UNIVERSIDAD DEL BÍO-BÍO
FACULTAD DE EDUCACIÓN Y HUMANIDADES
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
PEDAGOGÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

INTRODUCCIÓN A LOS ESPACIOS DE BANACH

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE PROFESORA DE ENSEÑANZA MEDIA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

AUTORAS: SEPÚLVEDA RIQUELME, CARLA NICOLE

SOLAR RAMÍREZ, PRISCILA ISABEL

Profesor Guía: Friz Roa, Luis
Profesor Informante: Riquelme Faúndez, Edgardo

CHILLÁN 2019

AGRADECIMIENTOS

Dedicamos y agradecemos este logro en primer lugar a nuestros padres y familia, quienes siempre depositaron su confianza, nos brindaron el apoyo y preocupación incondicional, necesarios para desarrollar este proceso académico de manera exitosa, sin quienes esto no hubiese sido posible.

A nuestras parejas y amigos, quienes nos han brindado los necesario para salir adelante en todo momento y hacer de éste un proceso más ameno, dándonos el ánimo y apoyo durante el proceso de formación profesional.

A la Facultad de Educación y Humanidades por la formación entregada a lo largo de estos años, en especial a nuestro profesor guía, Luis Friz Roa, quien nos ayudó con sus conocimientos y orientó pacientemente con lo necesario en este largo proceso.

Resumen

En este trabajo de investigación, se mostrarán algunas definiciones y demostraciones de famosas desigualdades, principalmente en los espacios de Banach, el cual es considerado uno de los objetos de mas importante estudio dentro del análisis funcional.

En el primer capítulo, se definirán conceptos introductorios que ayudarán en la comprensión de conceptos como espacios vectoriales, espacios normados, espacios métricos, las p-normas, entre otros.

A continuación, se presentan los espacios de Banach, y todos los conceptos asociados a él, como la sucesión de Cauchy, desigualdad geométrica y espacios completos, para concluir con la definición y demostración de los espacios de Banach, aportando con algunos ejemplos asociados.

Correspondiente a la tercera y última sección, damos paso a los espacios ℓ_{p}, donde previamente se definen y demuestran conocidas desigualdades, tales como, desigualdad de Cauchy, desigualdad triangular, desigualdad de Hölder y desigualdad de Minkowski, las que abren camino a los espacios de sucesiones ℓ_{p}, llegando a concluir este trabajo con un teorema que vincula estos conceptos y los anteriormente mencionados.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

El análisis clásico se entiende como el estudio de variables como magnitudes y números, mientras que, el análisis funcional consiste en que las variables sean tratadas como funciones para estudiarlas como conjunto. Esta rama de las matemáticas, comienza a aparecer en el siglo XVIII, al considerar el conjunto de soluciones de algunas ecuaciones diferenciales. Sin embargo, cobra más importancia en el siglo XIX donde Volterra lo declara en 1900 como el "siglo de la teoría de las funciones".

Banach fue la figura más importante en el desarrollo del análisis funcional, con la aparición del libro "Théorie des opérations linéaires" en el año 1932, donde recopiló sus propios trabajos, además de todos los resultados e investigaciones sobre espacios normados de la época, algunos de los cuales, siguen siendo de gran relevancia en la actualidad dentro de esta área, además Banach plantea diversas preguntas que fueron más adelante fuentes de investigación para muchos trabajos dentro del análisis funcional.

En 1960 la investigación matemática sobre espacios normados y espacios de Banach mostró un considerable crecimiento, lo que dio paso a que la teoría de los espacios de Banach ganara mayor profundidad y alcance. La mayoría de los problemas clásicos fueron resueltos y se logró una mayor conexión entre la teoría de los espacios de Banach y otras áreas de la matemática.

Dentro del marco de la investigación del análisis funcional, la siguiente investigación estará centrada en introducir al lector en los espacios de Banach, para esto daremos a conocer algunos conceptos previos necesarios para la investigación, tales como espacios vectoriales, espacios métricos, topología, entre otros, además, se mostrarán algunas definiciones y propiedades tanto de los espacios de Banach como los espacios l_p centrándonos en la demostración de las normas p.

CAPÍTULO I: PRIMEROS CONCEPTOS

Para comenzar, daremos ciertas definiciones del área del análisis funcional, centrado en espacios vectoriales, como, por ejemplo, norma, producto escalar, equivalencia, entre otros, los cuáles serán de ayuda para comprender más adelante los conceptos asociados a espacios $\boldsymbol{\ell_p}$ y de Banach.

En el desarrollo de definiciones y demostraciones, **K** denotará, de igual manera, el cuerpo $\mathbb{R}$ (de los números reales) o $\mathbb{C}$ (de los números complejos).

