Universidad del Bío-Bío. Red de Bibliotecas – Chile

UNIVERSIDAD DEL BÍO-BÍO
FACULTAD DE EDUCACIÓN Y HUMANIDADES
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
ESCUELA DE PEDAGOGÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

NOCIONES DE LA ECUACIÓN DE PELL

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE PROFESOR DE ENSEÑANZA MEDIA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

AUTOR: VALDEBENITO FUENTES, RICARDO ANTONIO

Profesor Guía: Basso Basso, Ivo

CHILLÁN 2018

Universidad del Bío-Bío. Red de Bibliotecas – Chile

Universidad del Bío-Bío. Red de Bibliotecas – Chile

AGRADECIMIENTOS

Primeramente, doy gracias a Dios y a mi familia por el inmenso apoyo brindado siempre, así también a todas las personas que colaboraron en mi búsqueda de ser profesional. Sin duda el camino no ha sido fácil, pero la experiencia que gané es invaluable. Desde que inicie este proceso, veía su finalización muy a lo lejos, pero ya puedo ver mi sueño de ser Profesor cada vez más cerca.

Este viaje ha sido extraordinario, repleto de aprendizajes, emociones, conocimientos y de nuevas experiencias, solo me queda agradecer a Dios y a la vida por permitirme vivir este proceso académico y ubicar a grandes personas en mi desarrollo profesional.

Los agradecimientos se extienden a mi Universidad por las herramientas entregadas, como a cada uno de sus funcionarios y académicos que fueron parte de mi formación. Con especial reconocimiento al Sr Ivo Basso Basso, Director de esta tesis y mentor desde el inicio del proceso.

Gracias también a la persona que de una u otra manera ha sido clave en la búsqueda de mi vida profesional. Doy gracias también a mis familiares, socios y amigos del alma. Cada elemento y material con el que conté todo este tiempo, no fue fácil de obtener, lo que da un valor agregado, porque finalizar un trabajo tan arduo no hubiese sido posible sin estas personas e instituciones que facilitaron mi trabajo.

A todas y todos ellos, muchas gracias.

Universidad del Bío-Bío. Red de Bibliotecas – Chile

INTRODUCCIÓN

La ecuación de Pell es una ecuación diofántica cuya forma es:

$$x^2 - dy^2 = 1,$$

y como tal, se pide encontrar sus soluciones enteras.
El matemático Euler (1707-1783) fue quien atribuyó erróneamente a Jhon Pell un método de solución a este tipo de ecuación. Todo ocurrió después que Euler leyera la obra Opera Mathematica de Wallis.

De todas formas, no se posee evidencia que Pell haya considerado la posibilidad de resolver estas ecuaciones. En realidad, había sido método encontrado por otro matemático inglés, William Brouncker (1620-1684), en respuesta a un desafío de Fermat (1601-1665). Pero los intentos de cambiar la terminología introducida por Euler siempre han resultado inútiles.

Sería más lógico llamarlas “ecuaciones de Fermat”, puesto que el matemático francés fue el primero en investigar las soluciones no triviales de cada una de éstas o “ecuaciones de Arquímedes” al ser este el primero en plantear implícitamente una ecuación de este tipo y/o simplemente llevar el nombre de Diofanto al ser ésta una ecuación diofántica. Sin embargo, Jhon Pell y esta ecuación pasaron a la historia como la “Ecuación de Pell”.

En primer lugar, veremos que son los números triangulares y cuadrados, además de analizar qué relación tienen con las soluciones de una ecuación de Pell. en segundo lugar, nos introduciremos en fracciones continuas, estructura que es útil conocer para encontrar soluciones de la ecuación de Pell, al existir un método que utiliza estas estructuras. Y por últimos nos centraremos en otros métodos para encontrar soluciones de la ecuación de Pell.

Universidad del Bío-Bío. Red de Bibliotecas – Chile

ÍNDICE GENERAL

Universidad del Bío-Bío. Red de Bibliotecas – Chile

ÍNDICE GENERAL

Universidad del Bío-Bío. Red de Bibliotecas – Chile

CAPITULO 1

HISTORIA DE LA ECUACIÓN DE PELL

1.1. Introducción

Las referencias existentes de la Ecuación de Pell datan desde, el año a. de C. Múltiples matemáticos, han aportado referencias para plantear y dar soluciones de ecuaciones de éste tipo, el origen de su nombre es confuso y muchas veces ha estado en cuestionamiento. Hoy en día, la podemos reconocer como una ecuación tipo diofántica, en los casos que se plantea una ecuación diofántica, será necesario conocer de forma previa su solución fundamental.

Es importante destacar, cual fue el razonamiento lógico que utilizaron los matemáticos para saber la naturaleza de las soluciones de la ecuación de Pell.

Un número T es triangular cuando se pueden ordenar de tal forma que construyan un triángulo.

<u>Ejemplo:</u>

$T_1 = 1$ $T_2 = 3$  $T_3 = 6$  $T_4 = 10$ 

o sea, 1,3,6 y 10 son triangulares.

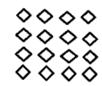
En el caso de los números triangulares la suma de todos los puntos es:

$$T_m = 1 + 2 + 3 + 4 + ... + m = \frac{m(m+1)}{2}$$

Universidad del Bío-Bío. Red de Bibliotecas – Chile

donde m es la cantidad de puntos que se ordenan en el piso o primer nivel de un triángulo formado por estos.

Un número es cuadrado, cuando se puede ordenar geométricamente como un cuadrado. Ejemplo:

$C_1 = 1$  $C_2 = 4$  $C_3 = 9$  $C_4 = 16$ 

O sea, 1, 4, 9 y 16, son números cuadrados.

Para este caso al número de puntos que tiene un cuadrado con base n lo llamaremos un número cuadrado y denotaremos por C_n y la suma de estos puntos:

$$C_n = n^2$$

¿Habrá números triangulares que también sean cuadrados?

Vale la pena recopilar unos cuantos datos y la tabla siguiente muestra algunos de éstos:

T_m	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78	91	105	120	136
C_m	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169	196	225	256

Note que los números 1 y 36 son triangulares y cuadrados; y luego parecen escasear. Con algunos cálculos vemos que 1225 es el siguiente número triangular y cuadrado, y quisiéramos un método eficiente que nos diera todos los números triangulares cuadrados; para lo cual, recordando las fórmulas para estos números, tendremos que resolver la ecuación

$$n^2 = \frac{m(m+1)}{2}$$

Universidad del Bío-Bío. Red de Bibliotecas – Chile

con m y n enteros, multiplicando por 8 y simplificando obtenemos

$$8n^2 = 4m(m+1) = 4m^2 + 4m$$

$$8n^2 = 4m^2 + 4m = (2m+1)^2 - 1$$

si entonces hacemos las sustituciones:

$$x = 2m + 1,$$

$$y = 2n,$$

obtenemos la ecuación

$$2y^2 = x^2 - 1$$

$$x^2 - 2y^2 = 1$$

que bien podemos considerar ecuación de Pell con $D = 2$. Es el caso particular en que la diferencia entre un numero cuadrado y dos veces otro cuadrado es igual a uno.

A continuación, nos detendremos en algunos matemáticos que fueron influyentes en la ecuación de Pell.

1.2. Arquímedes

Arquímedes de Siracusa nació en Sicilia, en el año 287 a. de C. fue un griego considerado como uno de los científicos más trascendentales de la antigüedad**.** El griego físico, matemático, astrónomo, ingeniero e inventor de Siracusa falleció en el año 212 a. de C. con aproximadamente 75 años de edad. Se le es atribuida la mayor importancia por su trabajo científico en la antigua Grecia y época clásica.

Realizó grandes aportes para el campo de las matemáticas, posicionándolo en un rol transcendental en la época de la antigüedad. Logró encontrar respuestas a las aproximaciones Precisas acerca π y también, se puede destacar el famoso “problema del ganado” donde plantea implícitamente una ecuación de Pell.

Universidad del Bío-Bío. Red de Bibliotecas – Chile

El problema del ganado de Arquímedes

El crítico y dramaturgo alemán, G.E. Lessing, a fines del siglo XVIII, encontró en biblioteca de Wolfenbüttel, un manuscrito con un poema griego de 44 líneas, el cual tradujo y publicó en 1773. Este poema resultó ser una carta que Arquímedes envío a Eratóstenes de Cirene.

