{\varepsilon}{2}\ ,$$

lo cual implica que:

$$\left|S(P',f,\alpha)-\int_{\mathrm{a}}^{b} f\,d\alpha+\int_{c}^{b} f\,d\alpha\right|<\ \frac{\varepsilon}{2}\ ,$$

y por la definición 1.2. de la integral de Riemann-Stieltjes, se tiene que:

$$\int_{\mathrm{a}}^{c} f\,d\alpha=\int_{\mathrm{a}}^{b} f\,d\alpha-\int_{c}^{b} f\,d\alpha \qquad qed$$

Es decir, esto prueba que $\int_{\mathrm{a}}^{b} f\,d\alpha$ existe y es igual a $\int_{\mathrm{a}}^{c} f\,d\alpha+\int_{c}^{b} f\,d\alpha$ $\qquad qed$

4.2. Integración por Partes

En la integral de Riemann-Stieltjes existe una notable relación entre el integrando $f(x)$ y el integrador $\alpha(x)$. La existencia de $\int_{\mathrm{a}}^{b} f\, d\alpha$ implica la existencia de $\int_{\mathrm{a}}^{b} \alpha\, df$, y el recíproco también es cierto, es decir, *"si existe la integral según Riemann-Stieltjes de $f(x)$ con respecto a $\alpha(x)$, también existe la integral según Riemann-Stieltjes de $\alpha(x)$ respecto de $f(x)$ en el mismo intervalo* $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$*"*. Entre ambas integrales se verifica una relación interesante que expresa una cierta ley de reciprocidad para la integral, que se le conoce con el nombre de integración por partes y que se cumple en el siguiente teorema.

<u>Teorema 4.2.1.</u> *Si $f \in \Re(\alpha)$ en $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$, entonces $\alpha \in \Re(f)$ en $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$ y se cumple que:*

$$\int_{\mathrm{a}}^{b} f(x)\, d\alpha + \int_{\mathrm{a}}^{b} \alpha(x)\, df = f(b)\alpha(b) - f(\mathrm{a})\, \alpha(\mathrm{a}).$$

La integral de Riemann-Stieltjes puede ser tratada mediante sumas superiores e inferiores al igual que la integral de Riemann.

<u>Observación:</u> La integral $\int_{\mathrm{a}}^{b} f\, d\alpha$ o bien $\int_{\mathrm{a}}^{b} f(x)\, d\alpha$ representan lo mismo

<u>Demostración:</u> Sea un $\varepsilon > 0$ un número real cualquiera. Como $\int_{\mathrm{a}}^{b} f\, d\alpha$ existe, entonces se tendrá una partición P_ε de $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$ tal que para toda $P' \supseteq P_\varepsilon$ (P' $más\ fina\ que\ P_\varepsilon$) se tiene que:

$$\left| S(P', f, \alpha) - \int_{\mathrm{a}}^{b} f\, d\alpha \right| < \varepsilon \qquad (1)$$

Tómese una suma cualquiera de R-Stieltjes para la $\int_{\mathrm{a}}^{b} \alpha\, df$, entonces se tiene que:

$$S(P, f, \alpha) = \sum_{k=1}^{n} \alpha(t_k)\, \Delta f(x_k) \qquad (2)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \alpha(t_k)\, f(x_k) - \sum_{k=1}^{n} \alpha(t_k)\, f(x_{k-1}),$$

y se tiene que P es más fino que P_ε. Escribiendo $A = f(b)\alpha(b) - f(\mathrm{a})\alpha(\mathrm{a})$, se obtiene la siguiente identidad:

$$A = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\, \alpha(x_k) - \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})\, \alpha(x_{k-1}) \qquad (3)$$

Restando las dos igualdades, (1) de (3), se tiene que:

$$A - S(P, \alpha, f) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\, \alpha(x_k) - \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})\, \alpha(x_{k-1})$$
$$- \sum_{k=1}^{n} \alpha(t_k)\, f(x_k) + \sum_{k=1}^{n} \alpha(t_k)\, f(x_{k-1})$$

$$= \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\, [\alpha(x_k) - \alpha(t_k)] + \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})\, [\alpha(t_k) - \alpha(x_{k-1})]$$

Si se hace $P' = \{t_0, x_0, t_1, x_1, t_2, x_2, \ldots., t_n, x_n\}$ las dos sumas pueden considerarse en una sola de la forma $S(P', f, \alpha)$, donde $P' \supseteq P \supseteq P_\varepsilon$. Por lo cual, si se cumple la ecuación (1), se tiene que:

$$\left| A - S(P, \alpha, f) - \int_{\mathrm{a}}^{b} f\, d\alpha \right| < \varepsilon$$

siempre que P sea más fina que P_ε, asegurando de esta manera la existencia de $\int_{\mathrm{a}}^{b} \alpha\, df$, la cual es:

$$A - \int_{\mathrm{a}}^{b} f\, d\alpha \qquad\qquad qed$$

4.3. Cambio de Variable

El método de cambio de variable es una herramienta necesaria cuando dada la dificultad que plantea el desarrollo de una integral, sea que ésta no tenga una primitiva inmediata o bien porque la estructura de la expresión requiera simplificar los términos mediante una variable auxiliar y hacer la integral más sencilla, se deba ocupar un método de cambio de variable o sustitución y transformar la integral original, que no tiene primitiva, en una integrable inmediata o mediante funciones compuestas. La dificultad sin embargo, radica en ser capaz de tener la imaginación de hacer la elección correcta de la variable puesto que lo que se desea obtener es una integral más simple con la derivación de la función compuesta. A continuación se enuncia un importante teorema sobre cambio de variable en una integral de Riemann-Stieltjes que nos permite encontrar esas integrales de funciones cuando las mismas no son primitivas o de integración inmediata, a saber.

Teorema 4.3.1. *Sea la función $f \in \Re(\alpha)$ en $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$ y sea la función g continua y estrictamente monótona definida en un intervalo S de extremos c y d. Supongamos que $\mathrm{a} = g(c)$ y que $b = g(d)$. Definimos las funciones h y β como las funciones compuestas tales que $h(x) = f[g(x)]$ y que $\beta(x) = \alpha[g(x)]$, con $x \in S$. Entonces $h \in \Re(\beta)$ en S y tenemos que:*

$$\int_{\mathrm{a}}^{b} f\, d\alpha = \int_{c}^{d} h\, d\beta$$

Demostración: Supongamos que la función g es estrictamente creciente en el intervalo S, con $c < d$. Por lo tanto g es una función inyectiva, es decir, es uno a uno y posee función inversa g^{-1} continua y creciente en el intervalo $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$. Por lo cual, a cada partición $P = \{y_0, y_1, \ldots, y_n\}$ en el intervalo $[c, d]$ le corresponde una única partición $P' = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ en el intervalo $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$, siendo $x_k = g(y_k)$, pudiendo reescribirse la partición P' como $P' = g(P)$, y $P = g^{-1}(P')$, por lo pronto, un refinamiento de P produce un refinamiento en P', y el recíproco es cierto, que la partición P' produce un refinamiento en P.

Dado un valor $\varepsilon > 0$, existe una partición P'_ε en el intervalo $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$ tal que dada una partición P' mas fina que P'_ε implica que $\left| S(P', f, \alpha) - \int_{\mathrm{a}}^{b} f\, d\alpha \right| < \varepsilon$.

Sea $P_\varepsilon = g^{-1}(P'_\varepsilon)$ la partición correspondiente y sea $P = \{y_0, y_1, \ldots, y_n\}$, ambas particiones en $[c, d]$ más finas que P_ε. La suma de Riemann-Stieltjes sería:

$$S(P,h,\beta)=\sum_{k=1}^{n}h(u_k)\,\Delta\beta_k$$

donde $u_k\in[y_{k-1},y_k]$ y $\Delta\beta_k=\beta(y_k)-\beta(y_{k-1})$.

