UNIVERSIDAD DEL BÍO-BÍO
FACULTAD DE EDUCACIÓN Y HUMANIDADES
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
PEDAGOGÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE FUNCIONES DE VARIABLE COMPLEJA

por

SERGIO ARIEL MALDONADO CONTRERAS

Memoria para optar al Título Profesional de Profesor
en Enseñanza Media en Educación Matemática

Profesor guía: Dr. Luis Friz Roa

Chillán 2019

Introducción a la teoria de funciones de variable compleja

Sergio Ariel Maldonado Contreras

10 de diciembre de 2018

Agradecimientos

En primer lugar, agradezco a los profesores que me ayudaron a realizar esta investigación, al profesor guía; Dr. Luis Friz, que con sus consejos y orientación me permitió guiar mi trabajo en el sentido que quería, al Dr. Edgardo Riquelme, que corrigió la investigación dándome la posibilidad de reconocer los errores que había cometido, entregando consejos para algunos ítems que podía mejorar. La ayuda de ambos profesores fue determinante para mi trabajo, sin su apoyo y gran disposición, todo el proceso se hubiese tornado más difícil.

Con esta investigación se termina una etapa; que no empezó en el momento de iniciar mis estudios en la universidad, comenzó desde el día en que nací, porque es aquí donde termino mi formación profesional, con ello mi inserción al mundo laboral y una independización se ven inminentes. Sin unos padres siempre presentes, que me apoyan incondicionalmente desde el día en que llegue a este mundo, nada de lo que he logrado hubiese sido posible. Mis padres son dos de los pilares fundamentales de mi vida, son los que me enseñaron valores como el respeto, la solidaridad, la humildad y sobre todo el esfuerzo. Ellos nunca han tenido grandes riquezas, pero me han demostrado que eso no es necesario; que, entregándose por completo, trabajando de sol a sol, se logra que nada les falte a las personas que amas y así verlas feliz. A fin de cuenta si estas con los que amas no se requiere más.

No puedo dejar pasar el apoyo incondicional que recibí, por una de las personas más especiales para mí, con la que me encanta gasta el tiempo, por aquella persona que cuando me decaía siempre tenía una palabra de aliento o un reto que entregarme, estaba ahí todos los días, a mi lado dándome los ánimos para seguir, asegurándose de que cumpliera con lo que tenía que hacer, a veces sintiéndose hasta más nerviosa que yo con las calificaciones que me entregaban en el proceso de investigación. Si bien no tenía un grupo de trabajo, con ella formamos el mejor equipo. Sin la ayuda de mi polola, la tesis hubiera sido un trabajo monótono y aburrido, llenó de risas mi investigación. Debo decirle, “gracias por hacer de cada día mejor que el anterior”.

También agradezco a cada una de las personas que me apoyaban, aquellos; familiares, amigos y conocidos que cada vez que me veían me daban ánimos. Sin todas estas personas nada hubiera sido posible.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

Los números complejos se introducen en la matemática, para dar sentido a las raíces cuadradas de números negativos. Con esto se abre un nuevo mundo, en donde operatorias que en los números reales no eran posible, sí lo son para los números complejos. Así, este nuevo conjunto se vuelve una herramienta de trabajo para el álgebra, llamada álgebra de los números complejos, con esto se genera una amplia gama de aplicaciones, convirtiéndose este conjunto en una de las construcciones teóricas más importantes de la inteligencia humana. Estos números son una herramienta esencial en las matemáticas puras y aplicadas; como la aerodinámica, el electromagnetismo y la variable compleja, siendo esta última el análogo del cálculo diferencial e integral, pero con números complejos.

Un número complejo es la suma de un número real y un imaginario. Su representación es a través de un plano de dos dimensiones, en donde el eje vertical representa los números imaginarios y el eje horizontal a los reales, es así como cada número complejo es representado por un vector, que posee un módulo y otras propiedades. Pero ese es el inicio de todas las cosas que estos números pueden representar.

A través del tiempo, los números complejos han adquirido una gran importancia en la mecánica cuántica (y otras ramas de la física) y las ingenieras, por la utilidad que prestan para representar ondas electromagnéticas y corrientes electrónicas.

Dentro de la misma matemática, los números complejos llegaron para facilitar muchos cálculos que antes podían ser muy tediosos. "El poder de cálculo que se esconde detrás de los complejos, es algo mágico. Con un mínimo esfuerzo, podemos derivar identidades y fórmulas trigonométricas que requieren de un trabajo tedioso y agotador, siguiendo los métodos usuales. Muchos conceptos de matemática, como el de función, límites, series de potencias y continuidad se estudian de manera bastante natural dentro del ambiente de los números complejos. Los argumentos de prueba son mucho más intuitivos y transparentes en el plano" Rivero Francisco, 2001.

En esta tesis se tratarán los siguientes contenidos, números complejos; su definición; propiedades algebraicas; interpretación geométrica; forma polar y su forma exponencial. También se estudiarán funciones analíticas, sus aplicaciones; además de límite; continuidad y derivadas, ecuaciones de Cauchy-Riemann; funciones analíticas y algunas funciones armónicas. Serán desarrolladas también funciones elementales, como la función exponencial; función trigonométrica; hiperbólica; función logaritmo y alguna de sus ramas; funciones trigonométricas hiperbólicas inversas, haciendo énfasis en las propiedades de z^{α}.

1.1. Marco teórico

1.1.1. *De los imaginarios a la variable compleja:*

El primer acercamiento a los números imaginarios la encontramos a mediados del siglo I d. C, en la obra de Herón de Alejandría; llamada Estereometría. Luego de esto, allá por el año 275 d. C, Diophantus con su obra Arithmetica, intentó calcular las medidas de los lados de un triángulo rectángulo de área $7cm^2$ y perímetro $12cm$, llegando a la igualdad $336x^2 + 24 = 172x$, una ecuación con soluciones complejas; pero sin explicación para dicho matemático.

Mahavira, matemático hindú, alrededor del 850 d. C, planteó en sus escritos, "un número negativo por naturaleza no puede ser un cuadrado, por tanto no puede tener raíz cuadrada". Jerome Cardan, filósofo, matemático y físico italiano, en 1545, publica "Ars Magna", en donde da a conocer un método que da resolución a ecuaciones de tercer y cuarto grado. Dando el más grande golpe en el álgebra en 3000 años, desde que los babilónicos descubrieron como resolver ecuaciones de segundo grado.

Durante largos años, los números complejos fueron motivo de discusión para los matemáticos; pero con el paso del tiempo y el descubrimiento de sus utilidades, fueron paulatinamente aceptados, siendo esto a finales del siglo XVII. Aunque su total entendimiento no se logró hasta escasas décadas atrás.

Fueron Cardano (1501-1576) y Bombelli quienes dieron, en sus trabajos pequeñas luces de los números complejos, relacionándolos con las soluciones de las ecuaciones de tercer grado. Posteriormente, René Descartes, tildó de imaginarios a este tipo de números, con su frase "ciertas ecuaciones algebraicas solo tienen solución en nuestra imaginación".

Como se decía estos números fueron utilizados con mucha desconfianza entre los siglos XVI y XVIII, cuando un problema entregaba soluciones imaginarias, se decía que este no tenía solución. Para el matemático alemán, Gottfried Leibniz; los números complejos tenían cierta divinidad, "el número imaginario es un recurso sutil y maravilloso del espíritu divino, casi un anfibio entre el ser y el no ser". La interpretación de sus palabras es clara. Los números reales tienen vida ya que interpretan magnitudes de la cotidianidad del mundo, mientras que los complejos no funcionan para nada parecido. Es por ello lo difícil que fue avanzar en la comprensión de este conjunto numérico.

Fue Gauss quien le entrego a estos números un lugar privilegiado dentro de las matemáticas, al demostrar en 1799, el teorema fundamental del álgebra, que dice que toda ecuación polinómica de la forma , $a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_{n-1}x + a_n = 0$, con coeficientes complejos, tiene n soluciones complejas. Euler también ayudó a posicionar a los complejos en el trono de los números, al designar la letra i a la raíz de -1, además relacionó las funciones exponenciales y trigonométricas, $e^{iz} = \cos x + i \sin x$.

Jean-Robert Argand fue quien interpretó geométricamente los números complejos, denominado diagrama de Argand, utilizando vectores; llevándolos a un plano en dos dimensiones, en donde el eje de las abscisas representa la parte real de un número complejo y el eje de las ordenadas a la parte imaginaria.

En 1825 se publica la memoria sobre la integración compleja ("mémoire sur la theorie del integrales définies") escrita por Cauchy en 1814, este acontecimiento es el nacimiento de la teoría de funciones de variable complejas. Fue una de las mayores contribuciones del siglo XIX, se trata de la teoría de funciones de variable compleja y su integración. Cauchy se interesa en esta memoria para valida un método, que permitía calcular integrales definidas mediante la variable compleja, ya utilizado por Euler desde 1759 y Laplace desde 1782, para la evaluación de integrales definidas. Por la utilización de este método podemos recordar la afirmación de Hadamard "el camino más corto entre dos verdades del campo real pasa con frecuencia por el campo complejo".

1.1.2. Plano complejo:

El plano complejo es el lugar en donde se representa geométricamente el conjunto de los números complejos. Un campo muy poco estudiado, en donde generalmente solo se muestran algunas propiedades, dejando de lado aquellas que muestran los movimientos de los números complejos.

El poder que esconden estos números es algo mágico. Con casi nada de esfuerzo, nos permiten derivar formulas e identidades trigonométricas que son tremendamente difíciles de calcular utilizando los métodos tradicionales. Los conceptos de la matemática que se trabajan en los números reales, como series de potencias, limite, continuidad y función, se estudian de manera natural y fluida en el plano complejo.

El plano complejo permite, entre otras cosas, indagar en sus operatorias básica, a través de las coordenadas polares, también se logra mostrar las propiedades de la multiplicación de las magnitudes o módulos de dos o más números complejos, así también la de sus ángulos o argumentos.

1.2. Objetivos

1.2.1. Objetivo general:

- Desarrollar un breve análisis de la variable compleja.

1.2.2. Objetivos especificos:

- Estudiar la representacion de los número complejos y sus propiedades.
- Estudiar funciones analíticas complejas.
- Desarrollar la teoria integral en el ambito complejo.

Capítulo 2

Números Complejos: El cuerpo de los complejos.

2.1. Definición de los números complejos

Cuando nos encontramos con ecuaciones de segundo grado de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, es natural hacer uso de la conocida fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

en donde encontramos el discriminante: $\Delta = b^2 - 4ac$. ¿Qué pasa si el valor de esta expresión es un número menor que cero?; las raíces de esta ecuación ya no serán reales, en este caso estamos hablando sobre soluciones que pertenecen al conjunto de los números complejos.

Por ejemplo si buscamos las raíces de la ecuación $x^2 - 2x + 5 = 0$, llegamos a:

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{16 \cdot (-1)}}{2}$$

$$x = \frac{2 \pm 4\sqrt{-1}}{2}$$

$$x = \frac{2 \cdot (1 \pm 2\sqrt{-1})}{2}$$

$$x = 1 \pm 2\sqrt{-1}$$

$$x_1 = 1 - 2\sqrt{-1};\ x_2 = 1 + 2\sqrt{-1}$$

De este modo x_1y x_2 son raíces de la ecuación (la verificación quedará para el lector). Pero estas no pertenecen a los reales, por ser raíces de números negativos. Es así que nacen los números complejos y $\sqrt{-1}$ corresponde a la unidad imaginaria, la cual se denota por la letra i, que cumple con la propiedad $i^2 = -1$.

Ahora podemos definir a cualquier complejo z de las siguientes formas:

2.1.1. Forma binomial

$$z = a + bi, \text{ con } a, b \in \mathbb{R}$$

2.1.2. Forma de pares ordenados

$z = (a, b)$, en donde a corresponde a la parte real y b a la parte imaginaria.