1.1. Espacios vectoriales

Un espacio vectorial sobre un cuerpo K es una estructura algebraica creada a partir de un conjunto no vacío V, una operación interna llamada suma (+) definida para los elementos del conjunto y una operación externa llamada producto escalar (.) definida entre el conjunto y el cuerpo matemático. Los elementos en V se llaman vectores y los elementos en K escalares. Se dice que $(V,+,\cdot)$ es un espacio vectorial si se cumplen las siguientes condiciones:

(i) $(V,+)$ es un grupo abeliano

(ii) La operación $K \times V \to V$ satisface las siguientes condiciones para todo $x, y \in V, \alpha, \beta \in K$

a) $\alpha \cdot (v + w) = \alpha \cdot v + \alpha \cdot w, \forall \alpha \in K; v, w \in V$

b) $(a + b) \cdot v = a \cdot v + b \cdot v, \forall a, b \in K; v \in V$

c) $1 \cdot v = v, \forall v \in V$

d) $(a \cdot b) \cdot v = a \cdot (b \cdot v), \forall a, b \in K; v \in V$

1.2. Espacios métricos

Se llama espacio métrico al par (X, d), formado por un conjunto no vacío X, y una función $d: X \times X \to \mathbb{R}$ llamada función distancia o métrica de X, la cual cumple con las siguientes propiedades:

(i) $d(x, y) = 0 \; si \; y \; sólo \; si \; x = y$

(ii) $d(x, y) = d(y, x) \; para \; todo \; x, y \in X$

(iii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \; para \; todo \; x, y, z \in X$

Los elementos en el espacio métrico X se les llama puntos de X.

Un ejemplo sencillo de espacio métrico lo encontramos en el espacio euclídeo de dimensión n, dotado de su métrica $(\mathbb{R}^n, d_n)$

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

1.3. Espacios Normados

Definición 1.3.1

Dado un espacio vectorial V sobre el cuerpo K, se define la **norma** sobre V como una función $\| \quad \|: V \to \mathbb{R}$, que satisface las siguientes propiedades:

1. $\|x\| = o \; si \; y \; sólo \; si, x = 0$
2. $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|, para \; todo \; \alpha \in \mathbb{K}, x \in E$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, para \; todo \; x, y \in E$

A continuación, demostraremos las propiedades recién mencionadas para el caso de $\mathbb{R}^n$

1.- $\|x\| = 0 \leftrightarrow x = 0$

Demostración:

Evidentemente, si $x \neq 0$, se tendría $||x|| = (x|x) > 0$

2.- $\|\propto x\| = |\propto| \cdot \|x\|, para\ todo\ \propto \in \mathbb{K}, x \in E$

Demostración:

$$\|\alpha x|| = \sqrt{(\alpha x_1)^2 + \cdots . + (\alpha x_n)^2}$$

$$= \sqrt{\alpha^2 {x_1}^2 + \cdots .. + \alpha^2 x_n^2}$$

$$= \sqrt{\alpha^2 (x_1^2 + \cdots . + x_n^2)}$$

$$= \sqrt{a^2}\sqrt{x^2 + \cdots + x_n^2}$$

$$= |\alpha|||x||$$

3.- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, para\ todo\ x, y \in E$

Demostración:

$$\|x + y\|^2 = (x_{1+}y_1)^2 + \cdots \ldots \ldots . + (x_n + y_n)^2$$

$$= x_1^2 + 2x_1y_1 + \cdots \ldots \ldots + \ x_n^2 + 2x_ny_n + y_n^2$$

$$= x_1^2 + \cdots \ldots \ldots + \ x_n^2 + 2(x_1y_1 + \cdots \ldots \ldots . + x_ny_n) + y_1^2 + \cdots \ldots + y_n^2$$

$$= \left||x|\right|^2 + 2(x_1y_1 + \cdots \ldots + x_ny_n) + \left||y|\right|^2$$

$$Aplicando\ la\ desigualdad\ de\ Cauchy$$

$$x_1y_1 + \cdots \ldots + x_ny_n \leq \left||x|\right|\left||y|\right|$$

Se tiene que

$$= \left|\left|x\right|\right|^2 + 2(x_1y_1 + \cdots \ldots \ldots . + x_ny_n) + \left|\left|y\right|\right|^2 \le \left|\left|x\right|\right|^2 + 2\left|\left|x\right|\right|\left|\left|y\right|\right| + \left|\left|y\right|\right|^2$$

$$= \left[\left|\left|x\right|\right| + \left|\left|y\right|\right|\right]^2$$

$$= \left|\left|x + y\right|\right|^2 \le \left[\left|\left|x\right|\right| + \left|\left|y\right|\right|\right]^2$$

$$aplicando\ raiz\ cuadrada\ obtenemos$$

$$\left|\left|x + y\right|\right| \le \left|\left|x\right|\right| + ||y||$$

1.3.2. Topología de la norma

Para cada norma $\|\cdot\| \in \mathbb{R}^n$ podemos considerar, para cada $x \in \mathbb{R}^n$ y cada $r > 0$, la bola abierta y cerrada.

Definiremos la bola abierta de centro *x* y radio *r*, como:

$$B_{\|\cdot\|}(x, r) = B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\| < r\}$$

Del mismo modo, la bola cerrada de centro *x* y radio *r*, se define como:

$$\bar{B}_{\|\cdot\|}(x, r) = \bar{B}(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\| \le r\}$$

Definición 1.3.3.

Un **espacio normado** es un par $(E, \|\cdot\|)$, donde E es un espacio vectorial y $\|\cdot\|$ es una norma en X.

