



UNIVERSIDAD DEL BÍO-BÍO
FACULTAD DE EDUCACIÓN Y HUMANIDADES
ESCUELA DE PEDAGOGÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

**LA SIMETRÍA CENTRAL COMO HERRAMIENTA IMPLÍCITA PARA
EL APRENDIZAJE DEL ÁREA DE SUPERFICIES PLANAS**

TESIS PARA OPTAR AL TÍTULO DE PROFESOR DE ENSEÑANZA MEDIA EN
EDUCACIÓN MATEMÁTICA

PROFESORA : PASCUAL PIZARRO, SARA
TESISTAS : RAMOS PALACIOS, LUIS EMILIO
VÁSQUEZ VÁSQUEZ, DANIELA ISABEL

CHILLÁN, CAMPUS LA CASTILLA
ENERO, 2015

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a todos aquellos quienes fueron mi fortaleza en los momentos de debilidad a lo largo de mi carrera, especialmente a Dios quien siempre me guía y acompaña.

Doy gracias a mi familia y a Susana mi polola por haber sido pilares fundamentales, ya que con su apoyo y cariño han sabido darme la oportunidad de formarme académicamente.

Luis Ramos

Agradezco a Dios por haberme acompañado y guiado a lo largo de mi carrera, por ser mi fortaleza en los momentos de debilidad y por brindarme una vida llena de aprendizajes, experiencias y sobre todo felicidad.

Les doy gracias a mi familia y amigos por su constante preocupación, en especial a mis padres Lidia y Patricio por apoyarme en todo momento, por los valores que me han inculcado, y por haberme dado la oportunidad de tener una excelente educación en el transcurso de mi vida.

Daniela Vásquez

Agradecemos de todo corazón a la profesora Sara Pascual, quien acepto orientarnos, guiarnos y ayudarnos en este trabajo de tesis sobre todo cuando más lo necesitábamos.

Luis y Daniela

RESUMEN

Esta tesis fue realizada con la finalidad de mostrar que es posible que estudiantes de séptimo básico construyan el concepto de área fuera de un contexto numérico a través de una situación didáctica, ocupando la simetría central como herramienta.

La situación didáctica está formada de cuatro momentos:

- I. realizamos los análisis preliminares en el cual se observaron los análisis epistemológicos y los problemas de aprendizaje con el concepto de área;
- II. luego efectuamos el diseño que permitió responder a nuestra pregunta de investigación y realizar los análisis *a priori* de las posibles respuestas que dieron los estudiantes;
- III. en seguida implementamos la situación didáctica en el colegio Parroquial Padre Lorenzo Mondanelli en el curso de séptimo básico, tomando como tiempo estimado para la realización de las actividades, tres sesiones de noventa minutos cada una;
- IV. finalmente realizamos los análisis *a posteriori* de los resultados obtenidos en la experimentación y contestamos nuestra pregunta de investigación.

ABSTRACT

This thesis was performed in order to show that it is possible that students of seventh grade to build the concept of area through a didactic situation and out of a numerical context, occupying the central symmetry as a tool.

The didactic situation consists of four moments:

- I. we perform preliminary analysis in which the epistemological analysis were observed and learning problems with the concept of area;
- II. we carried out the design that allowed answer our research question and tests a priori of possible answers given by the students;
- III. immediately we implement the didactic situation in the Parroquial Padre Lorenzo Mondanelli School during seventh grade, taking as estimated for the implementation of activities time, three sessions of ninety minutes each;
- IV. finally we realize the post analysis of the results of experimentation and answer our research question.

TABLA DE CONTENIDOS

| | |
|--|-----------|
| AGRADECIMIENTOS..... | 2 |
| RESUMEN..... | 3 |
| ABSTRACT..... | 4 |
| INTRODUCCIÓN..... | 10 |
| 1. PROBLEMÁTICA DE LA INVESTIGACIÓN..... | 11 |
| 1.1 Sobre la noción de área..... | 11 |
| 1.2 Dificultades de la concepción del área..... | 12 |
| 1.3 La enseñanza de la noción de área..... | 15 |
| 1.4 Objetivo de investigación..... | 18 |
| 1.5 Pregunta de investigación..... | 18 |
| 1.6 Hipótesis de investigación..... | 18 |
| 2. MARCO TEÓRICO..... | 19 |
| 2.1 Teoría de Situaciones Didácticas..... | 19 |
| 2.2 Dialéctica herramienta-objeto..... | 22 |
| 2.3 Niveles de explicitación puestos en contribución en el aprendizaje | 25 |
| 3. METODOLOGÍA..... | 27 |
| 3.1 Sujetos de estudio. | 27 |
| 3.2 La ingeniería didáctica como metodología de la investigación..... | 27 |
| 3.3 Actividad didáctica..... | 30 |
| 3.3.1 Objetivos..... | 31 |
| 3.3.2 La secuencia didáctica..... | 32 |
| 3.3.3 Actividad 1 | 34 |
| 3.3.4 Actividad 2..... | 36 |
| 3.3.5 Actividad 3 | 37 |
| 3.3.6 Actividad 4..... | 39 |

| | | |
|-----------|--|-----------|
| 3.4 | Clasificación respecto a los niveles de explicitación..... | 40 |
| 3.4.1 | Actividad 1..... | 41 |
| 3.4.2 | Actividad 2..... | 43 |
| 3.4.3 | Actividad 3..... | 44 |
| 3.4.4 | Actividad 4..... | 45 |
| 3.5 | La experimentación..... | 48 |
| 3.5.1 | Experimentación de las situaciones problemas..... | 48 |
| 4. | ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE DATOS..... | 50 |
| 4.1 | Algunos textos de estudio que orienten la enseñanza del área..... | 50 |
| 4.2 | Análisis <i>a posteriori</i> | 51 |
| 4.2.1 | Actividad 1..... | 52 |
| 4.2.2 | Actividad 2..... | 57 |
| 4.2.3 | Actividad 3..... | 60 |
| 4.2.4 | Actividad 4..... | 64 |
| 4.3 | Clasificación de los equipos respecto a los niveles de aprendizaje.. | 68 |
| 5. | CONCLUSIONES..... | 71 |
| | Principales resultados de la investigación..... | 71 |
| | BIBLIOGRAFÍA..... | 72 |

LISTA DE TABLAS

| | |
|---|----|
| Tabla 1. Matriz de competencias consigna 1..... | 41 |
| Tabla 2. Matriz de competencias consigna 2..... | 43 |
| Tabla 3. Matriz de competencias consigna 3..... | 44 |
| Tabla 4. Matriz de competencias consigna 4..... | 45 |
| Tabla 5. Clasificación de los equipos respecto al nivel de aprendizaje..... | 70 |

LISTA DE FIGURAS

| | |
|--|----|
| Figura 1. Programas de Estudio de Educación Matemáticas diseñados por el Ministerio de Educación (2014)..... | 16 |
| Figura 2. Actividad extraída del texto del estudiante 5° básico año 2014, MINEDUC..... | 17 |
| Figura 3. Posibles procedimientos de recortado actividad 1..... | 41 |
| Figura 4. Posibles procedimientos de recortado actividad 1..... | 42 |
| Figura 5. Posible procedimiento de recortado actividad 2..... | 43 |
| Figura 6. Posibles formas de reconstruir la hoja inicial..... | 45 |
| Figura 7. Posibles clases de particiones..... | 47 |
| Figura 8. Actividad extraída del texto del estudiante 5° básico año 2014..... | 50 |
| Figura 9. Definición de área según el texto del estudiante 4° básico año 2012..... | 51 |
| Figura 10. En busca de una estrategia de recortado grupo 1..... | 51 |
| Figura 11. Producciones realizadas por Diego..... | 52 |
| Figura 12. Relaciones encontradas grupo 1, consigna1..... | 52 |
| Figura 13. Relaciones encontradas grupo 1, consigna1..... | 53 |
| Figura 14. Relaciones encontradas grupo 1, consigna 1..... | 53 |
| Figura 15. En busca de una estrategia de recortado grupo 2..... | 53 |
| Figura 16. Producciones realizadas por Marcela..... | 54 |
| Figura 17. Relaciones encontradas grupo 2, consigna 1..... | 55 |
| Figura 18. Relaciones encontradas grupo 2, consigna | 55 |
| Figura 19. En busca de una estrategia de recortado grupo 3..... | 55 |
| Figura 20. Producciones realizadas por los estudiantes..... | 56 |
| Figura 21. Relaciones encontradas grupo 3, consigna 1..... | 56 |
| Figura 22. Relación encontrada grupo 1 consiga 2..... | 57 |
| Figura 23. Producciones realizadas por Diego y Roberto..... | 58 |
| Figura 24. Relaciones encontradas grupo 2, consigna 2 | 58 |
| Figura 25. Producciones realizadas por Marcela y Esteban..... | 59 |

| | |
|--|----|
| Figura 26. Relaciones encontradas grupo 3, consigna 2..... | 60 |
| Figura 27. Observación grupo 1, consigna 3..... | 61 |
| Figura 28. Producciones realizadas por Diego y Roberto..... | 61 |
| Figura 29. Observación grupo 2, consigna 3 | 62 |
| Figura 30. Observación grupo 2, consigna 3..... | 62 |
| Figura 31. Producciones realizadas por Esteban y Marcela..... | 62 |
| Figura 32. Observación grupo 3, consigna 3..... | 63 |
| Figura 33. Producciones realizadas por Francisco y Javiera..... | 64 |
| Figura 34. Observación creación de nuevas clases de partición grupo 1..... | 65 |
| Figura 35. Producciones realizadas por Diego y Roberto..... | 65 |
| Figura 36. Observación creación de nuevas clases de partición grupo 2..... | 66 |
| Figura 37. Producciones realizadas por Marcela y Esteban..... | 66 |

INTRODUCCIÓN

Nuestro estudio pretende diseñar una situación didáctica para enseñar los conceptos de área, perímetro y superficie. Esta situación didáctica tiene por finalidad que los alumnos construyan por sí mismos el concepto de área, y lo relacionen con el perímetro y la superficie, es decir, que obtengan las relaciones que existen entre dichos conceptos. Esta secuencia didáctica posee tres etapas: puesta en acción de los alumnos, una puesta en grupo, una puesta en común y síntesis de una institucionalización.

Nuestra principal motivación fue que, encontramos en los estudiantes problemas y dificultades para relacionar y conceptualizar los conceptos de área y superficie, además de poseer dificultades en las relaciones que existen entre área y perímetro, debido a que creen que el perímetro varía de igual modo que el área; asocian, incluso, el concepto de área a una medida de longitud.

Es por ello que proponemos una situación didáctica para enseñar el área de figuras planas, cuya finalidad es permitir reactivar la mirada sobre las áreas y despegarlas de cierto modo de su medida. Nos inspiramos en una Ingeniería Didáctica (Artigue, 2002) en conexión directa con la Teoría de Situaciones Didácticas (Guy Brousseau, 1998) utilizando la Dialéctica herramienta-objeto (Regine Douady, 1984) para intentar proporcionar una respuesta a las preguntas de nuestra investigación, utilizando la simetría como herramienta para entender la noción de área de figuras planas.

1. PROBLEMATICA DE LA INVESTIGACION

1.1 Sobre la historia de la noción de área

La historia nos muestra que la noción del concepto de área comienza con la agricultura y la cerámica (1500 A.C). Estas actividades conllevan una serie de problemas como son el almacenamiento de la abundante producción y la decoración de vasijas con algunos patrones geométricos. La reflexión para resolver estos problemas es lo que forzó a plantearse la medición de la superficie.

Por su parte, Pitágoras (584-504 A.C) plantea la superposición de un área sobre otra que según esta concepción, el área no es una propiedad exclusiva de una figura determinada, sino que figuras distintas pueden tener la misma área, esto proporciona la posibilidad de compararlas. La idea de comparación de áreas domina todo el pensamiento griego y obliga a hablar de razón de superficies, más que del área de una figura.

Eudoxo (408-355 A.C) es quien da la solución a la comparación de figuras curvilíneas y rectilíneas. Se trata de inscribir y circunscribir figuras rectilíneas a figuras curvilíneas y amplificar el número de lados o caras indefinidamente, con la idea que las figuras rectilíneas se aproximarán cada vez más a la curvilínea. Problemas que no supieron cerrar ya que la idea de límite era desconocida.

Fue Lebesgue (1975), en los primeros años del siglo XX, quien elabora la teoría de la medida regresando a los métodos intuitivos anteriores de Cauchy (1823). Así la definición de medida da a estos matemáticos una fundamentación lógica sólida. Por tanto, fueron muchos los siglos que debieron transcurrir hasta poder obtener la primera definición matemática de área, enunciada por Peano (1887), gracias a la definición de límite dada por Cauchy entre otros, pero apoyándose en la idea de Eudoxo.

1.2 Dificultades de la concepción de área

Dentro de los trabajos realizados sobre la enseñanza y el aprendizaje del concepto de área, han sido tres los autores que han abordado un estudio teórico del concepto, si bien se apoyan en teorías didácticas distintas: Feudenthal (1983) quien realiza un estudio teórico sin concretar ninguna propuesta curricular, Heraud (1989) y Perrin-Glorian (1992) conducen sus investigaciones hacia la elaboración de una secuencia didáctica de enseñanza del área, concretada, en el caso de Perrin-Glorian (1992), en una propuesta con actividades específicas. Además, el trabajo desarrollado por esta última investigación posee un carácter general y es aplicable al área de cualquier tipo de superficie, mientras que el realizado por Heraud se restringe al estudio del área del rectángulo.