Cuando hablemos de la parte real de un número complejo z designaremos la función $Re(z)$ **, análogamente cuando hablemos de la parte imaginaria, la función designada será** $Im(z)$ **.** Ejemplo: Sea el número complejo $z = 2 + 5i$, se cumple que:

$$Re(z) = 2 \text{ y } Im(z) = 5$$

2.2. Operaciones con los complejos

2.2.1. Adición

Sean $z_1 = (a, b)$, $z_2 = (c, d)$, dos números complejos, la adición está definida como:

$$z_1 + z_2 = (a, b) + (c, d) = (a + b, c + d)$$

2.2.2. Producto

Utilizando los mismos números de la adición, tenemos que el producto entre dos números complejos se define como:

$$z_1 \cdot z_2 = (a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

El cociente entre complejos, será definido más adelante.

2.2.3. Propiedades de las operaciones en los complejos

Las propiedades de la adición y el producto en los números reales, se conservan en los números complejos.

Sean $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{R}$, se cumplen las siguientes propiedades:

- Conmutatividad en la adición:

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$$

- Asociatividad en la adición:

$$z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$$

- Conmutatividad en el producto:

$$z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$$

- Asociatividad en el producto:

$$z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3$$

- Neutro aditivo:

Existe un único elemento $\tau \in \mathbb{C}$, $\tau = (0, 0)$,tal que: $z + \tau = z$ para todo $z \in \mathbb{C}$

- Neutro multiplicativo:

Existe un único elemento $\omega \in \mathbb{C}, \tau = (1, 0)$, tal que; $z \cdot w = z$, para todo $z \in \mathbb{C}$

Así podemos observar que $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ forman un cuerpo conmutativo.

2.2.4. Conjugado de un complejo

El conjugado $\bar{z}$ del número complejo $z = (a, b) = a + bi$,es el número $\bar{z} = (a, -b) = a - bi$.

Propiedades del conjugado:

Sean u y v dos números complejos cuales quiera, podemos ver que se cumplen las siguientes relaciones:

1. $\overline{u + v} = \overline{u} + \overline{v}$
2. $\overline{u \cdot v} = \overline{u} \cdot \overline{v}$
3. $\overline{u - v} = \overline{u} - \overline{v}$
4. $\overline{\left(\frac{u}{v}\right)} = \frac{\overline{u}}{\overline{v}}$, con $v \neq 0$
5. $\overline{\overline{u}} = u$
6. $Re(u) = \frac{1}{2}(u + \overline{u})$
7. $Im(u) = \frac{1}{2}(u - \overline{u})$
8. $u \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow u = \overline{u}$

2.2.5. Módulo de un compejo

El módulo o valor absoluto $|z|$ de un número complejo $z = (a, b) = a + bi$, es el número real $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Propiedades del módulo de un complejo:

1. $|z| \geq 0$, $|z| = 0$ si y solo si $z = 0$
2. $|Re(z)| \leq |z|$, $|Im(z)| \leq |z|$
3. $|\overline{z}| = |-z| = |z|$
4. $|z|^2 = z{\cdot}\overline{z}$
5. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ (desigualdad triangular)

Por medio de la noción de módulo se pueden describir geométricamente muchos conjuntos numéricos. Por ejemplo; $A = \{z \mid |z - z_0| = r\}$, donde $r > 0$, es el lugar geométrico de todos los puntos z a una distancia r del centro z_0.

2.2.6. División

utilizando z_1 y z_2, ya definidos en la adición, tenemos que el cociente entre dos números complejos se define de la forma:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\overline{z_2}}{\overline{z_2}} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{|z_2|^2}$$

Demostraciones

Prop. 3: $|z| = |\overline{z}|$
Sea $z = x + yi$ con su conjugado $\overline{z} = x - yi$
Como $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ y $|\overline{z}| = \sqrt{x^2 + (-y)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$
Entonces $|z| = |\overline{z}|$.

La demostración de las demás propiedades son igual de sencillas, quedan como ejercicios para el lector.

2.2.7. Ejemplos

- Exprese en forma binomial el número complejo $z = (2, -3)$

Solución:
$z = (2, -3)$ es un complejo en su forma de coordenadas, como 2 es la parte real y -3 la parte imaginaria, entonces su forma binomial esta dada por $z = 2 - 3i$.

- Resolver: $\left[\frac{2+5i}{3i} + (1 + 2i)\right] \cdot (4 - i)$

Solución:

$$\left[\frac{2+5i}{3i}+(1+2i)\right]\cdot(4-i)$$

Seguimos el orden de las operaciones en los reales, por lo tanto resolvemos lo que esta dentro del parentesis, empezando con la división.

$$\left[\frac{2+5i}{3i}\cdot\frac{-3i}{-3i}+(1+2i)\right]\cdot(4-i)=\left[\frac{5-2i}{3}+(1+2i)\right]\cdot(4-i)$$

$$=\left[\left(\frac{5}{3}+1\right)+\left(\frac{-2}{3}i+2i\right)\right]\cdot(4-i)=\left[\frac{8}{3}+\frac{4}{3}i\right]\cdot(4-i)$$

$$=\frac{4}{3}(2+i)(4-i)=\frac{4}{3}(9+2i)$$

$$=12+\frac{8}{3}i$$

- Determinar el conjugado del complejo $z=7-5i$

Solución

$$\overline{z}=7+5i$$

- Determinar el módulo del complejo $z=5+7i$

Solución

$$|z|=\sqrt{(7)^2+(5)^2}=\sqrt{49+25}=\sqrt{74}$$

$$\therefore |z|=\sqrt{74}$$

2.3. Representación gráfica de un número complejo

Supongamos se toman dos ejes X'OX y Y'OY mutuamente perpendiculares (eje X e Y respectivamente). En el plano determinado por estas dos rectas se ubica cualquier punto mediante un par ordenado de número reales (x,y), como se muestra en la figura.

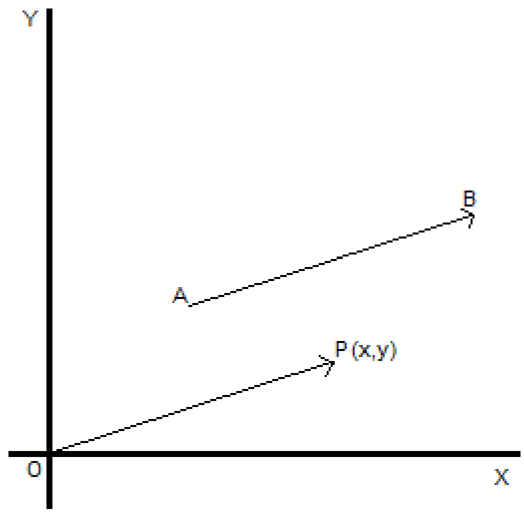


Figura 2.3.1: Complejos en el plano

Como todo número complejo de la forma $x + iy$ puede verse como un par ordenado de números reales, estos pueden ser representados como puntos en el plano XY al que se le llama plano complejo o diagrama de Argand. Así, a cada número complejo corresponde uno y solo un punto en el plano y a cada punto en el plano, corresponde uno y solo un número complejo. Al eje X se le denomina real y al Y eje imaginario.

2.3.1. Distancia entre dos puntos

Dado dos números complejos $u = (a, b)$ y $v = (c, d)$, la distancia no es más que el módulo de la diferencia entre ellos:

$$|u - v| = \sqrt{(a - c)^2 + (b - d)^2}$$

2.3.2. Ejemplos

- Calcular la distancia entre los siguientes complejos:

a) $z = 2 + 3i$ y $w = 1 - 5i$
Solución:
Haciendo uso de la fórmula pa la distancia, tenemos que:

$$|z - w| = \sqrt{(2-1)^2 + (3 - -5)^2}$$

$$|z - w| = \sqrt{65}$$

b)$z = 5 - 9i$ y $w = 3 - 8i$

Solución:

$$|z - w| = \sqrt{(5-3)^2 + (-9 - -8)^2}$$

$$|z - w| = \sqrt{5}$$

2.4. Forma polar de los números complejos

Otra forma de expresar un número complejo, $z = x + iy = (x, y)$, es a través de coordenadas polares, en donde:

$$x = r\cos\theta \text{ e } y = r\sin\theta$$

r corresponde al módulo de z ($|z|$)

θ corresponde a la amplitud o argumento de z ($arg(z)$); que es el ángulo que se forma entre la parte positiva del eje real y el vector que representa al complejo z.

Entonces:

$$z = x + iy = r \cdot (\cos\theta + i\sin\theta)$$

O en su forma abreviada:

$$z = |\mathrm{z}|\,\mathrm{cis}\theta$$

A todo número complejo $z \neq 0$ le corresponde únicamente un valor de θ en $0 \leq \theta \leq 2\pi$; sin embargo, puede emplearse cualquier otro intervalo de longitud 2π, como $-\pi < \theta \leq \pi$. A cualquiera de estos intervalos elegidos de antemano se le conoce como *rango principal,* al valor de θ, como *valor principal.*

2.4.1. Ejemplos

- Expresar en forma polar los siguientes números complejos:

a) $z = 2 + 2i\sqrt{3}$

Solución:

Primero debemos obtener el módulo de nuestro complejo:

$$|z| = \sqrt{(2)^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{16}$$

$$\therefore |z| = 4$$

Posteriormente calculamos el argumento, para ello encontraremos el ángulo θ, utilizando la función arcoseno;

$$\theta = \arcsin \tfrac{2\sqrt{3}}{4}$$

$$\theta = \arcsin \tfrac{\sqrt{3}}{2} = 60^\circ$$

Así, el complejo $z = 2 + 2i\sqrt{3}$ en su forma polar se escribirá como;

$$z = 4(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ)$$

o escrito en radianes;

$$z = 4(\cos \tfrac{\pi}{3} + i \sin \tfrac{\pi}{3})$$

b) $z = -5 + 5i$
Solución:
Al igual que el caso anterior, primero debemos calcular el módulo del número complejo:

$$|z| = \sqrt{(-5)^2 + (5)^2} = \sqrt{50}$$

$$\therefore |z| = 5\sqrt{2}$$

Posteriormente calculamos el argumento; debido a que el complejo está orientado hacia el segundo cuadrante, por ser su árte real negativa, deberemos encontrar un ángulo α comprendido entre la parte negativa del eje real y el vector que representa al complejo z. Luego nuestro ángulo θ, será la diferencia entre la medida del ángulo extendido del eje real y α;

$$\alpha = \arcsin \tfrac{5}{5\sqrt{2}}$$

$$\alpha = \arcsin \tfrac{1}{\sqrt{2}} = 45^\circ$$

$$\therefore \theta = 180^\circ - \alpha = 180^\circ - 45^\circ$$

$$\theta = 135^\circ$$

Así, el complejo $z = -5 + 5i$ en su forma polar se escribirá como;

$$z = 5\sqrt{2}(\cos 135^\circ + i \sin 135^\circ)$$

o escrito en radianes:

$$z = 5\sqrt{2}(\cos \tfrac{3\pi}{4} + i \sin \tfrac{3\pi}{4})$$

c) $z = -\sqrt{6} - \sqrt{2}i$
Solución:
Primero calculamos el módulo del complejo;

$$|z| = \sqrt{\left(-\sqrt{6}\right)^2 + \left(-\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{8}$$

$$|z| = 2\sqrt{2}$$

si observamos al número complejo, nos damos cuenta que está ubicado en el tercer cuadrante, por lo tanto será necesario calcular un ángulo α antes de encontrar nuestro argumento θ;

$$\alpha = \arcsin \tfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$$

$$\alpha = \arcsin \tfrac{1}{2} = 30^\circ$$

$$\therefore \theta = 180^\circ + \alpha = 180^\circ + 30^\circ$$

$$\theta = 210^\circ$$

Por lo tanto el complejo $z = -\sqrt{6} - \sqrt{2}i$, en su forma polar, está definido como;

$$z = 2\sqrt{2}\,(\cos 210^\circ + i \sin 210^\circ)$$

o escrito en radianes:

$$z = 2\sqrt{2}\left(\cos \tfrac{7\pi}{6} + i \sin \tfrac{7\pi}{6}\right)$$

d) $z = -3i$
Solución:
Primero debemos encontrar el módulo de z;

$$|z| = \sqrt{(0)^2 + (-3)^2} = \sqrt{9}$$

$$|z| = 3$$

Observamos que el número complejo se encuentra ubicado justo sobre la parte negativa del eje Y, por lo que no será necesario encontrar la medida del argumento θ, debido a que ya está dado por el ángulo que forman los cuadrantes, así;

$$\theta = 270^\circ$$

Por lo tanto:

$$z = 3\,(\cos 270^\circ + i \sin 270^\circ)$$

O escrito en radianes:

$$z = 3\left(\cos \tfrac{3\pi}{2} + i \sin \tfrac{3\pi}{2}\right)$$

2.5. Teorema De Moivre

Una de las ventajas de la representación polar, es la siguiente regla que deduciremos:
Sean

$$z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$$

$$z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$$

números complejos cualquiera. Se cumple que:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) =$$
$$r_1 r_2\left[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)\right]$$

lo que por propiedades trigonométricas, se convierte en:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2\left[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)\right]$$

una generalizacion de la ecuación conduce a

$$z_1 z_2 \cdots z_n = r_1 r_2 \cdots r_n\left[\cos(\theta_1 + \theta_2 + ... + \theta_n) + i\sin(\theta_1 + \theta_2 + ... + \theta_n)\right]$$

y si $z_1 = z_2 = ... = z_n = z$, se obtiene:

$$z^n = \{r(\cos\theta + i\sin\theta)\}^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

lo que se conoce como Teorema De Moivre.