Si hacemos que $t_k=g(u_k)$ y que $x_k=g(y_k)$, tenemos que $P'=\{x_0,x_1,\dots,x_n\}$ en el intervalo $[\mathrm{a},\mathrm{b}]$ es una partición más fina que P'_ε, resultanto entonces que la suma de Riemann-Stieltjes es:

$$\begin{aligned}
S(P,h,\beta)&=\sum_{k=1}^{n}h(u_k)\ \Delta\beta_k\\
&=\sum_{k=1}^{n}h(u_k)\,[\beta(y_k)-\beta(y_{k-1})]\\
&=\sum_{k=1}^{n}f(g(u_k))(\alpha[g(y_k)]-\alpha[g(y_{k-1})])\\
&=\sum_{k=1}^{n}f(t_k)[\alpha(x_k)-\alpha(x_{k-1})]\\
&=S(P',f,\alpha)
\end{aligned}$$

y puesto que $t_k\in[x_{k-1},x_k]$, por consecuencia $\left|S(P,h,\beta)-\int_{\mathrm{a}}^{b}f\,d\alpha\right|<\varepsilon$, de donde se deduce que:

$$S(P,h,\beta)=S(P',f,\alpha)\qquad qed$$

4.4. Función Escalonada

Este tipo de integrales están definidas a tramos en cualquier parte del intervalo $[\mathrm{a},\mathrm{b}]$ siempre que la función $\alpha(x)$ sea acotada y definida en ese intervalo y que a su vez sea discontinua en un número ρ finito de puntos c_k, tal que $\mathrm{a}\le c_1<c_2<\cdots<c_n\le \mathrm{b}$. Si $\alpha(x)$ es constante en cada intervalo (c_{k-1},c_k) se dice entonces que la función es escalonada. Si la función α es constante en todo el intervalo $[\mathrm{a},\mathrm{b}]$, entonces la integral $\int_{\mathrm{a}}^{b}f\,d\alpha$ existe y su valor es cero, por la Definición 4.4.1. y la razón es que en cada suma $S(P,f,\alpha)=0$.

Sin embargo, ¿qué sucede cuando la función α es discontinua en algún punto c_k?, en esa discontinuidad de salto la integral $\int_{\mathrm{a}}^{b}f\,d\alpha$ no necesariamente existe, y si existe, su valor no necesariamente es cero. Lo anterior queda explicitado en la siguiente definición y teorema, a saber:

Definición 4.4.1. *Si la función α es constante en el intervalo $[\mathrm{a},\mathrm{b}]$, la integral $\int_{\mathrm{a}}^{b}f\,d\alpha$ existe y vale cero. Esto se verifica puesto que:*

$$\begin{aligned}
S(P,f,\alpha)&=\sum_{k=1}^{n}f(t_k)\,\Delta\alpha_k\\
&=\sum_{k=1}^{n}f(t_k)\sum_{k=1}^{n}\Delta\alpha_k\\
&=\sum_{k=1}^{n}f(t_k)\,[\alpha(\mathrm{b})-\alpha(\mathrm{a})]
\end{aligned}$$

y dado que según la definición α *es constante, tenemos que:* $\alpha(\mathrm{b}) = \alpha(\mathrm{a})$, *se tiene:*

$$\begin{aligned} S(P, f, \alpha) &= \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\,[\alpha(\mathrm{b}) - \alpha(\mathrm{a})] \\ &= \sum_{k=1}^{n} f(t_k) \cdot 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

<u>Teorema 4.4.2.</u> *Dado los puntos* a, b y c, *tales que* $\mathrm{a} < \mathrm{c} < \mathrm{b}$, *se define la función* α *en el intervalo* $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$ *con los valores* $\alpha(\mathrm{a}), \alpha(\mathrm{b})$ *y* $\alpha(\mathrm{c})$ *arbitrarios, tales que*

$$\alpha(x) = \alpha(\mathrm{a}) \qquad si \;\; \mathrm{a} \le x < \mathrm{c} \qquad \mathrm{y}$$

$$\alpha(x) = \alpha(\mathrm{b}) \qquad si \;\; \mathrm{c} < x \le \mathrm{b}$$

Sea f *una función definida en el intervalo* $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$ *de manera que por lo menos una de las funciones* f *ó* α *es continua a la derecha de* $\mathrm{c}\ (\mathrm{c}^{+})$ *y por lo menos una de ellas es continua a la izquierda de* $\mathrm{c}\ (\mathrm{c}^{-})$. *Entonces* $f \in \Re(\alpha)$ *en* $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$ *y se tiene que:*

$$\int_{\mathrm{a}}^{b} f\, d\alpha = f(\mathrm{c})[\alpha(\mathrm{c}^{+}) - \alpha(\mathrm{c}^{-})]$$

Si $\mathrm{c} = \mathrm{a}$, *la integral* $\int_{\mathrm{a}}^{b} f\, d\alpha$ *se cumple reemplazando* $\alpha(\mathrm{c}^{-})$ *por* $\alpha(\mathrm{c})$, *y lo mismo en el caso de que* $\mathrm{c} = \mathrm{b}$, *se cumple cambiando* $\alpha(\mathrm{c})$ *en lugar de* $\alpha(\mathrm{c}^{+})$.

<u>Demostración:</u> Sea P una partición del intervalo $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$. Si $\mathrm{c} \in P$, todo término de la suma $S(P, f, \alpha)$ es nulo salvo los dos términos procedentes del subintervalo bisecado por el punto c, pongamos pues:

$$S(P, f, \alpha) = f(t_{k-1})[\alpha(\mathrm{c}) - \alpha(\mathrm{c}^{-})] + f(t_k)[\alpha(\mathrm{c}^{+}) - \alpha(\mathrm{c})],$$

donde: $t_{k-1} \le c \le t_k$. Esta igualdad también puede expresarse del siguiente modo:

$$\Delta = [f(t_{k-1}) - f(\mathrm{c})][\alpha(\mathrm{c}) - \alpha(\mathrm{c}^{-})] + [f(t_k) - f(\mathrm{c})][\alpha(\mathrm{c}^{+}) - \alpha(\mathrm{c})],$$

donde: $\Delta = S(P, f, \alpha) - f(c)\,[\alpha(\mathrm{c}^{+}) - \alpha(\mathrm{c}^{-})]$.

Luego se tiene que:

$$|\Delta| \le |f(t_{k-1}) - f(\mathrm{c})|\,|\alpha(\mathrm{c}) - \alpha(\mathrm{c}^{-})| + |f(t_k) - f(\mathrm{c})|\,|\alpha(\mathrm{c}^{+}) - \alpha(\mathrm{c})|$$

Si f es continua en c, para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que la $\|P\| < \delta$ implica:

$$|f(t_{k-1}) - f(\mathrm{c})| < \varepsilon \qquad \text{y} \qquad |f(t_k) - f(\mathrm{c})| < \varepsilon,$$

entonces:

$$|\Delta| \le \varepsilon|\alpha(\mathrm{c}) - \alpha(\mathrm{c}^{-})| + \varepsilon|\alpha(\mathrm{c}^{+}) - \alpha(\mathrm{c})|$$

Esta desigualdad sin embargo se verifica tanto si f es continua o no en c. Por ejemplo, si f es discontinua a la derecha y a la izquierda de c, entonces $\alpha(\mathrm{c}) = \alpha(\mathrm{c}^{-})$ y $\alpha(\mathrm{c}) = \alpha(\mathrm{c}^{+})$ y obtenemos $\Delta = 0$. Por otro lado, si f es continua a la izquierda pero discontinua a la derecha de c, entonces $\alpha(\mathrm{c}) = \alpha(\mathrm{c}^{+})$ y se obtiene:

$$|\Delta| \le \varepsilon|\alpha(\mathrm{c}) - \alpha(\mathrm{c}^{-})|$$

Por último, si f es continua a la derecha y discontinua a la izquierda de c, entonces $\alpha(\mathrm{c}) = \alpha(\mathrm{c}^{-})$ y se obtiene:

$$|\Delta| \leq \varepsilon|\alpha(\mathrm{c}^{+}) - \alpha(\mathrm{c})|$$

Luego la última desigualdad escrita es válida en cualquier caso, y por lo tanto, queda entonces demostrado el teorema.