En las investigaciones realizadas por Perrin-Glorian (1992), Tierney, Boyd y Davis (1990) apuntan a las concepciones que los alumnos poseen sobre el área. Todos ellos coinciden en afirmar que la mayoría de los alumnos desarrollan una concepción numérica del área. *Para los estudiantes, el área es un número que se calcula.* De ahí la fuerte tendencia que tienen a recurrir a los números y simplemente reducir la comparación de las áreas de superficies a la comparación de números.

Se ha comprobado que, incluso para algunos alumnos, el área se reduce a la fórmula "*longitud* \times *anchura*". Los autores Tierney, Boyd y Davis (1990) en su trabajo con futuros profesores de primaria, al preguntarles sobre lo que enseñarían a niños de 10 años sobre el área, encontraron que el 80% de ellos dibujó un rectángulo y escribió " $L \times A$ " acerca de éste. Por su parte, Perrin-Glorian (1992) también advierte de la concepción del área como "*un número que se puede calcular*".

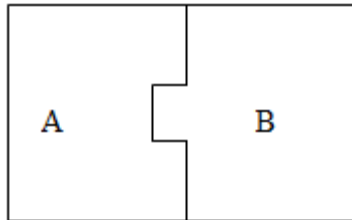
Mater y Beattys (1986) encontraron que la mayoría de los estudiantes de 11 a 13 años no aplicaron el concepto de área para definir el tamaño de una región y Hieber (1981) tras el análisis de resultados procedentes de *National Assessment of Educational Progress* (NAEP), constató que la mayoría de los niños de 9 años no comprenden que la medida del área viene dada por el número de unidades que

recubre exactamente la región, al comprobar que más de $2/3$ de estos niños fracasaron al dar el área de un rectángulo, cuando solo necesitaban contar las unidades cuadradas que lo recubrían.

Algunos investigadores como Carpenter y *al.* (1980); Douady y Perrin-Glorian (1989); Ramalho y Correia (1995), también detectaron que los alumnos tienen algunas concepciones erróneas del área, ocasionadas por la confusión área-perímetro, que les lleva a asociar el área a una longitud, y área-superficie. El error más común se produce en los ejercicios de cálculo de áreas, en los cuales los estudiantes confunden las fórmulas de área y perímetro.

Del mismo modo, Bang (1976) y Perrin-Glorian (1992), han destinado una gran parte de su trabajo al estudio de la variación área-perímetro cuando una superficie es sometida a transformaciones de diferente naturaleza, y han constatado que para los alumnos existe una íntima relación entre área y perímetro. Es decir, si el perímetro de una superficie aumenta, su área también (y recíprocamente) y si dos superficies tienen el mismo perímetro también tendrán la misma área (y recíprocamente).

Un estudio sacado de un extracto de las Evaluaciones Nacionales en Matemáticas (1992) para el ingreso a sexto básico, nos muestra los errores reproducibles que producen los alumnos es el siguiente ejercicio:



"Un terreno ha sido dividido como se indica en la figura".

En cada caso, marque la respuesta más adecuada.

- | | | |
|--|---------------------------------------|--|
| a) El área de la parcela A es más grande | Las dos parcelas tienen la misma área | El perímetro de la parcela B es más grande |
|--|---------------------------------------|--|

Analice y explique su respuesta.

- | | | |
|---|--|--|
| b) El perímetro de la parcela A es más grande | Las dos parcelas tienen el mismo perímetro | El perímetro de la parcela B es más grande |
|---|--|--|

Analice y explique su respuesta:

.....

Los resultados nacionales dan un 90,6% de respuestas correctas a la pregunta sobre las áreas (60% con una justificación correcta eventualmente mal dirigida). La pregunta sobre los perímetros da un 34,5% de respuestas correctas, 40,8% de los alumnos afirman que el "perímetro de la parcela B es más grande".

Tales errores están vinculados con el saber en juego y son reveladores de obstáculos (Brousseau, 1998). Algunos trabajos recientes en didáctica de la matemática analizan estos errores relacionándolos a las prácticas pedagógicas.

Por ejemplo, en este ejercicio, los alumnos consideran que el área y el perímetro son magnitudes relacionadas que varían en el mismo sentido. "Más aumenta el área, más aumenta el perímetro", se observa sin dificultad que la parcela

B es más grande que la parcela A (área (B) > área (A)). Pareciera entonces que el contorno de B es más grande que el contorno de A (perímetro (B) > perímetro(A)). Esto se produce, porque los alumnos en su mayoría, no tienen la práctica de verificar sus hipótesis.

Si un error tipo es cometido por un cierto número de alumnos en una actividad dada, es razonable pensar que el error depende menos del alumno que de la propia actividad y de los conocimientos (correctos o erróneos) que la actividad requiere.

Es evidente que estos dos conceptos geométricos: área y perímetro, tienen muchos elementos en común sobre el plano científico, pero muchos otros, son simplemente supuestos sobre el plano de las concepciones, comunes en los estudiantes de todo grado escolar.

1.3 La enseñanza de la noción de área

En la enseñanza tradicional, el currículum escolar (actualización 2012 -2013. MINEDUC) nos muestra que el concepto de área es enseñado de forma inversa con respecto a su construcción epistemológica, ya que la historia nos ha mostrado que el concepto de área se construyó a partir de relaciones entre patrones geométricos, y luego, a esos patrones se les introduce una medida con la finalidad de responder a ciertos problemas relacionados con la medición de superficies de formas curvilíneas, contrario a como es enseñado actualmente en la enseñanza tradicional.


El diagrama nos muestra que los estudiantes en etapas muy temprana de su escolaridad, se les pide que identifiquen y comparen medidas (1° Básico), determinar la longitud de objetos para resolver problemas (2° Básico), y luego en 3° Básico se les pide a los alumnos demostrar una comprensión sobre el concepto de perímetro utilizando como herramienta principal la medición. Es por ello que los conceptos de área y perímetro no son bien aprendidos y conceptualizados por los alumnos ya que se les introduce muy tempranamente la noción de medida, lo que crea obstáculos en

el aprendizaje de los conceptos de área y perímetro y las relaciones existentes entre ellos.



Figura 1. Programas de Estudio de Educación Matemáticas diseñados por el Ministerio de Educación (2014).

La figura corresponde a una actividad extraída del texto escolar editorial Galileo año 2014, la cual nos muestra la forma en que es aplicado el concepto de área y perímetro. Esta actividad está orientada en calcular y obtener resultados utilizando el empleo de fórmulas, lo que incita a cometer el error de confundir la fórmula de área y perímetro, ocasionando la confusión de estos dos conceptos.

EN TU CUADERNO 

1. Completa las siguientes tablas utilizando las fórmulas aprendidas para el cálculo de perímetros y de áreas. Luego responde:

| Cuadrado de lado a | Perímetro | Área |
|--------------------|-----------|------|
| 6 mm | | |
| 9 cm | | |
| 10 m | | |

| Rectángulo de lados: | | Perímetro | Área |
|----------------------|------|-----------|------|
| a | b | | |
| 7 cm | 3 cm | | |
| 9 mm | 2 mm | | |
| 5 cm | 4 cm | | |

a) ¿Cómo puedes calcular el perímetro de un cuadrado sabiendo que la medida de su lado es a?, ¿y la de un rectángulo de lados a y b?

b) ¿Cómo puedes calcular el área de un cuadrado sabiendo que la medida de su lado es a?, ¿y la de un rectángulo de lados a y b?

c) Si el área de un cuadrado es 64 cm^2 , ¿cuánto mide su lado?

2. Resuelve los siguientes problemas y explica paso a paso el procedimiento que utilizaste.


a) El área de un cuadrado es de 81 cm^2 . ¿Cuánto mide cada lado?

b) Determina la medida de los lados de un rectángulo, sabiendo que su área es 180 cm^2 y su perímetro es 54 cm.

c) Si el área de un rectángulo es 28 cm^2 y el ancho es 3 cm más corto que su largo, ¿cuál es la

3. ¿Cuántos cuadrados o rectángulos diferentes de área 36 cm^2 se pueden encontrar? Dibújalos y comenta con tu compañera o compañero.

4. Si en un cuadrado la medida de su lado se duplica, ¿cómo varía su perímetro?, ¿y su área?, ¿y si se triplica? Compara tu respuesta.

EN EQUIPO 

Materiales:
• Cinta métrica

En esta actividad deberán calcular áreas en su sala de clases. Formen grupos de tres Integrantes y sigan las instrucciones:

- Con la cinta métrica, cada uno mide las dimensiones de una pared y el piso de la sala de clases.
- Cada integrante calcula el área de cada pared y del piso de su sala. Luego, comparen los procedimientos utilizados.

Geometría **143**

Figura 2. Actividad extraída del texto del estudiante 5° básico año 2014, MINEDUC.

Por tanto, el objetivo del área en los niveles de escolaridad básica y medio no está centrado en la búsqueda de la definición de área, sino en el estudio de diversos procedimientos que permiten medir y comparar áreas de superficies planas. Procedimientos que utilizan implícitamente las propiedades que satisface el área

consideradas como función y que permite determinar la medida del área de superficies planas. Propiedades que, como ha sucedido a lo largo de la historia, serán utilizadas sin necesidad de ser demostradas rigurosamente.

1.4 Pregunta de investigación

¿Cómo lograr que estudiantes de nivel básico (12 años) se apropien del concepto de área y de la noción de medida, distinguiendo el área del perímetro?

Para responder a esta pregunta, pensamos proponer una situación didáctica que permita utilizar el área como objeto y la simetría central como herramienta de resolución a los problemas propuestos y deducir de ello algunas de las propiedades que posee el área.

1.5 Objetivo de investigación

Nuestro objetivo de investigación es estudiar una nueva manera de enseñar el concepto de área y la noción de medida, pensando en una secuencia de tareas que permita a los estudiantes construir y comprender los conceptos de área, perímetro y forma de una superficie deduciendo algunas de sus propiedades.

1.6 Hipótesis de investigación

Para acercarnos a nuestro objetivo de investigación, formulamos la hipótesis:

“es posible que los estudiantes logren construir el concepto de área y la noción de medida, con el fin de hacer funcionar el área como objeto y la simetría central como herramienta implícita para la resolución de los problemas propuestos.”

2. MARCO TEORICO

2.1 Teoría de situaciones didácticas

"... la teoría de situaciones didácticas estudia: la búsqueda y la invención de situaciones características de los diversos conocimientos matemáticos enseñados en la escuela, el estudio y la clasificación de sus variantes, la determinación de sus efectos sobre las concepciones de los alumnos, la segmentación de las nociones y su organización en procesos de aprendizaje largos, constituyen la materia de la didáctica de la matemática y el terreno al cual la teoría de las situaciones provee de conceptos y de métodos de estudio."

(G. Brousseau, 1986)

Y. Chevallard y S. Johsua (1982) describen el sistema didáctico, en sentido estricto, que está formado esencialmente por tres subsistemas: profesor-alumno-saber. Un aporte de la Teoría de Situaciones Didácticas al estudio de los procesos de aprendizaje de las matemáticas en el contexto escolar es la inclusión en el clásico triángulo didáctico "profesor-alumno-saber", de un cuarto elemento: el medio. El medio se define como el objeto de interacción de los alumnos: es la tarea específica que deben llevar a cabo, y las condiciones en que se deben realizar. En un sentido más amplio, se refiere al subsistema en el cual actúa el alumno (situaciones didácticas, materiales, etc.).

En la Teoría de Situaciones Didácticas de G. Brousseau (1998) las situaciones en la clase se modelizan en dos situaciones, las situaciones didácticas y a-didácticas.

Una *situación didáctica* es un conjunto de relaciones explícitas y/o implícitamente establecidas entre un alumno o un grupo de alumnos, algún entorno (que puede incluir instrumentos o materiales) y el profesor, con el fin de permitir a los alumnos aprender, esto es, reconstruir algún conocimiento.

Mientras que una *situación a-didáctica* es cuando el alumno y el profesor logran que el primero asuma el problema planteado como propio y entre en un

proceso de búsqueda autónomo, sin ser guiado, por lo que pudiera suponer que el profesor espera; es por tanto, aquella situación que se produce un aprendizaje por adaptación, se da cuando existe una interacción con el sujeto y el medio para resolver un problema. Como el medio es impersonal, no tienen ninguna intención didáctica: no desea enseñarle nada al alumno. En esta situación, el profesor desea enseñar el saber al alumno (en este caso el concepto de área), no comunicándoselo directamente, sino planteándole una situación *a-didáctica* (en el interior de la situación didáctica), planeada para producir un aprendizaje por adaptación. Con este fin, el profesor prepara cuidadosamente un medio con el cual el alumno podrá interactuar, y un problema que produzca en el alumno una intención y desencadene acciones sobre el medio.

El producto de esa situación *a-didáctica* es un conocimiento: una estrategia que permite resolver el problema. Según la teoría de situaciones didácticas, el conocimiento es diferente del saber, ya que, el conocimiento es personal y contextualizado, mientras que el saber es impersonal y descontextualizado. Por lo tanto, una vez finalizada la situación *a-didáctica*, el profesor debe explicitar las relaciones entre el conocimiento construido por el alumno, gracias a la situación *a-didáctica*, y el saber que desea enseñar. A este proceso se le llama *institucionalización*.

Tenemos entonces al interior de la situación *didáctica* una situación *a-didáctica*, la que utilizaremos para que los alumnos construyan un conocimiento, al cual podrá referirse para exponer el saber. Nuestra función como docentes es la de preparar la situación *a-didáctica*: debemos elaborar cuidadosamente el medio y el problema que se planteará a los alumnos para encontrar entonces, en el caso tradicional, dónde la estrategia de base es sobrepasada. Una pregunta fundamental que se plantea en el cuadro de las teorías de situaciones didácticas es ¿la interacción con el medio nos permite sobrepasar la estrategia de base? A lo que se responde, considerando el cuadro de las teorías de situaciones didácticas, es la identificación de las posibles estrategias, de su costo y de su eficacia teniendo en cuenta el

contexto, inferencias sobre la dinámica previsible de la situación en el cuadro de un funcionamiento a-didáctico como previsto.

