UNIVERSIDAD DEL BÍO-BÍO
FACULTAD DE EDUCACIÓN Y HUMANIDADES
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
ESCUELA DE PEDAGOGÍA EN MATEMATICAS

MÉTODOS DIRECTOS PARA RESOLVER SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE PROFESOR DE ENSEÑANZA MEDIA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Autor: Quezada Medina, Ricardo Ignacio
Profesor Guía: Friz Roa, Luis

CHILLÁN 2019

"Dedicado a mi familia, en especial a mis padres, Ricardo y Beatriz, quienes han estado presentes en cada momento, apoyándome y confiando siempre en mis capacidades, durante toda mi carrera.

Gracias por todo su apoyo incondicional y por darme esas palabras de motivación cuando más lo necesite, sin ustedes esto no hubiera sido posible"

Índice

Introducción ... - 5 -
Capítulo 1 ... - 7 -
Preliminares ... - 7 -
1.1 Matrices y Vectores ... - 8 -
1.2 Operaciones con matrices. ... - 9 -
1.3 Matrices especiales ... - 11 -
1.4 Inversa de una matriz ... - 12 -
1.5 Determinante de una matriz ... - 13 -
Capítulo 2 ... - 16 -
Métodos Directos ... - 16 -
2.1 Método de eliminación de Gauss ... - 16 -
2.2 Estrategias de pivoteo ... - 21 -
2.2.1 Pivoteo parcial ... - 21 -
2.2.2 Pivoteo total ... - 22 -
2.3 Métodos de factorización ... - 23 -
2.3.1 Método de factorización LU ... - 23 -
2.3.2 Método de Factorización de Cholesky ... - 26 -
2.3.3 Método de factorización de Doolittle ... - 28 -
2.3.4 Método de factorización de Crout ... - 30 -
2.3.5 Método de factorización LU con pivoteo ... - 33 -
Capítulo 3 ... - 36 -
Aplicaciones de los sistemas de ecuaciones ... - 36 -
3.1 Circuito eléctrico pasivo ... - 36 -
3.2 Determinación de una curva ... - 37 -
Conclusión ... - 40 -
Bibliografía ... - 41 -
Linkografia ... - 42 -

Introducción

Investigaremos algunos métodos de resolución de sistema de ecuaciones lineales, centrado en sistemas cuadrado, es decir posee igual número de ecuaciones que de incógnitas.

Por lo tanto, vamos a trabajar la resolución de sistemas de ecuaciones de la forma:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \quad a_{12}x_2 + \dots + \quad a_{1m}x_m &= b_1, \\ a_{21}x_1 + \quad a_{22}x_2 + \dots + \quad a_{2m}x_m &= b_2, \\ &\qquad (1.1) \\ a_{m1}x_1 + \quad a_{m2}x_2 + \dots + \quad a_{mm}x_m &= b_m, \end{aligned}$$

Donde a_{ij} y b_i, para 1 ≤ i, j ≤ m, son números reales dados y siendo x_j ∈ IR, 1 ≤ j ≤ m, son las m incógnitas. Entonces el sistema (1.1) es por tanto un sistema lineal $m\ x\ m$, es decir, es un sistema cuadrado. Los a_{ij} son los coeficientes del sistema (1.1).

La formulación del sistema (1.1) se puede reducir a una forma compacta. Utilizando la notación vectorial, llamaremos en particular a los elementos de IR^n como vectores columna, es decir, como matrices $m\ x\ 1$. De la forma:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

Y sea A una matriz $m\ x\ m$ de término general a_{ij}, es decir

A = (a_{ij}) 1 ≤ i, j ≤ m,

De esta forma, el sistema lineal (1.1) se escribe:

$$\boldsymbol{Ax = b} \qquad (1.2)$$

Para encontrar la solución del sistema (1.2), utilizaremos los distintos métodos directos, que se estudiarán en esta actividad de titulación.

Hay dos clases de métodos para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, son los métodos directos y los métodos iterados. Los métodos directos, permiten calcular la solución exacta del sistema de ecuaciones en un número finito de pasos, si es que no fuera por los errores de redondeo. Por el contrario, los métodos iterados que en general solo conducen a una solución aproximada.

En esta actividad de titulación, vamos a estudiar los métodos directos, que consisten en adaptar el sistema (1.2) en otro equivalente siendo su resolución casi inmediata. Esta adaptación se realiza mediante las llamadas operaciones elementales, cuya interpretación de la matriz nos entregara una interesante factorización del sistema.

El objetivo es estudiar los métodos directos para resolver sistemas de ecuaciones lineales, sus aplicaciones y encontrar los valores del vector x del sistema (1.2) mediante el método que sea más eficiente para la matriz A, estos métodos se estudiarán y explicarán más adelante.

Capítulo 1

Preliminares

Comenzaremos con la teoría que respalda el estudio de los métodos directos, que serán utilizados en la presente actividad de titulación. Estas las pueden encontrar y complementar con cualquier libro de algebra lineal. Por lo que se omitirán algunos conceptos que se asumirán que domina el lector.

Desde el principio de los tiempos, el objetivo principal para los matemáticos ha sido buscar las soluciones reales de los sistemas de ecuaciones lineales, siendo este punto fundamental en el estudio de la matemática. Buscaremos esa solución mediante métodos numéricos siendo una herramienta matemática práctica que nos entrega una solución aproximada muy exacta**,** centrándonos en los métodos directos para sistemas de ecuaciones lineales, estos métodos nos serán muy útiles, debido que a veces dan una solución exacta de manera analítica, resulta ser en algún caso imposible o muy difícil de encontrar. Si bien la matemática numérica es relativamente joven (siglo IX y siglo XX), no obstante la cultura egipcia, en su registro poseía el papiro de Rhind elaborado 1650 A. de C., el documento contiene ejemplos de sistemas de ecuaciones lineales con una y dos incógnitas resueltos mediante métodos numéricos de aproximación. También en la civilización babilónica resolvían sistemas de ecuaciones lineales pero a las incógnitas las llamaban de la siguiente manera como anchura, longitud, área o volumen. Y Estos para comprobar sus resultados utilizaban algo parecido a la suma de una fila a otra multiplicada con un número real, ellos lo llamaban método de eliminación. Además en el libro llamado el arte matemático del autor chino desconocido (siglo III A. de C.) contiene problemas de sistemas de ecuaciones resuelto mediante el método de matrices, uno de los problemas es resolver un sistema de tres ecuaciones lineales por dicho método matricial.

1.1 Matrices y Vectores

Para iniciar debemos definir una matriz y un vector.