Teorema 4.4.3. *(Reducción de integral de Riemann-Stieltjes a una suma finita). Sea la función α una función escalonada definida en el intervalo $[\mathrm{a},\mathrm{b}]$ con salto α_k en x_k, siendo $\mathrm{a} \leq x_1 < x_2 < \cdots < x_n \leq \mathrm{b}$. Consideremos f una función definida en $[\mathrm{a},\mathrm{b}]$ de manera que por lo menos una de las funciones f o α sea continua a la derecha de x_k y una por lo menos continua a la izquierda de x_k. En estas condiciones $\int_{\mathrm{a}}^{b} f\, d\alpha$ existe y se cumple que:*

$$\int_{\mathrm{a}}^{b} f(x)\, d\alpha(x) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\, \alpha_k$$

Demostración: Según el Teorema 4.1.3., la integral $\int_{\mathrm{a}}^{b} f\, d\alpha$ se puede escribir como una suma de integrales:

$$\int_{\mathrm{a}}^{b} f(x)\, d\alpha(x) = \int_{\mathrm{a}}^{x_1} f(x)\, d\alpha(x) + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\, d\alpha(x) + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{b} f(x)\, d\alpha(x),$$

donde cada integral de la forma:

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\, d\alpha(x), \qquad con\ 1 \leq k \leq n,$$

del tipo considerado en el Teorema 4.4.1., resulta:

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\, d\alpha(x) = f(c_k)\,[\alpha(c_k^{+}) - \alpha(c_k^{-})], \qquad con\ 1 \leq k \leq n\ \text{ y }\ x_{k-1} < c_k \leq x_k,$$

quedando la integral:

$$\int_{\mathrm{a}}^{b} f(x)\, d\alpha(x) = \int_{\mathrm{a}}^{x_1} f(x)\, d\alpha(x) + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\, d\alpha(x) + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{b} f(x)\, d\alpha(x),$$

$$= f(c_1)[\alpha(x_1^{+}) - \alpha(x_1^{-})] + f(c_2)[\alpha(x_2^{+}) - \alpha(x_2^{-})] + \cdots + f(c_n)[\alpha(x_n^{+}) - \alpha(x_n^{-})]$$

$$= f(c_1)\alpha_1 + f(c_2)\alpha_2 + \cdots + f(c_n)\alpha_n$$

$$= \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\, \alpha_k \qquad\qquad qed$$

Teorema 4.4.4. *(Función parte entera). Dado una suma $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k$, definimos la función f en el intervalo $[0, n]$ como sigue:*

$$f(x) = \alpha_k, \quad si\ \ k-1 < x \leq k \qquad (con\ k = 1, 2, \dots, n) \qquad f(0) = 0,$$

Entonces:

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = \sum_{k=1}^{n} f(k) = \int_{0}^{n} f(x)\, d[x],$$

donde $[x]$ es el mayor entero $\leq x$.

Demostración: La $función\ parte\ entera\ de\ x$ es uno de los ejemplos más sencillos de funciones escalonadas. Su valor en x es el mayor entero que es menor o igual que x y se representa por $[x]$, es decir, $[x]$ $es\ la\ función\ parte\ entera\ de\ x$. De modo que el valor de $[x]$ es el único entero que satisface las desigualdades $[x] \leq x < [x] + 1$.

La función $[x]$ es una función escalonada continua por derecha y con salto igual a 1 en cada punto x entero. Y por la izquierda la función f es continua en $1, 2, \ldots, n$. Dada una partición $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, donde $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = n$, si para x_{k-1} y x_k se tiene que $[x_k] = [x_{k-1}] = r$, entonces para cada entero $k \in [x_{k-1}, x_k]$ se tiene que:

$$f(x)([k^+] - [k^-]) = f(k)\,[r - r]$$
$$= f(x) \cdot 0, \qquad \rightarrow \qquad = 0,$$

y si para x_{k-1} y x_k, tenemos que $[x_k] \neq [x_{k-1}]$, entonces para un entero $k \in [x_{k-1}, x_k]$, se tendrá que:

$$f(k)([k^+] - [k^-] = f(k) \cdot 1 \ ,$$
$$= f(k)$$

Ahora, aplicando el teorema 4.4.3. se tiene que:

$$\int_0^n f(x)d[x] = f(0)([0^+] - [0]) + f(1)([1^+] - [1^-]) + f(2)([2^+] - [2^-]) + \cdots$$
$$+ f(n)([n] - [n^-])$$
$$= 0 + f(1) \cdot 1 + f(2) \cdot 1 + \cdots + f(n) \cdot 1$$
$$= \sum_{k=1}^{n} f(k) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \qquad\qquad qed$$

4.5. Integradores crecientes con monotonía. Integrales superior e inferior

En el desarrollo de la teoría de integración de Riemann-Stieltjes, cuando la función α *es creciente*, las diferencias $\Delta\alpha_k$ que aparecen en las sumas de RS son todas positivas.

Para la integral de Riemann, encontrar el área de una región limitada por una función, f *por ejemplo,* se plantean las sumas de Riemann $\sum f(t_k)\,\Delta x_k$ como aproximaciones del área por medio de rectángulos. Del mismo modo, otra forma de plantear dicha cuestión es por medio de las sumas superior e inferior de Riemann, considerando las aproximaciones por exceso y por defecto mediante las sumas $\sum M_k\,\Delta x_k$ y $\sum m_k\,\Delta x_k$, donde M_k y m_k son el supremo y el ínfimo respectivamente de los valores de la función en el $k - ésimo$ subintervalo.

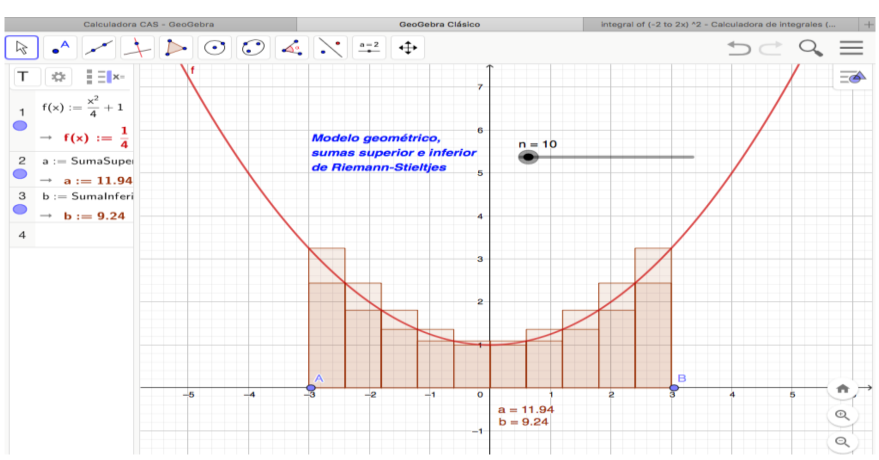


Figura 3: Modelo geométrico de una suma superior e inferior de Riemann

La figura nos muestra el área determinada tanto por arriba como por abajo de la curva para las sumas superior e inferior de Riemann respectivamente. Por lo que podemos deducir sin mayor generalidad que el ínfimo de todas las sumas superiores es un número real llamado la *integral superior de la función* f, lo mismo es válido para el supremo de todas las sumas inferiores y que dan forma a la *integral inferior de la función* f.

En el caso por ejemplo de funciones continuas, las dos integrales anteriores son iguales a $\int_{a}^{b} f(x)\,dx$, pero no siempre es el caso y un problema importante es hallar las condiciones relativas a la función para que las integrales superior e inferior tengan valores coincidentes. Lo relativo a este tipo de situaciones se detallan en las siguientes definiciones y teoremas, a saber:

Definición 4.5.1. *Sea* $P = \{x_i\}_{i=0}^{n}$ *una partición de* $[a, b]$ *y sea:*

$$M_k(f) = sup\,\{f(x)\,/\,x \in [x_{k-1}, x_k]\} \qquad y \qquad m_k(f) = ínf\,\{f(x)\,/\,x \in [x_{k-1}, x_k]\}$$

Los números:

$$U(f, P, \alpha) = \sum_{k=1}^{n} M_k(f)\Delta\alpha_k\,, \;\; y$$

$$L(f, P, \alpha) = \sum_{k=1}^{N} m_k\,(f)\Delta\alpha_k$$

se llaman respectivamente, las sumas de Stieltjes superior e inferior de la función f *respecto de* α *para la partición* P. *Puesto que siempre se cumple* $m_k(f) \leq M_k(f)$, *si la función* α *es creciente en el* $[a, b]$, *entonces se cumple que* $\Delta\alpha_k \geq 0$, *y esto se puede escribir como:*

$$m_k(f)\Delta\alpha_k \;\leq M_k(f)\Delta\alpha_k,$$

de lo que se concluye que las sumas inferiores no pueden exceder a las sumas superiores. Además, lo primero que observamos es que debido a que la función α *es creciente en* $[a, b]$, *se tiene que para cualquier partición* P *del intervalo* $[a, b]$ *se cumple la desigualdad:*

$$L(f, P, \alpha) \;\leq\; S(f, P, \alpha) \;\leq\; U(f, P, \alpha).$$

es decir, se cumple que las sumas se Stieltjes se desplazan entre las sumas inferior y superior respectivamente.