Tipos de situaciones didácticas

La teoría de Brousseau plantea una tipología de situaciones didácticas. Cada una de ellas debería desembocar en una situación *a-didáctica*, es decir, en un proceso de confrontación del alumno ante un problema dado, en el cual construirá su conocimiento.

Dentro de las situaciones didácticas tenemos:

1. Situación de acción:

Consiste en que el alumno trabaje individualmente con un problema, aplique sus conocimientos previos y desarrolle un determinado saber. Es decir, el alumno individualmente interactúa con el medio didáctico, para llegar a la resolución de problemas y a la adquisición de conocimientos.

2. Situación de formulación:

Consiste en un trabajo en grupo, donde se requiere la comunicación de los alumnos, compartir experiencias en la construcción del conocimiento. Por lo que en este proceso es importante el control de la comunicación de las ideas.

La situación de formulación es básicamente enfrentar a un grupo de alumnos con un problema dado. En este sentido hay elementos que menciona Brousseau, esto es, la necesidad de que cada integrante del grupo participe del proceso, es decir, que todos sean forzados a comunicar las ideas e interactuar con el medio didáctico.

3. *Situación de validación:*

Una vez que los alumnos han interactuado de forma individual o de forma grupal con el medio didáctico, se propone a juicio de un interlocutor, el proceso obtenido de esta interacción. Es decir, se valida lo que se ha trabajado, se discute con el profesor acerca del trabajo realizado para verificar si realmente es correcto.

4. *Situación de institucionalización:*

A pesar de no construir una situación *a-didáctica*, la institucionalización del saber, representa una actividad de suma importancia en el cierre de una situación didáctica y tiene por finalidad establecer y dar un status oficial a algún conocimiento, las representaciones simbólicas, etc., que deben ser retenidas para el trabajo posterior. En ésta, los alumnos ya han construido su conocimiento y, simplemente, el profesor en este punto, retoma lo efectuado hasta el momento, lo formaliza, aporta observaciones y clarifica conceptos frente a los cuales, en la situación *a-didáctica* tuvo problemas. Es la presentación de los resultados, todo en orden, así como todo lo que estuvo detrás de la construcción de ese conocimiento (situaciones didácticas anteriores).

2.2 Dialéctica Herramienta-objeto

Régine Douady (1983) plantea la noción de dialéctica herramienta-objeto al proceso cíclico en el que se organizan los roles respectivos del docente y de los alumnos, donde los conceptos matemáticos juegan recíprocamente el rol de herramienta para resolver un problema y de objeto que toma un lugar en la construcción de un saber organizado.

"Decimos que un concepto es una herramienta cuando focalizamos nuestro interés sobre su uso para resolver un problema.[...] entendemos por objeto el objeto cultural que tiene su lugar en un edificio más grande que es el saber sabio en su momento dado".

(Douady ,1983)

Douady (1990) describe que el funcionamiento de la didáctica herramienta-objeto, está caracterizada por la siguiente organización esquemática:

1. *Fase de lo antiguo:*

Consiste en utilizar una herramienta conocida para enfrentar un procedimiento de la resolución del problema.

2. *Fase de investigación:*

En esta fase el alumno se encuentra con dificultades para resolver el problema utilizando la estrategia que ocupó, es por ello que busca otro medio mejor adaptado para resolver el problema. Se reconoce ahí el inicio de la fase de acción. Él puede entonces, poner en acción herramientas nuevas ya sea por la extensión, por el campo de validez o por la naturaleza de las mismas.

Esquemáticamente hablamos en esta etapa de "*nuevo implícito*".

Del punto de vista de los alumnos, las concepciones de la acción en este momento van a entrar en conflicto con las antiguas. Los errores pueden convertirse en juegos de procesos dialécticos de formulación y validación propias, para resolver los conflictos y asegurar las integraciones necesarias. Puede también que, convicciones contradictorias, permanezcan sin respuestas, aunque fructíferas.

3. *Fase de explicitación:*

En la etapa anterior ciertos elementos han jugado un rol importante, incluso decisivo y son susceptibles de ser apropiados en ese momento del aprendizaje, ellos son entonces formulados ya sea en términos de objeto, ya sea en términos de prácticas, con su condición de empleo del momento. Se trata del "*nuevo explícito*" susceptible de reutilización y familiarización.

4. *Intervención del profesor:*

Puede suceder en el transcurso de la investigación o explicitación, que el profesor se dé cuenta que la situación tiene el riesgo de bloquearse si él no interviene, o que él

lo perciba demasiado tarde y que tenga que desbloquear. Resuelve, según su análisis de la situación didáctica, tomar la decisión de intervenir o no, y si es necesario, elegir el momento y la forma de la intervención, respetando la maniobra de los alumnos.

5. *Fase de institucionalización:*

El profesor pasa en este momento a una etapa de institucionalización de lo que es nuevo y a retener con las convicciones en curso, si se da el caso de definiciones, teoremas y demostraciones. Esto nuevo que hay que retener, está destinado para funcionar posteriormente como antiguo.

6. *Fase de familiarización-reinversión:*

Se entrega enseguida a los alumnos diversos problemas destinados a provocar el funcionamiento como herramientas explícitas de lo que ha sido institucionalizado, a desarrollar costumbres y prácticas, a integrar el saber social en el saber del alumno.

7. *Fase de complejidad de la tarea o nuevo problema:*

Queda solo por utilizar los nuevos conocimientos en el seno de una situación compleja implicando otros conceptos ya sean conocidos, o contemplados por el aprendizaje.

El nuevo objeto es susceptible de tomar un lugar como "antiguo" para un nuevo ciclo de la dialéctica herramienta-objeto.

La estructura personal del saber es de primera importancia en matemáticas, para que haya efectivamente saber. Esta estructuración ha sido bien comprometida en el proceso desarrollado. Sin embargo, para perfeccionarla, el alumno tiene todavía necesidad de poner a prueba eventualmente en los ensayos renovados, él solo, los conocimientos que cree haber adquirido y hacer un balance con lo que él sabe.

Observemos que no es necesaria que todas las nociones contempladas por el aprendizaje sean introducidas en una dialéctica herramienta-objeto. Algunas pueden ser aportadas directamente por el profesor, faltando por definir la organización de la materia para enseñar la estrategia que utilizaremos, de tal forma que los alumnos entreguen aportes directos, además de definir una estrategia para adaptarnos a las reacciones de las clases.

2.3 Niveles de explicitación puestos en contribución en el aprendizaje

Este análisis por competencias condujo a Caron (2004) a resaltar la importancia del trabajo de explicitación puesto en contribución en el aprendizaje de las matemáticas. Describe este trabajo con niveles, pero no contemplado como etapas que hay que respetar en el aprendizaje, sino, por el contrario, considera que la formación de un concepto matemático siempre debería estar dirigida a la comprensión y estructuración del propio concepto:

Nivel de asociación:

En el primer nivel nos encontramos con las siguientes asociaciones: leer, reconocer, recordar, memorizar y reproducir una expresión, una figura, una definición o un enunciado.

Nivel de comprensión:

En este segundo nivel de comprensión encontramos: búsqueda de sentido, establecimiento de vínculos con otros objetos, teorías o aplicaciones.

Nivel de estructuración:

En el tercer nivel se trata de organizar y, eventualmente, a sintetizar los conceptos en función de su generalidad y la naturaleza de las relaciones que las vinculan (equivalencia, orden, jerarquía, causalidad, etc.).

Nivel de reformulación:

En este último nivel, se pretende llegar a una transferencia eficaz de los conocimientos o a un conflicto y a una revisión consecuente de las estructuras que parecen plantear el problema.

Este modelo de nivel de habilidades de explicación permite explicar las dificultades de algunos estudiantes para juzgar, probar o abordar y resolver nuevos problemas en su proceso de aprendizaje: tratando de memorizar fórmulas, para reconocer enunciados de los problemas para identificar la metodología y depender exclusivamente las respuestas dadas a validar su enfoque, que están tratando de desarrollar habilidades de intervención, trabajando casi exclusivamente a un nivel de asociación en la explicación, dejando de lado el nivel de comprensión y estructuración según la forma. Tal estrategia de aprendizaje es exigente en términos de almacenamiento e ineficiente. Al alentaren la formación, existe un riesgo de eliminar desde el principio que muchos estudiantes no visualicen con claridad el problema.

3. METODOLOGÍA

3.1 Sujetos de estudio

Este análisis establecido en la implementación de una estrategia didáctica basada en la enseñanza del área de figuras planas se desarrollará en el Colegio Parroquial de Coihueco.

Para llevar a cabo nuestra situación didáctica, hemos seleccionado una muestra de dicho establecimiento, la cual consiste en alumnos/as que se encuentran cursando Séptimo básico ya que en sus años de escolaridad aun no han incorporado el concepto de área, lo que facilita la incorporación de un nuevo concepto.

3.2 La ingeniería didáctica como metodología de la investigación

Según R. Douady (1993) el término ingeniería didáctica: designa un conjunto de secuencias de clases concebidas, organizadas y articuladas en el tiempo, de manera coherente, por un *profesor-ingeniero* para realizar un proyecto de aprendizaje (en nuestro caso basado en la construcción del concepto de área), designada para una cierta población de alumnos. En el transcurso de las interacciones entre el profesor y los alumnos, el proyecto evoluciona bajo las reacciones de los alumnos y en función de las elecciones y decisiones del profesor. De esta manera, la ingeniería didáctica es a la vez un producto -resultado de un análisis *a priori*- y un proceso -resultado de una adaptación- a la puesta en acción del producto en condiciones dinámicas de clases.

La metodología de la ingeniería didáctica se caracteriza, también, en comparación con otros tipos de investigación basados en la experimentación en la clase, y por la forma de validación a las que está asociada. De hecho, las investigaciones que recurren a la experimentación en clase, se sitúan por lo general

dentro de un enfoque comparativo con validación externa, basada en la comparación estadística del rendimiento de grupos experimentales y grupos de control. Este no es el caso de la ingeniería didáctica, que se ubica, por el contrario, en el estudio de caso y cuya validación es en esencia interna, basada en la confrontación entre el análisis *a priori* y *a posteriori*.

La teoría didáctica en general constituye un apoyo imprescindible para el diseño de la ingeniería didáctica. Así, por ejemplo, un estudio previo del campo conceptual que englobe las nociones en cuestión parece necesario, tanto para no perder aspectos importantes del concepto, como para no limitar su potencial riqueza.

Las distintas fases de la ingeniería didáctica son (Artigue, 1990):

1. *Análisis preliminares*

En esta fase se busca profundizar: el análisis epistemológico de los contenidos contemplados en la enseñanza; el análisis de la enseñanza tradicional y sus efectos; el análisis de las concepciones, de las dificultades y de los obstáculos que determinan su evaluación y, finalmente, de las restricciones donde se va a situar la acción didáctica.

Michel Artigue (1995) señala que los estudios preliminares tan solo mantienen su calidad de preliminares en su primer nivel de elaboración. Posteriormente, van tomando distintos lugares y funciones en la investigación.

2. *Diseño y análisis a priori de las situaciones de la ingeniería didáctica*

En esta segunda fase se toma la decisión de actuar sobre un determinado número de variables del sistema que no estén fijadas por las restricciones. Estas son

las variables de comando que el investigador percibe como pertinentes con relación al problema estudiado.

3. *Experimentación*

Es la fase de la realización de la ingeniería con una cierta población de estudiantes. Esa etapa se inicia en el momento en que se da el contacto investigador/profesor/observador con la población de los estudiantes objeto de la investigación. Por su parte, la investigación supone: la explicitación de los objetivos y condiciones de realización de la investigación a los estudiantes que participarán de la experimentación; el establecimiento del contrato didáctico; la aplicación de los instrumentos de investigación; el registro de observaciones realizadas durante la experimentación.

Durante la experimentación se busca respetar las selecciones y deliberaciones hechas en los análisis *a priori*.

4. *Análisis a posteriori*

Esta última fase de la ingeniería didáctica se basa en el conjunto de datos recolectados a lo largo de la experimentación, es decir, las observaciones realizadas de las secuencias de enseñanza, al igual que las producciones de los estudiantes en el aula o fuera de ella. Estos datos se completan con otros obtenidos mediante la utilización de metodologías externas: cuestionarios, entrevistas individuales o en pequeños grupos, realizadas durante cada sesión de la enseñanza, etc.

La validación o refutación de las hipótesis formuladas en la investigación se fundamenta en la confrontación de los análisis *a priori* y *a posteriori*.

“En la mayoría de los textos publicados concernientes a ingenierías, la confrontación de los dos análisis, a priori y a posteriori, permite la aparición de distorsiones. Éstas están lejos de ser siempre analizadas en términos de validación; esto es, no se

busca en las hipótesis formuladas aquello que las distorsiones constatadas invalidan. Con frecuencia, los autores se limitan a proponer modificaciones de ingeniería que pretenden reducirlas, sin comprometerse en realidad con un proceso de validación. Las hipótesis mismas que se formulan explícitamente en los trabajos de ingeniería son a menudo hipótesis relativamente globales que ponen en juego procesos de aprendizaje a largo plazo. Por esto, la amplitud de la ingeniería no permite necesariamente involucrarse en verdad en un proceso de validación".

(Artigue, 1998)

Es por tanto, que la ingeniería didáctica nos permite identificar y ubicar las posibilidades de una realización didáctica, precisando en sus distintas fases sus condiciones y limitaciones.