Demostración del teorema De Moivre

Demostraremos que $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$, a través del método de inducción.
Suponga que la igualdad se cumple para un entero positivo k, nuestra hipótesis:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^k = \cos k\theta + i\sin k\theta$$

demostremos que se cumple para un $n = k + 1$, nuestra tesis

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^{k+1} = \cos(k+1)\theta + i\sin(k+1)\theta$$

ahora, intentaremos llegar de nuestra hipótesis a nuestra tesis, multiplicamos la primera expresión por $\cos\theta + i\sin\theta$, resultando:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^k \cdot (\cos\theta + i\sin\theta) = (\cos k\theta + i\sin k\theta) \cdot (\cos\theta + i\sin\theta)$$

De donde se deduce que;

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^{k+1} = \cos(k+1)\theta + i\sin(k+1)\theta$$

por lo tanto, queda demostrado.

Verificaremos que se cumple para $k = 1$:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^{1+1} = \cos(1+1)\theta + i\sin(1+1)\theta$$

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^2 = \cos 2\theta + i\sin 2\theta$$

De la misma forma, se cumple para cualquier valor de k.

2.5.1. Ejemplos

Demuestre las siguiemtes identidades

- $\cos 5\theta = 16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta$

Solución:
tenemos que:

$$\cos 5\theta + i\sin 5\theta = (\cos\theta + i\sin\theta)^5$$

de donde se obtiene:

$$\cos 5\theta + i\sin 5\theta =$$
$$\cos^5\theta + 5i\cos^4\theta\sin\theta - 10\cos^3\theta\sin^2\theta - 10i\cos^2\theta\sin^3\theta + 5\cos\theta\sin^4\theta + i\sin^5\theta$$

separando la parte real de la imaginaria, nos damos cuenta que:

$$\cos 5\theta + i\sin 5\theta =$$
$$\cos^5\theta - 10\cos^3\theta\sin^2\theta + 5\cos\theta\sin^4\theta + i(5\cos^4\theta\sin\theta - 10\cos^2\theta\sin^3\theta + \sin^5\theta)$$

luego,

$$\cos 5\theta = \cos^5\theta - 10\cos^3\theta\sin^2\theta + 5\cos\theta\sin^4\theta$$

utilizando,

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

tenemos que:

$$\cos 5\theta = \cos^5\theta - 10\cos^3\theta + 10\cos^5\theta + 5\cos\theta - 10\cos^2\theta + 5\cos^5\theta$$

por lo tanto, se demuestra que:

$$\cos 5\theta = 16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta$$

- $\dfrac{sen5\theta}{sen\theta} = 16\cos^4\theta - 12\cos^2\theta + 1$; si $\theta \neq k\pi$, con $k \in \mathbb{R}$

Solución:
por el ejercicio anterior, tenemos que:

$$\sin 5\theta = 5\cos^4\theta\sin\theta - 10\cos^2\theta\sin^3\theta + \sin^5\theta$$

multiplicando a ambos lados por $\dfrac{1}{\sin\theta}$, resulta

$$\frac{\sin 5\theta}{\sin\theta} = 5\cos^4\theta - 10\cos^2\theta\sin^2\theta + \sin^4\theta$$

utilizando,

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

tenemos que:

$$\frac{\sin 5\theta}{\sin\theta} = 5\cos^4\theta - 10\cos^2\theta + 10\cos^4\theta + 1 - 2\cos^2\theta + \cos^4\theta$$

por lo tanto, se demuestra que:

$$\frac{sen5\theta}{sen\theta} = 16\cos^4\theta - 12\cos^2\theta + 1$$

2.6. Raíces de números complejos

Se dice que un número complejo w es raíz n-ésima de un número complejo z, si $w^n = z$ y se escribe $w^{\frac{1}{n}}$de acuerdo con el Teorema De Moivre se aprecia que, si n es un entero positivo.

$$z^{\frac{1}{n}} = \{r(\cos\theta + i\sin\theta)\}^{\frac{1}{n}}$$

$$= r^{\frac{1}{n}}\left\{\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right\}, \text{k= 0, 1, 2, ..., n}$$

De donde se infiere que hay n valores diferentes de $z^{\frac{1}{n}}$, es decir, n raíces n-ésima de z, siempre y cuando $z \neq 0$.

2.6.1. Ejemplos

a) Encuentre todos los vectores z para los que $z^5 = 32$
Solución:
Si escribimos 32 e su forma polar, tenemos que;

$$32 = \{\cos(\pi + 2k\pi) + i\sin(\pi + 2k\pi)\} \text{ con } k = \pm 1, \pm 2, \pm 3...$$

Luego

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

haciendo uso del teorema de Moivre:

$$z^5 = r^5(\cos\theta + i\sin\theta)^5 =$$

$$z^5 = r^5(\cos 5\theta + i\sin 5\theta)$$

Igualando 2.6.1 y 2.6.1, tenemos que;

$$r^5(\cos 5\theta + i\sin 5\theta) = 32\{\cos(\pi + 2k\pi) + i\sin(\pi + 2k\pi)\}$$

Así

$$r^5 = 32 \text{ y } 5\theta = \pi + 2k\pi$$

por o tanto:

$$r = 2 \text{ y } \theta = \frac{\pi + 2k\pi}{5}$$

Luego,

$$z = 2\left(\cos\left(\frac{\pi + 2k\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{\pi + 2k\pi}{5}\right)\right)$$

Finalmente asignamos los valores para $k = 0, 1, 2, 3, 4$

$$\text{si } k = 0 \Rightarrow z = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\right)$$

$$\text{si } k = 1 \Rightarrow z = 2\left(\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{5}\right)\right)$$

$$\text{si } k = 2 \Rightarrow z = 2\left(\cos\left(\pi\right) + i\sin\left(\pi\right)\right)$$

$$\text{si } k = 3 \Rightarrow z = 2\left(\cos\left(\frac{7\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{5}\right)\right)$$

$$\text{si } k = 4 \Rightarrow z = 2\left(\cos\left(\frac{9\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{9\pi}{5}\right)\right)$$

Con $k = 5, 6, ...$ así como con los c¿valores negativos $-1, -2, ...$, se obtienen repeticiones de las 5 soluciones de z. Por lo tanto, éstas son las únicas soluciones de la ecuación dad. Estas cinco raíces se llaman raíces quintas de 32 y se denotan en conjunto como $32^{\frac{1}{5}}$. En general, $a^{\frac{1}{n}}$representa las n-ésimas raíces de a, y hay n raíces n-ésimas.

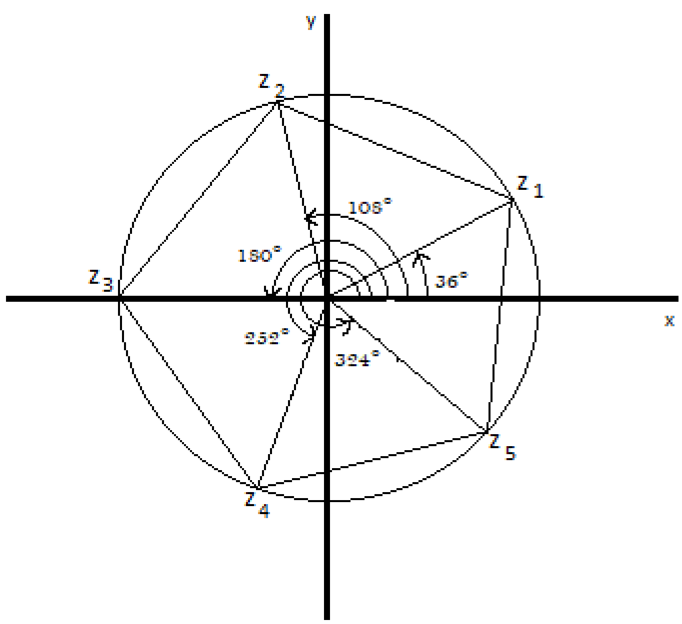


Figura 2.6.1: *Raíces de* z^5

En la figura, se observa los valores de z. Observe que se encuentran distribuidos en espacios sobre la circunferencia de un círculo de radio 2, con centro en el origen. Otra forma de decir esto es que las raíces se representan como vértices de un polígono regular.
b) Encuentre las raíces de $z = (-1 + i)^{\frac{1}{3}}$

Solución:

Haciendo algunos calculos, obtenemos que $|z| = \sqrt{2}$ y que $\theta = 135° = \dfrac{3}{4}\pi + k\pi$. Por lo tanto;

$$-1 + i = \sqrt{2}\left\{\cos\left(\tfrac{3}{4}\pi + k\pi\right) + i\sin\left(\tfrac{3}{4}\pi + k\pi\right)\right\}$$

calculando la raíz cúbica a ambos lados, tenemos;

$$(-1+i)^{\frac{1}{3}} = \left[\sqrt{2}\left\{\cos\left(\tfrac{3}{4}\pi + k\pi\right) + i\sin\left(\tfrac{3}{4}\pi + k\pi\right)\right\}\right]^{\frac{1}{3}}$$

Luego utilizando el teorema De Moivre:

$$(-1+i)^{1/3} = \sqrt[6]{2}\left\{\cos\left({}^{\pi(3+8k)}/{}_{12}\right) + i\sin\left({}^{\pi(3+8k)}/{}_{12}\right)\right\}$$

Finalmente asignamos valores para $k = 0, 1, 2$

$$\text{si } k = 0 \Rightarrow z = \sqrt[6]{2}\left\{\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right\}$$

$$\text{si } k = 1 \Rightarrow z = \sqrt[6]{2}\left\{\cos\frac{11\pi}{12} + i\sin\frac{11\pi}{12}\right\}$$

$$\text{si } k = 2 \Rightarrow z = \sqrt[6]{2}\left\{\cos\frac{19\pi}{12} + i\sin\frac{19\pi}{12}\right\}$$

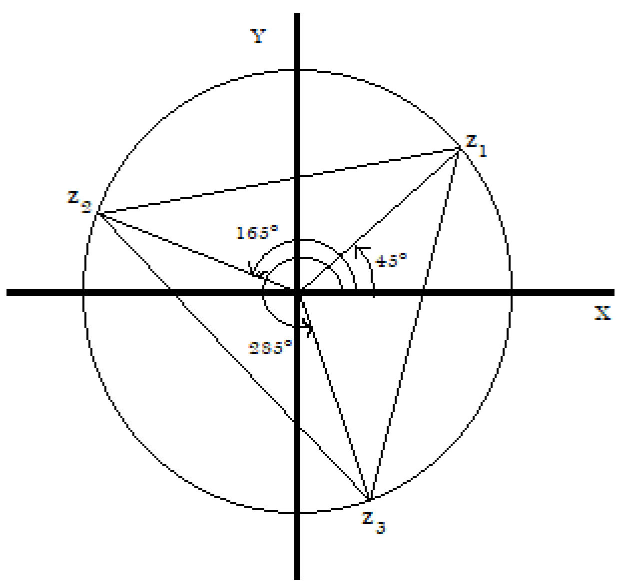


Figura 2.6.2: $z = (-1+i)^{\frac{1}{3}}$

Observando la figura, nos damos cuenta que la representación geométrica de las raíces de $z = (-1+i)^{\frac{1}{3}}$ es un triángulo equilátero inscrito en una circunferencia de radio $\sqrt[6]{2}$.