Definición 4.5.2. *Supongamos que la función* α *es creciente en el intervalo* $[a, b]$. *Definimos la integral superior e inferior de* $Stieltjes$ *de* f *con respecto a la función* α *del siguiente modo:*

$$\int_{a}^{\overline{b}} f\,d\alpha = inf\{U(P, f, \alpha)/P \in \wp[a, b]\}, \qquad integral\ superior\ de\ Stieltjes$$

$$\int_{\underline{a}}^{b} f\,d\alpha = sup\{L(P, f, \alpha)/P \in \wp[a, b]\}, \qquad integral\ inferior\ de\ Stieltjes$$

La notación $\bar{I}(f, \alpha)$ e $\underline{I}(f, \alpha)$ también se usan para escribir las integrales superior e inferior respectivamente. Como ya se mencionó en el principio del capítulo, en el caso particular en que $\alpha(x) = x$, las sumas superior e inferior se representan por $U(P, f)$ y $L(P, f)$ y se llaman sumas superior e inferior de Riemann respectivamente.

Teorema 4.5.3. *Conjeturemos que la función* $\alpha \nearrow$ *en el intervalo* $[a, b]$, *entonces tenemos que:*

i) Si P' es más fina que P, entonces:

$$U(P',f,\alpha) \leq U(P,f,\alpha) \qquad y \qquad L(P',f,\alpha) \geq L(P,f,\alpha)$$

ii) Dadas dos particiones, P_1 y P_2, se tiene que:

$$L(P_1,f,\alpha) \leq U(P_2,f,\alpha)$$

<u>Demostración:</u> Este teorema nos demuestra que dada una función $\alpha \nearrow$ $(\alpha\ creciente)$, un refinamiento de la partición aumenta las sumas inferiores y disminuye las sumas superiores, para ello demostraremos $i)$. Basta probar que P' tenga un punto más que P, sea por ejemplo este el $punto\ c$, para que se cumpla la condición. Si este $punto\ c$ pertenece al subintervalo $i-ésimo$ de P, se puede escribir como:

$$U(P',f,\alpha) = \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} M_k(f)\Delta\alpha_k + M'[\alpha(c)-\alpha(x_{i-1})] + M''[\alpha(x_i)-\alpha(c)],$$

donde las sumatorias de los supremos, M' y M'' designan el supremo de la función f en $[x_{i-1},c]$ y $[c,x_i]$ respectivamente. Pero dado que $M' \leq M_i(f)$ y que $M'' \leq M_i(f)$, tenemos que:

$$\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} M_k(f)\,\Delta\alpha_k + M'[\alpha(c)-\alpha(x_{i-1})] + M''[\alpha(x_i)-\alpha(c)]$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} M_k(f)\,\Delta\alpha_k + M'[\alpha(c)-\alpha(x_{i-1})],$$

de donde tenemos que:

$$U(P',f,\alpha) \leq U(P,f,\alpha)$$

Del mismo modo, tomando como referencia la demostración anterior, análogamente podemos tomar las particiones P y P' y escribirlas como:

$$L(P',f,\alpha) = \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} m_k(f)\,\Delta\alpha_k + m'[\alpha(c)-\alpha(x_{i-1})] + m''[\alpha(x_i)-\alpha(c)],$$

donde las sumatorias de los ínfimos, m' y m'', designan el ínfimo de la función f en $[x_{i-1},c]$ y $[c,x_i]$ respectivamente. Pero dado que $m' \geq m_i(f)$ y que $m'' \geq m_i(f)$, tenemos que:

$$\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} m_k(f)\,\Delta\alpha_k + m'[\alpha(c)-\alpha(x_{i-1})] + m''[\alpha(x_i)-\alpha(c)]$$

$$\geq \sum_{k=1}^{n} m_k(f)\Delta\alpha_k + m'[\alpha(c)-\alpha(x_{i-1})],$$

donde se tiene que:

$$L(P',f,\alpha) \geq L(P,f,\alpha)$$

Para demostrar el punto $ii)$, consideremos la partición $P = P_1 \cup P_2$. Por la demostración del punto $i)$, tenemos que:

$$L(P_1,f,\alpha) \leq L(P,f,\alpha) \qquad y \qquad U(P,f,\alpha) \leq U(P_2,f,\alpha) \quad (1)$$

Además, dado por la definición 4.5.1., se tiene que:

$$L(P,f,\alpha) \leq S(P,f,\alpha) \leq U(P,f,\alpha) \qquad (2),$$

Luego, de la combinación de (1) y (2) tenemos que:

$$L(P_1, f, \alpha) \leq L(P, f, \alpha) \leq S(P, f, \alpha) \leq U(P, f, \alpha) \leq U(P, f, \alpha),$$

por lo tanto,

$$L(P_1, f, \alpha) \leq U(P_2, f, \alpha) \qquad qed$$

<u>Teorema 4.5.4.</u> *Supongamos que la función α es creciente en el intervalo $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$. Entonces, $\underline{I}(f, \alpha) \leq \overline{I}(f, \alpha)$.*

<u>Demostración:</u> Dado un valor $\varepsilon < 0$, existe una partición P_1 tal que se cumple que:

$$U(P_1, f, \alpha) < \overline{I}(f, \alpha) + \varepsilon,$$

y por el teorema 4.5.3. se tiene que $\overline{I}(f, \alpha) + \varepsilon$ es una cota superior para todas las sumas inferiores de $L(P, f, \alpha)$. De esto, tenemos que:

$$\underline{I}(f, \alpha) \leq \overline{I}(f, \alpha) + \varepsilon,$$

y dado que $épsilon$ es un valor arbitrario, implica que:

$$\underline{I}(f, \alpha) \leq \overline{I}(f, \alpha) \qquad qed$$

<u>4.6. Condición de Riemann</u>

Puesto que esperamos que la integral superior e inferior sean iguales, el mismo razonamiento se espera para las sumas superior e inferior, que lleguen a ser tan próximas la una de la otra como se quiera. Así pues, parece natural buscar las funciones f para que la diferencia entre $U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha)$ se pueda hacer arbitrariamente muy pequeña. Las siguientes definiciones y teoremas lo abordan, a saber:

<u>Definición 4.6.1.</u> *Se dice que la función f satisface la condición de Riemann respecto de la función α en el intervalo $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$ si, para todo $\varepsilon > 0$, existe una P_ε tal que si una partición P cualquiera es más fina que P_ε se cumple que:*

$$0 \leq U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) < \varepsilon$$

<u>Teorema 4.6.2.</u> *Sea α una función creciente en el intervalo $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$. Si la función f satisface la condición de Riemann, entonces las tres siguientes proposiciones son equivalentes:*

i) $f \in \Re(\alpha)\ en\ [\mathrm{a}, \mathrm{b}]$
ii) *La función f satisface la condición de Riemann respecto a la función α en $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$*
iii) $\underline{I}(f, \alpha) = \overline{I}(f, \alpha)$

<u>Demostración:</u> Se probará que la secuencia de cada proposición implica la siguiente, en una secuencia completa, tanto así que i) implica la parte ii), y ésta la parte iii), y finalmente la parte iii) a la parte i).