Definición 1.1.1 Sean m y n enteros positivos, una matriz A es un conjunto bidimensional de escalares, llamados elementos, ordenados en filas (m) y columnas (n) en forma de tabla rectangular. Indicamos el tamaño de la matriz por su número de filas y columnas que contiene. Una matriz de orden (o tamaño) $m \times n,$ es un conjunto $m \cdot n$ elementos a_{ij}, con i= 1, 2,…, m y j = 1, 2,…, n, que se representa de la siguiente manera:

$$\text{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Además podemos abreviar la matriz anterior de la forma A = (a_{ij}), i= 1, 2,…, m y j = 1, 2,…, n.

Si A es una matriz de orden $m \times n$, con m = n, entonces será una matriz cuadrada y diremos que $A \in M_n$(IR) si sus elementos son reales y $A \in M_n(C)$ si sus elementos son complejos. Cabe mencionar que si una matriz de orden $m \times n$ tiene todos sus elementos nulos se le denomina matriz cero de tamaño $m \times n$.

Definición 1.1.2 Un vector de n elementos se define como un conjunto ordenado de n números representado como:

$$(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \qquad (1.3)$$

Al vector (1.3) se le llama vector fila, en cambio el vector columna es un conjunto ordenado de n números representados del siguiente modo:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{1.4}$$

Utilizaremos IR^n para indicar al conjunto de todos los vectores con n elementos reales y $\mathbb{C}^n$ para indicar al conjunto de todos los vectores con n elementos complejos. Si un vector tiene todos sus elementos igual a cero lo llamaremos vector nulo, comúnmente denotado por un cero.

Existe una relación directa entre matrices y vectores debido a que una matriz se puede formar de vectores filas o vectores columnas. Además un vector es un tipo especial de matriz, por lo que el vector fila (1.3) de n elementos es una matriz de orden $1 \times n$. Mientras que el vector columna (1.4) de n elementos es una matriz de orden $m \times 1$. Por último, si A es una matriz de orden $m \times n$, con m = n = 1, entonces será simplemente un escalar.

1.2 Operaciones con matrices.

Definición 1.2.1 Sean A = a_{ij} y B = b_{ij} $\in M_{m \times n}$(IR). Entonces la suma de A y B es la matriz C = c_{ij} tal que:

$$c_{ij} = (a_{ij} + \ b_{ij})$$

Por ende, C $\in M_{m \times n}$(IR) que se obtiene al sumar los elementos correspondientes de A y B. Cabe recordar que para poder sumar dos matrices deben tener el mismo orden.

Definición 1.2.2 Sea A = a_{ij} $\in M_{m \times n}$(IR) y si α es un escalar, entonces la multiplicación de A por un escalar es la matriz C = c_{ij} tal que:

$$c_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}$$

Se obtiene C ∈ $M_{m \times n}$(IR) al multiplicar α por todos los elementos de A, la matriz mantendrá su mismo orden.

Definición 1.2.3 Sea A, B y C matrices de orden $m \times n$, además d y f son escalares, por lo tanto se cumplen las siguientes propiedades[1].

1. $A + B = B + A$ Propiedad conmutativa de la suma
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$ Propiedad asociativa de la suma
3. $(df)A = d(fA)$
4. $IA = A$ Propiedad identidad
5. $d(A + B) = dA + dB$ Propiedad distributiva
6. $(d + f)A = dA + fA$ Propiedad distributiva

Definición 1.2.4 Sean A = a_{ij} ∈ $M_{m \times p}$(IR) y B = b_{ij} ∈ $M_{p \times n}$(IR), la multiplicación de A por B es la matriz C = c_{ij}, conocida como:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{ni}$$

Entonces, C ∈ $M_{m \times n}$(IR) se obtiene con el producto punto de la fila i de A y la columna j de B. Es importante acordarse que el producto de dos matrices solo está definido si el número de columnas de A es igual al número de las filas de B; además la multiplicación de matrices no es conmutativa generalmente, esto quiere decir que puede existir algún caso que se cumpla la conmutatividad.

Ejemplo 1.2.5 Obtenga la multiplicación de dos matrices cuadradas

$$\text{Sea } A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \ y \ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 + 0 & 4 + 0 \\ 1 - 9 & 2 + 15 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -8 & 17 \end{pmatrix}$$

[1] Larson Edwards. (2014). Matrices. En Introducción al Álgebra Lineal (75). México: Editorial Limusa S.A de C.V.

Definición 1.2.6 Sea A, B y C son matrices (con un orden tal que los productos matriciales están definidos) y d es un escalar, por lo tanto se cumplen las siguientes propiedades[2]:

1. $A(BC) = (AB)C$ Propiedad asociativa de la multiplicación
2. $A(B + C) = AB + AC$ Propiedad distributiva
3. $(A + B)C = AC + BC$ Propiedad distributiva
4. $d(AB) = (dA)B = A(dB)$

Definición 1.2.7 Sea A = $a_{ij} \in M_{m \times n}$(IR), la matriz traspuesta de A será el intercambio de sus filas por sus columnas. Se denota como A^T y su orden será de $n \times m$.

1.3 Matrices especiales

Definición 1.3.1 Sea A = $a_{ij} \in M_{m \times n}$(IR). A será una matriz cuadrada si tiene igual número de filas que de columnas. Por lo tanto m = n, y su diagonal principal es el conjunto de elementos $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$.

En las siguientes definiciones se considerara la matriz A = $a_{ij} \in M_{m \times m}$(IR).

Definición 1.3.2 Llamamos matriz diagonal a una matriz cuadrada que tiene algún elemento distinto de cero en la diagonal principal y ceros en el resto de los elementos[3].

Definición 1.3.3 Será A una matriz triangular inferior, si tiene ceros en todos sus elementos por encima de la diagonal principal.

Definición 1.3.4 Sea A una matriz triangular superior, cuando los elementos por debajo de la diagonal principal son todos igual a cero.

---

[2] Larson Edwards. (2014). Matrices. En Introducción al Álgebra Lineal (77). México: Editorial Limusa S.A de C.V.
[3] José Antonio Ezquerro Fernández. (2012). Capítulo 1: Preliminares matemáticos y computacionales. . En Iniciación a los Métodos Numéricos. (6). España: Universidad de la Rioja, Servicios de publicaciones.

Definición 1.3.5 Se considera A una matriz identidad, si la diagonal principal está compuesta por sus elementos iguales a uno. Se nombra con la letra I y por definición es la única matriz de orden $m \times m$ tal que $IA = AI = A$ para cualquier matriz cuadrada de A.

Definición 1.3.6 Si se cumple que $A = A^T$, A es una matriz simétrica.

Definición 1.3.7 Sea A una matriz cero, si todos sus elementos son iguales a cero.

1.4 Inversa de una matriz

Definición 1.4.1 Sea A una matriz cuadrada invertible (regular o no singular)[4] si existe una matriz B de orden $m \times m$, tal que $AB = BA = I$. Se dice que B es la matriz inversa de A y se denota por A^{-1}.[5]

Definición 1.4.2 Si A es una matriz invertible, entonces su inversa es única.