Traducido al español dice:

El ganado pasta, desde hace tiempo, trinacria en la isla de Silicia
Separado en cuatro rebaños
Color por color: un rebaño blanco como a crema,
Otro resplandeciente como el ébano,
De piel café el tercero y pinta con manchas el ultimo.
Cada rebaño tiene toros poderosos
En las proporciones siguientes: cuenta la mitad de negro brillo,
Añade un tercio más y luego incluye todos los cafés;
Así, amigo, tendrás todo los toros blancos.
Los negros exceden los cafés también,
Ahora por un cuarto y un quinto de los pintos.
Para contar los pintos, todos los toros que restan
Junta a los cafés y únelos
Con un sexto y un séptimo de los blancos.
Entre las vacas, el número de las de pelo plateado,
Cuando se compara con los toros y vacas negras,
Exactamente una en tres más una en cuadro.

Universidad del Bío-Bío. Red de Bibliotecas – Chile

Las vacas negras cuentan una en cuatro una vez más,
Mas ahora un quinto, de las pintas,
Cuando, una vez que los toros se retiran, llegaran a comer.
Las vacas pintas alcanzan un quinto y un sexto
De todas las de pelo café, machos y hembras mezclados.
Finalmente, las vacas cafés numeran una mitad y un tercio
Y una en siete del rebaño plateado.
Dime amigo, sin fallar, cuantas cabezas de ganado
El sol tenía, de toros bien alimentados
Y de vacas de todo color—nadie negará
Que tiene arte y aptitud para los números,
Aun cuando lo anterior no te ponga entre los sabios.
Pero, ¡vamos! También lo siguientes será reconocido.
Siempre que los toros blancos del Sol se juntaban con los negros,
Su multitud se uniría en un grupo
De longitud y ancho iguales y cuadraban
El territorio de trinacia al largo y el ancho.
Pero cuando los toros cafés se mezclaban con los pintos,
En filas que aumentan de uno en uno,
Formando un triángulo perfecto, sin ningún
Toro de diferente color, y ninguno de sobra,
Amigo, pon este análisis en tu mente,
Y de todas estas masas las medidas encuentra,
¡Para aumentar tu gloria y estar seguro
De tu sabiduría en esta disciplina suprema!

Universidad del Bío-Bío. Red de Bibliotecas – Chile

Esta traducción del viejo manuscrito de Arquímedes contiene 42 líneas, las cuales, se pueden resumir de la siguiente forma:
Denotando con x, y, z, t los números de toros blancos, negros, pintos y cafés, respectivamente, tenemos

$$x = \frac{5}{6}y + t$$
$$y = \frac{9}{20}z + t$$
$$z = \frac{13}{42}x + t.$$

Denotando con x', y', z', t'
Los números de vacas blancas, negras, pintas y cafés, tenemos

$$x' = \frac{7}{12}(y + y')$$ [1]

$$y' = \frac{9}{20}(z + z')$$

$$z' = \frac{11}{30}(t + t')$$

$$t' = \frac{13}{42}(x + x').$$

[1] (Zaldivar, 2012), http://mathworld.wolfram.com/ArchimedesCattleProblem.html , https://www.math.nyu.edu/~crorres/Archimedes/Cattle/Statement.html

Universidad del Bío-Bío. Red de Bibliotecas – Chile

La primera parte de este problema es interesante si queremos investigar ecuaciones de Pell. De acuerdo a una referencia de Arquímedes, una persona que posea la capacidad de resolver estas ecuaciones, lo describe como meramente competente con “aptitud para los números”. Por otro lado, la solución del problema tiene una primera parte que no resulta complejo si se tiene conocimiento en ecuaciones matriciales; De las siete ecuaciones planteadas anteriormente, estas vinculan a ocho variables las cuales representan el sexo de los animales, además si su pelaje es de color blanco, negro, pinto y café. En resumen si tenemos siete ecuaciones y ocho variables, buscamos ordenar todas las variables como una ecuación matricial, la cual sería de orden 7x8 o 8x7, osea no sería cuadrada; No obstante, si queremos triangularizar la matriz debemos agregar una fila de ceros obteniendo una matriz cuadrada.

$$\begin{bmatrix} 6 & -5 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & -20 & -9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -13 & 0 & -42 & 42 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 & 0 & 12 & -7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -9 & 0 & 20 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & -11 & 0 & 0 & 0 & -11 & 30 \\ -13 & 0 & 0 & 0 & -13 & 0 & 42 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ t \\ z \\ x' \\ y' \\ t' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad] + 1\, fila$$

Universidad del Bío-Bío. Red de Bibliotecas – Chile

Similar pero a menor escala es el ejemplo que se puede representar en el juego de billar o también llamado pool, las dieciséis bolas de este juego se suelen ordenar en forma de cuadrado; Curiosamente al retirar la bola blanca las demás se pueden ordenar de manera triangular, es decir, nos encontramos con un caso en que el número de bolas que forma un triángulo es número cuadrado menos uno, justamente una parte de la ecuación de Pell $(x^2 - 1)$, Por tanto, debemos buscar que el número 15 tenga la forma (Dy^2), pues fácil:

$$15 \cdot 1^2 = 4^2 - 1$$

Al igual que en el pool, la combinación lineal que relaciona las ocho variables es representada por una matriz de orden rectangular, en el cual para completar una matriz cuadrada es necesario sumar una fila extra para así de esta manera completar el cuadrado, justamente también la ecuación de Pell.

La ecuación matricial anteriormente descrita, es de rango siete y su espacio de soluciones es generada por los múltiplos de

$(10366482, 7460514, 7358060, 4149387, 7206360, 4893246, 3515820, 5439213)$

Todas las soluciones son múltiplos de este vector, por lo tanto, existe un coeficiente escalar $k \in R$. Tenga en cuenta que hemos elegido el generador con coordenadas enteras coprimas como el número de bueyes el cual debe ser un número entero; Por lo tanto, solo nos interesan los k enteros. Se prosigue que la menor solución positiva corresponde a $k = 1$, si sumamos,

$$10366482k + 7460514k + 7358060k + 4149387k + 7206360k + 4893246k + 3515820k + 5439213k = 50389082k$$

eso quiere decir que la solución menor positiva corresponde a 50389082 cabezas de ganado, por lo que no resulta complejo conocer el número de esta solución.

Universidad del Bío-Bío. Red de Bibliotecas – Chile

El verdadero reto en este problema es escoger un k talque,

$$x + y = sea\ un\ numero\ cuadrado\ y$$

$$z + t = sea\ un\ numero\ triangular$$

$$10366482k + 7460514k = 17826996k = sea\ un\ numero\ cuadrado$$

$$7358060k + 4149387k = 11507447k = sea\ un\ numero\ triangular$$

En el caso de la primera condición $17826996k$ debe ser un número cuadrado, por lo que k debe ser de la forma $k = 2^2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 4657v^2$, donde v es cualquier numero cuadrado, yaqué al multiplicar k por 17826996, esto lo sabemos al factorizar el coeficiente

$$17826996 = 2^2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 4657$$

la segunda condición, se requiere que

$$11507447k = \frac{m(m+1)}{2}$$

con m perteneciente a los enteros positivos, reemplazando los k obtenidos de la primera condición, queda

$$11507447 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 4657 \cdot v^2 = \frac{m(m+1)}{2}$$

donde observamos que 4657 es divisor de 11507447, por lo que la ecuación anterior también se puede escribir como

$$4657 \cdot 2471 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 4657 \cdot v^2 = \frac{m(m+1)}{2}$$

multiplicando por 8 y ordenando queda

$$2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 2471 \cdot (2 \cdot 4657)^2 \cdot v^2 = 4m(m+1) = (2m+1)^2 - 1$$

si hacemos el cambio $2m + 1 = u$, podemos ver con más claridad que se reduce a una ecuación de Pell

$$2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 2471 \cdot v^2 = u^2 - 1$$

donde v es divisible por 2 y 4657.[2]

[2] (Zaldivar, 2012) (Vardi)

Universidad del Bío-Bío. Red de Bibliotecas – Chile

1.3. Diofanto de Alejandría

Diofanto de Alejandría, es un matemático griego. (150 a.C. – 350 d.C.), en el que no se posee información acerca de la patria y a lo que refiere a su vida; Sus escritos contribuyeron al perfeccionamiento de la notación algebraica y al desarrollo de los conocimientos del álgebra de su época. Mediante artificios de cálculo logró entregar soluciones particulares a numerosos problemas, y estableció las bases para un posterior desarrollo de importantes cuestiones matemáticas.