c) Encuentre las raíces de $z = \left(-2\sqrt{3}-2i\right)^{1/4}$

Solución:

Haciendo algunos calculos, obtenemos que $|z| = 4$ y $\theta = \frac{7}{6}\pi + k\pi$. Por lo tanto:

$$-2\sqrt{3}-2i = 4\left\{\cos\left(\tfrac{7}{6}\pi + k\pi\right) + i\sin\left(\tfrac{7}{6}\pi + k\pi\right)\right\}$$

calculando la raíces cuarta a ambos lados, tenemos que;

$$\left(-2\sqrt{3}-2i\right)^{1/4} = \left[4\left\{\cos\left(\tfrac{7}{6}\pi + k\pi\right) + i\sin\left(\tfrac{7}{6}\pi + k\pi\right)\right\}\right]^{1/4}$$

utilizando el terorema de Moivre, se obtiene:

$$\left(-2\sqrt{3}-2i\right)^{1/4} = \sqrt[4]{4}\left\{\cos\left(\tfrac{\pi}{2}\left(\tfrac{7}{12}+k\right)\right) + i\sin\left(\tfrac{\pi}{2}\left(\tfrac{7}{12}+k\right)\right)\right\}$$

finalmente asignamos los valores para $k = 0, 1, 2, 3$

$$\text{si } k = 0 \Rightarrow z = \sqrt[4]{4}\left\{\cos\frac{7}{24}\pi + i\sin\frac{7}{24}\pi\right\}$$

$$\text{si } k = 1 \Rightarrow z = \sqrt[4]{4}\left\{\cos\frac{19}{24}\pi + i\sin\frac{19}{24}\pi\right\}$$

$$\text{si } k = 2 \Rightarrow z = \sqrt[4]{4}\left\{\cos\frac{31}{24}\pi + i\sin\frac{31}{24}\pi\right\}$$

$$\text{si } k = 3 \Rightarrow z = \sqrt[4]{4}\left\{\cos\frac{43}{24}\pi + i\sin\frac{43}{24}\pi\right\}$$

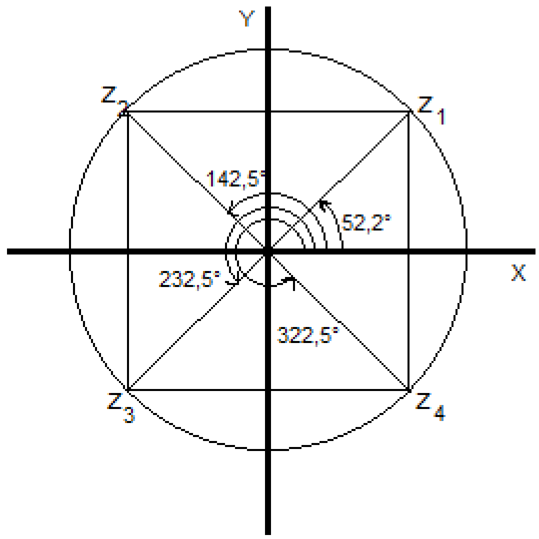


Figura 2.6.3: $z = \left(-2\sqrt{3} - 2i\right)^{1/4}$

Si observamos la figura, nos damos cuenta que las raíces de z corresponden a los vértices de un cuadrilátero inscrito en una circunferencia de radio $\sqrt[4]{4}$.

2.7. Fórmula de Euler

Si observamos la serie infinita,

- $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^4}{4!} + ...$

tenemos que para $x = i\theta$, se cumple que

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

lo que llamaremos Fórmula de Euler.
En general, se define

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^y = e^x\left(\cos y + i\sin y\right)$$

cuando $y = 0$, la igualdad se reduce a e^x.
Si hablamos del Teorema De Moivre, vemos que se reduce a

$$z^n = \left(\cos\theta + i\sin\theta\right)^n = \left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$$

2.7.1. Ejemplos

- Muetre que:

a)$\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$

Solución:

tomemos

$$(1)\ e^{i\theta}{=}\cos\theta + i\sin\theta$$

$$(2)\ e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$$

sumamos

$$e^{i\theta}+e^{-i\theta} = 2\cos\theta$$

así obtenemos que

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$$

b) $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$

Solución:

tomemos

$$(1)\ e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

$$(2)\ e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$$

restamos (2) de (1)

$$e^{i\theta}-e^{-i\theta} = 2i\sin\theta$$

$$\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} = \sin\theta$$

- Demuestre las identidades

a)$\sin^3\theta = \dfrac{3}{4}\sin\theta - \dfrac{1}{4}\sin 3\theta$

Solución:

$$\sin^3\theta = \left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^3$$

$$\sin^3\theta = \frac{e^{3i\theta}-3e^{i\theta}+3e^{i\theta}-e^{-3i\theta}}{-8i}$$

$$= -\frac{1}{4}\left(\frac{e^{3i\theta}-e^{-3i\theta}}{2i}\right)+\frac{3}{4}\left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)$$

$$= -\tfrac{1}{4}\sin 3\theta + \tfrac{3}{4}\cos\theta$$

b)$\cos^4\theta = \dfrac{1}{8}\cos 4\theta + \dfrac{1}{2}\cos 2\theta + \dfrac{3}{8}$

Solución:

tenemos que:

$$\cos^4\theta = \left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^4$$

$$= \tfrac{1}{16}\left(e^{4i\theta} + 4e^{2i\theta} + 6e^{-2i\theta} + e^{-4i\theta}\right)$$

$$= \tfrac{1}{8}\left(\frac{e^{4i\theta}+e^{-4i\theta}}{2}\right) + \tfrac{1}{2}\left(\frac{e^{2i\theta}+e^{-2i\theta}}{2}\right) + \tfrac{3}{8}$$

$$= \tfrac{1}{8}\cos 4\theta + \tfrac{1}{2}\cos 2\theta + \tfrac{3}{8}$$

c) Un hombre recorre 12 km hacia el noreste, 20 km 30° hacia el oeste del norte y después 18 km 60° hacia el suroeste. Determine de manera analítica, ¿cuánto y en qué dirección se alejó de su punto de partida?

Solución:

Representaremos cada movimiento del hombre como un vector, entonces:

$\overrightarrow{OA} = 12(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ) = 12e^{\frac{\pi}{4}i}$

$\overrightarrow{AB} = 20(\cos 120^\circ + i\sin 120^\circ) = 20e^{\frac{2\pi}{3}i}$

$\overrightarrow{BC} = 18(\cos 240^\circ + i\sin 240^\circ) = 18e^{\frac{4\pi}{3}i}$

Luego lo que caminó el hombre estará designado por la suma de todos los vectores que representan sus movimientos;

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$

$$\overrightarrow{OC} = 12(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ) + 20(\cos 120^\circ + i\sin 120^\circ) + 18(\cos 240^\circ + i\sin 240^\circ)$$

$$\overrightarrow{OC} = 12\cdot\tfrac{\sqrt{2}}{2} + 20\cdot\tfrac{-1}{2} + i(12\cdot\tfrac{\sqrt{2}}{2} + 20\cdot\tfrac{\sqrt{3}}{2} + 18\cdot\tfrac{-\sqrt{3}}{2})$$

$$\overrightarrow{OC} = \left(6\sqrt{2} - 19\right) + \left(6\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)i$$

Posteriormente calculamos el módulo del vector $\overrightarrow{OC}$, para calcular la distancia que recorrio:

$$\left|\overrightarrow{OC}\right| = \sqrt{\left(6\sqrt{2}-19\right)^2 + \left(6\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2} \simeq 14,7$$

Por lo tanto el hombre recorrio aproximadamete 14,7 km.

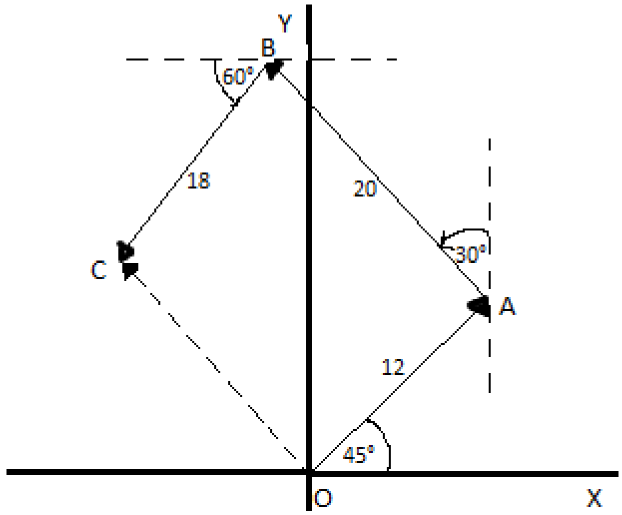


Figura 2.7.1: Desplazamiento final

Sabemos que el hombre se encuentra al norte del oeste de su punto de partida, nos falta calcular el ángulo (θ) en el cual se movió, antes debemos encontrar el ángulo α (que se muestra en la figura 1.3), posteriormente sustraer esa cantidad a 90°, para obtener nuestro valor deseado.

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{6\sqrt{2}+\sqrt{3}}{14{,}7}\right) \simeq 44,03^\circ$$

Luego;

$$\theta = 90^\circ - 44,03^\circ = 45,97^\circ$$

2.8. Ecuaciones polinómicas

Una ecuación polinómica es una ecuación de la forma:

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + ... + a_{n-1} z + a_n = 0$$

donde $a_0 \neq 0$, $a_1, a_2, ..., a_n$ son números complejos dados y n es un entero positivo al que se conoce como grado de la ecuación. A las soluciones de de estas ecuaciones se les llama ceros o raíces del polinomio.

Teorema fundamental del álgebra: Uno de los teoremas más importantes en el álgebra es el que nos ayudará a resolver ecuaciones polinómicas. El teorema fundamental del álgebra nos dice que; toda ecuación polinómica de grado n, tiene n soluciones en el conjunto de los números complejos, de las cuales todas o algunas pueden ser identicas.

Si $z_1, z_2, ..., z_n$son las raíces del polinomio, se escribe como:

$$a_0(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_n)=0$$

que se conoce como forma factorizada de la ecuación polinomica.

2.8.1. Ejemplos

a) Resuelva la ecuación cuadrática $az^2+bz+c=0$, con $a\neq 0$.
Solución:
Dividiremos ambos lados de la ecuación por a, nos queda.

$$z^2+\frac{b}{a}z+\frac{c}{a} = 0$$

sumamos $-\frac{c}{a}$ a ambos lados de la igualdad;

$$z^2+\frac{b}{a}z = -\frac{c}{a}$$

realizamos completación de cuadrados, sumando $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$, a ambos lados:

$$z^2+\frac{b}{a}z+\left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a}+\frac{b^2}{4a^2}$$

calculamos $\pm\sqrt{}$, a ambos lados de la igualdad:

$$z+\frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$

$$z+\frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

finalmente, despejando z, obtenemos;

$$z = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Así nos damos cuenta que la fórmula para encontrar las soluciones de una ecuación cuadrática en los complejos es identica a la de los números reales.
b) Encontrar las soluciones de la ecuación; $z^2 + (2i - 3)\, z + 5 - i = 0$

Solución:

Haciendo uso de la fórmula encontrada en el ejercicio anterior, tenemos que:

$$z = \frac{-2i + 3 \pm \sqrt{(2i-3)^2 - 4\,(5-i)}}{2}$$

$$z = \frac{-2 + 3 \pm \sqrt{-15+8i}}{2}$$

luego, debemos calcular $w = \sqrt{-15+8i}$

supongamos un número complejo de la forma $p + qi$, lo elevamos al cuadrado he igualamos su resultado al subradical de w, así nos resulta:

$$p^2 + 2pqi - q^2 = -15 + 8i$$

de donde obtenemos;

$$p^2 - q^2 = -15 \tag{2.8.1}$$

$$2pq = 8 \tag{2.8.2}$$

resolviendo el sistema de ecuaciones entre (1) y (2), tenemos que:

$$p = \pm 1 \text{ y } q = \pm 4$$

así:

$$\text{si } p = -1 \Rightarrow q = 4 \therefore w_1 = -1 + 4i$$

$$\text{si } p = 1 \Rightarrow q = -4 \therefore w_2 = 1 - 4i$$

ahora podemos encontrar los valores de z, que estan dados por:

$$z = \frac{-2 + 3 \pm (1 - 4i)}{2}$$

Por lo tanto:

$$z_1 = 2 - 3i \text{ y } z_2 = 1 + i$$

c) Encontrar las soluciones de $6z^4 - 25z^3 + 32z^2 + 3z - 10 = 0$

Solución:

Para encontrar las soluciones de esta ecuación polinómica haremos uso del método de Rufini, el cual consiste en obtener el cociente entre los divisores de los coeficientes que acompañan a las incognitas de menor y mayor grado, estos serán los posiblles ceros de la ecuación. Entonces:

$$\frac{divisores(-10)}{divisores(6)} = \frac{\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10}{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6} =$$

$$\left\{ \pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{1}{6}, \pm 2, \pm \frac{2}{3}, \pm 5, \pm \frac{5}{3}, \pm \frac{5}{3}, \pm \frac{5}{6}, \pm 10, \pm \frac{10}{3} \right\}$$

Luego tomando $z_1 = -\frac{1}{2}$ y $z_2 = \frac{2}{3}$, nos damos cuenta que son soluciones para la ecuación $6z^4 - 25z^3 + 32z^2 + 3z - 10 = 0$. Entonces los factores de la ecuación sería $\left(z + \frac{1}{2}\right)$ y $\left(z - \frac{3}{2}\right)$, por lo tanto, su multiplicación;

$$\left(z + \tfrac{1}{2}\right)\left(z - \tfrac{3}{2}\right) = (2z + 1)(2z - 3) = 6z^2 - z - 2$$

es un factor del polinomio.