Definición 1.4.3 Sea A una matriz invertible, se cumple la siguiente propiedad $(A^{-1})^{-1} = A$.

Definición 1.4.4 Sean dos matrices invertibles A y B, lo que implica que su producto también será invertible. Tal que $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Definición 1.4.5 Sea A una matriz invertible, por lo tanto el sistema de ecuaciones representado por $Ax = B$, tiene una única solución, dada por

$$x = A^{-1}B$$

[4] Una matriz no es invertible si su determinante es igual a cero, se le llama matriz singular.
[5] José Antonio Ezquerro Fernández. (2012). Capítulo 1: Preliminares matemáticos y computacionales. . En Iniciación a los Métodos Numéricos. (7). España: Universidad de la Rioja, Servicios de publicaciones.

1.5 Determinante de una matriz

Definición 1.5.1 el determinante de una matriz solo está definido para matrices cuadradas y su valor es un escalar. El determinante de una matriz A cuadrada de orden n se denota por $|A|$ o $\det(A)$ y se define como:

$$\det(A) = \sum_{j} (-1)^k a_{1_{j_1}} a_{2_{j_3}} \dots a_{n_{j_n}}$$

Donde la suma se toma para todas las $n!$ permutaciones de grado n y k es el número de intercambios necesarios para poner el segundo subíndice en el orden 1, 2,…, n.

Algunas propiedades de los determinantes son:

a) det(A) = det(A^T)
b) det (AB) = det (A)·det (B)
c) det (A^{-1}) = $\frac{1}{\det(\mathrm{A})}$
d) Cuando se intercambian dos filas o dos columnas de una matriz, su determinante cambia de signo.
e) El determinante de una matriz diagonal es el producto de los elementos de la diagonal.[6]

Definición 1.5.2 Sea A una matriz triangular de orden n, entonces su determinante es el producto de los elementos de la diagonal principal. Tal que:

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} \dots a_{nn.}$$

Definición 1.5.3 Si A es una matriz de orden $m \times m$ y si cumple cualquiera de las siguientes condiciones, su determinante será cero, es decir $|A| = 0$.

1. Toda una fila (o toda una columna) de solo ceros.
2. Dos filas (o columnas) son iguales.
3. Una fila (o columna) es un múltiplo de otra fila (o columna).

[6] José Antonio Ezquerro Fernández. (2012). Capítulo 1: Preliminares matemáticos y computacionales. . En Iniciación a los Métodos Numéricos. (7). España: Universidad de la Rioja, Servicios de publicaciones.

Definición 1.5.4 Si denotamos por A_{ij} la matriz de orden $(n-1)$ que se obtiene al eliminar la fila i y la columna j de la matriz A, llamamos menor complementario asociado al elemento a_{ij} de la matriz A al $\det(a_{ij})$.

Definición 1.5.5 Se llama k-ésimo menos principal de la matriz A al determinante de la sub – matriz principal de orden k.

Definición 1.5.6 El cofactor del elemento a_{ij} de la matriz A se define por:

$$\Delta_{ij} = (-1)^{i+j}\det(A_{ij})$$

Ejemplo 1.5.7 Sea A una matriz de orden 3×3, se le calculara su determinante mediante cofactores.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 7 \\ 2 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = 0 \cdot (-1)^4 \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^5 \begin{vmatrix} -1 & 7 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + \ -1 \cdot (-1)^6 \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\det(A) = 0 + -2 \cdot (-3 - 14) + \ -1 \cdot (-5 - 6)$$

$$\det(A) = 0 + -2 \cdot (-17) + \ -1 \cdot (-11)$$

$$\det(A) = 0 + 34 + \ 11$$

$$\det(A) = 45$$

Definición 1.5.7 Sea A una matriz invertible de orden m, entonces $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}C$, donde C es la matriz de elementos Δ_{ij}, para todo $i, j = 1, 2, \dots, n$. Obsérvese entonces que una matriz cuadrada es invertible si y solo si su determinante es distinto de cero.

Ejemplo 1.5.8 Sea A una matriz de orden 3×3, verificar si es invertible.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \\ 6 & 12 & 4 \end{pmatrix}$$

Le calcularemos su determinante aplicando cofactor, eligiendo su segunda fila.

$$\det(A) = 1 \cdot (-1)^3 \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 12 & 4 \end{vmatrix} + 5 \cdot (-1)^4 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^5 \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 12 \end{vmatrix}$$

$$\det(A) = -1 \cdot (24 - 24) + 5 \cdot (12 - 12) + -3 \cdot (36 - 36)$$

$$\det(A) = -1 \cdot (0) + 5 \cdot (0) + -3 \cdot (0)$$

$$\det(A) = 0$$

Por lo tanto, la matriz A no es invertible.

Definición 1.5.9 Al aplicar las operaciones elementales, analizaremos que es lo que le sucede a su determinante:

Sean A y B ∈ $M_{m \times m}$(IR), por lo tanto se cumplen las siguientes propiedades.

1. Si B se obtiene a partir de A intercambiando dos filas de A, entonces

$$|B| = -|A|$$

   Por lo tanto, al determinante se le deberá cambiar el signo.

2. Si B se obtiene de A al sumar un múltiplo de una fila de A a otra fila de A, entonces

$$|B| = |A|$$

   Con esta operación elemental no se cambia el determinante.

3. Si B se obtiene de A al multiplicar una fila de A por una constante *c* diferente de cero, entonces

$$|B| = c|A|$$

   El determinante también se deberá multiplicar por la constante utilizada.

Capítulo 2

Métodos Directos

Los métodos directos, son utilizados para adaptar el sistema $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ en otro equivalente, siendo su resolución casi inmediata. Esta adaptación se realiza mediante las llamadas operaciones elementales, cuya interpretación de la matriz, nos entregara una interesante factorización del sistema.

2.1 Método de eliminación de Gauss

Es el método directo de resolución de sistemas de ecuaciones lineales más conocido. Que consiste en transformar el sistema $Ax = b$, mediante las operaciones elementales, en otro sistema equivalente que será una matriz triangular superior, cuya resolución será de manera sencilla y se obtiene mediante la llamada sustitución regresiva o inversa. Cabe recordar que al aplicar las operaciones elementales la solución del sistema no varía.