En cualquier espacio normado E, consideramos la distancia d definida por

$$d(x, y) = \|y - x\| \; \forall \; x, y \; \in X)$$

que satisface

(i) $d(x + z, y + z) = d(x, y)$ (Invariancia por traslaciones)

(ii) $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x, y)$ (Homogeniedad)

Definición 1.3.4.

Dos normas, $\|\cdot\|_1 \; y \; \|\cdot\|_2$, en un mismo espacio vectorial V, se dicen equivalentes, cuando dan lugar a una misma tipología sobre V.

Lo anterior, hace referencia a la siguiente proposición:

La unión de una familia cualquiera de un subconjunto abierto de X es un subconjunto abierto. Mientras que la intersección de una familia finita de subconjuntos abiertos es un subconjunto abierto.
La proposición anterior, la podemos deducir de lo siguiente:

Sea

$$D_r(x_o) = \{x \in V : \|x - x_o\|_1 < r\}$$

Se tiene $x_1 \in D_r(x_o)$
Podemos encontrar r', tal que:$D_{r'}(x_1) \subseteq D_r(x_o)$
Si $x \in D_{r'}(x_1)$, se cumple que

$$\alpha\|x - x_1\|_2 \leq \|x - x_1\|_1 \leq r'$$

Por lo que contiene otro disco, en la otra norma, en el subconjunto abierto.

Proposición

Dos normas, $\|\cdot\|_1 \; y \; \|\cdot\|_2$, sobre V, son equivalentes si y sólo si, existen dos constantes $a, b > 0$, tales que:

$$a\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq b\|x\|_1, \forall x \in V$$

Todas las normas en un espacio vectorial de dimensión finita son equivalentes.

1.4 P-normas

Sea un vector $\vec{x} = (x_{1,} x_2, \dots, x_n)$, se define la p-norma como:

$$\|\vec{x}\|_p = \sqrt[p]{|x_1|^p + |x_2|^p + \cdots + |x_n|^p}$$

A modo de ejemplo, en el caso de p=1, la norma quedaría expresada como

$$\|\vec{x}\|_1 = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|$$

En el caso de p=2, se obtiene la norma euclidiana:

$$\|\vec{x}\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots |x_n|^2}$$

1.4.1. La p-norma, es una norma en Rn

La función $\|\vec{x}\|_p = \sqrt[p]{|x_1|^p + |x_2|^p + \cdots + |x_n|^p}$ es una norma en $\mathbb{R}_n$, cuando $p = 2$ se llama norma usual en $\mathbb{R}_n$, cuando $p > 2$ se vuelve más complejo probar la desigualdad triangular, ésta también define norma en $K = \mathbb{C}_n$

La demostración de la desigualdad triangular, para $p = n$ la veremos en profundidad en el capítulo III.

CAPITULO II : ESPACIOS DE BANACH

Los espacios de Banach que llevan su nombre en reconocimiento a su descubridor, son de importancia apra comprender propiedades de los espacios funcionales. Con la aparición del libro *Théorie des opérationes linéaires* comenzó el estudio de espacios vectoriales normados, ya en la actualidad hay muho desarrollo respecto al tema y distintas conexiones con la teoría de Banach y otras áreas de las matemáticas.

En este capitulo, partiremos definiendo algunos conceptos claves para entender de mejor forma los espacios de Banach.

2.1. Sucesión

Una sucesión es un conjunto de números ordenado, ésta puede ser finita o infinita. Los valores a_k son llamados términos de la sucesión. Tambien se usa $\{a_k\}$ para denotar una sucesión cuyo k-ésimo término es a_k

2.2. Sucesión de Cauchy

Sea $\{x_n\}$ una sucesión en X, decimos que esta es de Cauchy, si para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, x_m) < \varepsilon, si\ n, m > N$

2.2.1. Proposición

Toda sucesión convergente, es de Cauchy. El recíproco de esta proposición es falso.

2.3. Desigualdades entre la media geométrica y aritmética.

En matemáticas, una desigualdad es una relación de orden que se da entre dos valores cuando éstos son distintos (en caso de ser iguales, lo que se tiene es una igualdad).

Si los valores en cuestión son elementos de un conjunto ordenado, como los enteros o los reales, entonces pueden ser comparados.

Para el siguiente caso.

Sean $a_1, a_2, \dots, a_n$ y $m = 2^n$, números reales positivos, mostrar que:

$$(a_1, a_2, \dots, a_m)^{1/m} \leq \frac{(a_1, a_2, \dots, a_m)}{m}$$

Solo si $a_1 = \cdots = a_m$

Demostración por inducción:

H.I. Se cumple para $m = 2^k$

$$\left(a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_{2^k}\right)^{1/2^k} \leq \frac{\left(a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_{2^k}\right)}{2^k}, \qquad \forall k \geq 1$$

Ahora, sean $m = 2^{k+1}$, además $2^{k+1} = 2 \cdot 2^k$

Tesis de inducción:

$$\left(a_1 \cdot \dots \cdot a_{2^k} \cdot a_{2^k+1} \cdot \dots \cdot a_{2^{k+1}}\right)^{1/2^{k+1}} \leq \frac{\left(a_1 + \dots + a_{2^k} + a_{2^k+1} + \cdots + a_{2^{k+1}}\right)}{2^{k+1}}$$