Posteriormente, a través del método de división sintética, obtenemos los otros factores del polinomio.

$$\frac{6z^4 - 25z^3 + 32z^2 + 3z - 10}{6z^2 - z - 2} = z^2 - 4z + 5$$

luego las soluciones de $z^2 - 4z + 5 = 0$, son:

$$z = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 20}}{2} = 2 \pm i$$

Así las cuatro soluciones de la ecuación $6z^4 - 25z^3 + 32z^2 + 3z - 10 = 0$, son

$$z = \left\{ -\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 2 + i, 2 - i \right\}$$

2.9. Raíces n-ésimas de la unidad

Las soluciones de la ecuación $z^n = 1$, donde $n \in \mathrm{Z}_0^+$, se llaman raíccs n-ésimas de la unidad y están dadas por:

$$\mathrm{Z} = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n} = e^{\frac{2k\pi i}{n}},\ k = 0, 1, 2, ..., n-1$$

si $w = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n} = e^{\frac{2k\pi i}{n}}$, las raíces son $1, w^1, w^2, w^3, ..., w^{n-1}$. Geométrícamente, estás raíces representan los n vertices de un polígono regular de n lados, inscrito en un círculo unitario, con centro en el origen. La ecuación de este círulo es $|z| = 1$.

2.9.1. Ejemplos

a) Encuentre todas las raíces quintas de la unidad.
Solución:
Tenemos que

$$z^5 = 1$$

además

$$z = \cos\frac{2k\pi}{5} + i\sin\frac{2k\pi}{5} = e^{2k\pi i/5}$$

luego

$$k = 0, 1, 2, 3, 4$$

así

$$z_1 = e^0 = 1$$

$$z_2 = e^{\frac{2\pi i}{5}}$$

$$z_3 = e^{\frac{4\pi i}{5}}$$

$$z_4 = e^{\frac{6\pi i}{5}}$$

$$z_5 = e^{\frac{8\pi i}{5}}$$

llamaremos $w = e^{\frac{2\pi i}{5}}$, entonces las soluciones se denotarán como, $1, w, w^2, w^3, w^4$.

2.10. Interpretación vectorial de los números complejos

Un número complejo $z = x+iy$, se considera como un vector $\overrightarrow{OP}$ cuyo punto inicial se encuentra en el origen O y cuyo punto final P es (x, y).

A $\overrightarrow{OP} = x + iy$, se le llama vector posición de P. Dos vectores con la misma longitud o magnitud y la misma dirección, pero puntos iniciales diferentes, se consideran iguales.

La suma de complejos corresponde a la ley del paralelogramo para la suma de vectores. Por tanto, para sumar los números complejos z_1 y z_2, se traza el paralelogramo OABC, cuyos lados OA y OC corresponden a z_1 y z_2. La diagonal del paralelogramo corresponde a $z_1 + z_2$ (como se muestra en la siguiente figura).

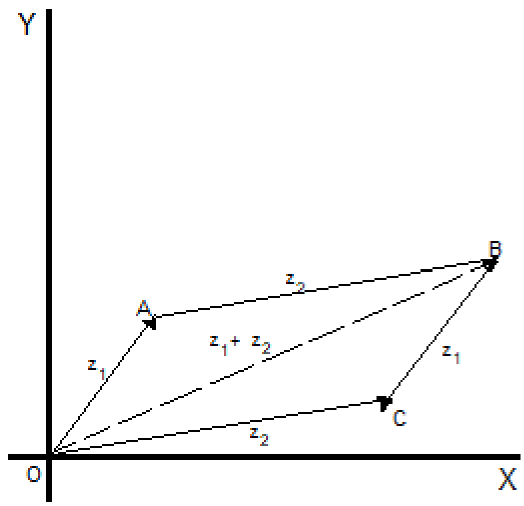


Figura 2.10.1: Ley del paralelogramo

Capítulo 3

Funciones, Límites, Continuidad y Derivabilidad

Una función compleja $w = f(z)$ puede considerarse como un mapeo o transformación del plano z al plano w. Así dado un punto (x, y) del plano z, existe un punto correspondiente (u, v) en el plano w, donde $u = u(x, y)$ y $v = v(x, y)$.

3.1. Mapeo de una función de variable compleja:

Para graficar una función de variable compleja $w = f(z)$, hacen falta dos sistemas de coordenadas, uno para el dominio $z \in \mathbb{C}$ y otro para el recorrido $w \in \mathbb{C}$, así entonces se trabajará con dos planos Z y W respectivamente.

Ejemplo:

Grafiquemos la función; $f(z) = z^2$. Tomaremos como dominio, aquellos puntos en el plano Z cuya parte real sea igual a 1. Dicho de otra forma, son todos los complejos z, tal que, $z = 1 + iy$

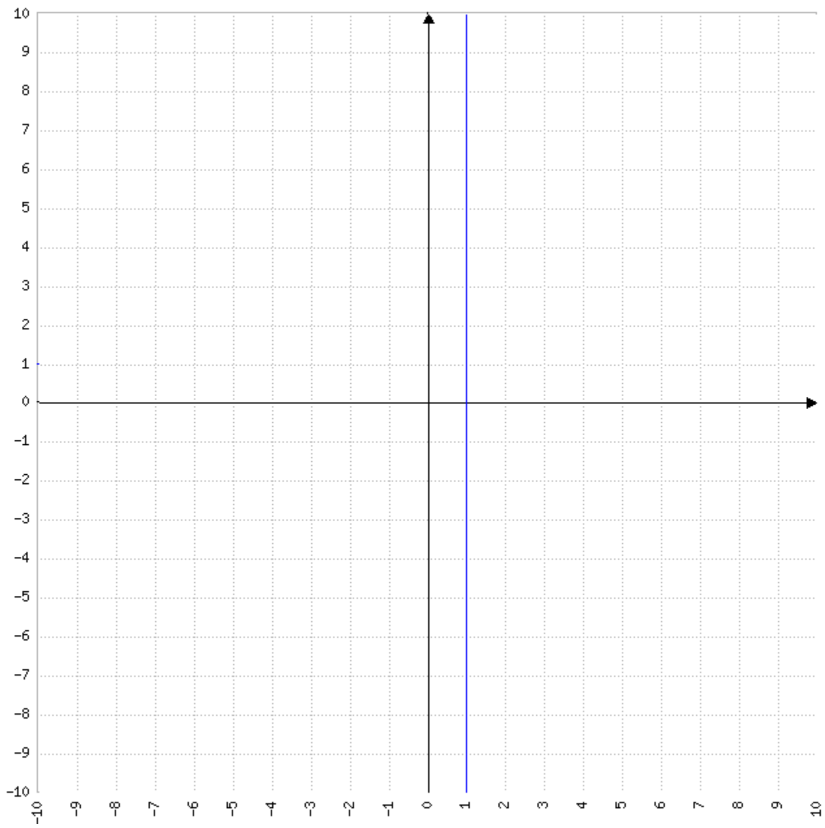


Figura 3.1.1: z=1+iy

Calculemos;

$$f(1+iy) = (1+iy)^2 = 1 - y^2 + 2iy = w$$

como $w = u(x,y) + v(x,y)$, entonces;

$$u(x,y) = 1 - y^2 \tag{3.1.1}$$

$$v(x,y) = 2y \tag{3.1.2}$$

despejando y en (2), posteriormente reemplazandolo en (1), obtenemos:

$$u \;\; = \;\; 1 - \frac{v^2}{4}$$

Por lo tanto el mapeo de $f(z) = z^2$, para la recta $x = 1$, es una parábola de vértice $(1, 0)$ y eje de simetría $v = u$.

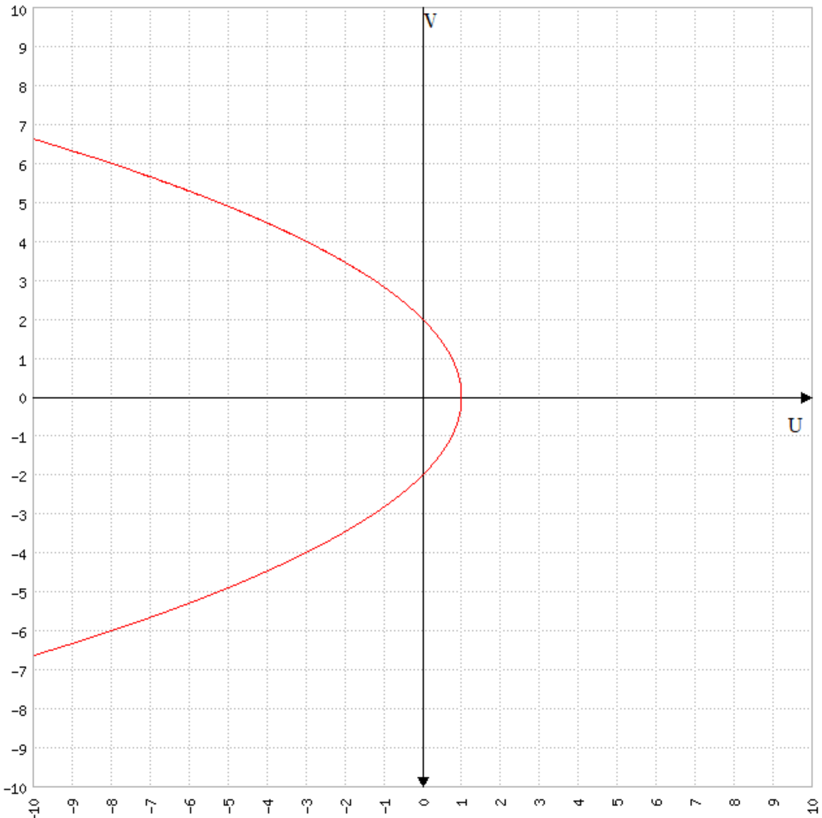


Figura 3.1.2: Mapeo f(1+iy)

observamos que, si x hubiera sido 0, el gráfico de $f(z)$, sería una recta sobre el lado negativo del eje U. Si $x \neq 0$ su gráfica serán diferentes parábolas, de diferente longuitud focal, como se muestra en la Figura Mapeo de una función de variable compleja: .