No obstante a que la didáctica no puede aportar soluciones eficaces a través de la ingeniería, ésta puede poner conocimientos contextualizados a los estudiantes, pero su radio de acción se ve limitado si el docente desconoce las particularidades socio-culturales del estudiante, por ende, la tarea del docente consiste en diseñar las realizaciones didácticas en la clase enmarcadas en una metodología de investigación, basada en las necesidades de intereses de los estudiantes.

"El docente de los primeros niveles de la escuela básica debe tener presente que en estos años de escolaridad no son los contenidos matemáticos lo más importante; al contrario lo más importante es hacer que en las mentes infantiles se inicie el proceso de pensamiento que conduce a la creación de ideas y la expresión verbal y simbólica de las mismas".

(Fredy González,2002)

3.3 Actividad didáctica: " La simetría central como herramienta implícita para el aprendizaje del área de superficies planas "

Para llevar a cabo el desarrollo de esta actividad, nos inspiramos en la ingeniería didáctica de Artigue (1998), que constituye un método para organizar la confrontación de las tareas de la situación didáctica con el problema de aprendizaje de área de figuras planas en la clase. Observamos que los fundamentos de esta metodología provienen de las teorías de situaciones didácticas, donde sus vínculos

se expresan principalmente en la concepción del objeto matemático (en este caso el de área) y del análisis *a priori* de las producciones de los estudiantes, sobre el control del saber en el desarrollo de las concepciones de los estudiantes, que orientan una mirada con la cual el fenómeno de la situación que exponen es explorado.

Nos interesamos por ubicar a los estudiantes en situaciones, en parte análoga a lo que encuentra en realidad el matemático en su trabajo: que el problema planteado a resolver, en calidad de autor e investigador, en este nuevo rol, los estudiantes deberían organizar los conceptos de área y perímetro que traen de los conocimientos *a priori*, utilizarlos como herramientas para construir el concepto de área.

Para abordar el proceso de la comprensión, ponemos en acción la concepción del área, combinamos elementos de herramienta-objeto Régine Douady (1990) con los dos conceptos matemáticos: el área como objeto y la simetría central como herramienta implícita respetando un poco la historia.

Después de haber abordado el objetivo general de las elecciones matemáticas y elecciones didácticas del objeto de enseñanza, presentamos la secuencia de situaciones didácticas que conciernen a la organización del concepto de área y la noción de medida.

3.3.1 Objetivos

Objetivo general

Enseñar de manera diferente el concepto de área, pensando en una secuencia de enseñanza, que permita a los estudiantes visualizar y comprender los objetos matemáticos de área, perímetro y forma de una superficie deduciendo algunas de sus propiedades.

Objetivos matemáticos

- Construir el concepto de área.
- Construir la noción de medida.
- Hacer funcionar la adición de medida de áreas.
- Distinguir área, perímetro y forma de una superficie.
- Utilizar la simetría central como herramienta de resolución de problemas y deducir algunas propiedades.
- Introducir las fracciones, producir igualdades entre fracciones, compararlas, ordenarlas.

Objetivos didácticos

La situación presentada ilustra las nociones de *herramienta* y de *objeto*, porque permite poner en juego dos conceptos matemáticos: el área como *objeto*, la simetría central como *herramienta* implícita de resolución del problema propuesto. Esta situación permite también introducir las fracciones como codificaciones que son necesarias debido a la insuficiencia de los enteros para tipos de superficies de igual área.

3.3.2 La secuencia didáctica

A continuación mostramos la secuencia didáctica que fue presentada a los estudiantes:

APRENDIENDO GEOMETRÍA RECORTANDO HOJAS DE PAPEL

Presentación de los problemas

Consigna 1: *Recorta las hojas de papel como lo indican los problemas siguientes.*

Puedes trabajar de manera individual y luego compartir en parejas tus

resultados siguiendo los siguientes pasos:

- i. Corta cada hoja en dos partes que puedan ser superpuestas de manera exacta sin que se pierda nada, sin necesidad de encolar, es decir, que con las dos partes sea posible reconstruir la hoja inicial.
- ii. Deben buscar el máximo de partes diferentes que respondan a esta repartición de partición de (P) , que designaremos por (G) .

Anota lo que consideres importante para poder resolver este problema.

Consigna 2: Realiza lo mismo que hiciste en el problema anterior, pero ahora con rectángulos de igual área que las formas anteriores, es decir, con mitades de hojas.

Si lo necesitas, solicita hojas para que escribas lo que tú quieras, o si prefieres nos comunicas lo que consideres que debemos saber sobre lo que observas del área y el perímetro.

Consigna 3: Reconstruir la hoja de oficio, con las superficies que recortaron pero de diferentes formas.

¿Cuáles son las formas posibles de construir el área de la hoja de papel?

¿Es posible expresar con la ayuda de fracciones la medida del área de la hoja de papel?

Justifica tu respuesta.

Consigna 4: Trabajando en parejas, intenta construir nuevas variedades de superficies de igual área pero de formas diferentes.

¿Es posible utilizar las nuevas clases de igual área para construir la hoja original de papel?

Formule una propiedad que relacione el área de la hoja con el perímetro de la misma.

3.3.3 Actividad 1

Objetivo

Construir superficies de igual área, pero de formas diferentes y definir la noción de área fuera del contexto numérico.

Materiales

- Hojas de oficio en gran número.
- Tijeras, instrumentos usuales de geometría.

Organización del trabajo

Los alumnos trabajarán de forma individual.

Consigna 1

"Deben cortar cada hoja en dos partes que puedan ser superpuestas de manera exacta sin que se pierda nada, ni que haya necesidad de encolar, es decir, que con las dos partes será posible reconstruir la hoja inicial, deben buscar el máximo de partes diferentes que respondan a esta consigna de partición que designaremos por (P)".

Análisis Matemático

- Plantean proporciones, usando la medida de los lados de distintas figuras geométricas.
- Reconocen figuras semejantes.
- Definen una relación de equivalencia "tener igual área" en un conjunto de superficies.
- Describen algunas propiedades:
 - Dos superficies que tienen igual área no tienen necesariamente la misma forma.
 - Dos superficies que tienen igual área no tienen necesariamente el mismo perímetro.

- Dos superficies que puedan superponerse tienen igual área, la misma forma y el mismo tamaño.
- Introducen las fracciones para luego producir igualdades entre ellas.
- Utilizan la simetría central como herramienta de resolución de problemas.
- Deducen que el centro de simetría es el punto donde cortan los dos ejes.
- Construyen el concepto de área.

Análisis a priori

Pudiera ser que algunos alumnos busquen una estrategia económica que no conduce al resultado final, pero a través de estos ensayos, los estudiantes formularán nuevas hipótesis sobre las propiedades de la línea de partición. Además, numerosos alumnos encontrarán bastante rápido la construcción de la línea de partición para resolver el problema, otros buscarán líneas de particiones curvilíneas a mano alzada o trazando círculos.

Algunas de las posibles estrategias utilizadas por los alumnos son las siguientes:

- 1) Los estudiantes comenzarán por buscar el máximo de partes diferentes de doblar la hoja en dos partes iguales a través del plegado de las medianas de la hoja.
- 2) Luego comenzarán por plegar la hoja a través de las diagonales del rectángulo.

En este momento, algunos alumnos, pensarán que han encontrado todas las divisiones posibles, entonces, es necesario, darles nuevamente la consigna, precisando que deben intentar encontrar otras soluciones.

- 3) El procedimiento siguiente es plegar la hoja de tal manera que los vértices opuestos se superpongan. Pudiera ser que en esta partición los alumnos piensen que existe un número infinito de soluciones.

- 4) Plegarán en 8, 16... el rectángulo y recortaran por las líneas de plegado elegidas más o menos bien (el éxito y el fracaso se relacionan con las elecciones de plegado).
- 5) Buscarán la construcción de segmentos de igual medida, partiendo de dos vértices opuestos diametralmente.
- 6) Construirán una línea de partición simétrica en relación a una mediana, al ver este fracaso, modificarán este procedimiento hacia la construcción de una línea de partición simétrica con respecto al centro del rectángulo.

Finalmente los alumnos al encontrar esta estrategia se darán cuenta que podrán encontrar infinitas soluciones, por lo que nombrarán a esta estrategia, como la que satisface dicha consigna.

3.3.4 Actividad 2

Objetivos

- Reutilizar la noción de área y de simetría central.
- Crear un stock de formas de áreas diferentes pero fácilmente comparables.
- Introducir un código con fracciones y hacerlo funcionar.

Materiales

- Hojas de oficio en gran número.
- Tijeras, instrumentos usuales de geometría.

Organización del trabajo

Los alumnos trabajarán en parejas.

Consigna 2

"Deben recomenzar la actividad 1, pero ahora con rectángulos de igual área que las formas anteriores, es decir con mitades de hojas rectangulares"

Análisis Matemático.

- Plantean proporciones usando la medida de los lados de distintas figuras geométricas.
- Aplican la homotecia para resolver problemas de semejanza.
- Construyen un conjunto cociente de las clases de superficies que tienen igual área.
- Hacen funcionar las fracciones para producir igualdades y compararlas.
- Exploran área y perímetro.

Análisis a priori

- Los estudiantes comenzarán por buscar el máximo de partes diferentes, de doblar la hoja en dos partes iguales, reutilizando y observando lo que sus demás compañeros hicieron en la actividad 1.
- Clasificarán las clases de superficies designando H a las clases que contienen $1/4$ de la hoja.
- Descubrirán de a través del recortado a través del recortado y encolado que se puede aumentar libremente el perímetro de la superficie sin aumentar el área.

3.3.5 Actividad 3

Objetivos

Crear superficies de formas originales y ornamentadas.

Materiales

- Hojas de oficio en gran número.
- Tijeras, instrumentos usuales de geometría.

Organización del trabajo

Los alumnos trabajarán en parejas.

Consigna 3

"Van a construir en parejas, superficies que tengan la misma área que la página de la hoja tamaño oficio, pero de diferentes formas"

Análisis matemático

- Caracterizan las clases de superficies, a través de una codificación en fracciones y por la elección de un representante " rectángulo de cada clase".
- Producen igualdades variadas entre fracciones.
- Comparan y ordenan fracciones.
- Diferencian el área, perímetro y forma de una superficie.
- Hacen funcionar la adición de medidas de áreas.

Análisis a priori

- Los estudiantes comenzarán por seleccionar las partes de hojas.
- Luego agruparán las partes pertenecientes a las familias G correspondiente a $1/2$ y del mismo modo agruparán las pertenecientes a las familia H correspondiente a $1/4$.
- Cogerán clases de distintas familias y comenzarán a armar la hoja. El error que pueden cometer los alumnos es creer que sólo pueden armar la hoja con partes del mismo tamaño o con clases de la misma familia.
- Conjeturarán hipótesis, las cuales serán respondidas a través del recortado y encolado.
- Ubicarán las partes de las hojas de diferentes maneras, una al lado de la otra, dos partes correspondientes a la familia G, cuatro partes correspondientes a la familia H, una parte correspondiente a la familia G con dos partes correspondientes a la familia H.
- Notarán que si tienen clases distintas pero de igual área, a través del encolado y recortado, podrán formar la hoja completa.
- Cuatro superficies de la familia $1/4$, corresponde a una superficie (P), es decir que se pueden superponer perfectamente, por lo tanto, tienen igual área pero de forma diferente.

3.3.6 Actividad 4

Objetivos

Construir nuevas clases de superficies de igual área.

Materiales

- Hojas de oficio en gran número.
- Tijeras, instrumentos usuales de geometría.

Organización del trabajo

Los alumnos trabajarán en parejas.

Consigna 4

"Van a trabajar en parejas, para luego construir nueva clase de superficies de igual área"

Análisis Matemático.

- Construyen una relación de orden en el conjunto cociente.
- Hacen funcionar la adición de medidas de áreas.
- Utilizan la adición de fracciones
- Producen igualdades variadas entre fracciones.
- Comparan y ordenan fracciones.

Análisis a priori

- Los alumnos comenzarán por agrupar las partes pertenecientes a las familias G correspondiente a $1/2$ y del mismo modo agrupar las pertenecientes a las familia H correspondiente a $1/4$.
- Luego comenzaran a construir nuevas clases de superficies de igual área.
- Agrupar partes pertenecientes a distintas familias tales como: familia G con una perteneciente a la familia H y a esta nueva clase la designaran J

correspondiente a $3/4$, la partición P con una partición G y una partición H la designaran K, y así sucesivamente hasta formar nuevas particiones.

3.4 Clasificación respecto a los niveles de explicitación

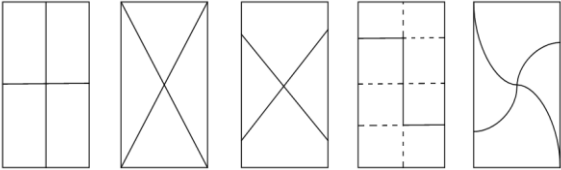
A partir del análisis *a priori* construimos una matriz de las competencias necesarias para resolver los tipos de tareas que nos permite identificar los esfuerzos realizados por niveles de explicitación en el aprendizaje del área, perímetro y forma de una superficie. Presentamos a continuación, para cada una de las actividades esta matriz de evolución de competencias.