Utilizando la igualdad $2^{k+1} = 2 \cdot 2^k$, podemos reescribir la desigualdad anterior de la siguiente manera:

$$\left(a_1 \cdot \dots \cdot a_{2^k} \cdot a_{2^k+1} \cdot \dots \cdot a_{2^{k+1}}\right)^{1/2 \cdot 2^k} \leq \frac{\left(a_1 + \dots + a_{2^k} + a_{2^k+1} + \cdots + a_{2^{k+1}}\right)}{2 \cdot 2^k}$$

La que luego separar el lado derecho de la desigualdad y aplicar propiedades de las potencias del otro lado, lo anterior es equivalente a la desigualdad.

$$\sqrt{\left(a_1 \cdot \dots \cdot a_{2^k} \cdot a_{2^k+1} \cdot a_{2^{k+1}}\right)^{1/2^k}} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{a_1 + \dots + a_{2^k}}{2^k}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{a_{2^k+1} + \cdots + a_{2^{k+1}}}{2^k}\right)$$

Así, volviendo a nuestra hipótesis de inducción obtenemos lo siguiente:

$$\leq \frac{\left(a_1 + \ldots + a_{2^k}\right)^{1/2^k}}{2} + \frac{\left(a_{2^k+1} + \cdots + a_{2^{k+1}}\right)^{1/2^k}}{2}$$

$$\leq \frac{a_1 + \ldots + a_{2^k}}{2^k \cdot 2} + \frac{a_{2^k+1} + \cdots + a_{2^{k+1}}}{2^k \cdot 2}$$

2.4. Espacios completos

Sea $A \subset X$. Decimos que A es **completo**, cuando toda sucesión de Cauchy converge a un punto de A. Un espacio normado, real o complejo, (E, k k), se dice que es completo cuando el espacio métrico asociado es completo. A los espacios normados completos se les llama también espacios de Banach.

Un espacio métrico X es completo si cada sucesión de Cauchy $\{x_n\}$ de elementos pertenecientes a X converge a cierto elemento de X.

2.5. Espacio de Banach

Sea *X* un espacio vectorial normado y sea *d* su métrica asociada. Si *X* es un espacio métrico completo, entonces se dice que *X* es un espacio de Banach.

2.5.1. Ejemplos de espacios de Banach

A. $\mathbb{R}$ con su norma dada por el valor absoluto.
B. C con la norma usual
C. ℓ_p con la norma $\|x\|_p = (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p)^{1/p}$

2.5.2 Convergencia

Sean, $(E, \|\cdot\|_E)$ un espacio vectorial normado y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en E. Para todo $k \in \mathbb{N}$, construiremos la suma parcial de la sucesión $S_k = \sum_{n=0}^{k} x_n$

CAPITULO III : ESPACIOS $\boldsymbol{\ell_p}$

Los espacios ℓ_p, tambien llamados espacios de Lebesgue, nombrados por el matemático francés Henri León Lebesgue, son espacios de dimension finita, tienen muchas aplicaciones en las matemáticas y son de gran utilidad en el análisis funcional. Éstos espacios tienen como característica medir el "tamaño" de las funciones.
Estudiaremos los espacios de Lebesgue considerando el caso donde el índice p, tenga la siguiente característica $1 < p < n$. Para ello es necesario definir y demostrar algunas desigualdades que nos ayudarán para demostrar la existencia de las p-normas, como normas en $\mathbb{R}^n$, como por ejemplo, la desigualdad de Cauchy, de Hölder, Minkowski, entre otras.

3.1. Espacios $\boldsymbol{\ell_p}$

Un caso particular respecto a una familia de espacios de funciones integrables, corresponde a un espacio de funciones integrables respecto a una medida arbitraria, los actualmente llamados espacios $\boldsymbol{\ell_p}$. Algunos de los ejemplos mas recurrentes dentro de los espacios normados son estos espacios $\boldsymbol{\ell_p}$. A partir de los cuales se impulsó la teoria de espacios normados y espacios de Hilbert.

Sea p, $1 \leq p \leq \infty$, denotaremos como l_p al conjnto de las sucesiones $x = \{x_n\} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ tales que la serie $\sum_{n\geq 1}|x(n)|^p$ es absolutamente convergente:

Abreviadamente,

$$\ell_p = \left\{x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \sum_{j=1}^{n} |x(j)|^p < \infty\right\} \; (1 \leq p \leq n)$$

3.2. Norma en $\boldsymbol{\ell_p}$

Se define la norma-p de la suceción como la raíz p-ésima del valor de la serie

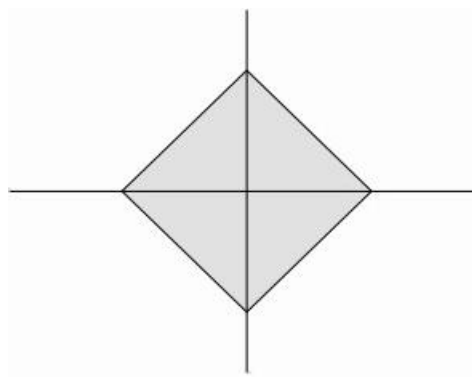
$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} \quad , para\ x \in l_p$$