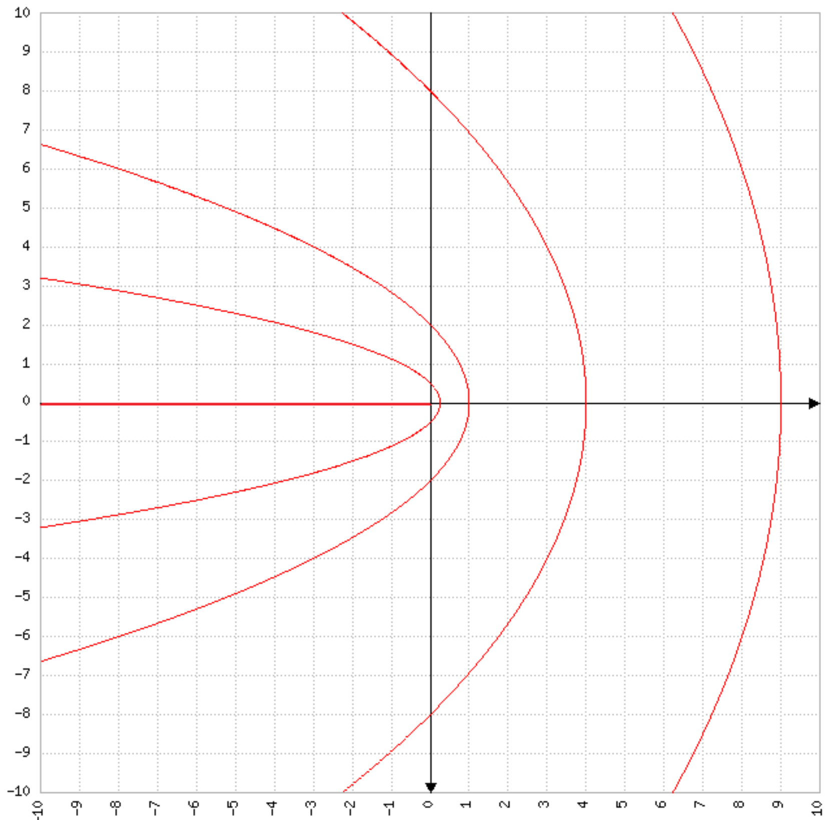
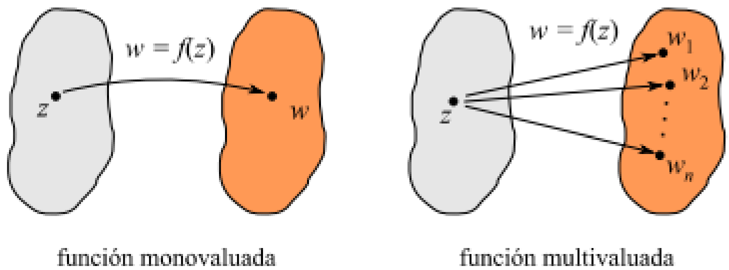


Figura 3.1.3: $f(a+iy) = (a+iy)^2$

3.2. Funciones multivaluadas:

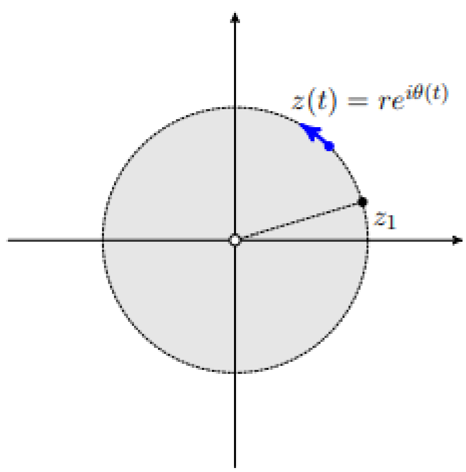
Si para cada valor de la variable independiente z existe uno y solo un punto imagen w, la transformación se considera **uniforme** o **monovaluada.** En caso contrario, la función se denota como **multiforme** o **multivaluada**.

Podemos definir, entonces, como función **multivaluada** a aquellos mapeos que designan a cada valor de z más de un valor para la variable w. Los ejemplos más notorios de funciones multiformes son $\arg z$, $\log z$, $\sqrt[n]{z}$.



3.3. Comportamiento de una función multivaluada

Consideraremos la función $w = \sqrt[3]{z}$, para obtener ideas acerca de cómo se comporta una función multivaluada. Observaremos que cambios presenta w cuando la variable z se mueve siguiendo una trayectoria circular alrededor del origen en sentido antihorario, entonces, podemos escribir $z(t) = re^{i\theta(t)}$, con $\theta(t)$ una función contínua de t.



- Supongamos que z_1 es el punto inicial del móvil. En este punto w toma el valor $w_1 = |z_1|^{\frac{1}{3}} \cdot e^{\frac{i\theta_1}{3}}$.
- Al completar una vuelta, el móvil vuelve a z_1, pero ahora tiene un nuevo argumento, $\theta_1 \to \theta_1 + 2\pi$. Por lo tanto tendremos un nuevo valor para la variable dependiente, $w_2 = w_1 = |z_1|^{\frac{1}{3}} \cdot e^{\frac{i(\theta_1+2\pi)}{3}} = w_1 \cdot e^{\frac{2\pi i}{3}} \neq w_1$
- Cuando el móvil vuelve a z_1, tras dar su segunda vuelta, su argumento vuelve a modificarse; $\theta_1 \to \theta_1 + 4\pi$. Así w tomará el valor de

$w_3 = |z_1|^{\frac{1}{3}} \cdot e^{\frac{i(\theta_1+4\pi)}{3}} = w_1 e^{\frac{4\pi i}{3}} \neq w_2.$

- Luego de completar la tercera vuelta; $\theta_1 \to \theta_1 + 6\pi$. Esta vez, cuando el móvil vuelve a z_1, $w_4 = |z_1|^{\frac{1}{3}} \cdot e^{\frac{i(\theta_1+6\pi)}{3}} = w_1 e^{2\pi i} = w_1$, por lo que termina el ciclo y w vuelve a su valor original.

A los diferentes valores de w, vistos anteriormente, se les comonoce como **ramas** de la función multivaluada. Cada rama corresponde a una función monovaluada. Dicho de otra manera, una función **multiforme** pude considerarse como una **colección de funciones uniformes.**

en el ejemplo,

$$w = f(z) = z^{\frac{1}{3}} \to \begin{cases} w_1 = f_1(z) = |z|^{\frac{1}{3}}\, e^{\frac{i\theta}{3}} & 0 \leq \theta < 2\pi \\ w_2 = f_2(z) = |z|^{\frac{1}{3}}\, e^{\frac{i\theta}{3}} & 2\pi \leq \theta < 4\pi \\ w_3 = f_3(z) = |z|^{\frac{1}{3}}\, e^{\frac{i\theta}{3}} & 4\pi \leq \theta < 6\pi \end{cases}$$

3.4. Funciones elementales:

3.4.1. Funciones algebraicas

Una función algebraica es un mapeo $w = f(z)$, que satisface a una ecuación de la forma:

$$P_0(z)w^n + P_1(z)w^{n-1} + P_2(z)w^{n-2} + ... + P_{n-1}(z)w + P_n(z) = 0,$$

Donde $P_0 \neq 0, P_1(z), ..., P_n(z)$, son polinomios en z.

Intuitivamente, una función algebraica es una función que puede escribirse como una combinación finita de sumas, productos, potencias, raíces y composición de polinomios complejos.

Por ejemplo, lafunción:

$w^2 - z = 0$, es una función algebraica de z y tiene por solución $w = z^{\frac{1}{2}}$.

Existen dos tipos de funciones algebraicas, se muestran a continuación:

1. Las **funciones polinómicas** se definen como,$w = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + ... + a_{n-1} z + a_n = P(z)$

Donde $a_0 \neq 0, a_1, ..., a_n$ son constantes complejas y n un entero positivo, que es el grado del polinomio $P(z)$.

La transformación $w = az + b$ es una transformación lineal.

2. Las funciones **algebraicas racionales** se definen como

$$w = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

donde $P(z)$ y $Q(z)$ son polinomios. A veces la expresión anterior se denomina transformación racional. El caso especial $w = (az+b)/(cz+d)$, donde $ad - bc \neq 0$, en ocaciones se llama *transformación lineal fraccionaria* o *transformación bilineal.*

3.4.2. Funciones trascendentes

Una función trascendente se define como aquella que no es una función algebraica.

Las funciones exponenciales y trigonométricas son un claro ejemplo de funciones trascendentes. A continuación se muestran las funciones no algebraicas:

1. **Funciones exponenciales** se definen como

$$w = e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$$

donde e es la base de los logaritmos naturales. si a es un real positivo, se define

$$a^z = e^{z \ln a}$$

Las funciones exponenciales complejas tienen propiedades similares a las de las funciones exponenciales reales. Como por ejemplo:
Propiedades: Para todo $z, w \in \mathbb{C}$, se tiene
1) $e^0 = 1$, $e^{i\pi/2} = i$, $e^{i\pi} = -1$, $e^{3\pi i/2} = -i$, $e^{2\pi i} = 1$
2) $|e^z| = e^{Re(z)}$
3) $e^{z+w} = e^z e^w$
4) $e^z \neq 0$, para todo $z \in \mathbb{C}$
5) $e^z = 1 \Longleftrightarrow z = 2k\pi i$, con $k \in \mathbb{Z}$
6) e^z es una función periódica, cuyos períodos son los números $2k\pi i$ con $k \in \mathbb{Z}$.
Ejemplo
Solución:
$e^z = 1 + 2i$
tenemos que

$$z = e^x \cos y + ie^x \sin y$$

entonces

$$e^x \cos y + ie^x \sin y = 1 + 2i$$

de aquí obtenemos

$$(1) e^x \cos y = 1$$

$$(2)\ e^x \sin y = 2$$

elevando (1) y (2) al cuadrado y posteriormente sumando ambas ecuaciones, obtenemos:

$$e^{2x} \cos^2 y + e^{2x} \sin^2 y = 5$$

$$e^{2x} = 5$$

$$\therefore x = \frac{1}{2}\ln 5$$

Ahora, dividimos (2) entre (1), obtenemos;

$$\frac{\sin y}{\cos y} = 2$$

$$\tan y = 2$$

$$\therefore y = \arctan 2$$

Por lo tanto la solución a la ecuación $e^z = 1 + 2i$ es $z = \frac{1}{2}\ln 5 + i\arctan 2$.

2. **Funciones logarítmicas**

Si observamos los logaritmos en los reales, tenemos que:

$$y = \ln x \Longleftrightarrow e^y = x, \text{ con } x, y \in \mathbb{R}$$

Luego en los complejos, tendremos que;

$$w = \ln z \Longleftrightarrow e^w = z, \text{ con } w, z \in \mathbb{C}$$

De donde

$$z = x + iy = re^{i(\theta + 2k\pi)},\ r = |z|,\ i\theta = i\left[\arctan(\tfrac{y}{x}) + 2k\pi\right]$$

Además

$$w = u + iv \Rightarrow e^w = e^{u+iv}$$

Luego

$$z = e^w$$

$$re^{i(\theta+2k\pi)} = e^{u+iv}$$

$$re^{i(\theta+2k\pi)} = e^u e^{iv}$$

De donde

$$r = |z| = e^u \text{ y } e^{i(\theta+2k\pi)} = e^{iv}$$

entonces

$$\ln|z| = u \text{ y } i(\theta + 2k\pi) = iv \Rightarrow v = \theta + 2k\pi = \arg z$$

Por lo tanto el logaritmo natural complejo, se define como:

$$\ln z = \ln|z| + i(\theta + 2k\pi), \text{ con } k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...$$

El logaritmo es una función multivaluada, con infinitos valores, su rama principal suele definirse como $\ln(r + i\theta)$, donde $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Ejemplo:

Calcular $\ln(1+i)$

Obtenemos el módulo de $1+i$

$$|1+i| = \sqrt{2}$$

luego el argumento de $1+i$

$$\arg(1+i) = \arctan(1) = \tfrac{\pi}{4}$$

$$\therefore \arg(1+i) = \tfrac{\pi}{4} + 2k\pi$$

Así;

$$\ln(1+i) = \ln\sqrt{2} + i(\tfrac{\pi}{4} + 2k\pi) = \tfrac{1}{2}\ln 2 + i(\tfrac{\pi}{4} + 2k\pi)$$

definición: Si I es un intervalo semiabierto de anchura 2π, se define la determinación I del logaritmo, mediante

$$\log_I z = \ln|z| + i\arg_I z, \text{ para todo } z \neq 0$$

Ejemplo:

$$\log_{(0,2\pi)}(-2) = \ln 2 + \tfrac{3\pi i}{2}$$

Propiedades:
1) Para todo $z \neq 0$,$e^{\log_I z} = z$.
2) $\ln e^w = w$
3) si $z, w \neq 0 \Rightarrow \ln(zw) = \ln z + \ln w$