Sin más generalidad, supóngase que la parte i) es verdadera. Por lo tanto, si $\alpha(b) = \alpha(\mathrm{a})$, la parte ii) se justifica trivialmente; así pues, podemos suponer que $\alpha(\mathrm{a}) < \alpha(b)$. Dado un $\varepsilon > 0$, elijamos una partición P_ε cualquiera de modo tal que para toda partición P más fina y cualquiera sea la elección de un t_k y un t'_k, se obtenga que:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(t_k)\,\Delta\alpha_k - A\right| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad y \qquad \left|\sum_{k=1}^{n} f(t'_k)\,\Delta\alpha_k - A\right| < \frac{\varepsilon}{3}\ ,$$

donde A es un valor real tal que $A = \int_a^b f\,d\alpha$. Combinando estas desigualdades obtenemos que:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} [f(t_k) - f(t'_k)]\ \Delta\alpha_k\right| < \frac{2}{3}\varepsilon$$

Dado que:

$$M_k(f) - m_k(f) = supremo\,\{f(x) - f(x')|x,\, x'en\ [x_{k-1}, x_k]\}\,,$$

se deduce que para todo $h > 0$ es posible elegir una subpartición t_k y t'_k tal que:

$$f(t_k) - f(t'_k) > M_k(f) - m_k(f) - h,$$

y eligiendo un $h = \frac{1}{3}\varepsilon/[\alpha(b) - \alpha(\mathrm{a})]$, se puede escribir:

$$U(P,f,\alpha) - L(P,f,\alpha) = \sum_{k=1}^{n} [M_k(f) - m_k(f)]\,\Delta\alpha_k$$

$$< \sum_{k=1}^{n} [f(t_k) - f(t'_k)]\,\Delta\alpha_k \ +\ h \sum_{k=1}^{n} \Delta\alpha_k$$

$$< \frac{2}{3}\varepsilon + \frac{1}{3}\varepsilon/[\alpha(b) - \alpha(\mathrm{a})]\cdot[\alpha(b) - \alpha(\mathrm{a})]$$

$$= \ \frac{2}{3}\varepsilon \ +\ \frac{1}{3}\varepsilon \ =\ \varepsilon,$$

de donde se obtiene que:

$$U(P,f,\alpha) - L(P,f,\alpha) < \sum_{k=1}^{n} [f(t_k) - f(t'_k)]\,\Delta\alpha_k + h\sum_{k=1}^{n} \Delta\alpha_k < \varepsilon,$$

por lo tanto, $i)$ implica $ii)$.

Sin más generalidad, supongamos ahora que la parte $ii)$ es verdadera. Dado un $\varepsilon > 0$, existe una partición P_ε, tal que si por el contrario existe una partición P cualquiera que sea más fina que P_ε, se verifica que:

$$U(P,f,\alpha) < L(P,f,\alpha) + \varepsilon,$$

luego, para tal partición P se tiene que:

$$\overline{I}(f,\alpha)\ \le\ U(P,f,\alpha)\ <\ L(P,f,\alpha) + \varepsilon\ \le\ \underline{I}(f,\alpha) + \varepsilon,$$

es decir, $\overline{I}(f,\alpha) \le \underline{I}(f,\alpha) + \varepsilon$, para todo $\varepsilon > 0$, y por lo tanto, $\overline{I}(f,\alpha) \le \underline{I}(f,\alpha)$. Pero según el teorema 4.5.4. también se cumple la condición opuesta, que $\overline{I}(f,\alpha) \ge \underline{I}(f,\alpha)$, por lo tanto, se demuestra que $ii)\ implica\ iii)$.

Por último, sin más generalidad supongamos que $iii)$ es cierto, $\underline{I}(f,\alpha) = \overline{I}(f,\alpha)$ y sea un real cualquiera A su valor común. Se quiere demostrar que la $\int_a^b f\,d\alpha$ existe y que su valor es igual a A. Dado un $\varepsilon > 0$, elijamos una partición P'_ε de manera tal que $U(P,f,\alpha) < \overline{I}(f,\alpha) + \varepsilon$ para toda partición P más fina que P'_ε. En el mismo sentido, elijamos también una P''_ε tal que $L(P,f,\alpha) > \underline{I}(f,\alpha) - \varepsilon$ para toda P más fina que P''_ε. Si la partición $P''_\varepsilon = P'_\varepsilon \cup P''_\varepsilon$, podemos escribir:

$$\underline{I}(f,\alpha) - \varepsilon < L(P,f,\alpha) \le S(P,f,) \le U(P,f,\alpha) < \overline{I}(f,\alpha) + \varepsilon,$$

para toda partición P más fina que P_ε. Pero puesto que según la parte $iii)$, $\underline{I}(f,\alpha) = \overline{I}(f,\alpha) = A$, esto significa que $|S(P,f,\alpha) - A| < \varepsilon$, siempre que la partición P sea más fina que P_ε. Lo que demuestra que la integral $\int_a^b f\, d\alpha$ existe y su valor es igual a A. Por lo tanto, se demuestra que: $parte\ iii)\ implica\ i)$. qed

4.7. Condición suficiente para la existencia de la integral de Riemann-Stieltjes

En el desarrollo de los teoremas anteriormente visto, hemos supuesto siempre la existencia de integrales y estudiado sus propiedades, sin embargo, ¿cómo podemos estar seguros cuándo la integral existe?. El siguiente teorema nos presenta una condición suficiente para que ello ocurra.

Teorema 4.7.1. *Si la función f es continua en el intervalo $[a,b]$ y la función α es de variación acotada en el mismo intervalo, entonces $f \in \Re(\alpha)$ en $[a,b]$.*

Demostración: Basta demostrar el teorema para cuando la función α es creciente, con $\alpha(a) < \alpha(b)$. La continuidad de la función f en $[a,b]$ implica necesariamente la continuidad uniforme de la misma, así que dado un $\varepsilon > 0$, podemos encontrar a su vez un $\delta > 0$ que depende sólo de ε, tal que:

$$|x-y| < \delta \quad implica \quad |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{A}, \qquad donde\ A = 2([\alpha(b) - \alpha(a)])$$

Si P_ε es una partición de norma $\|P_\varepsilon\| < \delta$, entonces para una P más fina que P_ε se tiene que:

$$M_k(f) - m_k(f) \leq \frac{\varepsilon}{A},$$

puesto que $M_k(f) - m_k(f) = \sup\{f(x) - f(y) | x, y \in [x_{x-1}, x_k]\}$, basta multiplicar la desigualdad por $\Delta\alpha_k$ y sumando, se tiene que:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\{M_k(f) - m_k(f)\}\cdot\Delta\alpha_k &= \sum_{k=1}^{n} M_k(f)\,\Delta\alpha_k - \sum_{k=1}^{n} m_k(f)\,\Delta\alpha_k \\ &= U(P,f,\alpha) - L(P,f,\alpha) \leq \frac{\varepsilon}{A}\cdot\sum_{k=1}^{n}\Delta\alpha_k \\ &= \frac{\varepsilon}{2([\alpha(b) - \alpha(a)])}\cdot\ \alpha(b) - \alpha(a) \\ &= \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon\end{aligned}$$

Quedando verificada la condición de Riemann, por lo tanto, $f \in \Re(\alpha)\ en\ [a,b]$.

Capítulo 5. La g-$derivada$ y el TFC para la integral de Stieltjes

En la obra de Thomas J. Stieltjes, *Recherches sur les fractions continues* (Investigación sobre fracciones continuas), aparecida en 1894, Stieltjes obtiene una generalización de la clásica integral de Riemann, la cual tiene enorme importancia en la matemática contemporánea y que hoy se conoce con su nombre. Como concepto es más amplia que la integral de Riemann, donde su campo más conocido –en el contexto de nuestros estudios de pregrado- es el cálculo de áreas en espacios acotados encerrado bajo la curva de una función, pero que se muestra feble en el tratamiento de ciertas funciones que son continuas (derivables) en el sentido de Riemann pero no integrables, la herramienta propuesta por Stieltjes permite encontrar solución a ciertos problemas haciendo que la integral dependa de dos funciones, el *integrando* y el *integrador*, para cuando las funciones sean continuas y discretas.

A continuación presentaremos una introducción al concepto de la $g\text{-}derivada$ que es una extensión de la derivada común, en base a una investigación sobre el Teorema Fundamental del Cálculo (TFC) para la integral de Riemann-Stieltjes, basados en el trabajo de Castillo y Chapinz $[5]$, y desarrollaremos un teorema que generalice la derivada común en términos de la $g\text{-}derivada$ hasta obtener una expresión equivalente a la forma del TFC (1) para la integral de Stieltjes.

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \qquad (1)$$

Al respecto, la relación entre la derivada común y la $g\text{-}derivada$ es equivalente a la relación entre la integral de Riemann y la de Stieltjes.