La obra más conocida de Diofanto es Aritmética, una colección de 130 problemas, distribuidos en 13 libros, de los que sólo se conservan 6. La mayoría de los problemas son de ecuaciones lineales y cuadráticas, con soluciones positivas y racionales, pues en aquella época no tenían sentido los números negativos y mucho menos los irracionales.

En su obra aritmética, plantea las siguientes ecuaciones diofántica tipo Pell:

$x^2 = 26y^2 + 1$ y $x^2 = 30y^2 + 1$,

Sin embargo, no proporcionó soluciones.

1.4. Brahmagupta

Brahmagupta, fue un matemático y astrónomo hindú, que nació en el año 598, obtuvo el cargo de jefe del observatorio astronómico en Ujjain y durante este rol, escribió cuatro textos sobre las matemáticas y la astronomía.

Brahmagupta, fue el precursor del concepto del "0" ya que en su obra Brahmasphutasiddhanta del año 628. Aparece por primera vez la idea de idealización de este valor. La obra trataba también sobre aritmética y números negativos en términos muy parecidos a los de la matemática moderna.

Universidad del Bío-Bío. Red de Bibliotecas – Chile

Éste matemático, ocupa un importante lugar en la ecuación que posteriormente se llamaría Pell, Brahmagupta proporcionó herramientas para entregar soluciones a partir de dos de éstas, para así, fabricar una tercera.

1.5. Bhaskara

Bhaskara, fue también un matemático y astrónomo hindú, que nació en el año 1114, en Bijjada Vida, cerca de las montañas y falleció en el año 1185, en Ujjain, India.

Bhaskara, es también conocido como Bhaskaracharya, que significa "Bhaskara el maestro". El padre de Bhaskara era un famoso astrónomo y le entregó conocimientos matemáticos a su hijo.

Bhaskara, el cual, se convirtió en parte del observatorio astronómico en Ujjain, el centro mejor evaluado de la India en su tiempo.

Su relación de Bhaskara con la ecuación de Pell, fue crear un método llamado proceso Chakravala, en el que planteó el siguiente problema:

"Dime, Oh matemático, ¿cuál es el cuadrado que multiplicado por 8 se convierte - junto co n la unidad - en un cuadrado?"

1.6. Brouncker

William Brouncker, fue un matemático y lingüista e inglés, nació en 1620 y murió 1684, fue un matemático y lingüista. Brouncker presenta una amplia trayectoria dentro del campo de las matemáticas, fue uno de los fundadores y el primer presidente de la Royal Society Brouncker es considerado el primer europeo en resolver la Ecuación de Pell y en presentar un interés genuino frente a las fracciones continuas, las cuales nos sirven de herramienta en la actualidad para completar un método que busca soluciones de la ecuación de Pell.

Universidad del Bío-Bío. Red de Bibliotecas – Chile

1.7. Euler

Leonhard Euler, fue un matemático, físico y filósofo suizo, que nació en 1707 en Basilea, este atribuyo el método de Brounker a Jhon Pell por una simple confusión. En ese tiempo, Euler era conocido por sus textos, esto generaba que las personas de esa época leyeran mucho sus obras, es por esto que la confusión se propagó de manera vertiginosa, esto generó que la ecuación usurpara el apellido de Jhon Pell, quién se hizo conocido por lo mismo.

Euler, aplicaba el método de Brounker con un D concreto y obtenía las soluciones; Sin embargo, este medio no poseía validez para todos los casos. Se puede apreciar que es un

detalle sin importancia, no obstante, esto no se puede definir como un no rotundo ya que no es así. El mismo Euler, fracasó al intentar demostrar este hecho por lo que la espera tardó más de un siglo para que Lagrange consiguiera dicha prueba.

1.8. Gauss

Johann Carl Friedrich Gauss, fue un matemático, astrónomo, geobotánico y físico alemán nació el 30 de abril de 1777 en Brunswick, Alemania, y murió el 23 de febrero de 1855 en Göttingen. Sus estudios e investigaciones pueden localizarse tanto en matemáticas como en física y astronomía.

En su obra “Disquisitiones Arithmeticae”, expone la factorización única en cuerpos complejos y a partir del conjugado, establece la norma:

$$N(\alpha) = \left(a + b\sqrt{D}\right)\left(a - b\sqrt{D}\right) = a^2 - Db^2 = \pm 1$$

que permite otra solución a la ecuación Pell.

Universidad del Bío-Bío. Red de Bibliotecas – Chile

CAPITULO 2

FRACCIONES CONTINUAS

2.1. Introducción

Las fracciones continuas son expresiones que se representan por medio de fracciones donde el denominador es otra fracción. Éstas, están compuestas por expresiones llamadas cociente incompleto y fracción integrante.

2.2. Fracción continua

A continuación, se mostrará un ejemplo numérico de lo que es la fracción continua finita:

$$2+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{8+\cfrac{1}{4}}}}$$

Universidad del Bío-Bío. Red de Bibliotecas – Chile

En esta fracción continua los enteros 2, 5, 6, 8 y el último denominador de la expresión en este caso el entero 4, se identifican como cocientes incompletos.

Se nombra fracción integrante a cada fracción que tiene por numerador la unidad y por denominador un entero, en el ejemplo anterior las fracciones integrantes serán $\frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}\ y\ \frac{1}{4}$.

"*Los pitagóricos aproximaban las raíces cuadradas inexactas (números irracionales) por medio de fracciones continuas, en 1613, Cataldi las estudió. En 1572, Bombelli aproximó las raíces cuadradas por medio de las fracciones continuas, y en 1658, Brouncker desarrolló 4π en fracción continua infinita. El primer estudio sistemático sobre las mismas se debe al famoso matemático Euler, que lo realizo en 1837"* (Baldor, 1994)

2.3. Transformar un número real a fracción continua:

Teorema 1: todo número racional puede ser expresado como una fracción continua simple. *Ver [5], demostración pag 154*

Supongamos que "a" es cualquier número real que se desea expresar como una fracción continua. Para esto, designamos con la letra q_1 al entero más grande que no supere a "a", que también es conocido como el primer cociente incompleto. Sin embargo existe la posibilidad de que "a" no sea un entero, entonces en aquel caso siempre se tiene que

$$a = q_1 + \frac{1}{a_2}; con\ a_2 > 1 \quad y \quad q_1 = 0 \ .$$

3

[3] (Baldor, 1994) (Pettofrezzo, 1972)

Universidad del Bío-Bío. Red de Bibliotecas – Chile

De igual forma, si los denominadores de la segunda fracción integrante en adelante

$a_2, \dots a_{n-1}$

no son enteros, también podemos identificarlos como los denominadores de las fracciones integrantes, en las que se obtiene $a_2 = q_2 + \frac{1}{a_3}; a_3 > 1$ entonces si se repite el procedimiento para $a_{n-1} = q_2 + \frac{1}{a_n}; a_n > 1$, en virtud de lo cual tenemos el siguiente desarrollo de "a" luego de realizar el proceso reiteradas veces:

$$q_1 + \cfrac{b_1}{q_2 + \cfrac{b_2}{q_{3+} \cfrac{b_3}{\dots\dots + \cfrac{\dots\dots\dots}{q_{n-1} + \cfrac{b_{n-1}}{a_n}}}}}$$

como "a" es racional, todos los números a_n serán racionales, por lo cual, el proceso no se extiende de manera indefinida para estos números números.

Ejemplo 1: calcular la fracción continua de la fracción $\frac{972}{421}$

Utilizando algoritmo de Euclides, calculamos los cocientes incompletos

$$\boxed{\begin{array}{c} 972 = 421 * 2 + 130 \\ \hline 421 = 130 * 3 + 31 \\ \hline 130 = 31 * 4 + 6 \\ \hline 31 = 6 * 5 + 1 \\ \hline 6 = 1 * 6 + 0 \end{array}}$$

$$\frac{972}{421} = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{6}}}}$$

Universidad del Bío-Bío. Red de Bibliotecas – Chile

fracción continua anterior, puede ser expresada abreviando los cocientes incompletos, usualmente es escrita de la siguiente forma:

$$2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{6}}}}=[2,3,4,5,6]$$

Teorema 2: Toda fracción continua simple finita representa un número racional.