3.2.1. Ejemplos espacios $\boldsymbol{\ell_p}$

A continuación, para cada norma, se representa la correspondiente bola unidad en $\mathbb{R}^2$; i.e…, el conjunto $\overline{\mathcal{B}}(0,1) = \{x \in \mathbb{R}^2 / \|x\| \leq 1\}$

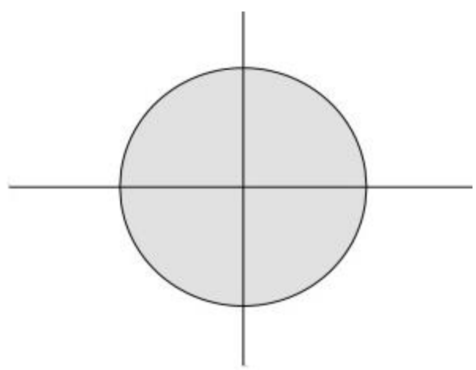
a) La norma ℓ_1:

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$



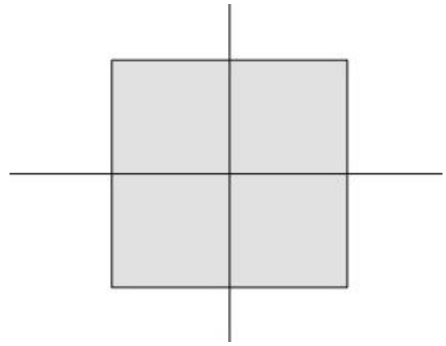
b) La norma ℓ_2:

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$$



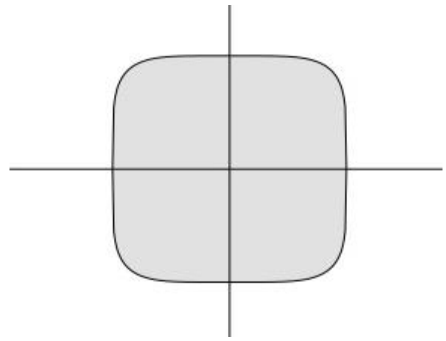
c) La norma ℓ_∞:

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} |x_i|$$



d) La norma ℓ_p general ($p \ge 2$):

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p}$$



3.3. Desigualdad de Cauchy

Si $a_1, a_2, \dots, a_n\ y\ b_1, b_2, \dots, b_n$ son números reales, entonces:

$$\left(\sum_{j=1}^{n} a_j b_j \right)^2 \le \left(\sum_{j=1}^{n} {a_j}^2 \right) \left(\sum_{j=1}^{n} {b_j}^2 \right)$$

Demostración:

- Si $a_j = 0, \forall 1 \le j \le n$, se cumple la desigualdad,
- Si no es el caso, consideramos el polinomio de grado dos.

  Existe $x \in \mathbb{R}\ tal\ que, a_j x + b_j = 0, \forall\ 1 \le j \le n$

$$\left(\sum_{j=1}^{n} a_j x + b_j \right)^2 = \left(\sum_{j=1}^{n} {a_j}^2 \right) x^2 + 2 \left(\sum_{j=1}^{n} a_j b_j \right) x + \left(\sum_{j=1}^{n} {b_j}^2 \right)$$

Considerando,

$$\left(\sum_{j=1}^{n} a_j x + b_j\right)^2 \leq 0,$$

Además Δ como el discriminante de $\left(\sum_{j=1}^{n} a_j{}^2\right)x^2 + 2\left(\sum_{j=1}^{n} a_j b_j\right)x + \left(\sum_{j=1}^{n} b_j{}^2\right)$, tenemos:

$$\Delta = \left(2\sum_{j=1}^{n} a_j b_j\right)^2 - 4\left(\sum_{j=1}^{n} a_j{}^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n} b_j{}^2\right)$$

$$\Delta \leq 0$$

Entonces

$$\left(2\sum_{j=1}^{n} a_j b_j\right)^2 - 4\left(\sum_{j=1}^{n} a_j{}^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n} b_j{}^2\right) \leq 0$$

Lo que podemos escribir como

$$4\left(\sum_{j=1}^{n} a_j b_j\right)^2 \leq 4\left(\sum_{j=1}^{n} a_j{}^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n} b_j{}^2\right)$$

Simplificando, obtenemos

$$\left(\sum_{j=1}^{n} a_j b_j\right)^2 \leq \left(\sum_{j=1}^{n} a_j{}^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n} b_j{}^2\right)$$

Quedando así demostrada la desigualdad.