Demostración[7] Comenzamos con $A^{(1)} = A$ y $B^{(1)} = B$. El método lo podemos explicar cómo una sucesión de $n-1$ pasos que dan como resultado una sucesión de matrices y vectores, como se indica a continuación:

$$A^{(1)} \rightarrow A^{(2)} \rightarrow \cdots \rightarrow A^{(n)}, \qquad B^{(1)} \rightarrow B^{(2)} \rightarrow \cdots \rightarrow B^{(n)},$$

De forma de que $A^{(n)}$ sea una matriz triangular superior. Así, para el primer paso supondremos que $a_{11}^{(1)} = a_{11} \neq 0$. Entonces, podemos eliminar x_1 de las $n-1$ últimas ecuaciones. En efecto, tomamos $l_{i1} = a_{i1}^{(1)}/a_{11}^{(1)}$ (para $i = 2, \dots, n$) y luego sumamos $-l_{i1}$ veces la primera ecuación a la i-ésima, quedando de la siguiente manera:

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - l_{i1}a_{1j}^{(1)},\ j = 1, 2, \dots, n\,; \qquad b_i^{(2)} = b_i^{(1)} - l_{i1}b_1^{(1)}.$$

[7] José Antonio Ezquerro Fernández. (2012). Capítulo 2: Resolución de sistemas lineales. En Iniciación a los Métodos Numéricos. (16). España: Universidad de la Rioja, Servicios de publicaciones.

(Observemos que $a_{ij}^{(1)}$ designa los elementos de $A^{(1)}$ y $b_i^{(1)}$ son los componentes de $B^{(1)}$).

Si $a_{22}^{(2)} \neq 0$, podemos eliminar de manera similar x_2 de las $n-2$ últimas ecuaciones y así sucesivamente. En general, el paso de la k-ésima matriz a la $(k+1)$-ésima viene dada por las siguientes formulas:

$$a_{ij}^{(k+1)} = \begin{cases} a_{ij}^{(k)}, & i = 1, 2, \dots, k \\ a_{ij}^{(k)} - l_{ik} a_{kj}^{(k)}, & i, j = k+1, k+2, \dots, n \\ 0, & i = k+1, k+2, \dots, n;\ j = 1,2, \dots, k \end{cases}$$

Donde:

$$l_{ik} = \begin{cases} \dfrac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}, & i = k+1, k+2, \dots, n \\ 1, & i = k \\ 0, & i = 1, 2, \dots, k-1 \end{cases}$$

Como hemos visto, si los elementos $a_{kk}^{(k)}$ que van apareciendo en los sucesivos pasos (que denominaremos pivotes) no son nulos, entonces podemos aplicar con éxito el algoritmo.

Después de sumar a n pasos, llegamos al sistema triangular superior $A^{(n)}x = b^n$ siguiente

$$\begin{aligned} a_{11}^{(n)} x_1 + a_{12}^{(n)} x_2 + \cdots + a_{1n}^{(n)} x_n &= b_1^{(n)} \\ a_{22}^{(n)} x_2 + \cdots + a_{2n}^{(n)} x_n &= b_2^{(n)} \\ \vdots \qquad & \quad \vdots \\ a_{nn}^{(n)} x_n &= b_n^{(n)} \end{aligned}$$

Que podemos resolver llevando a cabo la sustitución regresiva, obteniendo:

$$x_n = \frac{b_n^{(n)}}{a_{nn}^{(n)}}$$

$$x_{n-1} = \frac{b_{n-1}^{(n)} - a_{n-1}^{(n)},n^{xn}}{a_{n-1,n-1}^{(n)}}$$

$$\vdots$$

$$x_k = \frac{b_k^{(n)} - \sum_{j=k+1}^{n} a_{kj}^{(n)} x_j}{a_{kk}^{(n)}}, \quad \text{Para cada } k = n-1, n-2, \ldots, 1$$

El procedimiento fallaría si en el paso k-ésimo el pivote $a_{kk}^{(k)}$ es cero, porque en ese caso, o bien los multiplicadores $l_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}$ no están definidos (lo que ocurre si $a_{kk}^{(k)} = 0$ para algún k < n) o no podemos realizar la sustitución regresiva (si $a_{nn}^{(n)} = 0$). Esto no significa que el sistema no tenga solución, sino más bien el método a utilizar debe modificarse.

Ejemplo 2.1.1 Resolveremos el siguiente sistema de ecuaciones lineales dado en su forma matricial por el método de eliminación de Gauss, que es el siguiente:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & -3 \\ 1 & -4 & -7 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -2 \\ -19 \end{pmatrix}$$

Primero, formamos la matriz ampliada del sistema, quedando de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -2 & \vdots & -3 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & \vdots & 2 \\ 2 & 4 & 1 & -3 & \vdots & -2 \\ 1 & -4 & -7 & -1 & \vdots & -19 \end{pmatrix}$$

Luego, hay que obtener un uno principal en la esquina superior izquierda y ceros en los demás elementos de la primera columna. Entonces aplicamos el intercambio de las dos primeras filas, obteniendo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & \vdots & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & \vdots & -3 \\ 2 & 4 & 1 & -3 & \vdots & -2 \\ 1 & -4 & -7 & -1 & \vdots & -19 \end{pmatrix}$$

A continuación, multiplicamos la primera fila por -2 y se la sumamos a la tercera fila, obteniendo una nueva tercera fila.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & \vdots & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & \vdots & -3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & \vdots & -6 \\ 1 & -4 & -7 & -1 & \vdots & -19 \end{pmatrix}$$

Ahora, multiplicamos la primera fila por -1 y se la sumamos a la cuarta fila, obteniendo una nueva cuarta fila.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & \vdots & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & \vdots & -3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & \vdots & -6 \\ 0 & -6 & -6 & -1 & \vdots & -21 \end{pmatrix}$$

Como ya tenemos la primera columna de la forma deseada, ahora haremos cero los elementos que están debajo de la diagonal principal de la segunda columna, para ellos multiplicamos la segunda fila por 6 y se la sumamos a la cuarta fila, obteniendo una nueva cuarta fila.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & \vdots & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & \vdots & -3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & \vdots & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -13 & \vdots & -39 \end{pmatrix}$$

Para escribir de manera adecuada la tercera columna, basta con multiplicar por $\frac{1}{3}$ la tercera fila, obteniendo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & \vdots & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & \vdots & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \vdots & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -13 & \vdots & -39 \end{pmatrix}$$

Y finalmente para escribir de manera adecuada la cuarta columna, basta con multiplicar por $-\frac{1}{13}$ la cuarta fila, obteniendo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & \vdots & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & \vdots & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \vdots & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \vdots & 3 \end{pmatrix}$$

Ahora que la matriz esta triangulada superiormente o también llamada de forma escalonada y obteniendo el siguiente sistema de ecuaciones lineales que se aprecia a continuación:

$$x_1 + 2x_2 - x_3 + 0x_4 = \ \ 2$$

$$x_2 + x_3 - 2x_4 \ = -3$$

$$x_3 - x_4 = -2$$

$$x_4 \quad = \ 3$$

A través de la sustitución regresiva se puede determinar el valor de cada incógnita:

$$x_1 = -1, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 1, \quad x_4 = 3$$

Siendo el vector solución, el siguiente:

$$x = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Cabe destacar que al resolver un sistema de ecuaciones lineales es posible que esté, no tenga solución. En el caso que en el proceso de eliminación se obtenga una fila con ceros exceptuando el último elemento, es innecesario continuar el proceso de eliminación ya que se puede concluir que el sistema es incompatible, es decir no existe solución.