Ver [5], demostración pág. 155

<u>Ejemplo 2</u>: Tenemos la siguiente fracción continua simple finita, que queremos transformar a numero racional

$$8+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2}}}=$$

$$8+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2}}}=8+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{\frac{9}{2}}}$$

$$8+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2}}}=8+\cfrac{1}{6+\frac{2}{9}}$$

$$8+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2}}}=8+\cfrac{1}{\frac{56}{9}}$$

Universidad del Bío-Bío. Red de Bibliotecas – Chile

$$8+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2}}}=8+\frac{9}{56}$$

$$8+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2}}}=\frac{457}{56}$$

$$\frac{457}{56}=[8,6,4]$$

2.4. Convertir un número irracional a fracción continua

Teorema 3: Todo número irracional puede ser expresado como una única fracción continua simple infinita. *Ver [5] demostración pág. 157*

<u>Ejemplo</u> 3: queremos representar $\sqrt{5}$ como fracción continúa

$$\sqrt{5}=2+\left(\sqrt{5}-2\right)=2+\frac{1}{\boxed{\frac{1}{\sqrt{5}-2}}}$$

Como $\frac{1}{\sqrt{5}-2}\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}+2}=\sqrt{5}+2$

Entonces

$$\sqrt{5}=2+\frac{1}{\sqrt{5}+2}=2+\frac{1}{4+(\sqrt{5}-2)}$$

$$\sqrt{5}=2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{\cfrac{1}{\sqrt{5}-2}}}=2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+(\sqrt{5}-2)}}$$

Universidad del Bío-Bío. Red de Bibliotecas – Chile

$$\sqrt{5} = 2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + (\sqrt{5} - 2)}} = 2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \boxed{\cfrac{1}{\sqrt{5} - 2}}}}$$

Notemos que no solamente se repite el número cuatro, en el cociente incompleto, sino que también se repite la misma expresión encerrada en cuadro. Para representar esta fracción continua se suele escribir de forma abreviada:

$$\sqrt{5} = [2, \overline{4}]$$

La periocidad es algo propio en las fracciones continuas de números irracionales.

2.5. Reducida o convergente de una fracción continua

Primeramente una fracción continúa generalizada se escribe $[a_1, a_{2,} a_{3,\ldots,} a_n]$, el convergente de una fracción continua es un cociente, donde, "p_n" es el numerador y "qn" es el denominador de la enésima fracción continua. La siguiente expresión se llama convergente enésimo.

$$\frac{p_n}{qn} = C_n = [a_1, a_{2,} a_{3,\ldots,} a_n]$$

Si la sucesión de convergentes C_n tiene límite, la fracción continua es convergente y tiene un valor definido. Es claro que tanto "p_n" como "qn" son polinomios que dependen de $[a_1, a_{2,} a_{3,\ldots,} a_n]$, la razón es que los convergentes se forman en forma recursiva, en la que haciendo algunas operaciones podremos calcular el valor de cada uno de los convergentes de una fracción continua.

Universidad del Bío-Bío. Red de Bibliotecas – Chile

2.6. Convergentes en casos generales

Teorema 4: Si $c_n = \frac{p_n}{q_n}$ donde c_n es el enésimo convergente de la fracción continua simple $[c_1, c_2, c_3, \dots, c_n]$. Entonces

$$\boldsymbol{p_1 = a_1} \qquad\qquad \boldsymbol{p_2 = a_2 a_1 + 1}$$
$$\boldsymbol{q_1 = 1} \qquad\qquad \boldsymbol{q_2 = a_2}$$

$$\boldsymbol{p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}\ , n \geq 3}$$
$$\boldsymbol{q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}\ , n \geq 3.}$$

Ver [5], demostración, pág. 169

<u>Ejemplo 4</u>:

$$\frac{23}{9} = 2 + \cfrac{1}{1\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4}}} = [2,1,1,4]$$

Para calcular sus convergentes, sabemos que estos dependen de su convergente anterior, entonces tenemos:

$$c_1 = 2$$

$$c_2 = 2 + \frac{1}{1} = 3$$

$$c_3 = 2 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}} = 4$$

$$c_4 = 2 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4}}} = \frac{23}{9}$$ [4]

[4] (Pettofrezzo, 1972)

Universidad del Bío-Bío. Red de Bibliotecas – Chile

El procedimiento para calcular convergentes, no es complejo para fracciones continuas pequeñas, pero sin embargo para el caso de fracciones continuas grandes tendremos que buscar algún método más eficiente.

Ejemplo 4: Determinar los primeros seis convergentes de la fracción continua simple infinita que representa a $\sqrt{5} = [2, \bar{4}]$

$$c_1 = [2] = 2$$

$$c_2 = [2,4] = 2 + \frac{1}{4} = 2{,}25$$

$$c_3 = [2,4,4] = 2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4}} = \frac{38}{17} = 2{,}235294118$$

$$c_4 = [2,4,4,4] = 2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4}}} = \frac{161}{72} = 2{,}236111111$$

$$c_5 = [2,4,4,4,4] = 2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4}}}} = \frac{682}{305} = 2{,}236065574.$$

$$c_6 = [2,4,4,4,4,4] = 2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4}}}}} = \frac{2889}{1292} = 2{,}236068111.$$

Universidad del Bío-Bío. Red de Bibliotecas – Chile

Ejemplo 5: Utilizando teorema 5, calcular el sexto convergente de la fracción continua representante de $\sqrt{5}$, sabemos que $\sqrt{5} = [2, \overline{4}]$.

Como:

$$a_1 = 2,$$
$$a_2 = 4,$$
$$a_3 = 4,$$
$$a_4 = 4,$$
$$a_5 = 4,$$
$$a_6 = 4,$$

entonces

$$p_1 = a_1 = 2$$

$$q_1 = 1, \qquad c_1 = \frac{p_1}{q_1} = 2$$

$$p_2 = a_2 a_1 + 1 = 4 \cdot 2 + 1 = 9$$

$$q_2 = a_2 = 4 \qquad c_2 = \frac{p_2}{q_2} = \frac{9}{4}$$ [5]

$$p_3 = a_3 a_2 + p_1 = 4 \cdot 9 + 2 = 38$$

$$q_3 = a_3 \cdot q_2 + q_1 = 4 \cdot 4 + 1 = 17 \qquad c_3 = \frac{p_3}{q_3} = \frac{38}{17}$$

[5] (Pettofrezzo, 1972)

Universidad del Bío-Bío. Red de Bibliotecas – Chile

$$p_4 = a_4 a_3 + p_2 = 4 \cdot 38 + 9 = 161$$

$$q_4 = a_4 \cdot q_3 + q_2 = 4 \cdot 17 + 4 = 72 \qquad c_4 = \frac{p_4}{q_4} = \frac{161}{72}$$

$$p_5 = a_5 a_4 + p_3 = 4 \cdot 161 + 38 = 682$$

$$q_5 = a_5 \cdot q_4 + q_3 = 4 \cdot 72 + 17 = 305 \qquad c_5 = \frac{p_5}{q_5} = \frac{682}{305}$$

$$p_6 = a_6 a_5 + p_4 = 4 \cdot 682 + 161 = 2889$$

$$q_6 = a_6 \cdot q_5 + q_4 = 4 \cdot 305 + 72 = 1292 \quad c_6 = \frac{p_6}{q_6} = \frac{2889}{1292}$$

Para conocer convergentes más altos podemos observar que el proceso puede aplicarse indefinidamente solo necesitando de convergentes anteriores, a esto llamaremos proceso recursivo.

Universidad del Bío-Bío. Red de Bibliotecas – Chile

2.7. Calcular convergentes utilizando determinantes

Como bien sabemos, el cálculo de convergentes de fracciones continuas o la aproximación de un número irracional es un proceso un poco cansador para convergentes más alto. No obstante, puede ser útil trabajar con una herramienta que nos facilite la búsqueda de convergentes. El método consiste en la utilización de determinantes, con los que podremos calcular el enésimo convergente de una fracción continua, los determinantes nos restringen calcular los primeros dos convergentes: Estos dos será más factible calcularlos por la definición de convergentes. Y el resto será más fácil calcularlos con la ayuda de determinantes.