5.1. La $g\text{-}derivada$

Daremos la definición de la $g\text{-}derivada$ y se detallarán los teoremas más importantes, omitiendo en este apartado las demostraciones para desarrollar la idea principal.

Definición 5.1.1. (Definición de la $g\text{-}derivada$). *Supongamos que f y g son funciones definidas en $\mathbb{R}$ en un mismo intervalo abierto I (acotado o no acotado), y que la función g es continua y estrictamente creciente. Sea x_o un punto del intervalo I. Decimos que f es $g\text{-}diferenciable$ en x_0 si:*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} \ \ existe.$$

Si este límite existe, se denotará su valor por $D_g\, f(x_0)$ y lo llamaremos la $g\text{-}derivada$ de f en x_0.

Por supuesto, si $g(x) = x$, entonces la $g\text{-}derivada$ de f es la derivada común habitual de la función f. Nótese que si $f'(x_0)$ y $g'(x_0)$ existen, y $g'(x_0) \neq 0$, entonces:

$$D_g\, f(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{[f(x) - f(x_0)]\,/\,(x - x_0)}{[g(x) - g(x_0)]\,/\,(x - x_0)}$$

$$= \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

Podemos ejemplificarlo en el siguiente ejercicio:

- Si $f(x) = g(x)$, entonces por la definición 5.1.1. tenemos que:

$$D_g f(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{g(x) - g(x_0)}$$

$$= 1$$

En consecuencia, g es una función $g\text{-}diferenciable$, es decir, admite derivadas en toda dirección.

Teorema 5.1.2. *Sean* f *y* h *ambas funciones* $g\text{-}diferenciables$ *en* x_0, *y con una constante* $k \in \mathbb{R}$. *Luego* $f + h$, $f \cdot h$, *y* $k \cdot f$ *son cada una de ellas* $g\text{-}diferenciables$ *en* x_0. *Sus* $g\text{-}derivadas$ *son las siguientes:*

i) $D_g(f + g)(x_0) = D_g f(x_0) + D_g h(x_0)$
ii) $D_g\,(f \cdot h)(x_0) = D_g f(x_0) \cdot h(x_0) + f(x_0) \cdot D_g h(x_0)$
iii) $D_g\,(k \cdot f)(x_0) = k \cdot D_g f(x_0)$

Teorema 5.1.3. *Si* f *es* $g\text{-}diferenciable$ *en* x_0, *entonces* f *es continua en* x_0.

5.2. TFC para la Integral de Riemann-Stieltjes

En análisis matemático, uno de los resultados más notables es el Teorema Fundamental del Cálculo (TFC), que como concepto matemático relaciona la derivación y la integración, y a pesar de que su descubrimiento se remonta a buscar soluciones a problemas diferentes entre sí, a la vez los relaciona dado que son procesos inversos el uno del otro. A diferencia por ejemplo de la integral de Riemann donde podemos calcular áreas a través de sumas de límites, el TFC nos entrega un método más simplificado para resolver esas mismas cuestiones mediante integrales definidas.

Buscaremos encontrar entonces un TFC que vincule a ambas integrales en términos de la derivada común, tomaremos las definiciones elementales de la teoría de integración y diremos que, dada una función f en un intervalo cerrado $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$, definido en el conjunto de los $\mathbb{R}$ y con $\mathrm{a} \leq \mathrm{b}$, entonces $F\ es\ la\ función\ primitiva\ de\ f$, si cumple que:

$$F'(x) = f(x)$$

Puesto que hemos encontrado una primera relación de igualdad, tomaremos la relación expuesta para desarrollar la integral de Riemann que nos sirva para encontrar una expresión equivalente en términos del TFC.

i) Sea $f: [\mathrm{a}, \mathrm{b}] \to \mathbb{R}$ una función integrable en $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$, si $F: [\mathrm{a}, \mathrm{b}] \to \mathbb{R}$ cumple que $F'(x) = f(x)$, $\forall\ x \in [\mathrm{a}, \mathrm{b}]$, entonces:

$$\int_{\mathrm{a}}^{b} f(x)\, dx = \int_{\mathrm{a}}^{b} F'(x)\, dx = F(b) - F(\mathrm{a}) \qquad (1)$$

ii) Para la integral de Riemann-Stieltjes, se quiere encontrar una expresión equivalente a (1) con respecto a la función g-$derivada$. Sea $g: [\mathrm{a}, \mathrm{b}] \to \mathbb{R}$, si $F: [\mathrm{a}, \mathrm{b}] \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable y la función $F'_g(x) = f(x)$, $\forall\ x \in [\mathrm{a}, \mathrm{b}]$, entonces se cumple que:

$$\int_{\mathrm{a}}^{b} f\, dg = F(b) - F(\mathrm{a})$$

<u>Definición 5.2.1.</u> *Sea $f: (\mathrm{a}, \mathrm{b}) \to \mathbb{R}$, una función definida en el intervalo abierto I. Se dice que F es una g-$antiderivada$ de f en I, si:*

$$D_g F(x) = f(x), \qquad \forall\ x \in I$$

<u>Observación:</u> se denotará por $\Re(g)$ al conjunto de todas las funciones Riemann-Stieltjes integrables con respecto a g, donde g es una función continua, acotada y estrictamente creciente en el intervalo $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$.

<u>Teorema 5.2.2.</u> *Sea $f \in \Re(g)$. La función:*

$$F(x) = \int_{\mathrm{a}}^{x} f\, dg, \qquad x \in [\mathrm{a}, \mathrm{b}]$$

es continua en $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$. Además si f es continua en el intervalo, entonces F es una g-$antiderivada$ de f en (a, b).

<u>Teorema 5.2.3.</u> (TFC para la integral de Stieltjes). *Sea $f \in \Re(g)$. Supóngase que F es una función continua en $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$ y que es una g-$antiderivada$ de la función f en (a, b), entonces:*

$$\int_{\mathrm{a}}^{b} f\, dg = F(b) - F(\mathrm{a})$$

<u>Demostración:</u> Sea $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ una partición de $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$, por el teorema del valor medio de Riemann-Stieltjes existe un $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$ tal que:

$$\begin{aligned} F(x_k) - F(x_{k-1}) &= D_g F(t_k)\, [g(x_k) - g(x_{k-1})] \\ &= f(t_k)\, [g(x_k) - g(x_{k-1})] \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} F(b) - F(\mathrm{a}) &= \sum_{k=1}^{n} F(x_k) - F(x_{k-1}) \\ &= \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\, [g(x_k) - g(x_{k-1})] \\ &= S(P, f, g) \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$F(b) - F(\mathrm{a}) = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\ [g(x_k) - g(x_{k-1})]$$

$$= \int_{\mathrm{a}}^{b} f\, dg \qquad\qquad qed$$

$$\therefore \quad \int_{\mathrm{a}}^{b} f\, dg = F(b) - F(\mathrm{a})$$

Queda demostrado el Teorema Fundamental del Cálculo para la integral de Riemann-Stieltjes mediante el concepto de la $g\text{-}derivada$.

Capítulo 6. Una aplicación a la Teoría de Probabilidades

Luego de iniciar con una introducción a la integral de Riemann y de presentar la teoría de la integral de Riemann-Stieltjes con sus teoremas y demostraciones, finalizaremos con aplicaciones convenientes de la misma a la teoría de probabilidades. Para ello, comenzaremos primeramente con una breve presentación de algunas definiciones y axiomas necesarios de la teoría de probabilidades.

6.1 Definiciones fundamentales

Definición 6.1.1. *Sea Ω una colección no vacía de elementos, el conjunto Ω se llama espacio muestral y sus elementos se llaman eventos elementales.*

Definición 6.1.2. *Sea $\mathcal{A}$ una familia de subconjuntos de Ω, los elementos de la familia $\mathcal{A}$* se llaman *eventos aleatorios*.