2.2 Estrategias de pivoteo

Las estrategias de pivoteo son utilizadas para evitar que los resultados sean inexactos cuando aplicamos la eliminación de Gauss, esto se da en el caso de que el pivote es cero o es un número muy pequeño, es en estas ocasiones donde la idea de intercambiar ecuaciones (filas) en un sistema, nos resultara una buena estrategia. Así, si el pivote es cero, es decir $a_{kk}^{(k)} = 0$ entonces, podemos buscar un $a_{ik}^{(k)} \neq 0$ con $i > k$ (lo cual siempre es posible debido que el $\det(A) \neq 0$), intercambiar las filas k-ésima e i-ésima y continuar con el proceso. Este intercambio de filas se conoce como pivoteo.

Si $a_{kk}^{(k)} \neq 0$ pero es muy pequeño, el método de Gauss se puede aplicar, pero es inestable numéricamente, lo que significa que con unos pequeños errores en los datos se puede originar grandes cambios en la solución. Por lo que tendremos que pivotear.

Las opciones de pivoteo más habituales que se utilizan en el paso k-ésimo son:

2.2.1 Pivoteo parcial

Se toma como pivote el elemento de mayor módulo de entre los $n - k$ últimos elementos de la columna k-ésima, es decir, se elige $a_{ik}^{(k)}$ $(i = k, k+1, \dots, n)$ de forma que

$$\left|a_{ik}^{(k)}\right| = \max_{k \leq j \leq n} \left|a_{jk}^{(k)}\right|$$

Finalmente, intercambiamos las filas i-ésima y k-ésima.

2.2.1.1 Ejemplo Los candidatos para hacer el papel de pivote en la siguiente matriz ampliada, son los elementos que están marcados con negrita.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & \vdots & 2 \\ 0 & \mathbf{-5} & 1 & -2 & \vdots & -3 \\ 0 & \mathbf{4} & 3 & -3 & \vdots & -6 \\ 0 & \mathbf{-7} & -6 & -1 & \vdots & -21 \end{pmatrix}$$

Hay que elegir el máximo valor entre sus valores absolutos:

$$|a_{22}| = 5, \quad |a_{32}| = 4, \quad |a_{42}| = 7.$$

Por lo tanto, el máximo es $|a_{42}| = 7$, es por esto que se usara como pivote el elemento a_{42}. Esto significa que debemos intercambiar la segunda fila por la cuarta fila, obteniendo

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & \vdots & 2 \\ 0 & -7 & -6 & -1 & \vdots & -21 \\ 0 & 4 & 3 & -3 & \vdots & -6 \\ 0 & -5 & 1 & -2 & \vdots & -3 \end{pmatrix}$$

Y luego, se aplicaran las operaciones elementales para anular los elementos $a_{32}\ y\ a_{42}$.

2.2.2 Pivoteo total

Se toma como pivoteo el elemento de mayor módulo de la submatriz correspondiente de la matriz $A^{(k)}$, es decir, se elige el elemento $a_{ij}^{(k)}\ (i, j = k, k+1, \dots, n)$ de forma que

$$\left|a_{ij}^{(k)}\right| = \max_{k \le r, s \le n} \left|a_{rs}^{(k)}\right|$$

Finalmente, intercambiamos las filas y columnas que correspondan. En este pivoteo, si el pivote elegido no está en la columna k-ésima, habrá que intercambiar columnas por lo tanto tendremos que reordenar el orden de las incógnitas, es de gran importancia tener en cuenta lo anterior al momento de resolver un sistema lineal.

2.2.2.1 Ejemplo Los candidatos al momento de realizar el pivoteo en la siguiente matriz ampliada, son los elementos que están enmarcados con negrita.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & \vdots & 2 \\ 0 & \mathbf{-5} & \mathbf{1} & \mathbf{-8} & \vdots & -3 \\ 0 & \mathbf{4} & \mathbf{3} & \mathbf{-3} & \vdots & -6 \\ 0 & \mathbf{-7} & \mathbf{-6} & \mathbf{-1} & \vdots & -21 \end{pmatrix}$$

En primer lugar hay que elegir el máximo valor absoluto entre sus elementos, en este caso el máximo es $|a_{24}| = 8$. Lo implica entonces que se intercambiaran las filas y las columnas de tal manera que el elemento a_{24} tome ubicación en la posición del elemento a_{22}.

No debemos olvidar que el pivoteo parcial solo intercambia las filas de la matriz, mientras que con el pivoteo total se deben intercambiar tanto columnas como filas.

Por tanto la estrategia de pivoteo parcial es la más utilizada al momento de usar el método de eliminación de Gauss, porque no se deberá realizar un cambio en las incógnitas.

2.3 Métodos de factorización

2.3.1 Método de factorización LU

En este método, las operaciones con la matriz A se realizan sin utilizar, o cambiar, el vector b, que se utiliza solo en la parte de sustitución de la solución. En este caso, sea A una matriz cuadrada de orden m y supongamos que existen dos matrices convenientes L y U, triangular inferior y triangular superior, respectivamente, siendo $l_{kk} = 1, (para\ todo\ k)$, es decir que todos los elementos de la diagonal principal de L son igual a uno, tal que $A = LU$. Si A es no singular (es decir que su determinante es distinto de cero) entonces también lo serán L y U, por lo tanto sus elementos diagonales son distintos de cero.

Para resolver el sistema $Ax = b$, debemos buscar la solución de los dos sistemas triangulares los cuales son: $Lz = b\ \ y\ \ Ux = z$. Que se puede resolver mediante los siguientes pasos:

1. En primer lugar resolvemos el sistema $Lz = b$ para calcular el vector z, mediante una sustitución progresiva, de la siguiente manera:

$$z_1 = \frac{b_1}{l_{11}},$$

$$z_k = \frac{1}{l_{kk}}(b_k - l_{k1}z_1 - l_{k2}z_2 - \cdots - l_{k,k-1}z_{k-1}), \quad k = 2, 3, \dots, n$$

2. Finalmente resolvemos el sistema $Ux = z$ para calcular el vector solución x, la cual se obtendrá a través de una sustitución regresiva:

$$x_n = \frac{z_n}{u_{nn}}$$

$$x_k = \frac{1}{u_{kk}}\left(z_k - u_{k,k+1}x_{k+1} - u_{k,k+2}x_{k+2} - \cdots - u_{kn}x_n\right) \quad k = k-1, k-2, \ldots, 1$$

2.3.1.1 Ejemplo Resolveremos el siguiente sistema de ecuaciones lineales dado en su forma matricial por el método de factorización LU.