Teorema 2.13 Sea $\sqrt{m}$ un numero irracional que queremos aproximar; y cada uno de los primeros cuatro convergentes c_n pueden ser expresado como el cociente de dos enteros p_n y q_n, donde

$$\begin{array}{rl} p_1 = a_1, & q_1 = 1; \\ p_2 = a_2 p_1 + 1, & q_2 = a_2 q_1; \\ p_3 = a_3 p_2 + p_1, & q_3 = a_3 q_2 + q_1; \\ p_4 = a_4 p_3 + p_2, & q_4 = a_4 q_3 + q_2; \end{array}$$

Todas estas ecuaciones que contienen a $p_{1,}p_{2,}p_3\ y\ p_4$ representa un sistema de cuatro ecuaciones lineales. Si reordenando los términos de estas ecuaciones tenemos

$$\begin{cases} -p_1 & = -a_1 \\ a_2 p_1 - p_2 & = -1 \\ p_1 + a_3 p_2 - p_3 & = 0 \\ p_2 + a_4 p_3 - p_4 & = 0. \end{cases}$$

Universidad del Bío-Bío. Red de Bibliotecas – Chile

Usando regla de Crámer se puede resolver un sistema de ecuaciones lineales, entonces el valor de aquel determinante es igual a

$$p_4 = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & -a_1 \\ a_2 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & a_3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & a_4 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & a_3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & a_4 & -1 \end{vmatrix}}$$

como $(-1)^4 = 1$, Por lo tanto, por las propiedades de los determinantes

$$p_4 = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & -a_1 \\ a_2 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & a_3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & a_4 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & a_2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & a_3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & a_4 \end{vmatrix}$$

análogamente, el conjunto de ecuaciones en las incógnitas q_1 , q_2, q_3 y q_4 representa un sistema de cuatro ecuaciones lineales. Reordenando los términos de las ecuaciones, tenemos

$$\begin{cases} -q_1 = -1 \\ a_2q_1 - q_2 = 0 \\ q_1 + a_3q_2 - q_3 = 0 \\ q_2 + a_4q_3 - q_4 = 0. \end{cases}$$

Usaremos regla de Crámer nuevamente para resolver determinantes, el lector puede utilizar un método que sea más cómodo y útil para resolver el sistema, entonces tenemos:

Universidad del Bío-Bío. Red de Bibliotecas – Chile

$$q_4 = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 \\ a_2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & a_3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & a_4 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & a_3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & a_4 & -1 \end{vmatrix}}$$

pero q_4, por tener todos los elementos superiores de la diagonal igual a cero en el determinante del denominador, el valor de q_4 se reduce a:

$$q_4 = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 \\ a_2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & a_3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & a_4 & 0 \end{vmatrix}$$

Ahora si queremos desarrollar este determinante por cofactores tomando la cuarta columna q_4 se reduce a:

$$q_4 = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 \\ a_2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & a_3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & a_4 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & -1 & 0 \\ 1 & a_3 & -1 \\ 0 & 1 & a_4 \end{vmatrix}$$

Universidad del Bío-Bío. Red de Bibliotecas – Chile

Entonces finalmente, generalizando tenemos el convergente enésimo de la siguiente forma:

$$c_n = \frac{p_n}{q_n} = \frac{\left|\begin{pmatrix} a_1 & -1 & .. & 0 & 0 \\ 1 & & .. & .. & 0 \\ 0 & a_2 & -1 & .. & 0 \\ .. & 1 & .. & -1 & .. \\ 0 & .. & 1 & a_3 & 0 \\ 0 & .. & .. & 1 & -1 \\ 0 & 0 & .. & .. & a_n \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} a_1 & -1 & .. & 0 & 0 \\ 1 & a_2 & .. & .. & 0 \\ 0 & 1 & -1 & .. & 0 \\ .. & .. & .. & -1 & .. \\ 0 & .. & 1 & a_3 & -1 \\ 0 & 0 & .. & 1 & a_n \\ & & & & \end{pmatrix}\right|}$$

Los valores de los determinantes que representan p_4 y q_4 dependen directamente de los términos de la fracción continuas simple infinita $[a_1 a_2, a_3, \dots a_{\mathrm{n}}]$.

Universidad del Bío-Bío. Red de Bibliotecas – Chile

<u>Ejemplo 6</u>: calcular los primero seis convergentes de $\sqrt{5}$, utilizando convergentes.

Sabemos que

$$c_1 = [2] = 2 \qquad \text{y} \qquad c_2 = [2{,}4] = 2 + \tfrac{1}{4} = \tfrac{9}{4}$$

Ahora buscaremos los demás utilizando la fórmula propuesta

$$c_3 = \frac{p_3}{q_3} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{38}{17}$$

$$c_4 = \frac{p_4}{q_4} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{161}{72}$$

Universidad del Bío-Bío. Red de Bibliotecas – Chile

Para c_5 en adelante es mejor calcular p_5 y q_5 por separado

$$p_5 = \left\| \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \right\| = 682$$

$$q_5 = \left\| \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \right\| = 305$$

Entonces

$$c_5 = \frac{p_5}{q_5} = \frac{682}{305}$$

finalmente Para c_6, entonces tenemos

$$p_6 = \left\| \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \right\| = 2889$$

$$q_6 = \left\| \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \right\| = 1292$$

con esto podemos calcular el sexto convergente $c_6 = \frac{p_6}{q_6} = \frac{2889}{1292}$.

Universidad del Bío-Bío. Red de Bibliotecas – Chile

Si queremos calcular más convergentes de fracciones continuas podemos ordenar los datos en tablas.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p_n	2	9	38	161	682	2889	12238	51841	219602	930249
q_n	1	4	17	72	305	1292	5473	23184	98209	416020

Tengamos en cuenta que en una fracción continua los convergentes $c_n = \frac{p_n}{q_n}$, Si calculamos el valor numérico de los cocientes tenemos:

$$\frac{p_2}{q_2} = 2{,}25$$

$$\frac{p_3}{q_3} = 2{,}236\overline{1}$$

$$\frac{p_4}{q_4} = 2{,}236065574$$

$$\frac{p_5}{q_5} = 2{,}236068111$$

$$\frac{p_6}{q_6} = 2{,}23606797$$

$$\frac{p_7}{q_7} = 2{,}236067$$

$$\frac{p_8}{q_8} = 2{,}236067977$$

$$\frac{p_9}{q_9} = 2{,}236067978$$

Universidad del Bío-Bío. Red de Bibliotecas – Chile

Por otro lado, el valor numérico que nos entrega una calculadora científica tradicional con nueve decimales del número irracional

$$\sqrt{5} = 2{,}236067977$$

nos damos cuenta, que los convergentes representan una mejor aproximación del número irracional respecto al valor de su convergente antecesor.

Útil puede ser graficáramos los valores de los convergentes del número irracional $\sqrt{5}$:

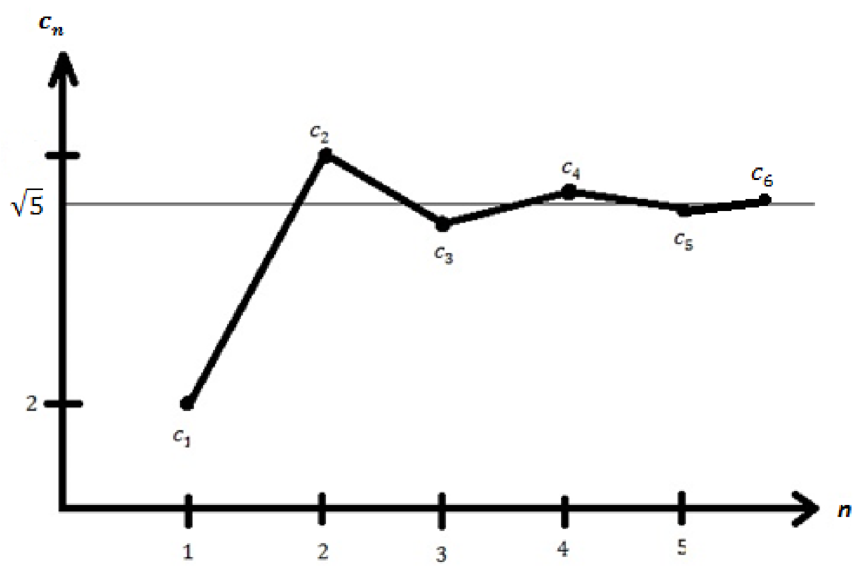


Fig.1

Los convergentes correspondientes a impares $c_1, c_3\ y\ c_5$ son menores que $\sqrt{5}$; los convergentes correspondientes a los pares $c_2\ y\ c_4$ son mayores que $\sqrt{5}$. Además

$$c_1 < c_3 < c_5 < \sqrt{5} < c_6 < c_4 < c_2.$$

Universidad del Bío-Bío. Red de Bibliotecas – Chile

En general se puede demostrar que:

(i) los convergentes correspondientes a índices impares de una fracción continua simple forman una sucesión creciente, esto es,

$$c_1 < c_3 < c_5 < \cdots;$$

(ii) los convergentes correspondientes a índices pares de una fracción continua simple forman una sucesión decreciente, esto es,

$$c_2 > c_4 > c_6 > \cdots;$$

(iii) todo convergente correspondiente a índices impar de una fracción continua simple infinita que representa a un número irracional es menor que x, y todo convergente correspondiente a un par es mayor que x, esto es,

$$c_1 < c_3 < c_5 < \cdots < x < \cdots < c_6 < c_4 < c_2.$$

Universidad del Bío-Bío. Red de Bibliotecas – Chile

CAPÍTULO 3

MÉTODOS PARA ENCONTRAR SOLUCIONES DE LA ECUACIÓN DE PELL

3.1. Introducción

En este capítulo nos introduciremos en tres métodos existentes actuales para encontrar soluciones de una ecuación de tipo Pell, los métodos son en base a fracciones continuas, aritmética modular y la utilización de cuadrados, en ese orden.

3.2 hallar soluciones de una ecuación de Pell:

Se plantea la siguiente ecuación de Pell:

$$x^2 - 11y^2 = 1$$

Se puede plantear la norma de factorización única en cuerpos complejos, Al factorizar como el producto notable de la suma por la diferencia, teniendo en cuenta que

$$1 = 1^2 = (-1)^2$$

tenemos

$$(x + \sqrt{11}y)(x - \sqrt{11}y) = x^2 - 11y^2 = 1$$

Universidad del Bío-Bío. Red de Bibliotecas – Chile

Al ser $\sqrt{11}$ un numero irracional, no podríamos encontrar soluciones enteras, sin embargo, Al elegir un número que multiplicado por 11 y sumado con la unidad este sea un cuadrado perfecto, en ese caso particular conoceríamos una solución de la variable dependiente de la ecuación de Pell, de esta manera sabemos que existen soluciones.

$$x^2 = \sqrt{11y^2 - 1}$$

¿Qué número debemos elegir?

Por otro lado, 11 es un entero positivo que no es un cuadrado perfecto, entonces $\sqrt{11}$ puede ser representado como una fracción continua periódica, cuyo periodo comienza después del primer término. Para encontrar alguna aproximación tendremos que conocer sus decimales, si usamos el teorema para encontrar los convergentes de una fracción continua simple finita, teniendo en cuenta que es una parte de una fracción continua infinita, Entonces tenemos que de $\sqrt{11}$ es representado por la fracción continua $a_n = [3, \overline{3}, \overline{6}, \overline{3}, \overline{6}, \overline{3}, \overline{6}, \dots .]$

$[a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}, \dots .] = [3{,}3{,}6{,}3{,}6{,}3{,}6{,}3{,}6{,}3{,}6{,}3{,}6{,}3{,}6, \dots .]$

De acuerdo a lo expuesto en **2.7.**:

$p_1 = a_1 = 3$

$$q_1 = 1$$

$$c_0 = \frac{p_1}{q_1} = \frac{3}{1}$$

$p_2 = a_2 a_1 + 1 = 3 * 3 + 1 = 10$

$$q_2 = a_2 = 3,$$

$$c_1 = \frac{p_2}{q_2} = \frac{10}{3}$$

Universidad del Bío-Bío. Red de Bibliotecas – Chile

$$p_3 = a_3a_2 + p_1 = 6 * 3 + 3 = 21$$

$$q_3 = a_3q_2 + q_1 = 6 * 3 + 1 = 19$$

$$c_2 = \frac{p_3}{q_3} = \frac{21}{19}$$

$$p_4 = a_4a_3 + p_2 = 3 * 6 + 10 = 28$$

$$q_4 = a_4q_3 + q_2 = 1$$

$$3 * 19 + 3 = 60$$

$$c_4 = \frac{p_4}{q_4} = \frac{28}{60}$$

$$p_5 = a_5a_4 + p_3 = 6 * 3 + 21 = 39$$

$$q_5 = a_5q_4 + q_3 = 6 * 60 + 19 = 379$$

$$c_5 = \frac{p_5}{q_5} = \frac{39}{379}$$

$$p_6 = a_6a_5 + p_4 = 3 * 6 + 28 = 46$$

$$q_6 = a_6q_5 + q_4 = 3 * 379 + 60 = 1197$$

$$c_6 = \frac{p_6}{q_6} = \frac{46}{1197}$$

$$p_7 = a_7a_6 + p_5 = 6 * 3 + 39 = 57$$

$$q_7 = a_7q_6 + q_5 = 6 * 1197 + 397 = 7561$$

$$c_7 = \frac{p_7}{q_7} = \frac{57}{7561}$$

Universidad del Bío-Bío. Red de Bibliotecas – Chile

$p_8 = a_8 a_7 + p_6 = 3 * 6 + 46 = 64$

$$q_8 = a_8 q_7 + q_6 = 3 * 7561 + 1197 = 23880$$

$$c_8 = \frac{p_8}{q_8} = \frac{64}{23880}$$

$p_9 = a_9 a_8 + p_7 = 6 * 3 + 57 = 75$

$$q_9 = a_9 q_8 + q_7 = 6 * 23880 + 7561 = 150841$$

$$c_9 = \frac{p_9}{q_9} = \frac{75}{150841}$$

$p_{10} = a_{10} a_9 + p_8 = 3 * 6 + 64 = 82$

$$q_{10} = a_{10} q_9 + q_8 = 3 * 150841 + 23880 = 476403$$

$$c_{10} = \frac{p_{10}}{q_{10}} = \frac{82}{476403}$$

Notemos que la convergente c_{10} es solución de la ecuación Pell que nos servirá para calcular las demás soluciones, también cabe destacar que los q_i son valores de la variable dependiente y, son soluciones de la ecuación en el mismo momento en que la fracción continua cumple un ciclo y sabiendo el valor de la variable dependiente, podemos despejar el valor de la variable independiente.

Por ejemplo para $q_{10} = 476403$

$$x^2 - 11(476403)^2 = 1$$

$$x^2 = 11(476403)^2 + 1$$

$$x = \sqrt{11(476403)^2 + 1}$$

$$x = 1580050$$

de esta manera podemos encontrar valores para la variable independiente.

Universidad del Bío-Bío. Red de Bibliotecas – Chile

3.3 Solución por modulares

Sea

$$x^2 - 1 = Dy^2.$$

Destaquemos que un número menos otro, es igual a D por otro número, que es más bien la definición algebraica de modulo D, al ser D divisor de la deferencia entre x^2 y 1

$$D/(x^2 - 1) \leftrightarrow x^2 \equiv 1(mod\ D)$$

Entonces podemos definir el cuerpo:

$$Z_D = [0]_D, [1]_D, [2]_D, [3]_{D,} \dots, [D-1]_D$$

$$donde\ [D]_D\ es\ la\ clase\ del\ D\ en\ modulo\ D.$$

En la ecuación de Pell el coeficiente independiente es 1 y 1 siempre es resto cuadrático de cualquier ecuación, ya que:

$$1^2 - 1 = 0 * D = 0\ \ o\ sea\ D/(1^2 - 1).$$

Entonces el primer elemento del conjunto es solución, a la vez todas sus clases así la primera raíz y solución paramétrica es:

$$x_1 = 1 + Dt, t \in N$$

que es más bien la clase de 1 en modulo D

$$[1]_D = x_1.$$

Entonces inmediatamente existe inverso por ser 1 y D coprimos, según Gauss si una ecuación cuadrática Mónica, al estar multiplicada por uno, entonces si admite una raíz, también admite como segunda raíz su inversa.