3.4.1 Actividad 1

Consigna: *Recorta las hojas de papel como lo indican los problemas siguientes. Puedes trabajar de manera individual y luego compartir en parejas tus resultados siguiendo los siguientes pasos:*

- i. Corta cada hoja en dos partes que puedan ser superpuestas de manera exacta sin que se pierda nada, sin necesidad de encolar, es decir, que con las dos partes sea posible reconstruir la hoja inicial.*
- ii. Deben buscar el máximo de partes diferentes que respondan a esta repartición de partición de (P), que designaremos por (G).*

Anota lo que consideres importante para poder resolver este problema.

| Niveles y preguntas | Competencias |
|---|---|
| <p>Comprensión</p> <p>¿Cómo podría hacer eso?</p> <p>¿De qué se trata en el fondo?</p> | <p><i>i. Identificar casos distintos.</i></p> <p>Los procedimientos para recortar la hoja consisten en:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. seguir las medianas del rectángulo (<i>figura 1</i>); 2. luego por las diagonales del rectángulo (<i>figura 2</i>); 3. uniendo los vértices opuestos del rectángulo(<i>figura 3</i>); 4. cuadricular la hoja y a través de este cuadrículado se realizan los cortes a la hoja (<i>figura 4</i>). El éxito de esta estrategia dependerá del cuadrículado; 5. finalmente, se recorta la hoja ocupando la simetría central, respecto del centro de la hoja, como herramienta (<i>figura 5</i>). Lo que finalmente responde a la consiga. <div style="text-align: center;">  <p>Figura 1 figura 2 figura3 figura 4 figura 5</p> </div> <p>Figura3. Posibles procedimientos de recortado actividad 1,1.</p> |
| | <p><i>ii. Definir una estrategia de resolución.</i></p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Utilizando la simetría central como herramienta se construyen variadas superficies de igual área pero de formas diferentes. |

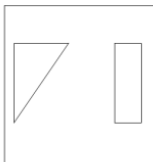
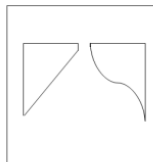
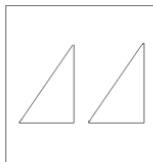
| | |
|---|---|
| <p>Comprensión</p> <p><i>¿Cómo podría hacer eso?</i></p> <p><i>¿De qué se trata en el fondo?</i></p> | <p>2. Con la superposición de las figuras comprueban que el corte es simétrico es decir al recortar la hoja y luego realizar un corte de 180° estas formas resultante calzaran de forma exacta.</p> <p><i>iii. Identificar regularidades.</i></p> <p>De las comparaciones de las distintas figuras resultantes de la partición de (P) se obtendrán los siguientes resultados:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Dos figuras planas que tienen igual área no tienen necesariamente la misma forma (<i>figura 6</i>). 2. Dos figuras planas que tienen igual área no tienen necesariamente el mismo perímetro (<i>figura 7</i>). 3. Dos figuras planas que pueden superponerse tienen igual área y perímetro (<i>figura 8</i>). <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="text-align: center;">  <p>figura 6</p> </div> <div style="text-align: center;">  <p>figura 7</p> </div> <div style="text-align: center;">  <p>figura 8</p> </div> </div> <p>Figura 4. Posibles procedimientos de recortado actividad 1,2.</p> |
|---|---|

Tabla 1. Matriz de competencias consigna 1

3.4.2 Actividad 2

Consigna: Realiza lo mismo que hiciste en el problema anterior, pero ahora con rectángulos de igual área que las formas anteriores, es decir, con mitades de hojas.

Si lo necesitas, solicita hojas para que escribas lo que tú quieras, o si prefieres nos comunicas lo que consideres que debemos saber sobre lo que observas del área y el perímetro.

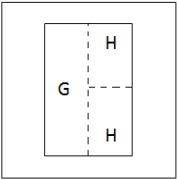
| Niveles y preguntas | Competencias |
|--|--|
| <p>Reformulación</p> <p>¿Qué es lo que se podría hacer?</p> | <p><i>i. Establecer y justificar una propiedad o resultado.</i></p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Se constituye una segunda clase de superficies la que se designa por (H) y la cual corresponde a $\frac{1}{4}$ de la hoja inicial. 2. Se visualiza que se pueden hacer particiones de la hoja aumentando el perímetro de la superficie sin la necesidad de aumentar el área, lo que se formaliza en la siguiente propiedad. “se puede aumentar libremente el perímetro de una superficie sin aumentar el área” (Figura 9). <p>La figura 9 muestra un ejemplo de las diferentes particiones aumentando el perímetro de la superficie sin la necesidad de aumentar su área.</p> <div style="text-align: center;">  <p>Figura 9</p> </div> <p>Figura 5. Posible procedimiento de recortado actividad 2.</p> |

Tabla 2. Matriz de competencias consigna 2

3.4.3 Actividad 3

Consigna: Reconstruir la hoja de oficio, con las superficies que recortaron pero de diferentes formas.

¿Cuáles son las formas posibles de construir el área de la hoja de papel?

¿Es posible expresar con la ayuda de fracciones la medida del área de la hoja de papel?

Justifica tu respuesta.

| Niveles y preguntas | Competencias |
|---|---|
| <p>Reformulación</p> <p><i>¿Qué es lo que se podría hacer?</i></p> | <p><i>i. Poner en relación los objetos matemáticos subyacentes en un modelo original.</i></p> <p>Se reconstruye la hoja inicial mediante el cortado y el encolado por lo que se observan los siguientes procedimientos formales:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Dos superficies de la familia $\frac{1}{2}$, correspondientes a la familia (G) las cuales se pueden superponer perfectamente, reconstruyen la hoja inicial (<i>figura 10</i>). 2. Se puede reconstruir la hoja inicial con dos superficies de la familia $\frac{1}{2}$, correspondiente a dos particiones diferentes de la familia (G) las que tienen igual área pero formas diferentes (<i>figura 11</i>). 3. Cualquier superficie de la familia $\frac{1}{2}$ y dos cualquiera de la familia $\frac{1}{4}$ forman la hoja inicial (<i>figura 12</i>). |

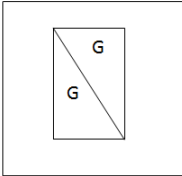
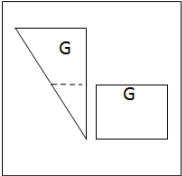
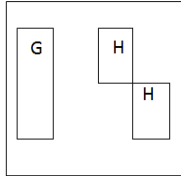
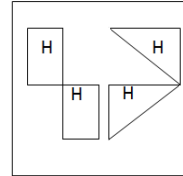
| | |
|---|--|
| | <p>4. Cuatro superficies cualesquiera de la familia $\frac{1}{4}$ forman la hoja inicial (<i>figura 13</i>).</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="text-align: center;">  <p>figura 10</p> </div> <div style="text-align: center;">  <p>figura 11</p> </div> <div style="text-align: center;">  <p>figura 12</p> </div> <div style="text-align: center;">  <p>figura 13</p> </div> </div> <p>Figura 6. Posibles formas de reconstruir la hoja inicial.</p> |
| <p>Reformulación ¿Qué es lo que se podría hacer?</p> | <p><i>ii. Generalizar un enfoque o método de resolución</i></p> <p>Los procedimientos anteriores se traducen respectivamente por:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ o por $2 \cdot \frac{1}{2} = 1$; sabiendo que $\frac{1}{2}$ corresponde a una de las formas de la familia "G" y 1 corresponde a "P", es decir la hoja inicial. 2. $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1$ o por $\frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} = 1$; sabiendo que $\frac{1}{4}$ corresponde a una de las formas de la familia "H" y $\frac{1}{2}$ a una de la familia "G". 3. $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1$ o por $4 \cdot \frac{1}{4} = 1$ considerando siempre a $\frac{1}{4}$ como las figuras de "H". |

Tabla 3. Matriz de competencias consigna 3

3.4.4 Actividad 4

Consigna: *Trabajando en parejas, intenta construir nuevas variedades de superficies de igual área pero de formas diferentes.*

¿Es posible utilizar las nuevas clases de igual área para construir la hoja original de papel?

Formule una propiedad que relacione el área de la hoja con el perímetro de la misma.

| Niveles y preguntas | Competencias |
|--|---|
| <p>Reformulación <i>¿Cómo podría representar un problema tan complejo?</i></p> | <p><i>i. Combinar métodos complementarios.</i></p> <p>La creación de nuevas clases otorga deducciones tales como:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. La suma de dos clases (G), con $(G) = \frac{1}{2}$, equivalen a una clase (P). 2. La suma de dos clases (H), con $(H) = \frac{1}{4}$, equivalen a una clase (G). 3. La suma de dos clases (L), con $(L) = \frac{1}{8}$, equivalen a una clase (H). 4. La suma de dos clases (J), con $(J) = \frac{1}{16}$, equivalen a una clase (L). <p>Deduciendo que se puede hacer sucesivamente el mismo procedimiento concluyendo que hay muchas clases de particiones.</p> |

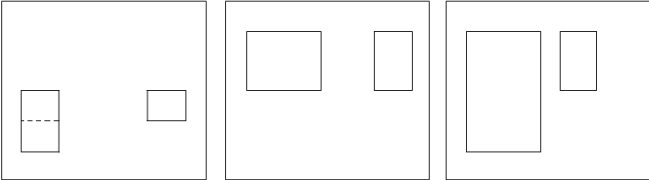
| | |
|---|---|
| <p>Estructuración ¿Por qué es así?</p> | <p><i>i. Justificar una propiedad o hipótesis.</i></p> <p>A partir de las nuevas clases creadas se obtienen numerosas familias y por lo tanto numerosas escrituras, algunas de estas serán por ejemplo:</p> <p>Sabiendo que $(L)=\frac{1}{8}$, $(H)=\frac{1}{4}$, $(G)=\frac{1}{2}$, $(P)=1$, algunas de las posibles escrituras serian:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. $\frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = 3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$, formando una nueva clase que se podrá designar con la letra que se estime conveniente (<i>figura 14</i>). 2. $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$, formando una nueva clase que se podrá designar con la letra que se estime conveniente (<i>figura 15</i>). 3. $1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$, formando una nueva clase que se podrá designar con la letra que se estime conveniente (<i>figura 16</i>) entre otras muchas clases formadas. <div style="text-align: center;">  <p>figura 14 figura 15 figura 16</p> </div> <p style="text-align: center;">Figura 7. Posibles clases de particiones.</p> |
|---|---|

Tabla 4. Matriz de competencias consigna 4

3.5 La experimentación

Nos presentamos frente a un grupo curso como estudiantes de la carrera de Pedagogía en Educación Matemáticas, explicándoles las actividades de aprendizaje a implementar y las fechas en que la llevaríamos a cabo (primera y segunda semana de septiembre), las cuales serán trabajadas en tres clases de 90 minutos cada una. Además les manifestamos que se utilizará un poco más de tiempo en la búsqueda de los nuevos conceptos, pero trabajando de manera responsable, al final se ganaba mucho más en conocimiento.

En primer lugar, entregamos a cada estudiante el diseño de las actividades, para luego otorgar el material pertinente a cada uno de ellos, animándolos a aprender geometría a través del recortado de hojas. El diseño fue leído y comprendido por los estudiantes. Advertimos también a los estudiantes el hecho que no solo tendrán que responder las consignas a través de los materiales entregados, sino que, debían expresar una opinión a través de un recurso escrito o de forma oral.

Dentro de estas interacciones que acontecían la situación didáctica, desde el inicio preferimos mantenernos a distancia para que los estudiantes se movilizaran por sí mismos dentro del desarrollo de las actividades, siempre con la intención de no interrumpir la construcción de los nuevos conocimientos y no romper el contrato didáctico, este hecho dio a entender a los estudiantes que debían hacerse responsable de la resolución de las consignas planteadas.

3.5.1 Experimentación de las situaciones problemas

Las consignas se desarrollaron en cada clase, en un principio de forma individual y luego grupal, por lo que todas las etapas del razonamiento de cada actividad eran construidas y confrontadas en la clase:

Clase 1: se trabaja la consigna 1 de forma individual, para que de esta forma, interactúen con el medio para llegar a la resolución del problema y a la adquisición de nuevos conocimientos, la cual consistió en cortar una hoja en dos partes que puedan ser superpuestas de manera exacta, sin que se pierda nada ni que haya necesidad de encolar. Los estudiantes deberán buscar el máximo de partes diferentes que correspondan a esta consigna de partición que designaremos por "P".

Clase 2: se trabaja la consigna 2 de forma grupal con el fin de comunicar sus ideas y compartir sus experiencias en la construcción del conocimiento, la cual consiste en recomenzar la actividad anterior, pero con rectángulos que tengan igual área que las formas anteriores, es decir, con mitades de hojas rectangulares.

Clase 3: se trabaja la consigna 3 y 4 de forma grupal, esta actividad consiste en construir superficies que tengan igual área que la página inicial, pero de formas diferentes y además construir nuevas clases de superficies de área apuntando a distinguir nuevas particiones.

Cuando los equipos eran formados por dos estudiantes, ellos solían trabajar de igual manera individual, compitiendo por descubrir el saber en juego. De modo que el trabajo compartido consistía más bien en la confrontación y discusión de sus resultados que en un desarrollo común. Además, en cada clase los estudiantes lograban organizar sus posturas en ejecución y adaptar bien sus razonamientos a la situación. Por nuestra parte, analizábamos las producciones y tendencias que se asociaban a la construcción del área y a la utilización de la simetría central como método de resolución al problema, para la institucionalización del concepto. Como el saber matemático en juego no había sido instruido en la clase, ni mucho menos desarrollada una relación ilustrada del área, perímetro y forma de una superficie y algunas propiedades, intentaba describir lo que se podía aportar de nuevo y que podía ser útil en la resolución del problema. Formalizando los conceptos de área, perímetro y forma de una superficie, y además deduciendo algunas de sus propiedades.

4. ANÁLISIS E INTERPRETACION DE DATOS

4.1 Algunos textos de estudio que orientan la enseñanza del área

El curriculum escolar a través de los programas de estudio oficiales (actualización 2012-2013 Mineduc) nos ha mostrado que el concepto de área es enseñado de forma inversa con respecto a su construcción epistemológica. Para hacernos a su definición, hemos seleccionado dos textos del estudiante que nos orientaran a la enseñanza del concepto de área.