3.4. Desigualdad triangular

$$\left(\sum_{j=1}^{n}(a_j+b_j)^2\right)^{1/2} \leq \left(\sum_{j=1}^{n}a_j{}^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{j=1}^{n}b_j{}^2\right)^{1/2}$$

Demostración:

Utilizando la desigualdad de Cauchy

$$\left(\sum_{j=1}^{n}a_jb_j\right)^2 \leq \left(\sum_{j=1}^{n}a_j{}^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}b_k{}^2\right)$$

Anteriormente demostrado, podemos deducir la desigualdad triangular

Utilizando la desigualdad de Cauchy tenemos

$$\left(\sum_{j=1}^{n}a_jb_j\right)^2 = \left(\sum_{j=1}^{n}a_j{}^2\right) + 2\left(\sum_{j=1}^{n}a_jb_j\right) + \left(\sum_{j=1}^{n}b_j{}^2\right)$$

$$\left(\sum_{j=1}^{n}a_j{}^2\right) + 2\left(\sum_{j=1}^{n}a_jb_j\right) + \left(\sum_{j=1}^{n}b_j{}^2\right) \leq \left(\sum_{j=1}^{n}a_j{}^2\right) + 2\sqrt{\left(\sum_{j=1}^{n}a_j{}^2b_j{}^2\right)}$$

Aplicando raíz cuadrada tenemos que

$$\sqrt{\sum_{j=1}^{n}(a_j+b_j)^2} \leq \sqrt{\sum_{j=1}^{n}a_j{}^2} + \sqrt{\sum_{j=1}^{n}b_j{}^2}$$

Lo que es equivalente a:

$$\left(\sum_{j=1}^{n}(a_j+b_j)^2\right)^{1/2} \leq \left(\sum_{j=1}^{n}a_j{}^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{j=1}^{n}b_j{}^2\right)^{1/2}$$

Quedando demostrado

3.5. Desigualdad de Hölder

Sea $\{x_1, \dots, x_n\}$ y $\{x_1, \dots, x_n\}$ números reales positivos.

$$\sum_{j=1}^{n} x_j y_j \leq \left(\sum_{j=1}^{n} x_j{}^p\right)^{1/p} \left(\sum_{j=1}^{n} y_j{}^q\right)^{1/q}$$

Demostración

Consideremos la desigualdad de Young

Sean $p, q > 1$, tal que, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, y sean $a, b \geq 0$, entonces

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \qquad (*)$$

Aplicamos la desigualdad recién mencionada, con

$$a = \frac{x_i}{\sum_{j=1}^{n}(x_j{}^p)^{1/p}}, b = \frac{y_i}{\sum_{j=1}^{n}(y_j{}^q)^{1/q}}$$

Tenemos:

$$\left(\frac{x_i}{\sum_{j=1}^{n}(x_j{}^p)^{1/p}}\right)\left(\frac{y_i}{\sum_{j=1}^{n}(y_j{}^q)^{1/q}}\right) \leq \frac{1}{p}\left(\frac{x_i}{\sum_{j=1}^{n}(x_j{}^p)^{1/p}}\right)^p + \frac{1}{q}\left(\frac{y_i}{\sum_{j=1}^{n}(y_j{}^q)^{1/q}}\right)^q$$

$$\frac{x_i y_i}{\left(\sum_{j=1}^{n}(x_j{}^p)^{1/p}\right)\left(\sum_{j=1}^{n}(y_j{}^q)^{1/q}\right)} \leq \frac{1}{p}\left(\frac{x_i{}^p}{\sum_{j=1}^{n} x_j{}^p}\right) + \frac{1}{q}\left(\frac{y_i{}^q}{\sum_{j=1}^{n} y_j{}^q}\right)$$

Sumando las desigualdades se tiene

$$\frac{\sum_{j=1}^{n} x_j y_j}{\left(\sum_{j=1}^{n}(x_j{}^p)^{1/p}\right)\left(\sum_{j=1}^{n}(y_j{}^q)^{1/q}\right)} \leq \frac{1}{p}\left(\frac{\sum_{j=1}^{n} x_j{}^p}{\sum_{j=1}^{n} x_j{}^p}\right) + \frac{1}{q}\left(\frac{\sum_{j=1}^{n} y_j{}^q}{\sum_{j=1}^{n} y_j{}^q}\right)$$

(*)(Kreyszing Introductory Funtional Analisys with Applications)

$$\frac{\sum_{j=1}^{n} x_j y_j}{\left(\sum_{j=1}^{n}\left(x_j{}^p\right)^{1/p}\right)\left(\sum_{j=1}^{n}\left(y_j{}^q\right)^{1/q}\right)} \leq \frac{1}{p}+\frac{1}{q}$$

Por propiedad

$$\frac{\sum_{j=1}^{n} x_j y_j}{\left(\sum_{j=1}^{n}\left(x_j{}^p\right)^{1/p}\right)\left(\sum_{j=1}^{n}\left(y_j{}^q\right)^{1/q}\right)} \leq 1$$

Así se tiene

$$\sum_{j=1}^{n} x_j y_j \leq \left(\sum_{j=1}^{n} x_j{}^p\right)^{1/p} \left(\sum_{j=1}^{n} y_j{}^q\right)^{1/q}$$

Quedando demostrado

3.6. Desigualdad de Minkowski

$$\left(\sum_{j=1}^{n}\left(a_j+b_j\right)^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{j=1}^{n} a_j{}^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{j=1}^{n} b_j{}^p\right)^{1/p}$$

Demostración:

Para $p=1$, se reduce a la desigualdad triangular.