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 \\ 6 & 2 & 8 \\ -2 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Luego, utilizaremos $A = LU$, siendo L triangular superior y U triangular inferior, obteniendo:

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 \\ 6 & 2 & 8 \\ -2 & -3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$$

Luego multiplicamos la matriz L por U, resultando:

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 \\ 6 & 2 & 8 \\ -2 & -3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ l_{21}u_{11} & l_{21}u_{12} + u_{22} & l_{21}u_{13} + u_{23} \\ l_{31}u_{11} & l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22} & l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + u_{33} \end{pmatrix}$$

Ahora igualamos con su coeficiente de posición quedando las siguientes soluciones:

$$u_{11} = -2, \qquad u_{12} = -1, \qquad u_{13} = -2, \qquad l_{21} = -3, \qquad u_{22} = -1$$

$$u_{23} = 2, \qquad l_{31} = 1, \qquad l_{32} = 2, \qquad u_{33} = 1$$

Entonces el sistema $A = LU$ queda de la siguiente forma

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 \\ 6 & 2 & 8 \\ -2 & -3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Primero resolveremos el sistema triangular $Lz = b$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Resolviendo las ecuaciones, obtenemos las soluciones de z:

$$z_1 = -1$$

$$-3z_1 + z_2 = 8 \rightarrow z_2 = 5$$

$$z_1 + 2z_2 + z_3 = 11 \rightarrow z_3 = 2$$

Por lo tanto, nos queda el vector z de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Ahora resolvemos el sistema $Ux = z$, quedando de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Resolviendo las ecuaciones, obtenemos las soluciones de x:

$$x_3 = 2$$

$$-x_2 + 2x_3 = 5 \;\rightarrow\; x_2 = -1$$

$$-2x_1 - x_2 - 2x_3 = -1 \;\rightarrow\; x_1 = -1$$

Y finalmente, obtenemos los valores de x:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

2.3.2 Método de Factorización de Cholesky

Sea A una matriz de orden $m \times m$ con pivotes no nulo, además si A es simétrica definida positiva esta puede ser escrita como el producto de una matriz triangular superior L y una matriz triangular inferior U siendo esta ultima la transpuesta de L. Cumpliendo que $A = LU = LL^T$. Así es como obtendremos sus elementos:

$$a_{ij} = \sum_{p=1}^{n} l_{ip} u_{pj} = \sum_{p=1}^{\min(i,j)} l_{ip} l_{pj} \;\rightarrow l_{kk} = \left(a_{kk} - \sum_{p=1}^{k-1} l_{kp}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Así los valores l_{kk} quedan determinados, por lo tanto, los elementos de la matriz L se obtienen mediante la siguiente forma. Para $k = 1, 2, \dots, n$.

$$l_{kk} = \left(a_{kk} - \sum_{p=1}^{k-1} l_{kp}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad l_{ik} = \frac{1}{l_{kk}} \left(a_{ik} - \sum_{p=1}^{k-1} l_{ip} l_{kp} \right), \quad i = k+1, k+2, \dots, n.$$

Nótese que estas igualdades se deducen de $A = LL^T$, al escribirlas como un sistema de ecuaciones.

2.3.2.1 Ejemplo Sea A una matriz de orden 4×4 .

$$A = \begin{pmatrix} 25 & 15 & -5 & -10 \\ 15 & 10 & 1 & -7 \\ -5 & 1 & 21 & 4 \\ -10 & -7 & 4 & 18 \end{pmatrix}$$

En primer lugar, calcularemos los elementos de L en el orden por columnas:

$$l_{11} = \sqrt{a_{11}} = \sqrt{25} \rightarrow l_{11} = 5$$

$$l_{21} = \frac{a_{21}}{l_{11}} = \frac{15}{5} \rightarrow l_{21} = 3$$

$$l_{31} = \frac{a_{31}}{l_{11}} = \frac{-5}{5} \rightarrow l_{31} = -1$$

$$l_{41} = \frac{a_{41}}{l_{11}} = \frac{-10}{5} \rightarrow l_{41} = -2$$

$$l_{22} = \sqrt{a_{22} - l_{21}^2} = \sqrt{10 - 9} \rightarrow l_{22} = 1$$

$$l_{32} = \frac{a_{32} - l_{31}l_{21}}{l_{22}} = \frac{1 - (-3)}{1} \rightarrow l_{32} = 4$$

$$l_{42} = \frac{a_{42} - l_{41}l_{21}}{l_{22}} = \frac{-7 - (-6)}{1} \rightarrow l_{42} = -1$$

$$l_{33} = \sqrt{a_{33} - l_{31}^2 - l_{32}^2} = \sqrt{21 - 1 - 16} \rightarrow l_{33} = 2$$

$$l_{43} = \frac{a_{43} - l_{41}l_{31} - l_{42}l_{32}}{l_{33}} = \frac{4 - 2 - (-4)}{2} \rightarrow l_{43} = 3$$

$$l_{44} = \sqrt{a_{44} - l_{41}^2 - l_{42}^2 - l_{43}^2} = \sqrt{18 - 4 - 1 - 9} \rightarrow l_{44} = 2$$

Por lo tanto, la matriz L queda formada de la siguiente manera:

$$L = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Y su transpuesta es:

$$L^T = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, $A = LU \rightarrow A = LL^T$.

$$\begin{pmatrix} 25 & 15 & -5 & -10 \\ 15 & 10 & 1 & -7 \\ -5 & 1 & 21 & 4 \\ -10 & -7 & 4 & 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Lo que implica que para encontrar la solución del sistema se aplicara como factorización LU. Es decir, que en primera ocasión se resuelve el sistema $Lz = b$, para encontrar el vector z y después se resuelve el sistema $L^T x = z$, obteniendo el vector solución x del sistema.

2.3.3 Método de factorización de Doolittle

Sea A una matriz cuadrada con pivotes no nulos, primero se encuentra la matriz triangular superior U mediante la eliminación de Gauss y luego formamos la matriz triangular inferior L a partir de las operaciones elementales realizadas para encontrar U pero con signos contrarios, además sus elementos $l_{ii} = 1$ (para todo i), esto quiere decir que los elementos de la diagonal principal de matriz L serán iguales a uno. Llegando a una factorización LU. $A = LU$.

2.3.3.1 Ejemplo Sea A una matriz cuadrada, por lo cual le aplicaremos el método de factorización de Doolittle.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 6 & 5 \\ -4 & 19 & 8 \\ 10 & -9 & -28 \end{pmatrix}$$

Primero le aplicaremos operaciones elementales. Multiplicaremos la primera fila por (-2) y se la sumaremos a la segunda, obteniendo una nueva segunda fila y además, multiplicaremos la primera fila por (5) y se la sumaremos a la tercera fila, obteniendo una nueva tercera fila, resultando:

$$\begin{pmatrix} -2 & 6 & 5 \\ 0 & 7 & -2 \\ 0 & 21 & -3 \end{pmatrix}$$

Ahora, multiplicaremos la segunda fila por (-3) y se la sumaremos a la tercera, obteniendo una nueva tercera fila:

$$\begin{pmatrix} -2 & 6 & 5 \\ 0 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, la matriz U es la siguiente:

$$U = \begin{pmatrix} -2 & 6 & 5 \\ 0 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Y para finalizar la matriz L está definida por las operaciones que se realizaron pero con signo contrario y su diagonal principal está compuesta por puros uno.