La figura 3 muestra una definición extraída del texto escolar editorial Galileo año 2014, la cual nos muestra la forma en que es definido el concepto de área. Esta definición hace referencia a una medida que se necesitan para cubrir una figura.

The image shows a page from a textbook titled 'LECCIÓN 7 Área de figuras 2D'. The objective is 'estimar y medir el área de figuras 2D'. Under the 'Aprende' section, it defines area as the number of square units needed to cover a flat surface. A diagram shows a green square with side length 1 unit, labeled '1 unidad cuadrada'. To the right, there is a 'Repaso rápido' section with multiplication problems and a 'Vocabulario' section listing 'área' and 'unidad cuadrada'.

LECCIÓN 7 Área de figuras 2D
 OBJETIVO: estimar y medir el área de figuras 2D.

Aprende
 El **área** es el número de unidades cuadradas que se necesitan para cubrir una superficie plana.

1 unidad
 1 unidad 1 unidad
 1 unidad

Una **unidad cuadrada** es un cuadrado con una longitud de lado de 1 unidad.

Repaso rápido
Multiplica.
 1. $4 \cdot 5$ 2. $6 \cdot 3$
 3. $2 \cdot 8$ 4. $5 \cdot 7$
 5. $9 \cdot 9$

Vocabulario
área **unidad cuadrada**

Figura 8. Actividad extraída del texto del estudiante 5° básico año 2014

Ahora bien, la figura 4 corresponde a una definición extraída del texto escolar editorial Santillana año 2012, la cual nos muestra la forma en que es definido el concepto de área. Esta definición hace referencia al área como la medida de una superficie que ocupa una figura.

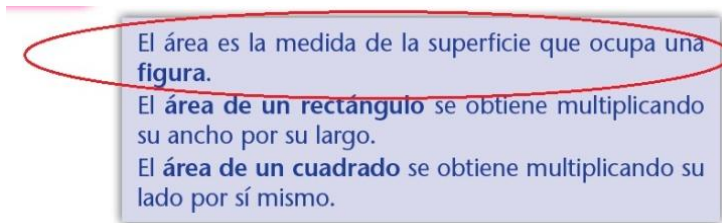


Figura 9. Definición de área según el texto del estudiante 4° básico año 2012

Por tanto, la definición del concepto de área en los dos textos nos orientan a definir el área como la medida de una superficie, sin embargo, el primer texto hace referencia al área como el número de unidades de medida "unidades cuadradas", por lo que el objetivo del área no se centra en la búsqueda de la definición, sino en el estudio de procedimientos que permiten medir áreas de superficies planas.

4.2 Análisis a posteriori.

Con el fin de describir el trabajo de los estudiantes a lo largo de la experimentación, hemos recolectado datos de las observaciones realizadas en la secuencia de enseñanza para poder de este modo validar las hipótesis formuladas en la investigación.

Equipo 1: Diego y Roberto, equipo que logra desarrollar mayores competencias.

Equipo 2: Marcela y Esteban, equipo que logra desarrollar competencias intermedias.

Equipo 3: Francisco y Javiera, equipo que no logra desarrollar las competencias.

4.2.1 Actividad 1

Consigna: Recorta las hojas de papel como lo indican los problemas siguientes. Puedes trabajar de manera individual y luego compartir en parejas tus resultados siguiendo los siguientes pasos:

- iii. Corta cada hoja en dos partes que puedan ser superpuestas de manera exacta sin que se pierda nada, sin necesidad de encolar, es decir, que con las dos partes sea posible reconstruir la hoja inicial.
- iv. Deben buscar el máximo de partes diferentes que respondan a esta repartición de partición de (P), que designaremos por (G).

Anota lo que consideres importante para poder resolver este problema.

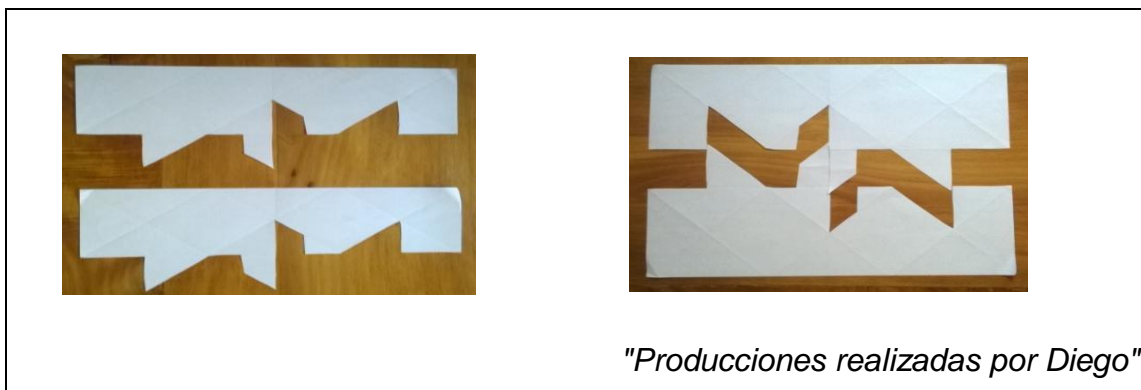
Equipo 1: Diego y Roberto

La siguiente observación nos muestra que los estudiantes de este grupo utilizan la simetría central de forma explícita para dar solución a la consigna 1.

Se cuadrícula la hoja y luego se imaginan las figuras; se cortan y si las dos vejetta serán simétricas. (Diego)

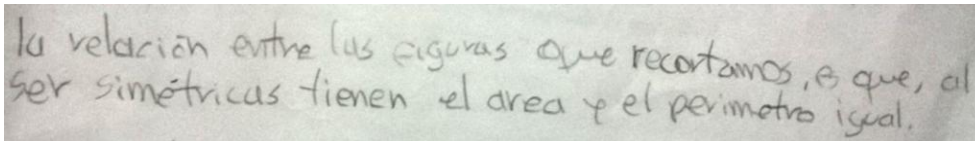
Figura 10. En busca de una estrategia de recortado grupo 1.

La estrategia utilizada por los estudiantes da como resultado las siguientes formas:



Ocupando la simetría central como herramienta de solución de recortado son capaces de encontrar las siguientes regularidades entre las superficies encontradas:

1.



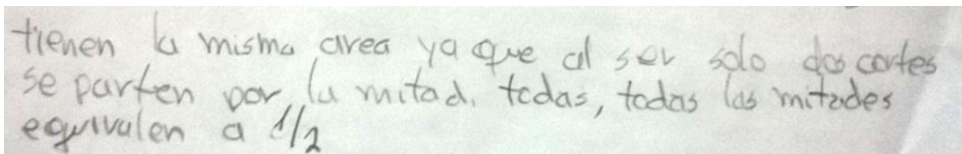
la relación entre las figuras que recortamos, es que, al ser simétricas tienen el área y el perímetro igual.

(Diego)

Figura 12.Relaciones encontradas grupo 1, consigna 1.

Comparan dos superficies congruentes formulando que superficies que pueden superponerse tienen la misma área y el mismo perímetro.

2.



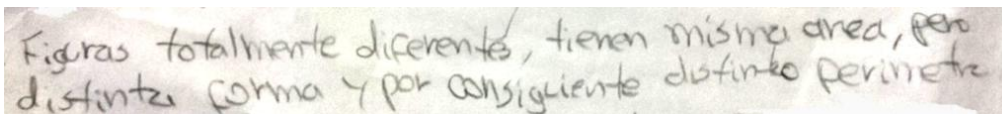
tienen la misma área ya que al ser solo dos cortes se parten por la mitad, todas, todas las mitades equivalen a $1/2$

(Diego)

Figura 13.Relaciones encontradas grupo 1, consigna 1.

Comparan las superficies resultantes de la partición formulando que dos figuras con distinta forma pueden tener la misma área.

3.



Figuras totalmente diferentes, tienen misma área, pero distinta forma y por consiguiente distinto perímetro

(Diego)

Figura 14.Relaciones encontradas grupo 1, consigna 1.

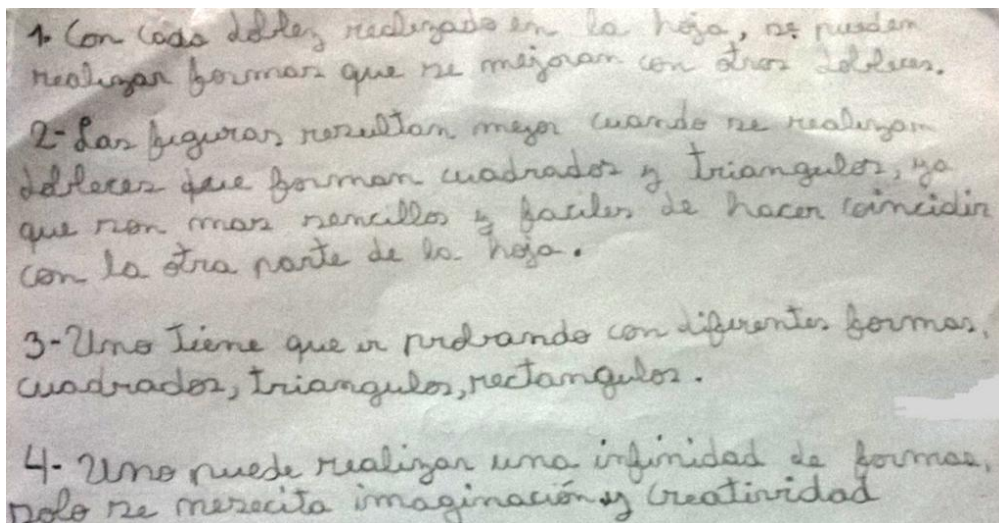
En esta observación se visualiza claramente una relación existente entre el área y el perímetro de una figura, lo que nos muestra que el estudiante está comprendiendo el área como una característica que no depende del perímetro ni de la forma de una superficie, lo que es una excelente muestra en la construcción epistemológica del concepto de área, ya que en algunos casos se tiende a pensar que el área de una figura depende del perímetro de ésta.

Resumimos algunas características de las producciones observadas de este equipo:

- Reconocen figuras semejantes.
- Definen una relación de equivalencia “tener igual área” en un conjunto de superficies.
- Utilizan la simetría central como herramienta de resolución de problema de forma explícita.
- Construyen el concepto de área.
- Construyen la noción de medida.
- Introducir las fracciones, producir igualdades entre fracciones, compararlas, ordenarlas.

Equipo 2: Marcela y Esteban

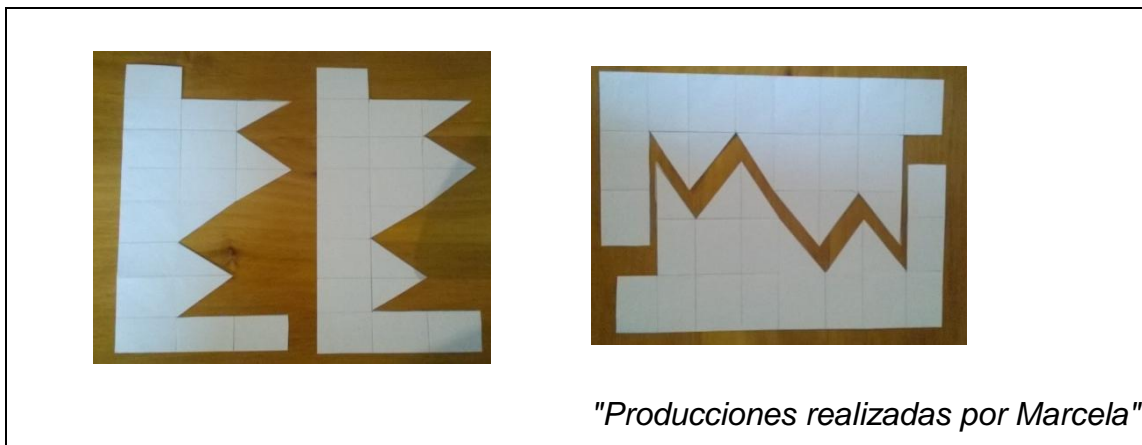
Este grupo de alumnos durante el proceso de investigación de recortado formula lo siguiente:



(Marcela)

Figura 15. En busca de una estrategia de recortado grupo 2.

La técnica utilizada por los estudiantes da como resultado las siguientes formas:



Marcela y Esteban, hacen uso de la simetría central, pero de forma implícita mediante el plegado de la hoja y recortando por las líneas elegidas, y con el uso de esta técnica se dan cuenta que al utilizarla podrán encontrar infinitas soluciones. Sin embargo ocupando la simetría central de forma implícita descubren que:

* Lo que tiene misma area no es necesaria la misma forma.

(Esteban)

Figura 17.Relaciones encontradas grupo 2, consigna 1.

Entienden que el área de una superficie no depende de la forma.

Tienen diferente perimetro y igual area

(Marcela)

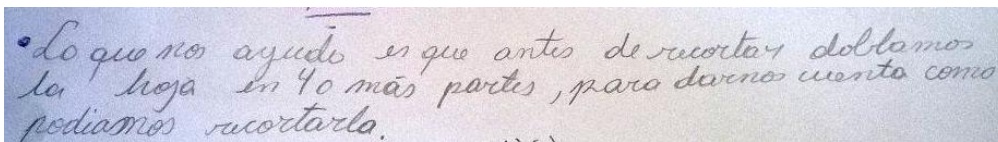
Figura 18.Relaciones encontradas grupo 2, consigna 1.