Propiedades de $\mathcal{A}$: Vamos a estipular para $\mathcal{A}$ las siguientes propiedades:

P1: $\Omega \in \mathcal{A}$ (adelantando la definición de $P(\Omega) = 1$
P2: Si $A \in \mathcal{A}$, entonces $A^c \in \mathcal{A}$ (donde evidentemente estamos definiendo a $P(A^c) = 1 - P(A)$).
P3: Si $A \in \mathcal{A}$ y $B \in \mathcal{A}$, y son disjuntos, entonces $A \cup \boldsymbol{B} \in \mathcal{A}$
P4: Si $A_n \in \mathcal{A}$, para $n = 1,2,3,\ldots.$, y los A_n son disjuntos dos a dos, entonces $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$

Definición 6.1.3. *Sea Ω un conjunto no vacío. Una clase de $\mathcal{A}$ de subconjuntos de Ω que satisfacen las propiedades P1, P2, P3 y P4 se llama un $\acute{a}lgebra$ de subconjuntos de Ω.*

Definición 6.1.4. *Si una clase $\mathcal{A}$ de subconjuntos de Ω satisface las propiedades P1, P2 y P4, entonces se la denomina una σ-álgebra de subconjuntos de Ω.*

Axiomas de probabilidad. Si $\mathcal{A}$ es una σ-álgebra de subconjuntos de Ω, y a cada conjunto $A \in \mathcal{A}$ se le asigna un número real no negativo $P(A)$, tenemos que:

A1: $P(A) \leq 0$
A2: $P(\Omega) = 1$
A3: (Aditividad finita). Si $A_1, \ldots., A_n \in \mathcal{A}$ son disjuntos dos a dos, entonces:

$$P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

A4: ($\sigma - aditividad$). Si $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ son disjuntos dos a dos, entonces:

$$P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

Definición 6.1.5. *Una terna $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ que satisface los axiomas A1, A2, A3 y A4 se llama un $espacio\ de\ probabilidad$. Donde Ω es un conjunto no vacío, $\mathcal{A}$ es una σ-álgebra de sub-conjuntos de Ω y P es una función real definida sobre $\mathcal{A}$.*

Definición 6.1.6. *La función $P: \mathcal{A} \to [0,1]$ se le llama una $medida\ de\ probabilidad.$*

Definición 6.1.7. Una $variable\ aleatoria$ $X: \Omega \to \mathbb{R}$ es una función tal que:

$$\{\omega: X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{A}$$

para cada $x \in \mathbb{R}$. Esta condición supone que la dupla $(\Omega, \mathcal{A})$ es un espacio medible.

Definición 6.1.8. *Si $(\Omega, \mathcal{A})$ es un espacio medible, entonces podemos definir a la función distribución F de X como:*

$$F_x(x) = P(\omega: X(\omega) \leq x$$

y esto puede ser hecho sin inconvenientes dado que el conjunto $\{\omega: X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{A}$ y podemos aplicarle P al mismo.

6.2 Esperanza de una variable aleatoria

Definición 6.2.1. *Asumamos que X es una variable aleatoria con una función de distribución F. La esperanza (o valor esperado) de $X, E(X)$, si existe, queda definida por:*

$$E(X) = \int x \, dF(x)$$

Ahora podemos comenzar a aplicar entonces los conceptos que aporta la integral de Riemann-Stieltjes. Tomando la definición anterior (definición 6.2.1) vemos que la interpretación de la esperanza de $X, E(X)$ se aclara a partir de la aproximación (sumas parciales de $\mathcal{S}$) de Riemann-Stieltjes:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} c_i(F(x_i) - F(x_{i-1}))$$

con sus correspondientes puntos intermedios $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

Es decir, tomamos un valor cualquiera que X pueda tomar, c_i, y lo multiplicamos por $(F(x_i) - F(x_{i-1}))$; si la diferencia $x_i - x_{i-1}$ es lo suficientemente pequeña, entonces $(F(x_i) - F(x_{i-1}))$ resulta cercana a $P(X = c_i)$, y extendemos las sumas a todos los posibles valores c_i que pueda tomar X.

Este concepto lo podemos simplificar en dos casos respectivamente:

a) Si F es una función salto que toma valores en los puntos x_i, entonces:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i(F(x_i) - F(x_{i-1}))$$

b) Si F es diferenciable con derivada $f = F'$, entonces:

$$E(X) = \int x \, f(x)$$

Por lo tanto, al haber definido a la esperanza matemática mediante la integral de Riemann-Stieltjes, obtenemos una fórmula general para la misma que es válida tanto para variables aleatorias discretas como continuas, como así también para sus posibles combinaciones (variable aleatoria mixta).

Esta última variable aleatoria aparece usualmente en algunas aplicaciones de funciones aleatorias (cambio de variable).

6.3 Esperanza de funciones de variables aleatorias

Permitámosle a g ser una función $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $\int g(x) \, dF(x) < \infty$ y que:

$$\{\omega: g(X(\omega)) \leq u\} \in \mathcal{A}$$

para todo $u \in \mathbb{R}$, o sea, estamos expresando que $g(x)$ es una función medible. Por lo tanto podemos definir a la función distribución de Y, F_Y, como:

$$F_Y(y) = P(\omega: Y(\omega) \leq y)$$

Entonces podemos definir a la esperanza de Y como:

$$E(Y) = \int y \, dF_Y(x)$$

si la función existe. Para poder obtener la esperanza de Y debemos obtener primero a la función distribución de Y, F_Y.

El siguiente teorema nos dice que bajo ciertas condiciones, podemos obtener la esperanza de Y sin obtener la función distribución de Y, apelando al concepto de esperanza generalizada.

Teorema 6.3.1. $(Esperanza\ generalizada)$. *Si X es una función de variable aleatoria y g es una función $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $\int g(x)\, dF(x) < \infty$, entonces las variable aleatoria $Y = g(x)$ tiene por esperanza:*

$$E(Y) = \int g(x)\, dF(x)$$

Demostración: La suma de Riemann-Stieltjes para el lado izquierdo de la ecuación resulta:

$$\begin{aligned}\sum_i c_i \left[F_Y(y_i) - F_Y(y_{i-1})\right] &= \sum_i c_i \, P(Y \in (y_{i-1}, y_i]) \\ &= \sum_i c_i \, P(g(X) \in (y_{i-1}, y_i]) \\ &= \sum_i c_i \, P(X \in g^{-1}\{(y_{i-1}, y_i]\})\end{aligned}$$

con $c_i \in (y_{i-1}, y_i]$. Debemos notar que:

$$\begin{aligned}c_i \in (y_{i-1}, y_i] &\Leftrightarrow d_i := g^{-1}(c_i) \in g^{-1}\{(y_{i-1}, y_i]\} \\ &\Leftrightarrow g(d_i) \in (y_{i-1}, y_i]\end{aligned}$$

Entonces lo anterior resulta igual a:

$$\sum_i g\,(d_i)\, P(X \in g^{-1}\{(y_{i-1}, y_i]\})$$

con $d_i \in g^{-1}\{(y_{i-1}, y_i]\}$.

Debemos notar además que si los intervalos $(y_{i-1}, y_i]$ forman una partición, es decir son disjuntos y su unión alcanza a todo el intervalo, entonces los intervalos $(x_{i-1}, x_i] = g^{-1}\{(y_{i-1}, y_i]\}$ también forman una partición. Luego la expresión anterior puede ser escrita como:

$$\sum_i g\,(d_i)\, P(X \in (x_{i-1}, x_i])$$

con $d_i \in \{(x_{i-1}, x_i]\}$, la cual es una suma de Riemann-Stieltjes para el lado derecho de la ecuación, y el teorema queda demostrado.

La afirmación del teorema anterior se puede escribir para los dos casos de F, o sea, que F sea una función salto o que F sea una función diferenciable con derivada $f = F'$:

$$E(g(X))\begin{cases}\sum_i g\,(x_i)F(x_i) - F(x_{i-1})) \\ \int g(x)\,f(x)dx\end{cases}$$

<u>Ejemplo:</u> Calcular la esperanza de una variable aleatoria X para el caso particular de que $g(X) = I_{\{x\in A\}}$, donde A es un conjunto en $\mathbb{R}$.