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Lo que implica que $A = LU$, queda definido de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} -2 & 6 & 5 \\ -4 & 19 & 8 \\ 10 & -9 & -28 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -5 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 6 & 5 \\ 0 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Ya contando con la matriz L y U. finalmente, para encontrar la solución del sistema se aplicara como factorización LU. Es decir, que en primera ocasión se resuelve el sistema $Lz = b$, para encontrar el vector z y después se resuelve $Ux = z$ obteniendo el vector solución del sistema.

Dato importante de mencionar, que una matriz A tiene factorización de doolittle si y solo si se le puede aplicar el método de eliminación de Gauss sin pivoteo.

2.3.4 Método de factorización de Crout

Este método es muy similar al método de Doolittle ya que se utiliza el mismo sistema de la factorización directa LU para encontrar la solución.

$$Ax = b, \rightarrow A = LU,$$

Siendo L una matriz inferior y U una matriz superior. Este método busca encontrar los elementos de L_{ij} y U_{ij}. El producto de estas dos matrices dará como resultado la matriz A, obteniendo lo siguiente:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Podemos notar que para el método de Crout se tiene que $U_{ii} = 1$, esto quiere decir que los elementos de la diagonal principal de matriz U serán iguales a uno. Teniendo como objetivo el cálculo de la k-ésima columna de L y la fila k-ésima de U por medio de una multiplicación entre matrices y un posterior despeje.

Finalmente, ya contando con la matriz L y U. finalmente, para encontrar la solución del sistema se aplicara como factorización LU. Es decir, que en primera ocasión se resuelve el sistema $Lz = b,$ para encontrar el vector z y después se resuelve $Ux = z$ obteniendo el vector solución del sistema.

2.3.4.1 Ejemplo Resolveremos el siguiente sistema de ecuaciones lineales dado en su forma matricial mediante el método de factorización Crout, que es el siguiente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 14 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Luego, utilizamos la definición del método de Crout, quedando de la siguiente manera:

$$A = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora realizaremos la multiplicación de las matrices L por U, obteniendo:

$$A = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{11}u_{12} & l_{11}u_{13} \\ l_{21} & l_{21}u_{12} + l_{22} & l_{21}u_{13} + l_{22}u_{23} \\ l_{31} & l_{31}u_{12} + l_{32} & l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + l_{33} \end{pmatrix}$$

Luego, reemplazamos la matriz A, obteniendo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{11}u_{12} & l_{11}u_{13} \\ l_{21} & l_{21}u_{12} + l_{22} & l_{21}u_{13} + l_{22}u_{23} \\ l_{31} & l_{31}u_{12} + l_{32} & l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + l_{33} \end{pmatrix}$$

Ahora igualamos con su coeficiente de posición quedando las siguientes soluciones:

$$l_{11} = 1, \qquad u_{12} = 4, \qquad u_{13} = -2, \qquad l_{21} = 3, \qquad l_{22} = -14,$$

$$u_{23} = -\frac{11}{14}, \qquad l_{31} = 2, \qquad l_{32} = -5, \qquad l_{33} = \frac{15}{14}.$$

Finalmente sustituimos los elementos l_{ij} y u_{ij}, Obteniendo su descomposición LU

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -14 & 0 \\ 2 & -5 & \frac{15}{14} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & -\frac{11}{14} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Primero resolveremos el sistema triangular $Lz = b$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -14 & 0 \\ 2 & -5 & \frac{15}{14} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 14 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Resolviendo las ecuaciones, obtenemos las soluciones de z:

$$z_1 = 3$$

$$3z_1 - 14z_2 = 14 \;\rightarrow\; z_2 = -\frac{5}{14}$$

$$2z_1 - 5z_2 + \frac{15}{14}z_3 = 11 \;\rightarrow\; z_2 = 3$$

Por lo tanto, nos queda el vector z de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -\frac{5}{14} \\ 3 \end{pmatrix}$$

Ahora resolvemos el sistema $Ux = z$, quedando de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & -\frac{11}{14} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -\frac{5}{14} \\ 3 \end{pmatrix}$$

Resolviendo las ecuaciones, obtenemos las soluciones de x:

$$x_3 = 3$$

$$x_2 - \frac{11}{14}x_3 = -\frac{5}{14} \;\rightarrow\; x_2 = 2$$

$$x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 3 \;\rightarrow\; x_1 = 1$$

Así, finalmente encontramos el vector solución de sistema de ecuaciones, quedando de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

2.3.5 Método de factorización LU con pivoteo

Este método se utiliza cuando no es posible factorizar una matriz de la forma LU, por lo cual se aplica la factorización $PA = LU$, donde P es una matriz de permutación. Las matrices de permutación se obtienen de la matriz identidad intercambiando sus filas. Sea A una matriz cuadrada, y se basa en buscar la matriz triangular superior U, para esto es necesario cambiar filas. Y luego la matriz triangular inferior L se obtiene a partir de las operaciones elementales realizadas para encontrar U pero con signos contrarios, además sus elementos $l_{ii} = 1$, para todo i. Por lo tanto se cumple $PA = LU$.

2.3.4.1 Ejemplo Sea A una matriz cuadrada encontrar la factorización de la forma $PA = LU$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ -1 & 5 & -2 \\ 3 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

Utilizando un pivoteo parcial, que consiste en intercambiar la primera fila por la tercera fila de la matriz A, obteniendo:

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 7 \\ -1 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Luego, aplicamos la operación elemental talque multiplicamos la primera fila por $\left(\frac{1}{3}\right)$ y se la sumamos a la segunda fila resultando una nueva segunda fila. Como se muestra a continuación:

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 7 \\ 0 & 7 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Entonces

$$U = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 7 \\ 0 & 7 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Luego, la matriz L es la siguiente:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Finalmente, para obtener la matriz P se le realiza a la matriz identidad la operación de intercambiar la primera fila por la segunda fila, es decir:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Se comprueba entonces:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ -1 & 5 & -2 \\ 3 & 6 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 6 & 7 \\ 0 & 7 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

De este modo queda $PA = LU$.

Capítulo 3

Aplicaciones de los sistemas de ecuaciones

Trataremos algunas de las diferentes aplicaciones que tienen los sistemas lineales.