Distinguen que figuras de igual área no necesariamente poseen el mismo perímetro estableciendo con ello que el área y el perímetro son conceptos independientes

Resumimos algunas características de las producciones observadas de este equipo:

- Reconocen figuras semejantes.
- Definen una relación de equivalencia “tener igual área” en un conjunto de superficies.
- Utilizan la simetría central como herramienta de resolución de problemas de forma implícita.
- Construyen el concepto de área.

Equipo 3: Francisco y Javiera. Buscando una técnica de recortado responden:



Lo que nos ayudo es que antes de recortar doblamos la hoja en 4 o más partes, para de esa cuenta como podíamos recortarla.

(Javiera)

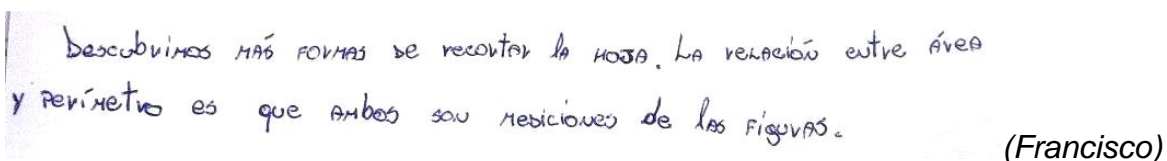
Figura 19. En busca de una estrategia de recortado grupo 3.

La técnica utilizada por los estudiantes da como resultado las siguientes formas:



Lo que claramente muestra un descubrimiento en las formas de recortar la hoja mediante el ensayo y error, por lo tanto no tienen una estrategia realmente clara de cómo dividir la hoja, lo que finalmente termina por no descubrir la simetría central

como técnica necesaria y suficiente para recortar la hoja. No obstante, se creen capaces de formular la siguiente relación entre el área y el perímetro:



DESCUBRIMOS MÁS FORMAS DE RECORTAR LA HOJA. LA RELACIÓN ENTRE ÁREA Y PERÍMETRO ES QUE AMBOS SON MEDICIONES DE LAS FIGURAS. (Francisco)

Figura 21. Relaciones encontradas grupo 3, consigna 1.

Quedándose en un nivel concreto y asociando el área y el perímetro con números, cometiendo el error de no hacer vinculación entre los objetos geométricos.

No entienden la naturaleza real del área y del perímetro, es decir simplemente asocian por el hábito de calcular.

Resumimos la característica de las producciones observadas de este equipo:

- Reconocer figuras semejantes.

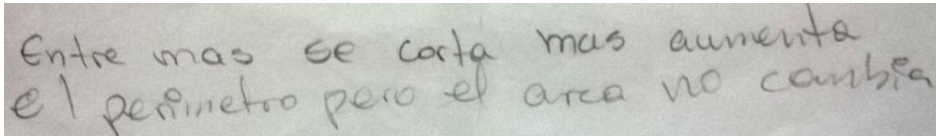
4.2.2 Actividad 2

Consigna: Realiza lo mismo que hiciste en el problema anterior, pero ahora con rectángulos de igual área que las formas anteriores, es decir, con mitades de hojas.

Si lo necesitas, solicita hojas para que escribas lo que tú quieras, o si prefieres nos comunicas lo que consideres que debemos saber sobre lo que observas del área y el perímetro.

Equipo 1: Diego y Roberto

Se reutiliza la estrategia anterior para así dar solución al problema, creando así una nueva clase de figuras la que hace pensar a los alumnos lo siguiente:



Entre mas se corta mas aumenta
el perimetro pero el area no cambia

(Diego)

Figura 22. Relación encontrada grupo 1 consiga.

La técnica utilizada por los estudiantes da como resultado las siguientes formas:



"Producciones realizadas por Diego y Roberto"

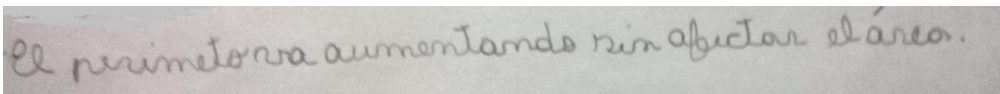
La creación de una nueva clase los lleva a pensar en la siguiente propiedad: "se puede aumentar libremente el perímetro de una superficie sin aumentar el área". Claramente se ve que los alumnos en cuestión han desvinculado el concepto de perímetro y el de área, es decir, están expresando que el área no depende del perímetro.

Resumimos algunas características de las producciones observadas de este equipo:

- Comprenden algunas propiedades.
- Construyen un conjunto cociente de las clases de superficies que tienen igual área.
- Exploran los conceptos del área y el perímetro.

Equipo 2: Marcela y Esteban

Se reutiliza la estrategia anterior para así dar solución al problema, creando una nueva clase la que hace pensar a los alumnos lo siguiente:

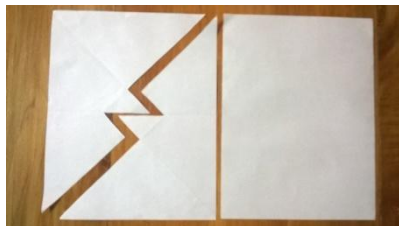


(Marcela)

Figura 24. Relaciones encontradas grupo 2, consigna 2.

Lo que formulan los alumnos al igual que el equipo anterior es importante, ya que al decir "*sin afectar al área*", son conscientes que pueden aumentar libremente el perímetro de una figura sin aumentar su área. Con esto los alumnos constatan una relación entre estos dos conceptos sin necesidad de medir.

La observación anterior se obtiene del análisis de las siguientes formas:



"Producciones realizadas por Marcela y Esteban"

Resumimos algunas características de las producciones observadas de este equipo:

- Comprenden algunas propiedades.
- Construyen un conjunto cociente de las clases de superficies que tienen igual área.
- Exploran los conceptos del área y el perímetro.

Equipo 3: Francisco y Javiera

Se reutiliza la estrategia anterior para así dar solución al problema, creando así una nueva clase la que hace pensar a los alumnos lo siguiente:

A photograph of a handwritten note on a piece of paper. The text is written in cursive and reads: "Por otro lado la hoja más grande permite hacer más dobles y la hoja pequeña no." There is a small, dark, rectangular mark or smudge on the right side of the paper.

(Javiera)

Figura 26. Relaciones encontradas grupo 3, consigna 2.

En este punto se observa que los alumnos están en un nivel de asociación, pues hacen referencia a procesos que se distinguen solo por la forma y no por la funcionalidad. Un posible error por parte de los alumnos consiste en "comparan una figura de la familia (G) con una de la familia (H)".

Resumimos la característica de las producciones observadas de este equipo:

- No llegan al nivel de competencia necesario para responder a la consigna.

4.2.3 Actividad 3

Consigna: Reconstruir la hoja de oficio, con las superficies que recortaron pero de diferentes formas.

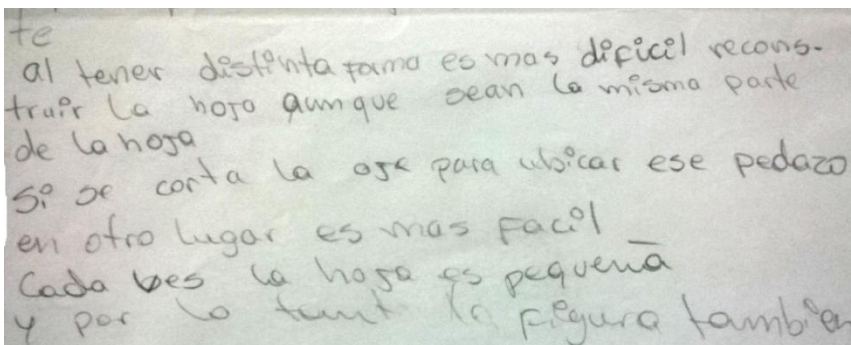
¿Cuáles son las formas posibles de construir el área de la hoja de papel?

¿Es posible expresar con la ayuda de fracciones la medida del área de la hoja de papel?

Justifica tu respuesta.

Equipo 1: Diego y Roberto

En esta actividad los alumnos formulan lo siguiente:



(Diego)

Figura 27. Observación grupo 1, consigna 3.

La observación anterior se obtiene del análisis de las siguientes formas:



"Producciones realizadas por Diego y Roberto"

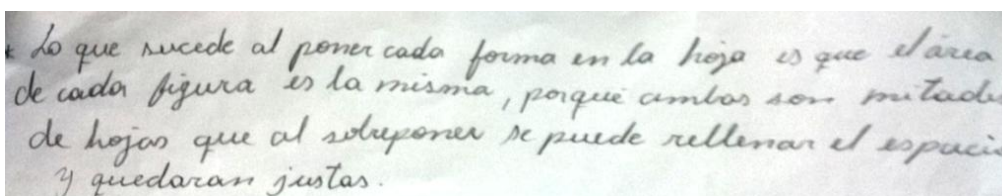
La imagen anterior nos muestra que a través del recortado y encolado responden sus hipótesis con respecto a las diferentes formas de reconstruir la hoja inicial, lo que posteriormente es formalizado con la creación de un conjunto cociente que valida lo hecho a través del recortado y encolado.

Resumimos algunas características de las producciones observadas de este equipo:

- Caracterizan las clases, a través de una codificación en fracciones y por la elección de un “representante de cada clase”.
- Producen igualdades variadas de los números racionales.
- Comparan y ordenan fracciones.
- Hacen funcionar la adición de medidas de áreas

Equipo 2: Marcela y Esteban

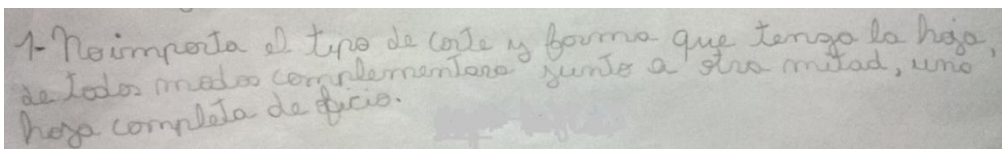
En esta actividad se visualizan desarrollos los cuales consisten en reconstruir la hoja de papel mediante el cortado y encolado:



Lo que sucede al poner cada forma en la hoja es que el área de cada figura es la misma, porque ambas son mitades de hojas que al superponer se puede rellenar el espacio y quedarán justas.

(Esteban)

Figura 29.Observación grupo 2, consigna 3.



1- No importa el tipo de corte y forma que tenga la hoja, de todos modos complementara junto a otra mitad, una hoja completa de papel.

(Marcela)

Figura 30.Observación grupo 2, consigna 3.

La observación anterior se obtiene del análisis de las siguientes formas:



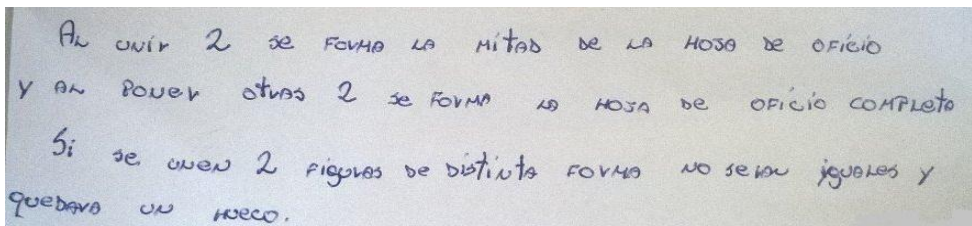
Al igual que el equipo 1, muestran que a través del recortado y encolado responden sus hipótesis con respecto a las diferentes formas de reconstruir la hoja inicial lo que posteriormente es formalizado con la creación de un conjunto cociente que valida lo hecho a través del recortado y encolado.

Resumimos algunas características de las producciones observadas de este equipo:

- Caracterizan las clases, a través de una codificación en fracciones y por la elección de un representante de cada clase”.
- Producen igualdades variadas de los números racionales.
- Comparan y ordenan fracciones.
- Hacen funcionar la adición de medidas de áreas.

Equipo 3: Francisco y Javiera

En esta etapa, en donde se reconstruye la hoja inicial con las diferentes familias de particiones, los alumnos de este grupo formulan lo siguiente:



Al unir 2 se forma la mitad de la hoja de oficio
y al poner otras 2 se forma la hoja de oficio completo
Si se unen 2 figuras de distinta forma no se unen juntas y
quedaba un hueco.

(Francisco)

Figura 32. Observación grupo 3, consigna 3.

La observación anterior se obtiene del análisis de las siguientes formas:



La observación e imagen nos muestra que consideraron superficies de tipo rectangular de un cuarto de hoja para completar la hoja inicial. Un posible error de los alumnos es creer que sólo pueden completar la hoja inicial con superficies de tipo rectangular y congruente lo que los lleva a no pensar en el encolado como solución geométrica, ni a la creación de un conjunto cociente como solución numérica.

Resumimos la característica de las producciones observadas de este equipo:

- No llegan al nivel de competencia necesario para responder a la consigna.

4.2.4 Actividad 4

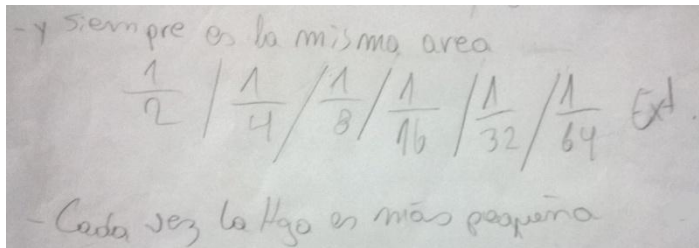
Consigna: *Trabajando en parejas, intenta construir nuevas variedades de superficies de igual área pero de formas diferentes.*

¿Es posible utilizar las nuevas clases de igual área para construir la hoja original de papel?

Formule una propiedad que relacione el área de la hoja con el perímetro de la misma.