Ahora, consideremos

Ahora, consideremos $p>1$, además, sea $q>1$, tal que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$

Si $\sum\left(a_j+b_j\right)^p \neq 0$, sabemos que $\left(a_j+b_j\right) \leq a_j+b_j$

Utilizamos $(p-1)q=p$ y la desigualdad de Holder, tenemos

$$\sum_{j=1}^{n}\left(a_j+b_j\right)^p=\sum_{j=1}^{n}\left(a_j+b_j\right)\left(a_j+b_j\right)^{p-1}$$
$$=\sum_{j=1}^{n}a_j\left(a_j+b_j\right)^{p-1}+\sum_{j=1}^{n}b_j\left(a_j+b_j\right)^{p-1}$$

Aplicando la desigualdad de Hölder para cada una de las sumas anteriores se tiene:

$$\sum_{j=1}^{n}a_j\left(a_j+b_j\right)^{p-1}\le\left(\sum_{j=1}^{n}a_j{}^p\right)^{1/p}\left(\sum_{j=1}^{n}\left(a_j+b_j\right)^{q(p-1)}\right)^{1/q}$$
$$\sum_{j=1}^{n}b_j\left(a_j+b_j\right)^{p-1}\le\left(\sum_{j=1}^{n}b_j{}^p\right)^{1/p}\left(\sum_{j=1}^{n}\left(a_j+b_j\right)^{q(p-1)}\right)^{1/q}$$

Donde $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, de esto, $q=\frac{p}{p-1}$, y por lo tanto, $(p-1)q=p$. Considerando esto tenemos:

$$\left(\sum_{j=1}^{n}\left(a_j+b_j\right)^{(p-1)q}\right)^{1/q}=\left(\sum_{j=!}^{n}\left(a_j+b_j\right)^p\right)^{1-\frac{1}{p}}$$

Retomando las desigualdades anteriores obtenemos

$$\sum_{j=1}^{n}\left(a_j+b_j\right)^p\le\left(\left(\sum_{j=1}^{n}a_j{}^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{j=1}^{n}b_j{}^p\right)^{1/p}\right)\left(\sum_{j=!}^{n}\left(a_j+b_j\right)^p\right)^{1-\frac{1}{p}}$$

y como $\sum\left(a_j+b_j\right)^p\neq0$, podemos dividir por el segundo factor obteniendo

$$\left(\sum_{j=1}^{n}\left(a_j+b_j\right)^p\right)^{1/p}\le\left(\sum_{j=1}^{n}a_j{}^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{j=1}^{n}b_j{}^p\right)^{1/p}$$

3.7. Espacios de sucesiones l_p

Pasemos ahora al cado de dimensión **infinita**. Consideremos el espacio de las sucesiones para la suma de los módulos a la potencia $p > 0$ de sus términos es convergente.

$$l_p = \{\{x_n\} : \ x_n \in K. \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty\}$$

Consideremos en primer lugar el caso $p \geq 1$. Demostraremos en primer lugar que se trata de un espacio vectorial. El único problema es probar que la suma de los elementos de este conjunto está también en el conjunto. Para ello comprobemos que la siguiente expresión es una norma en l_p

$$||x||_p = (\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}$$

Como siempre la desigualdad triangular es la única complicación. Pero podemos realizar los siguientes pasos y llegar a

$$(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p)^{\frac{1}{p}} \leq (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p)^{\frac{1}{p}} + (\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p)^{\frac{1}{p}}$$

Pero

$$(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p)^{\frac{1}{p}} \leq (\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p)^{\frac{1}{p}} \leq \infty$$

Por lo tanto, el miembro de la izquierda de la desigualdad está acotado para todo n y la desigualdad es valida cuando $n \to \infty$. De esta forma se prueba que l_p es un espacio vectorial y además $||x||_p$ es una norma.

Los espacios l_p con $p \geq 1$ son espacios normados de dimensión infinita (no numerable). Si $0 < p < 1$. l_p no es un espacio normado, aunque si un espacio vectorial y además es un espacio métrico (con una distancia que no proviene de una norma).
En efecto,

$$d_p(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^p,\ 0 < p < 1$$

Es una distancia, pues la desigualdad de Minkowski se cumple.