3. **Funciones trigonométricas**

Las funciones trigonométricas complejas, están definidas para todo $z \in \mathbb{C}$, a partir de la funcion exponencial, como :

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i},\ \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

Las funciones trigonométricas complejas conservan las siguientes propiedades de las funciones trigonométricas reales:
1) $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$
2) Para todo $z \in \mathbb{C}$, se cumple que $\sin(-z) = -\sin z$ y $\cos(-z) = \cos z$
3) $\cos z = \sin(\frac{\pi}{2} + z)$
4) Para todo $z, w \in \mathbb{C}$, se cumple que:
- $\sin(z \pm w) = \sin z \cos w \pm \sin w \cos z$
- $\cos(z \pm w) = \cos z \cos w \mp \sin z \sin w$
- $\tan(z \pm w) = \dfrac{\tan z \pm \tan w}{1 \mp \tan z \tan w}$

5) $\sin z = 0 \iff z = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
6) $\cos z = 0 \iff z = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
7) $1 + \tan^2 z = \sec^2 z$
8) $1 + \cot^2 z = \csc^2 z$
9) $\overline{\cos z} = \cos \overline{z}$, $\overline{\sin z} = \sin \overline{z}$

Una de las mayores diferencias entre las funciones trigonométricas reales y complejas, es que estás últimas no estan acotadas por 1. Por ejemplo:

$$|\sin(2i)| = \left|\frac{e^{-2}-e^{2}}{2i}\right| = \frac{e^{2}-e^{-2}}{2} \approx 3,6269... > 1$$

De hecho, si $x > 0$;

$$|\sin(xi)| = \left|\frac{e^{-x}-e^{x}}{2i}\right| = \frac{e^{x}-e^{-x}}{2}$$

Por lo tanto el módulo del seno puede ser tan grande como queramos. Un razonamiento análogo nos sirve para coseno.

Las demás funciones trigonometricas complejas, nacen de las funciones seno y coseno, como se muestra a continuación:

$\sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$	$\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$
$\sec z = \frac{2}{e^{iz}+e^{-iz}}$	$\csc z = \frac{2i}{e^{iz}-e^{-iz}}$
$\tan z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{i\left(e^{iz}+e^{-iz}\right)}$	$\cot z = \frac{i\left(e^{iz}+e^{-iz}\right)}{e^{iz}-e^{-iz}}$

4. **Funciones hiperbólicas**

Se definen el seno y el coseno hiperbólicos, para todo $z \in \mathbb{C}$, como:

$$\sinh z = \frac{e^{z}-e^{-z}}{2}, \cosh z = \frac{e^{z}+e^{-z}}{2}$$

De donde podemos llegar a las siguientes igualdades; $\cosh z = \cos(iz)$, $\sinh z = -i\sin(iz)$, de las cuales podemos inferir las siguientes propiedades:

- $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$

Demostración:

Como ya sabemos, $\cosh z = \cos(iz)$, $\sinh z = -i\sin(iz)$, por lo tanto, basta con reemplazar las funciones equivalentes;

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = [\cos(iz)]^2 - [-i\sin(iz)]^2 = [\cos(iz)]^2 + [\sin(iz)]^2 = 1$$

queda entonces demostrado.

- $\cos z = \cos(x+iy) = \cos x \cos(iy) - \sin x \sin(iy) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$

En particular, note que $\sin z$, es real si z es real, o si $z = \frac{\pi}{2} + iy + k\pi$ con $y \in \mathbb{R}$ arbitrario y $k \in \mathbb{Z}$. De la misma forma, $\cos z$ es real si $z \in \mathbb{R}$,o si $z = iy + k\pi$ con $y \in \mathbb{R}$ arbitrario y $k \in \mathbb{Z}$.

- $\tanh z \equiv \frac{\sinh z}{\cosh z} = -i\tan(iz)$, con $z \neq \frac{i\pi}{2} + k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$.

Demostración

Reemplacemos $\cosh z = \cos(iz)$ y $\sinh z = -i\sin(iz)$, entonces nos queda:

$$\tanh z \equiv \frac{\sinh z}{\cosh z} = \frac{-i\sin(iz)}{\cos(iz)} = -i \cdot \left(\frac{\sin(iz)}{\cos(iz)}\right) = -i \cdot \tan(iz)$$

queda entonces demostrado.

Ejemplo: Si $z = x + iy$ (con $x, y \in \mathbb{R}$), probar que $|\sin z|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y$, $|\cos z|^2 = \cos^2 x + \sinh^2 y$.

Solución:

$$\text{Si } z = x + iy, \text{ entonces } \sin z = \sin(x + iy) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y \Rightarrow$$
$$|\sin z|^2 = |\sin x \cosh y + i \cos x \sinh y|^2 = (\sin x \cosh y)^2 + (\cos x \sinh y)^2$$

$$(\sin x \cosh y)^2 + (\cos x \sinh y)^2 = \sin^2 x \cosh^2 y + \cos^2 x \sinh^2 y$$

luego, $\cosh^2 y = 1 + \sinh^2 y$ y $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, entonces:

$$\sin^2 x \cosh^2 y + \cos^2 x \sinh^2 y = \sin^2 x \left(1 + \sinh^2 y\right) + \left(1 - \sin^2 x\right) \sinh^2 y$$

$$= \sin^2 x + \sin^2 x \sinh^2 y + \sinh^2 y - \sin^2 x \sinh^2 y$$

eliminando terminos semejantantes, tenemos que:

$$|\sin z|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y$$

queda entonces demostrado. De forma análoga, se demuestra que $|\cos z|^2 = \cos^2 x + \sinh^2 y$.

3.5. Límite y continuidad

3.5.1. Conceptos topológicos básicos

Todos los conjuntos de puntos en el plano complejo se denominan conjunto (bidimensional) de puntos, y cada punto es un miembro o elemento del cojunto. las siguientes definiciones fundamentales se presentan aquí:

- **Vecindades:** Una vecindad δ de un punto z_0 es el conjunto de todos los puntos z tal que $|z - z_0| < \delta$, donde δ es cualquier número positivo dado. Una vecindad agujereada δ de z_0 es una vecindad de z_0 en donde se omite el punto z_0, es decir, $0 < |z - z_0| < \delta$.

- **Punto límite:** Un punto z_0 se llama punto límite o punto de acumulación de un conjunto S, si toda vecindad δ agujereada, contiene puntos de S. Como δ puede ser cualquier número positivo, se dice que S debe tener una cantidad infinita de puntos. Observe que z_0 puede o no pertenecer a S.

- **Conjuntos cerrados:** Se dice que un conjunto S es cerrado si todo punto límite de S pertenece a S, es decir S contiene todos sus puntos límites. Por ejemplo, el conjunto de todos los puntos z, tales que $|z| \leq 1$ es un conjunto cerrado.
- **Conjunto acotado:** Se dice que un conjunto S es acotado si se puede encontrar una constante M tal que $|z| < M$ para todos los puntos z en S. Un conjunto no acotado es un conjunto que no satisface esta condición. Se dice que un aconjunto acotado y cerrado es compacto.
- **Punto interior:** Un punto z_0 es un punto interior de un conjunto S si se puede hallar una vecindad δ de z_0 tal que todos sus puntos pertenezcan a S.
- **Punto frontera:** Si toda vecindad δ de z_0 contiene puntos que pertenecen a S y puntos que no pertenecen a S, entonces z_0 es un punto frontera.
- **Punto exterior:** Un punto z_0 es exterior a un conjunto S, si toda frontera δ de z_0 no contiene puntos de S.
- **Conjunto abierto:** Un conjunto abierto es aquel que consta únicamente de puntos interiores, por ejemplo $|z| < 1$, es un conjunto abierto.
- **Conjunto conexo:** Un conjunto abierto S es conexo si cada par de puntos del conjunto puede unirse mediante una trayectoria que conste de segmentos de recta (una trayectoria poligonal) de modo que todos sus puntos pertenezcan a S.
- **Regiones abiertas o dominios:** A un conjunto conexo abierto se le llama región abierta o dominio.
- **Cerradura de un conjunto:** Si a un conjunto S se le agregan todos los puntos límites de S, el nuevo conjunto es la cerradura de S y es un conjunto cerrado.
- **Regiones cerradas**: La cerradura de una región abierta o dominio se llama región cerrada.
- **Regiones**: Si a una región o dominio se añaden algunos, todos o ninguno de sus puntos límites se obtiene un conjunto que se llama región. Si se agregan todos los puntos límites, la región es abierta. Cuando hablemos de región, sin ningun calificativo, esta será abierta.
- **Unión de conjuntos:** Al conjunto que consta de todos los puntos que pertenecen a S_1 y S_2 se le llama unión de S_1 y S_2 y se denomina $S_1 \cup S_2$.
- **Intersección de conjuntos:** Al conjunto que contiene los puntos en común de 2 o más conjuntos se le denomina intersección de estos conjuntos. Se expresa como, $S_1 \cap S_2 \cap ... \cap S_n$.

- **Complemento de un conjunto:** El conjunto que consta de todos los puntos que no pertenecen a un conjunto S, se le llama complemento de S y se designa como $\widetilde{S}$ o S^c.
- **Conjunto vacío:** Al conjunto que no contiene ningún punto se le llama conjunto vacío y se denomina como ϕ. Si dos conjuntos S_1 y S_2 no tienen ningún punto en común (en cuyo caso se dice que son conjuntos disjuntos o mutuamente excluyentes), esto se designa como $S_1 \cap S_2 = \phi$.
- **Subconjunto:** Es aquel conjunto que se construye al elegir todos, algunos o ningún punto de un conjunto S. Si dejamos de lado el conjunto que contiene todos los puntos de S, este se llama conjunto adecuado de S.
- **Numerabilidad o contabilidad de un conjunto:** Supongamos que un conjunto sea finito o que sus elementos se colocan en correspondencia uno a uno cono los números naturales, entonces se dice que este conjunto es contable o numerable.
- **Teorema de Bolsano-Weierstrass:** Todo conjunto infinito acotado tiene al menos un punto límite.
- **Teorema de Heine-Borel:** Sea un conjunto S compacto, cada punto del cual está contenido en uno o más de los conjuntos abiertos $A_1, A_2, ...$ (los que se dice son una cubierta de S). Entonces existe un número finito de conjuntos $A_1, A_2, ...$, que forman una cubierta de S.

Ejemplo:

Dado el siguiente conjunto de puntos $S : \left\{i, \frac{1}{2}i, \frac{1}{3}i, ...\right\}$ o brevemente $S : \left\{\frac{i}{n}\right\}$, responda a las siguientes preguntas respecto al conjunto

1. ¿Es acotado?

Si, el conjunto es acotado, debido a que existe un valor $M = 2$ tal que $z \in S$ se cumple que $|z| < M$.

2. ¿Cuáles son sus opuntos límites, si los hay?

si tomamos $z = 0$ como centro de nuestra vecindad agujereada, vemos que para cualquier radio δ, contiene puntos de S por lo que $z = 0$ es un punto límite de S, es el único.

3. ¿Es cerrado?

S no es cerrado debido a que $z = 0$, su punto límite, no pertenece a S.

4. ¿Cuáles son sus puntos interiores y cuáles son sus puntos frontera?

Puntos interiores: S no tiene puntos interiores.

Puntos frontera: para todo punto de S, incluido $z = 0$, existirá una vecindad de radio δ que consta de puntos de S y puntos que no pertenecen a S, por lo tanto todo punto de S más $z = 0$ es un punto frontera.

5. ¿S es abierto?

S no es abierto, no consta de puntos interiores.

6. ¿Es conexo?

S no es conexo, cada punto de S es aislado, no se pueden trazar segmentos de recta que unan sus puntos.

7. ¿Es S una región abierta o dominio?
S no es un conjunto conexo abierto, por lo tanto S no es una región abierta.

8. ¿Cuál es la cerradura de S?
La cerradura de S es $S \cup 0 = \left\{0, i, \frac{i}{2}, \frac{i}{3}, ...\right\}$

9. ¿Cuál es el complemento de S?
El complemento de S es $\widetilde{S} = \mathbb{C} - S$

10. ¿S es numerable?
S es numerable, debido a que sus elementos se pueden colocar en correspondencia con los números naturales.