Equipo 1: Diego y Roberto,

Estos estudiantes describen que pueden crear un sin número de nuevas particiones como lo muestra la siguiente observación:



(Diego)

Figura 34. Observación creación de nuevas clases de partición grupo 1

La observación anterior se obtiene del análisis de las siguientes formas:



Visualizan que el proceso de partición continúa de forma indefinida pero tienen presente que por más pequeñas que se vayan haciendo las particiones, la unión de ellas siempre será la hoja inicial.

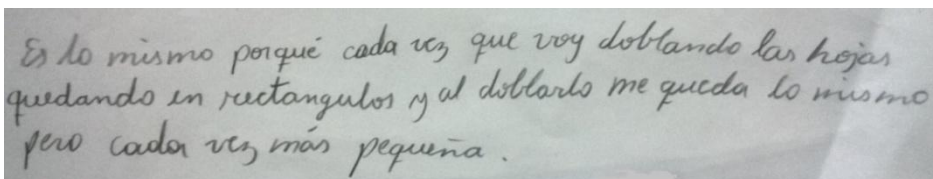
Resumimos algunas características de las producciones observadas de este equipo:

- Construyen una relación en el conjunto cociente
- Hacen funcionar la adición de medidas de áreas.
- Producen igualdades variadas en las fracciones..

- Comparan y ordenan fracciones.

Equipo 2: Marcela y Esteban

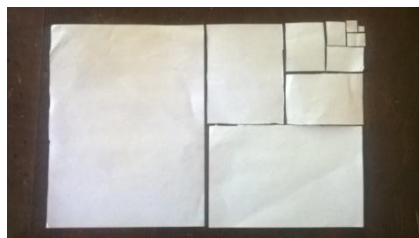
Este equipo sobre la creación de nuevas clases afirma que:



(Esteban)

Figura 36. Observación creación de nuevas clases de partición grupo 2.

La observación anterior se obtiene del análisis de las siguientes formas:



"Producciones realizadas por Marcela y Esteban"

Formulan que el proceso de partición de hoja puede continuar indefinidamente, por lo que se deduce que ellos piensan que existen varias particiones las cuales serán cada vez más pequeñas.

Resumimos algunas características de las producciones observadas de este equipo:

- Construyen una relación en el conjunto cociente
- Hacen funcionar la adición de medidas de áreas.
- Producen igualdades variadas en los números racionales.
- Comparan y ordenan fracciones.

Equipo 3: Francisco y Javiera

En esta actividad este grupo no ha formulado ninguna observación con respecto a la creación de nuevas clases de partición. El motivo probable es, en primera instancia, la no existencia de una estrategia de partición ya que la mayoría de los diferentes cortes encontrados fueron mediante el ensayo y error, lo que no dejó que este grupo en algún momento llegase a la abstracción de algún conocimiento.

Como implicancia de no encontrar una estrategia que respondiese con la consigna 1, este grupo no comprendió que cada forma de la familia G posee la mitad de la hoja inicial, y posteriormente tampoco consideró que las formas de la familia H tuviera un cuarto de la hoja inicial, lo que posteriormente no permitió que se construyera una validación con fracciones de lo que ocurría en el encolado de las hojas, y fueron estos errores que finalmente terminaron en una no comprensión del concepto de área y las relaciones con el perímetro, lo que impidió que este grupo creara nuevas clases y para este caso no formulara nada al respecto.

Resumimos la característica de las producciones observadas de este equipo:

- No llegan al nivel de competencia necesario para responder a la consigna.

4.3 Clasificación de los equipos respecto al nivel de aprendizaje

| Niveles de los equipos | Competencias | Características |
|---|---|--|
| <p>Equipo 1</p> <p>Nivel de Reformulación</p> | <ul style="list-style-type: none"> • Identificar casos distintos. • Definir una estrategia de resolución. • Identificar regularidades. • Establecer y justificar una propiedad o resultado. • Poner en relación los objetos matemáticos subyacentes en un modelo original. • Generalizar un enfoque o método de resolución. • Combinar métodos complementarios. • Justificar una propiedad o hipótesis. | <ul style="list-style-type: none"> • Utilizan la simetría central como herramienta de resolución al problema crean un stock de formas de igual área pero de formas diferentes. • Obtienen a través de la comparación de superficies las siguientes propiedades: <ul style="list-style-type: none"> -dos superficies que tienen igual área no tienen necesariamente la misma forma. -dos figuras que tienen igual área no tienen necesariamente el mismo perímetro. -dos figuras que pueden superponerse tiene igual área y mismo perímetro. • Luego de crear una clase de superficies de igual área pero de formas diferentes establece: <i>se puede aumentar libremente el perímetro de una superficie sin aumentar el área.</i> |

| | | |
|--|---|---|
| | | <ul style="list-style-type: none"> • Validan sus procesos mediante cambios de cuadros (geométrico-numérico). • Construyen el concepto de área fuera de un contexto numérico. |
| <p>Equipo 2</p> <p>Nivel de Estructuración</p> | <ul style="list-style-type: none"> • Identificar casos distintos. • Identificar regularidades. • Establecer y justificar una propiedad o resultado. • Generalizar un enfoque o método de resolución. • Combinar métodos complementarios. • Comprobar reglas y propiedades | <ul style="list-style-type: none"> • Perfeccionan la técnica del cuadriculado (implícitamente simetría central) para crear un stock de formas de igual área pero de formas diferentes. • Obtienen a través de la comparación de superficies las siguientes propiedades: <ul style="list-style-type: none"> -dos superficies que tienen igual área no tienen necesariamente la misma forma y el mismo perímetro. -dos figuras que pueden superponerse tiene igual área y mismo perímetro. • Luego de crear una clase de superficies de igual área pero de formas diferentes establecen: <i>se puede aumentar libremente el perímetro de una superficie sin aumentar el área.</i> • Validan sus procesos mediante cambios de cuadros |

| | | |
|---|---|---|
| | | <p>(geométrico-numérico).</p> <ul style="list-style-type: none"> • Construyen el concepto de área fuera de un contexto numérico. |
| <p>Equipo 3</p> <p>Nivel de Comprensión</p> | <ul style="list-style-type: none"> • Identificar casos distintos. • Emplear diversas estrategias para resolver problemas: a través de ensayo y error; aplicando conocimientos adquiridos. • Asociar un método a un objeto o propiedad. | <ul style="list-style-type: none"> • Utilizan la técnica del cuadriculado la cual es utilizada mediante el ensayo y error para crear un limitado stock de superficies de igual área pero de formas diferentes. • Asocian los conceptos geométricos con valores numéricos, no concluyendo las propiedades entre los conceptos. • Los procesos geométricos no son validados en un plano numérico, lo que no permite formalizar y generalizar los resultados obtenidos. • Construyen un concepto de área errado ya que no validan sus hipótesis, las cuales en su mayoría están mal estructuradas. |

Tabla 5. Clasificación de los equipos respecto al nivel de aprendizaje

5. CONCLUSIONES

Principales resultados de la investigación

Durante el desarrollo de esta investigación los estudiantes fueron capaces de cumplir el objetivo de investigación, pues crearon y comprendieron los conceptos de área y la noción de medida a través de una secuencia de tareas que les permitió construir y comprender los conceptos de área, perímetro y forma de una superficie, además de deducir algunas de sus propiedades.

Por su parte la Teoría de situaciones didácticas nos permitió enseñar el concepto de área a través de una situación *a-didáctica* (en el interior de la situación didáctica), produciendo un aprendizaje por adaptación, planteando al estudiante un problema que asimiló situaciones de la vida real, que pudo abordar a través de sus conocimientos previos, y que le permitió generar hipótesis y conjeturas. Además, en este proceso de enseñanza-aprendizaje, tuvimos cuidado de no romper el contrato didáctico, pues su ruptura nos llevaría a producir la inhibición de la construcción del nuevo conocimiento y a producir diversos efectos como son: efecto Topaze y efecto Jourdain quienes en ocasiones deterioran y pueden llegar a sustituir los aprendizajes.

Por otro lado, la experimentación en la clase, nos permitió observar que, estudiantes de bajo rendimiento educacional, lograron desarrollar con éxito la actividad, no así con estudiantes de alto rendimiento educacional porque posiblemente por una parte esperaban una devolución del profesor y por otra su aprendizaje ha sido más bien producto de la memorización que significativo.

BIBLIOGRAFIA.

ARGUELLES, J. (1989). *Historia de la Matemática*. Akal, Madrid.

ARTIGUE M. (1990). *Ingénierie didactique*. Recherches en Didactique des Mathématiques, vol. 9.3, Grenoble, La Pensée Sauvage.

ARTIGUE M. (1998). *Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental: ¿qué se puede aprender de las investigaciones didácticas y los cambios curriculares?* Relime Vol. 1, Núm. 1, pp.40-55.

ARTIGUE M. (2002). *Ingénierie didactique: que rôle dans la recherche didactique aujourd'hui?* Les dossiers des Sciences de l'Éducation. Didactique des disciplines scientifiques et technologiques: concepts et méthodes. Revue Internationale des Sciences de l'Éducation. Presses Universitaires du Mirail. N° 8.

BANG V. (1976). Two experiments on the relations between perimeter and area, in Eric/Smeac (1976), *Space and Geometry*. Papers from a research Workshop. Eric/Smeac:Columbus, Ohio, pp.99-128.

BROUSSEAU G. (1998). *Théorie des situations didactiques*, Grenoble: La Pensée Sauvage, textes rassemblés par N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland et V. Warfield.

BROUSSEAU G. (1983). *Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques*. Recherches en didactique des mathématiques. Grenoble. La Pensée Sauvage. Vol 4 (2)

CARON F. (2004). *Niveaux d'explicitation en mathématiques chez des étudiants universitaires*. Revue des sciences de l'éducation, Vol. XXX, N° 2, pp. 279-301.

CARPENTER T. P., CORBITT M. K., KEPNER H. S., LINDQUIST M. M., REYS R (1980). *Results of the second NAEP mathematics assessment: secondary school*. Mathematics Teacher, vol.73, pp.329-338.

CAUCHY A. (1823). *Résumé des Leçons Donnés à l'École Royale Polytechnique sur le Calcul Infinitésimal*. 1st vol, Paris.

CORBERAN R. (1996). El área: Recursos didácticos para su enseñanza en matemática.

CORBERÁN R., GUTIÉRREZ A., HUERTA P., JAIME A., MARGARIT J. PEÑAS A., RUIS E. (1994). *Diseño y evaluación de una propuesta curricular de aprendizaje de la geometría en enseñanza basada en el modelo de razonamiento de van hiele*. CIDE(MEC), Madrid.

CHEVALLARD Y. (1991). *La transposition didactique*, 2ème éd., Grenoble. La Pensée Sauvage.

DEL OLMO M. A., MORENO M. F., GIL F. (1989). *Superficie y volumen. ¿Algo más que el trabajo con formulas*. Síntesis, Madrid.

DOUADY R. (1983). *Rapport enseignement-apprentissage: Dialectique, outil-objet, jeux de cadres*. Cahiers de didactique des mathématiques. N° 3, IREM, Université Paris VII. Paris.

DOUADY R., PERRIN-GLORIAN M. J. (1989). *Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane*. Educational Studies in Mathematics, vol 20, pp.387-424.

FREUDENTHAL H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. D. Reid Publishing Company, Dordrecht. [Traducción castellana de tres capítulos de

Luis Puig, Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas (Departamento de Matemática Educativa de CINVESTAV, México, D.F.).].

FUNDACION PROYECTO GALILEO (2014). *Texto del estudiante Matemática 4° básico*. Santiago de Chile. Galileo. pp.222.

FUNDACION PROYECTO GALILEO (2014). *Texto del estudiante Matemática 5° básico*. Santiago de Chile. Galileo. pp.143.

HÉRAUD, B.(1989): L'Intégration de la compréhension de l'aire. *Actes de la 44ème Rencontre Internationale de la CIEAEM*, Bruxelles, pp.1-12.

LEBESGUE H. (1975). *La mesure des grandeurs*. Albert Blanchard, Paris.

MATER C.A., BEATTYS, C.B.(1986). *Examining the construction of area and its measurement by ten to fourteen year old children*. Proceedings of the Eighth annual meeting PME-NA, MI, pp.163-168.

MINISTERIO DE EDUCACION, REPUBLICA DE CHILE (2013). *Matemática Programa de Estudio primer básico*. Santiago de Chile. pp.180.

MORONI GÁLVEZ MARITZA, RUBILAR MORA JACQUELINE. (2013). *Matemática Texto para el estudiante 4° básico*. Santiago de Chile. Santillana. pp. 74.

PERRIN-GLORIAN M.J., DOUADY R. (1989). Conceptions des élèves à propos d'aires de surfaces planes, en Laborde, C., ed.(1988), *Actes du Premier Colloque Franco-Allemand de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique*. La Pensée Sauvage. Grenoble, pp.161-172.

PERRIN-GLORIAN M.J. (1992). *Aires de surfaces planes et nombres décimaux. Questions didactiques liées aux élèves en difficultés niveaux CM-6ème*.Thèse de Doctoral D'État. Université Paris 7.

RAMALHO G., CORREIA T. (1995). *Analysis of errors and strategies used by 9-year-old portuguese students in measurement and geometry items*. Procceding of the Nineteenth Annual Meeting PME, Brasil, vol.2, pp.122-129.

TIERNEY C., BOY C., DAVIS G. (1990). *Prospective primary teachers conceptions of area*. Procceding Fourteenth PME, México, vol. 2,pp. 307-315.

TURÉGANO MORATALLA P. (1993). *De la noción del área a su definición*. Cuenca: Publicaciones de Universidad de Castilla-La Mancha.