$$d_p(x,y) \leq d_p(x,z) + d_p(z,y)$$

Vamos a demostrar ahora que l_p es un espacio de Banach. Sea $\{x^n\}$ una sucesión en $l_{p,}$ con $1 \leq p$. Es decir:

$$x^n = (x_1^n, \dots, x_k^n, \dots)$$

Supongamos que es de Cauchy. Para todo $e > 0$ existe n_0 tal que

$$||x^n - x^m||_p < e, n, m \geq n_0$$

Esto implica que cada una de las sucesiones $\{x_k^n\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy en K, pues

$$|x_k^n - x_k^m| \leq ||x^n - x^m||_p < e$$

Luego converge al ser K completo. Sea $x = (x_1, x_2, \dots)$el vector de los limites. Hay que probar que está en l_p y que es el limite de una sucesión. Al ser $\{x^n\}$ de Cauchy, para todo e, por ejemplo, $e = 1$. Existe n_0 tal que, para todo $n, m \geq n_0$ y para todo N, se tiene:

$$\sum_{K=1}^{N} |x_K^n - x_K^m|^p \leq ||x^n - x^m||_p^p < 1$$

En la suma finita podemos hacer $n \to \infty$ y se tiene una acotación para todo $m \geq n_0$ y para todo N:

$$\sum_{K=1}^{N} |x_K - x_K^m|^p \leq 1$$

Y por lo tanto es cierta cuando $N \to \infty$:

$$\sum_{K=1}^{\infty} |x_K - x_K^m|^p < 1$$

De esta forma hemos demostrado que $x - x^m$ está en l_p cuando $m \geq n_0$. Pero $x^m \in l_{p,}$luego $x \in l_p$

Probemos ahora que es el límite de la sucesión. Hacemos lo mismo que antes con e arbitrario

$$\sum_{K=1}^{\infty} |x_K - x_K^m|^p < e, \;\; m \geq n_0$$

Luego

$$||x - x^m||_p^p < e$$

La demostracion es valida para cualquier p. Por lo tanto todo $l_p, 0 < p$ es completo (si es normado es de Banach)

La norma de los espacios l_p queda demostrada mediante la desigualdad de Minkowski

3.8. Los espacios l_p son espacios de Banach

Sea $\mathbb{R}$ un espacio vectorial $l_p(1 \leq p < \infty)$, formado por las suceciones $x = (x_n)_{n \in N}$ de elementos de $\mathbb{R}$ que satisfacen $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty$ es un espacio de Banach con la norma $| \quad |||_p$ definida por $||x||_p = \sqrt[n]{\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p}$. En efecto dada una sucesion

$$x \coloneqq x_1, x_2, x_3, \ldots$$

Y $n \in \mathbb{N}$, detonemos con $x_{|n}$ $a(x_{1,\ldots.}x_n)$

Así $||x_{|n} + y_{|n}||_p \leq ||x_{|n}| \quad |_p + ||y_{|n}| \quad |_p \leq ||x||_p + ||y||_{p'}$

Como esto vale para todo n

$$||x + y||_p = \lim_{n \to \infty} (||x_{|n} + y_{|n}||_p) \quad \leq ||x||_p + ||y||_{p'}$$

Como, además

$$|| \curlywedge \cdot x|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{\infty} | \curlywedge x_i|^p} = | \curlywedge | \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p} = |\curlywedge|||x|_{p'}$$

l_p Es un espacio de l_{∞}y $|| \quad ||_p$ es una norma sobre l_p. Veamos que es completo. Supongamos que $(x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en l_p. Entonces la sucesión $(x_m^n)_{n \in \mathbb{N}}$, de las coordenadas $m - esima$ de $(x^n)_{n \in \mathbb{N}}$, es una sucesión de Cauchy para todo $m \in \mathbb{N}$. Como $\mathbb{R}$ es completo, existe $x_m \coloneqq \lim x_m^n$. Escribamos $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$ dado $\mathcal{E} > 0$, elijamos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $||x^n - x^{\acute{}n}||_p < \mathcal{E}$ para todo $n, n\acute{} \geq n_{0.}$ Entonces.

$$\left||x_{|n} + y_{|n}|\right|_p = \lim_{n \to \infty} \left(\left||x_{|m}^n - x_{|m}^{n\acute{}}|\right|_p\right) \quad \leq \mathcal{E}$$

Como todo esto vale para todo $m \in \mathbb{N}$,

$||x^n - x||_p = \lim_{n\acute{} \to \infty} (||x_{|m}^n + x_{|m}||_p) \quad \leq \mathcal{E}$ para todo $n \geq n_0$

En consecuencia $||x_n|| \leq ||x^n||_p + ||x - x^n| \quad |_p < \infty$ por lo que $x \in l_p$. Por ultimo $x = \lim_{n \to \infty} (x)^n \; en \; l_p$

CONCLUSIÓN

Los estudios de Banach permitieron el inicio de respuestas a otros problemas del análisis funcional, siendo un incentivo para otros matemáticos a realizar investigaciones que permitieron dar respuestas a problemas que quedaron inconclusos en los primeros estudios de espacios de Banach.

Los resultados obtenidos de distintos estudios del análisis funcional nos permiten, por ejemplo, demostrar la existencia de otras normas en Rn, como las normas p que hemos desarrollado en esta investigación, las cuales logran una generalización de los espacios normados.

Notamos entonces que en estudios avanzados los espacios de Banach llegan a ser de gran utilidad para la resolución de distintos problemas matemáticos.

BIBLIOGRAFÍA

1. Bartle, R. *"The elements of real analysis"*

2. Wawrzynczyk, A. *"Introducción al análisis funcional"*

3. Payá, R. *"Apuntes de análisis funcional"*

4. Gatica, G. *"Introducción al análisis funcional: Teoria y aplicaciones. Parte 1*

5. *Guccione J. "Espacios métricos"*