<u>Solución:</u> Estamos en presencia de una variable aleatoria de Bernoulli, cuya función de distribución es una función salto, con discontinuidad en 0 y 1, de forma tal que:

$$\begin{aligned} E\big(I_{\{x\in A\}}\big) &= 0\big(F(0) - F(0\_)\big) + \ 1(F(1) - F(1\_)) \\ &= \big(F(1) - F(1\ \ )\big) \\ &= \ P(g(X) = 1) \\ &= P(X \in A) \end{aligned}$$

Podemos notar también que el lado izquierdo de la expresión anterior es:

$$\begin{aligned} E\big(I_{\{x\in A\}}\big) &= \int I_{\{x\in A\}}\,dF(x) \\ &= \int_A dF(x) \end{aligned}$$

De esta forma podemos llegar a la fórmula:

$$P(X \in A) = \int_A dF(x)$$

Y en particular tenemos que $P(X \in \mathbb{R}) = \int_{\mathbb{R}} \ dF(x) = 1$

<u>Lema 1:</u> *Sea X una variable aleatoria con distribución F. Entonces se cumple que:*

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

<u>Demostración:</u> Tenemos que:

$$\begin{aligned} E(aX + b) &= \int (aX + b)\,dF\,(x) \\ &= a\int x\,dF(x) + b\int dF(x) \\ &= aE(X) + \ b \qquad\qquad qed \end{aligned}$$

Es decir, la esperanza es un operador lineal.

<u>*6.4. Varianza de una variable aleatoria*</u>

<u>Definición 6.4.1.</u> *La $varianza$ de una variable aleatoria, si existe, de define como:*

$$Var(X) = E((X - \mu)^2)$$

en donde $\mu = E(X)$ es la medida de distribución.

Lema 2: *Sea X una variable aleatoria con distribución F. Entonces se cumple que:*

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

Demostración: Tenemos que:

$$\begin{aligned} Var(X) &= E((X-\mu)^2) \\ &= E(X^2 - 2X\mu + \mu^2) \\ &= E(X^2) - 2\mu E(X) + \mu^2 \\ &= E(X^2) - 2\mu^2 + \mu^2 \\ &= E(X^2) - \mu^2 \\ &= E(X^2) - \big(E(X)\big)^2 \qquad\qquad qed \end{aligned}$$

Ejemplo: Calcular la esperanza y la varianza de la variable aleatoria $X \in Bern(p)$

Solución:

$$E(X) = \int x \; dF_x(x) = \sum\nolimits_{x_i} x_i f(x_i) = 0f(0) + 1f(1) = 0(1-p) + 1p = p$$

$$E(X^2) = \int x^2 \; dF_X(x) = \sum\nolimits_{x_i} x_i^2 f(x_i) = 0^2 f(0) + 1^2 f(1) = 0(1-p) + 1p = p$$

Entonces tenemos:

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = p - p^2 = p(1-p)$$

Lema 3: Sea X una variable aleatoria con distribución F. Entonces se cumple que:

$$Var(aX+b) = a^2 Var(X)$$

Demostración: Primero debemos tener en cuenta que $E(aX+b) = aE(X) + b$. Entonces tenemos:

$$\begin{aligned} Var(aX+b) &= E((aX + b - aE(X) - b)^2) \\ &= E(\big(aX - aE(X)\big)^2) \\ &= E(a^2(X-\mu)^2) \\ &= a^2 E((X-\mu)^2) \end{aligned}$$

Es decir, la varianza no es un operador lineal.

Tal como se había comentado para el caso unidimensional, al haber definido a la esperanza matemática mediante la integral de Riemann-Stieltjes, obtenemos una fórmula general para la misma que es válida tanto para variables aleatorias discretas como continuas, como así también para sus posibles combinaciones (variable aleatoria mixta).

Teniendo en cuenta lo anterior, la definición de la esperanza matemática mediante la integral de Riemann-Stieltjes también nos permite definir la esperanza matemática de la suma de $X + Y$ cuando, por ejemplo, X es continua e Y es discreta.

La esperanza de $X + Y$ no sería posible de calcular si hubiésemos definido solamente a la esperanza de variables aleatorias discretas y continuas como casos separados, es decir, con sumas e integrales ordinarias de Riemann.

Este es un fallo común que presentan los textos comunes de Teoría de Probabilidades y el hecho de utilizar en su lugar la integral de Riemann-Stieltjes.

Conclusión

La integral de Stieltjes es un concepto que generaliza a la integral de Riemann y que conserva, entre otras, algunas propiedades análogas como la linealidad del integrando por ejemplo. Además, en el curso de nuestro trabajo descubrimos que la definición dada por Stieltjes de esta integral no es única, existen más generalizaciones, principalmente la integral de Lebesgue, que sigue la línea de Stieltjes y amplía aún más el espectro de soluciones que la integral de Riemann no podía resolver.

Presentamos en primer término la integral de Riemann con sus definiciones para comprender a priori la idea del concepto a trabajar, para luego profundizar en los capítulos siguientes con la integral de Riemann-Stieltjes y los teoremas y definiciones más importantes que le dan sustento. Se continuó con una introducción al concepto de la $g\text{-}derivada$ y su aplicación para obtener el Teorema Fundamental del Cálculo para la integral de Stieltjes. En la parte final, la tesis estuvo dedicada a la aplicación en teoría de probabilidades y la definición de la esperanza matemática, por ser un campo abierto en cuanto ha contenido a trabajar eventualmente en la enseñanza media. En este último caso, no habría sido posible calcular la esperanza matemática de la suma de dos variables aleatorias, si hubiésemos definido solamente a la esperanza de variables aleatorias y continuas como casos por separados, es decir, como sumas e integrales ordinarias de Riemann. Por lo que se puede concluir y comprobar a ciencia cierta que este constituye un buen ejemplo que justifica la definición y aplicación de la integral de Riemann-Stieltjes como una herramienta útil en la solución de diversos problemas que la integral de Riemann no puede explicar por sí misma.

A lo largo de nuestro trabajo de tesis nos encontramos con algunas dificultades en cuanto a encontrar literatura disponible sobre la integral de Riemann-Stieltjes, puesto que la gran mayoría de los textos de estudio dedican sus presentaciones principalmente al desarrollo de la integral de Riemann, que por cierto constituye el primer acercamiento de los estudiantes de cursos superiores en el estudio del cálculo integral por la facilidad que presenta en la comprensión del concepto.

Finalmente en la realización de esta tesis dedicamos nuestro esfuerzo en intentar exponer los teoremas de la integral de Riemann-Stieltjes –dentro de lo posible- de una forma clara e intentando desarrollar las demostraciones paso a paso, teniendo presente que la compresión de este tipo de textos requiere por parte del lector de cierto dominio de los contenidos o estar al menos familiarizado en la lectura de los símbolos utilizados.

Bibliografía

1. Rudin, Walter. *Principios de Análisis Matemático*. 3ª edición, Editorial McGraw-Hill. México (1980)

2. Apostol, Tom. *Análisis Matemático*. Editorial Reverté S.A. Madrid (1960)

3. Pastor, Julio Rey. *Análisis Matemático. Volúmen II, Cálculo infinitesimal de varias variables.* 7ª edición. Editorial Kapelusz S.A. Argentina (1968)

4. Pastor, Julio Rey. *Historia de la Matemática, del Renacimiento a la actualidad*. Volúmen 2. Editorial Gedisa. Barcelona (2000)

5. Castillo, Erlín., Chapinz, Steven. *The fundamental theorem of calculus for the Riemann-Stieltjes integral*. Lecturas Matemáticas, volúmen 29, páginas 115-122 (2008) https://scholar.google.com/

6. *Apunte Integral de Riemann*. Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas de la Universidad de Chile. https://docencia.dim.uchile.cl/calculo_dif/material/tutoria_semana/semana07.pdf

7. *Apuntes de Probabilidad y Estadística.* Programa de Magíster en Estadística, Facultad de Ciencias de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

8. *Biografía Berhard Riemann*
   Encyclopaedia Britannica. https://www.britannica.com/biography/Bernhard-Riemann
   Wikipedia. https://es.wikipedia.org/wiki/Bernhard_Riemann
   Créditos Fotografía.
   https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Georg_Friedrich_Bernhard_Riemann.jpeg

9. *Biografía Thomas Stieltjes*
   Encyclopaedia Britannica. https://www.britannica.com/biography/Thomas-Jan-Stieltjes
   Wikipedia. https://en.wikipedia.org/wiki/Thomas_Joannes_Stieltjes
   Créditos Fotografía.
   https://commons.wikimedia.org/wiki/File:ThomasStieltjes.jpeg

10. *Recherches sur les fractions continues.* (Investigación sobre fracciones continuas) http://www.numdam.org/article/AFST_1894_1_8_4_J1_0.pdf