Son muchas las aplicaciones en ingeniería de la resolución de sistemas lineales. A continuación veremos un ejemplo en concreto:

3.1 Circuito eléctrico pasivo.[8] En la figura 1, aparece un circuito eléctrico con una fuente de tensión y tres resistencias, como se muestra en la imagen:

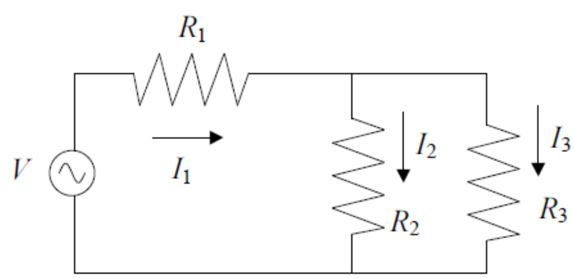

Figura 1. Circuito eléctrico simple solo con resistencia.

Aplicando las leyes de Kirchoff de los nudos y la ley de Ohm, el voltaje es el producto de la resistencia por la corriente $(V = RI)$, obtenemos fácilmente el sistema de ecuaciones lineales.

$$R_2 I_2 = R_3 I_3$$

$$V - R_1 I_1 = R_2 I_2$$

$$I_1 = I_2 + I_3$$

[8] Francisco R. Villatoro, Carmen M. García, Juan I. Ramos. (2002). Método directos para ecuaciones lineales. 11 de diciembre del 2018, de lenguajes y ciencias de la computación, Universidad de Málaga. Sitio web: http://www.lcc.uma.es/~villa/tn/tema04.pdf

Que se puede escribir de la forma matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ R_1 & R_2 & 0 \\ 0 & R_2 & -R_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ V \\ 0 \end{pmatrix}$$

3.2 Determinación de una curva

Un problema común en diferentes áreas es la determinación de una curva, es decir debemos encontrar la función que pasa por un conjunto de puntos ubicados en el plano cartesiano. Comúnmente conocemos la forma que posee cada función, por ejemplo, línea recta, parábola, exponencial y entre otros. Para dar solución a estos tipos de problemas debemos en primer lugar conocer la forma general que posee cada función, sin olvidar que sus parámetros deben ser constantes. Luego, se deben determinar el valor de estos parámetros con la finalidad de que aquella función pase por los puntos dados.

3.2.1 ejemplo Determinar la función cuadrática que pasa por los puntos $P(1,-2), Q(3,4), y\ R(4,1)$.

La forma general de una función cuadrática es:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Donde los coeficientes a, b y c son constantes numéricas. El problema está en encontrar los valores de estos coeficientes, lo que implica que los parámetros a, b y c se convierten en las incógnitas y para poder determinarlas requerimos de ecuaciones o igualdades que se deben satisfacer, para obtener lo anterior utilizaremos los puntos ya dados y así obtendremos dichas ecuaciones.

Para que la función pase por el punto $P(1,-2)$ se cumple que

$$f(x=1)=-2$$

Es decir que:

$$a(1)^2+b(1)+c=-2$$

Por lo tanto

$$a+b+c=-2$$

Procediendo de la misma forma con el punto $Q(3,4)$, obtenemos la segunda ecuación

$$9a+3b+c=4$$

Luego, hace lo mismo con el punto $R(4,1)$, obteniendo la tercera ecuación

$$16a+4b+c=1$$

Finalmente, considerando la relación que existe entre la función cuadrática y los puntos dados en el plano, se construyen las siguientes ecuaciones:

$$a+b+c=-2$$

$$9a+3b+c=4$$

$$16a+4b+c=1$$

Expresando las anteriores ecuaciones en forma matricial, obtenemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & -2 \\ 9 & 3 & 1 & \vdots & 4 \\ 16 & 4 & 1 & \vdots & 1 \end{pmatrix}$$

Aplicando las operaciones elementales, obtenemos la siguiente matriz ampliada

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & -2 \\ 0 & -6 & -8 & \vdots & 22 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & -11 \end{pmatrix}$$

Las soluciones del sistema son:

$$a = -2, \ \ b = 11, \ \ c = -11$$

De esta forma la función cuadrática que pasa por los puntos P, Q y R es:

$$f(x) = -2x^2 + 11x - 11$$

Conclusión

Antes que todo debemos tener en cuenta que los MÉTODOS DIRECTOS son una herramienta matemática que nos permite encontrar la solución de un sistema de ecuaciones lineales. Teniendo diversas aplicaciones como por ejemplo en la ingeniería, en el álgebra, balance en una reacción química, entre otros.

El objetivo principal de los métodos directos, es adaptar el sistema $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ en otro equivalente, y suponiendo que no hay errores de redondeo, obtenemos la solución exacta de dicho sistema. Esta solución se adquiere en una cantidad determinada de pasos. La adaptación del sistema a otro equivalente se realiza mediante las llamadas operaciones elementales, y su finalidad es entregarnos una factorización del sistema para posterior encontrar de manera sencilla la solución.

Considerando lo anterior, se muestran los distintos métodos directos cada uno de ellos con un ejemplo explicativo con la finalidad de entender su aplicación.

Pudimos observar que entre el método de eliminación de Gauss y el método de factorización Doolitle existen una relación directa siendo que este último método solo se puede aplicar si y solo si se le puede aplicar el método de eliminación de Gauss sin pivotear. Además que los métodos de factorización de Crout y Doolitle. Son muy similares con la única diferencia que en el primero método los elementos $u_{ii} = 1$, para todo i. Y el método doolitle sus elementos $l_{ii} = 1$ para todo i.

Finalmente, se ve alguna de las diferentes aplicaciones de los métodos directos, centrándonos en un ejemplo concreto de ingeniería y además, su aplicación en la determinación de una curva.

Bibliografía

1. Larson Edwards, introducción al álgebra lineal, Limusa S.A de C.V., 2014.

2. José Antonio Ezquerro Fernández, Iniciación a los Métodos Numéricos, España: Universidad de la Rioja, Servicios de publicaciones, 2012.

3. Howard Anton, introducción al álgebra lineal, Limusa wiley, 2010.

Linkografia

1. http://www.lcc.uma.es/~villa/tn/tema04.pdf
2. https://www.unioviedo.es/compnum/expositiva/Presentaciones_web/T5_sist_lineales.pdf
3. http://cb.mty.itesm.mx/ma1010/materiales/ma1010-03.pdf
4. http://www.ehu.eus/juancarlos.gorostizaga/mn11b/temas/factorizac_LU.pdf
5. https://www.fceia.unr.edu.ar/~pablos/Metodos%20Computacionales%20-%20Info%20Aplicada/factorizacion%20lu.pdf
6. http://cb.mty.itesm.mx/ma1010/materiales/ma1010-26.pdf
7. https://www.ugr.es/~mpasadas/ftp/Tema3_apuntes.pdf
8. http://esfm.egormaximenko.com/numerical_methods/pivoting_es.pdf
9. https://www.hiru.eus/es/matematicas/determinantes
10. https://tarwi.lamolina.edu.pe/~corihuela/mpeconomistas/capitulo%202-Matrices%20y%20Determinantes.pdf
11. http://esfm.egormaximenko.com/dft/adjoint_matrix.pdf