Universidad del Bío-Bío. Red de Bibliotecas – Chile

En el caso de aritmética modular el inverso aditivo de un número respecto al módulo es su complemento, en este caso el inverso de $1\ es\ (D-1)$

$$pues\ (D-1)+1=D.$$

Entonces:

$x_2=(D-1)+Dt, con\ t\in Z,$

como ya dijimos al tratarse una ecuación cuadrática es multivariable, al tener dos raíces, por esto, cada solución tiene un inverso y estos también serán soluciones.

En $x^2-Dy^2=1$, queremos también buscar y, entonces como $x_1=1+Dt$

$$(1+Dt)^2-D{y_1}^2=1$$

$${y_1}^2=\frac{-1+(1+Dt)^2}{D}$$

$${y_1}^2=2t+Dt^2,$$

además, $x_1=(D-1)+Dt$, también es solución

$$\left((D-1)+Dt\right)^2-D{y_2}^2=1$$

$${y_2}^2=\frac{-1+((D-1)+Dt)^2}{D}$$

$${y_2}^2=\frac{-1+(D^2-2D+1)+2(D-1)Dt+(Dt)^2}{D}$$

$${y_2}^2=(D-2)+(D-1)2t+Dt^2.$$

De ser $x^2\equiv 1(mod\ D)$ los dos pares de soluciones son:

$$x_1=1+Dt,\qquad {y_1}^2=2t+Dt^2, t\in Z$$

$$x_2=(D-1)+Dt,\qquad {y_2}^2=(D-2)+(D-1)2t+Dt^2, t\in Z$$

Universidad del Bío-Bío. Red de Bibliotecas – Chile

Ejemplo 7:

Para $D = 11$;

$$x^2 - 11y^2 = 1,$$

los pares de soluciones

$$x_1 = 1 + 11t, \qquad {y_1}^2 = 2t + 11t^2, t \in Z$$

Utilizando el método modular descrito anteriormente

$$x_2 = 10 + 11t, \qquad {y_2}^2 = 9 + 20t + 11t^2, t \in Z.$$

No obstante lo que no podemos asegurar es que $y_1, y_2 \in Z$, y esa es la gran deuda del método de aplicar modulares para encontrar soluciones de la ecuación de Pell.

Gracias a Gauss que plantea la norma de factorización única en cuerpos complejos, tenemos

$$(x + \sqrt{11}y)(x - \sqrt{11}y) = x^2 - 11y^2 = 1$$

esto permite obtener otras soluciones, si hacemos que:

$$x = \frac{\left(10 + 3\sqrt{11}\right)^1 + \left(10 - 3\sqrt{11}\right)^1}{2} = 10,$$

$$y = \frac{(10 + 3\sqrt{11})^1 - (10 - 3\sqrt{11})^1}{2\sqrt{11}} = 3$$

$$x = \frac{\left(10 + 3\sqrt{11}\right)^2 + \left(10 - 3\sqrt{11}\right)^2}{2} = 199,$$

$$y = \frac{(10 + 3\sqrt{11})^2 - (10 - 3\sqrt{11})^2}{2\sqrt{11}} = 60$$

Universidad del Bío-Bío. Red de Bibliotecas – Chile

$$x = \frac{\left(10+3\sqrt{11}\right)^3 + \left(10-3\sqrt{11}\right)^3}{2} = 3970,$$

$$y = \frac{(10+3\sqrt{11})^3 - (10-3\sqrt{11})^3}{2\sqrt{11}} = 1197$$

$$x = \frac{\left(10+3\sqrt{11}\right)^4 + \left(10-3\sqrt{11}\right)^4}{2} = 79201,$$

$$y = \frac{(10+3\sqrt{11})^1 - (10-3\sqrt{11})^1}{2\sqrt{11}} = 23880$$

$$x = \frac{\left(10+3\sqrt{11}\right)^5 + \left(10-3\sqrt{11}\right)^5}{2} = 1580050,$$

$$y = \frac{(10+3\sqrt{11})^5 - (10-3\sqrt{11})^5}{2\sqrt{11}} = 476403$$

La forma general para estas soluciones es la siguiente:

$$x = \frac{\left(\alpha+\beta\sqrt{D}\right)^n + \left(\alpha-\beta\sqrt{D}\right)^n}{2}, \quad y = \frac{\left(\alpha+\beta\sqrt{D}\right)^n - \left(\alpha-\beta\sqrt{D}\right)^n}{2\sqrt{D}}$$

Con α y β soluciones.

Para $t = 0$ entonces

$$x_2 = 10 + 11t, \qquad {y_2}^2 = 9 + 20t + 11t^2, t \in Z.$$

$$(x, y) = (10,3).$$

Universidad del Bío-Bío. Red de Bibliotecas – Chile

A menudo es conveniente ordenar los cálculos y formar tablas

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
α_n	3	3	6	3	6	3	6	3	6	3
x	3	10	63	199	1257	3970	25077	79201	500283	1580050
y	1	3	19	60	379	1197	7561	23880	150841	476403
$x^2 - Dy^2$	-2	1	-2	1	-2	1	-2	1	-2	1

Las reducidas 4, 6, 8 y 10 también son soluciones

$$-11 * 60^2 = 3970^2 - 11 * 1197^2 = 79201^2 - 11 * 23880^2$$
$$= 1580050^2 - 11 * 476403^2 = 1$$

Destacamos que las reducidas que si son soluciones de la Ecuación Pell aparecen en la misma posición en que la fracción continua cumple un ciclo.

Por otro lado, la solución destacada en el cuadro podría haber sido encontrada con el método de aplicar modulares $x_2 = 10 + 11t, \qquad {y_2}^2 = 9 + 20t + 11t^2, t = 0.$

Sin duda hubiera sido menos engorroso y rápidamente hubiéramos encontrados las demás soluciones.[6]

sus soluciones serán

$$x_1 = 1 + 11 \cdot 11 = 122, \qquad {y_1}^2 = 2 \cdot 11 + 11 \cdot 11^2 = 1353$$

$$x_2 = 10 + 11 \cdot 11 = 131, \qquad {y_2}^2 = 9 + 20 \cdot 11 + 11 \cdot 11^2 = 1560$$

notemos que $122^2 - 11 \cdot 1353 = 1$ y $131^2 - 11 \cdot 1560 = 1$

[6] http://hojamat.es/parra/pell.pdf

Universidad del Bío-Bío. Red de Bibliotecas – Chile

nos contentamos al encontrar soluciones concretas de la ecuación de Pell, sin embargo 1353 y 1560 no son unos números cuadrados perfecto por lo que no tienen raíz cuadrada exacta. Entonces lo que no podemos asegurar es que $y_1, y_2 \in Z$, no encontrar raíces enteras es la gran deuda del método.

¿Para qué t $\in Z$ la expresión $2t + 11 \cdot t^2$ es a la vez un cuadrado perfecto?

Planteamos la siguiente ecuación cuadrática

$$2t + 11 \cdot t^2 = n^2$$

Haciendo algunos cálculos tenemos que:

$$2t + 11 \cdot t^2 - n^2 = 0$$

$$t = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 + 4 * 11 * n^2}}{2 * 11}$$

$$t = \frac{-2 \pm 2\sqrt{1 + 11 * n^2}}{11}$$

Al mirar el discriminante

$$\sqrt{1 + 11 * n^2}$$

Podemos observar que para encontrar un t entero debe existir un número al cuadrado tal, que al multiplicar en este caso por 11 y al sumar la unidad, esta cantidad debe tener obligatoriamente raíz cuadrada. Es por esto, que la búsqueda se dificulta de aún más. [7]

[7] http://hojamat.es/parra/pell.pdf (Baldor, 1994)

Universidad del Bío-Bío. Red de Bibliotecas – Chile

3.4. Método aplicando cuadrados para encontrar soluciones de ecuaciones particulares de Pell

Si se tiene cuenta, que la ecuación Pell tiene como solución la diferencia de un cuadrado perfecto y el producto de otro cuadrado con un entero, que no sea un cuadrado, esta solución puede encontrarse directamente utilizando cuadrados perfectos.

El método consiste en fijar una solución de la variable independiente e ir dando valores impares cuadrados de la variable independiente de modo que estas sean soluciones de ecuaciones de Pell para diferentes D, en realidad no son las soluciones las que encontramos con este método si no que estamos encontrando diferentes D.

Supongamos que buscamos un cuadrado de la forma $4k + 1 = s^2$ a partir la cual podemos hallar las siguientes soluciones,

Universidad del Bío-Bío. Red de Bibliotecas – Chile

$\boldsymbol{4k+1=n^2}$	$\boldsymbol{x^2-Dy^2=1}$	$\boldsymbol{4k+1=n^2}$	$\boldsymbol{x^2-Dy^2=1}$
$4*2+1=9$	$3^2-4*2^2=1$	$4*72+1=289$	$17^2-72*2^2=1$
$4*6+1=25$	$5^2-6*2^2=1$	$4*90+1=361$	$19^2-90*2^2=1$
$4*12+1=49$	$7^2-12*2^2=1$	$4*110+1=441$	$21^2-110*2^2=1$
$4*20+1=81$	$9^2-20*2^2=1$	$4*132+1=529$	$23^2-132*2^2=1$
$4*30+1=121$	$11^2-30*2^2=1$	$4*156+1=625$	$25^2-156*2^2=1$
$4*42+1=169$	$13^2-42*2^2=1$	$4*182+1=729$	$27^2-182*2^2=1$
$4*56+1=225$	$15^2-56*2^2=1$	$4*210+1=841$	$27^2-182*2^2=1$
$4*72+1=289$	$17^2-72*2^2=1$	$4*272+1=1089$	$27^2-182*2^2=1$

Aunque parece un método muy mecánico es una buena herramienta para encontrar soluciones que podríamos llamar fundamentales de la Ecuación de Pell.

Curioso es ver la progresión de los números de la forma $\boldsymbol{4k+1}$ que a la vez son cuadrados como ya vimos los últimos dígitos de los números que cumplen con esta restricción sigue el patrón

$$\mathbf{9-5-9-1-1.}$$

Universidad del Bío-Bío. Red de Bibliotecas – Chile

Números de la forma $\mathbf{4k+3}$

Curioso también es, el caso de la progresión de los últimos dígitos de los números que cumplen con la forma $\mathbf{4k+3,}$ estos siguen el patrón y $\mathbf{7-1-5-9-3}$

$\mathbf{4k+3}$	$\mathbf{4k+3}$
7	31
11	35
15	39
19	43
23	47
27	51

Sin embargo de los números de esta forma nos interesan los números que pueden ser divididos por algún numero cuadrado, ósea que deben cumplir con

$$\boldsymbol{4k+3=ns^2, con\ n \in Z,}$$

pero como $\mathbf{1^2}$ es divisor de cualquier número, entonces siempre podremos encontrar soluciones para

$$\boldsymbol{4k+3=ns^2, con\ s=1\ y\ k=\{1,2,3,\dots\},}$$

entonces este pequeño ejercicio nos sirvió para darnos cuenta que cualquier número cuadrado menos la unidad siempre se podrá escribir como un numero divisible por un número cuadrado, en este caso $\mathbf{1^2.}$

Universidad del Bío-Bío. Red de Bibliotecas – Chile

Entonces si ordenamos en tablas los números, que cumplan con ser cuadrados y que menos la unidad, estos puedan ser divididos por algún número cuadrado. Siguiendo esta lógica, también construiremos tablas para la ecuación de Pell, de esta forma encontraremos soluciones de la ecuación. Empezaremos con

$\mathbf{7^2 - 1 = 48.}$

$C_n - 1 = ns^2$	$x^2 - Dy^2 = 1$
48	$7^2 - 12 \cdot 2^2 = 1$
63	$8^2 - 7 \cdot 3^2 = 1$
80	$9^2 - 20 \cdot 2^2 = 1$
99	$10^2 - 11 \cdot 3^2 = 1$
120	$11^2 - 30 \cdot 2^2 = 1$
143	$12^2 - 143 \cdot 1^2 = 1$
168	$13^2 - 42 \cdot 2^2 = 1$
195	$14^2 - 195 \cdot 1^2 = 1$
224	$15^2 - 56 \cdot 2^2 = 1$
255	$16^2 - 9 \cdot 5^2 = 1$
288	$17^2 - 72 \cdot 2^2 = 1$
323	$18^2 - 323 \cdot 1^2 = 1$
360	$19^2 - 90 \cdot 2^2 = 1$

En fin encontramos muchas soluciones y de paso para diferentes $\boldsymbol{D}$ en la ecuación.

Universidad del Bío-Bío. Red de Bibliotecas – Chile

CONCLUSIÓN

Durante el desarrollo de las distintas etapas de este trabajo, llegamos a la conclusión de que la llamada ecuación de Pell, esconde una confusa historia en el nombre, que, a pesar de los intentos por cambiar esta conceptualización, la ecuación de Pell no tan sola es famosa por su recorrido histórico en la construcción del conocimiento, También es conocida por los intentos de los matemáticos por cambiarle el nombre, matemáticos que por cientos de años buscaron encontrar soluciones a un tipo de ecuación de las más complejas y antiguas historia.

Conocimos un viejo manuscrito de Arquímedes, en el cual utilizamos un razonamiento que nos permite dar respuesta al problema que describe allí utilizando como hipótesis una parte de la ecuación de Pell.

En la actualidad, se pueden encontrar diversos sistemas para encontrar soluciones de esta ecuación; pero nos vemos en la obligación de aprender conocimientos matemáticos no dictados en nuestra formación académica, es por esto que nos instruimos en fracciones continuas, conociendo las partes de fracciones de este tipo y metodología de convergencia.

Finalmente, nos centramos en tres métodos para la búsqueda de soluciones de la ecuación de Pell, en primer lugar, un método utilizando fracciones continuas, en segundo lugar, encontramos soluciones para el caso $d = 5$ con la ayuda de la aritmética modular, y por último encontramos soluciones de la ecuación con la ayuda de los números cuadrados.

Universidad del Bío-Bío. Red de Bibliotecas – Chile

BIBLIOGRAFÍA

[1]Baldor. (1994). Aritmética. En A. Baldor, *Aritmética, Teórico Práctica* (pág. 306). México: Publicaciones cultural.

[2]Beiler. (1966). *Mathworld*. Obtenido de Mathworld: http://mathworld.wolfram.com/PellEquation.html

[3]Lenstra, H. (s.f.). Pell's Equation. *Solving the Pell Equation*, 182.

[4]Malcom, N., & Stedall, J. (s.f.). His correspondence with sir charles cavendish. *The mental world of an* .

[6] Parra, M. R. (2010). *academia.edu*. Obtenido de https://www.academia.edu/4162605/Ecuaci%C3%B3n_Pell_Soluci%C3%B3n?auto=download

[6]Pettofrezzo, A. J. (1972). Ecuaciones diofánticas lineales. En A. J. Pettofrezzo, *Introducción a la teoría de los números* (pág. 46). Orlando, Florida: Prentice-Hall Internacional.

[7]Vardi, I. (s.f.). Archimedes Cattle Problem. En I. Vardi, *Archimedes Cattle Problem.* Los Angeles, A 90041: Occidental college.

[8]Zaldivar, F. (2012). Introducción a la teoría de números. En *Introducción a la teoría de números* (pág. 156). Fondo de cultura económca.

[9] Weil, A. *Number Theory, an Approach through His- tory*. Birkhäuser, Boston, (1984)

Universidad del Bío-Bío. Red de Bibliotecas – Chile

LINKOGRAFÍA

http://mathworld.wolfram.com/ArchimedesCattleProblem.html

https://www.math.nyu.edu/~crorres/Archimedes/Cattle/Statement.html

http://books.google.com.ar/books?id=qEwpwWyVPIAC&pg=PA3&lpg=PA3&dq=solving+Pell's+equation&source=bl&ots=Qssq9ppdBa&sig=LPE2Df06SsadZ0EnrWAxPJ1yXDM&hl=es&sa=X&oi=book_result&resnum=8&ct=result#PPA3,M1

https://www.ugr.es/~eaznar/fermat.htm

http://mathworld.wolfram.com/PellEquation.html

http://hojamat.es/parra/pell.pdf

Universidad del Bío-Bío. Red de Bibliotecas – Chile