11. ¿Es compacta la cerradura de S?
La cerradura de S es acotada y además su punto límite pertenece a ella, entonces también es cerrado por lo tanto es compacta.

3.5.2. Límite de una función de variable compleja

Nos damos cuenta que la topología del plano complejo es como la de $\mathbb{R}^2$ con la norma euclideana, es por esto que; la definición de límite, para una función de variable compleja es muy parecida a la de funciones reales.

Sea: $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, está definida una vecindad perforada de $a \in \mathbb{C}$ y $l \in \mathbb{C}$.

Se dice que un número l es el límite de $f(z)$ cuando z tiende a a y se escribe $\lim_{z\to a} f(z) = l$. Si para $\varepsilon > 0$ (tan pequeño como se desee), se halla un número $\delta > 0$, tal que $|f(z) - l| < \varepsilon$, siempre que $0 < |z - a| < \delta$.

3.5.2.1. Propiedades del límite de funciones de variable compleja

1. Si existe $\lim\limits_{z\to a} f(z)$, entonces dicho límite es único.
2. $\lim\limits_{z\to a} f(z) = l \Longleftrightarrow \lim\limits_{(x,y)\to a} u(x, y) = Re(l)$ y $\lim\limits_{(x,y)\to a} v(x, y) = Im(l)$
3. $\exists \lim\limits_{z\to a} f(z), \lim\limits_{z\to a} g(z) \Longrightarrow \lim\limits_{z\to a} [f(z) + g(z)] = \lim\limits_{z\to a} f(z) + \lim\limits_{z\to a} g(z)$
4. $\exists \lim\limits_{z\to a} f(z), \lim\limits_{z\to a} g(z) \Longrightarrow \lim\limits_{z\to a} [f(z) \cdot g(z)] = \lim\limits_{z\to a} f(z) \cdot \lim\limits_{z\to a} g(z)$
5. si, $\lim\limits_{z\to a} g(z) \neq 0 \Longrightarrow \lim\limits_{z\to a} \dfrac{1}{g(z)} = \dfrac{1}{\lim\limits_{z\to a} g(z)}$

La demostración de las propiedades son consecuencia inmediata de las propiedades de límites de funciones reales, en las últimas dos propiedades basta con reemplazar el valor absoluto por el módulo.

La segunda propiedad, nos permite tratar a las funciones como si fueran funciones reales en el plano. Por ejemplo, si queremos calcular:

$$\lim_{z\to 1} \frac{z}{z+1} = \frac{1}{2}$$

Solo si no existe una indeterminación. En el caso siguiente, existe una indeterminación, pero podemos hacer uso de las propiedades de límites aprendidas en los cursos de cálculo de variable real:

$$\lim_{z\to 0} \frac{\overline{z}+iz^2}{\sqrt{|z|}} = \frac{0}{0}$$

Es una indeterminación. Para resolverla vamos a obtener primero las coordenadas de la función, haciendo $z = x + iy$

$$\lim_{z\to 0} \frac{x-iy+i(x+iy)^2}{\sqrt{\sqrt{x^2+y^2}}} = \frac{x-2xy}{\sqrt[4]{x^2+y^2}} + \frac{i(x^2-y^2-y)}{\sqrt[4]{x^2+y^2}}$$

Escribimos la parte real de nuestra nueva función en coordenadas polares, haciendo $x = r\cos\theta$ e $y = r\sin\theta$, obtenemos:

$$\lim_{r\to 0} \frac{r\cos\theta - 2r^2\cos\theta\sin\theta}{\sqrt{r}} = \lim_{r\to 0} \sqrt{r}(\cos\theta - 2r\cos\theta\sin\theta) = 0$$

Así,

$$\lim_{x+iy\to 0} \frac{x-2xy}{\sqrt[4]{x^2+y^2}} = 0$$

Haciendo un procedimiento análogo, obtenemos que el límite de la parte imaginaria de nuestra función es:

$$\lim_{x+iy\to 0} \frac{x^2-y^2-y}{\sqrt[4]{x^2+y^2}} = 0$$

Por lo tanto:

$$\lim_{z\to 0} \frac{\overline{z}+iz^2}{\sqrt{|z|}} = 0$$

Ejercicios:

- Calcular los siguientes límites

1) $\lim\limits_{z\to 1+i} z^2-5z+10$

Solución:

Como nos piden calcular el límite de un polinomio, este no presenta ninguna indeterminación, por lo tanto, basta con obtener $f(1+i)$, entonces:

$$\lim_{z\to 1+i} z^2-5z+10 \quad = \quad (1+i)^2+-5(1+i)+10$$

por lo tanto;

$$\lim_{z\to 1+i} z^2-5z+10 \quad = \quad 5-3i$$

2) $\lim\limits_{z\to -2i} \dfrac{(2z+3)(z-1)}{z^2-2z+4}$

Observamos que z^2-2z+4 evaluado en $-2i$, no se anula. Por lo tanto ocuparemos las propiedades 4 y 5 de límites para calcular. Entonces;

$$\lim_{z\to -2i} \frac{(2z+3)(z-1)}{z^2-2z+4} \quad = \quad \frac{\lim\limits_{z\to -2i}(2z+3)\lim\limits_{z\to -2i}(z-1)}{\lim\limits_{z\to -2i} z^2-2z+4} = \frac{-11-2i}{-4i} = \frac{1}{2}+\frac{11}{4}i$$

3.6. Continuidad de funciones de variable compleja

Como en el caso real una función de variable compleja $f : \mathrm{A} \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, es continua en $z_0 \in A$ si el $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ existe y además, este es igual a $f(z_0)$.

Las funciones de variable compleja antes estudiadas (polinomios, funciones racionales) son contínuas, salvo donde no están definidas. Así, podemos definir las siguientes propiedades:

Propiedades:

1. Si f,g son contínuas en $z_o \in A$, entonces $f+g$ y $f\cdot g$ son contínuas en $z_o \in A$.

2. Si f,g son contínuas en $z_o \in A$ y además $g(a) \neq 0$; entonces, $\dfrac{f}{g}$ es contínua en $z_o \in A$

3. $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ contínua en $z_o \in A$ y $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ contínua en $f(z_0)$; entonces, $h \circ f$es contínua en z_0.

4. El conjugado $f(z) = \overline{z}$ y el módulo $f(z) = |z|$, son funciones contínuas.

Demostración:

En la propiedad número 1 tenemos que f, g son contínuas en $z_0 \in A$; por lo tanto se cumple que:

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0) \text{ y } \lim_{z \to z_0} g(z) = g(z_0)$$

Además de los teoremas de límites, tenemos;

$$\lim_{z \to a} [f(z) + g(z)] = \lim_{z \to a} f(z) + \lim_{z \to a} g(z)$$

Luego

$$\lim_{z \to a} [f(z) + g(z)] = f(z_0) + g(z_0)$$

por lo que se cumple la primera propiedad de continuidad, para la suma, de f y g en $z_0 \in A$. El resto de las propiedades se demuestra similarmente.

3.6.1. Ejemplos:

1) Estudiar la continuidad de $f(z) = z^2 - 5z + 10$, en $z = 1 + i$

Solución:

Para que $f(z)$ sea contínua en $z = 1 + i$, $f(1 + i) = \lim_{z \to 1+i} f(z)$. Entonces, caculamos:

$$f(1 + i) = (1 + i)^2 - 5(1 + i) + 10 = 5 - 3i$$

Luego;

$$\lim_{z \to 1+i} z^2 - 5z + 10 = 5 - 3i$$

Se comprueba entonces que;

$$f(1 + i) = \lim_{z \to 1+i} f(z) = 5 - 3i$$

por lo tanto, $f(z) = z^2 - 5z + 10$ es contínua en $z = 1 + i$.

2) Estudiar la continuidad de $f(z) = \dfrac{(2z + 3)(z - 1)}{z^2 - 2z + 4}$, en $z = -2i$.

Solución:

Al igual que en el ejercicio anterior, debemos comprobar que $f(-2i) = \lim_{z \to -2i} f(z)$. Entonces calculamos:

$$f(-2i) = \frac{(2(-2i) + 3)(-2i - 1)}{(2i)^2 - 2(2i) + 4} = \frac{1}{2} + \frac{11}{4}i$$

Luego,

$$\lim_{z \to -2i} \frac{(2z + 3)(z - 1)}{z^2 - 2z + 4} = \frac{\lim_{z \to -2i}(2z + 3) \cdot \lim_{z \to -2i}(z - 1)}{\lim_{z \to -2i} z^2 - 2z + 4} = \frac{1}{2} + \frac{11}{4}i$$

Se comprueba entonces que;

$$f(-2i) = \lim_{z\to -2i} f(z) = \frac{1}{2} + \frac{11}{4}i$$

por lo tanto $f(z) = \dfrac{(2z+3)(z-1)}{z^2-2z+4}$ es contínua en $z = -2i$.

3) La función $f(z) = \dfrac{3z^4-2z^3+8z^2-2z+5}{z-i}$, ¿es contínua en $z = i$?

Si observamos la función vemos que su denominador se anula para $z = i$, por lo tanto es discontínua en este punto. Pero al estudiar su límite, observamos que;

$$\lim_{z\to i} \frac{3z^4-2z^3+8z^2-2z+5}{z-i} = \frac{0}{0}$$

existe una indeterminación, que podemos evitar haciendo uso de la factorización.

Entonces al observar la indeterminacón obtenemos que, $(z-i)$ es factor de $3z^4-2z^3+8z^2-2z+5$, también lo será su conjugado $(z+i)$. Así, $(z+i)(z-i) = z^2+1$ es factor del polínomio.

Haciendo uso de la división sintética, tenemos $3z^4-2z^3+8z^2-2z+5 = (z^2+1)(3z^2-2z+5)$.

Así evitamos la indeterminación, simplificando los factores que tienen en común el numerador y el denominador de la función.

$$\lim_{z\to i} \frac{3z^4-2z^3+8z^2-2z+5}{z-i} = \lim_{z\to i} \frac{(z+i)(z-i)(3z^2-2z+5)}{z-i}$$

$$= \lim_{z\to i}(z+i)(3z^2-2z+5)$$

$$= \lim_{z\to i}(z+i) \cdot \lim_{z\to i}(3z^2-2z+5) = [2i] \cdot [2-2i] = 4+4i$$

Como $f(i)$ no está definida, pero existe el límite de la función en $z \to i$, tenemos que la función presenta una discontinuidad removible en $z = i$.

3.7. Diferenciabilidad compleja

3.7.1. Derivadas

Sea una función $f : A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, se dice derivable en $z \in A$, si existe:

$$\lim_{\Delta z\to 0} \frac{f(a+\Delta z)-f(a)}{\Delta z} \quad = \quad f\,'(a) = \frac{df}{dz}(a)$$

si $A \in \mathbb{C}$ es un cojunto abierto y además existe $\dfrac{df}{dz}(a)$, la función es deribable en todo punto de $A \in \mathbb{C}$, se dice que $f(z)$ es holomorfa.

3.7.1.1. Propiedades:

Dadas $f(z)$ y $g(z)$, se cumplen las siguiente propiedades:

1. Si $f(z)$ es derivable en z_0, entonces es contínua en z_0.

Demostración:

Para demostrar esta propiedad, basta ver que $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)-f(z_0)=0$

Para ello tomamos,

$$\begin{aligned}\lim_{z\to z_0} f(z)-f(z_0) &= \lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}(z-z_0)\\ &= \lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\cdot\lim_{z\to z_0}(z-z_0)\\ &= f\,'(z)\cdot 0 = 0\end{aligned}$$

Queda entonces demostrado.

Es importante señalar, que el recíproco de esta propiedad no es verdadera.

2. $(f(z)+g(z))' = f\,'(z)+g\,'(z)$

Demostración:

Tenemos que;

$$\begin{aligned}(f(z)+g(z))' &= \lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)+g(z+\Delta z)-[f(z)+g(z)]}{\Delta z}\\ &= \lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)+g(z+\Delta z)-f(z)-g(z)}{\Delta z}\end{aligned}$$

$$= \lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)+g(z+\Delta z)-g(z)}{\Delta z}$$

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}+\lim_{\Delta z\to 0}\frac{g(z+\Delta z)-g(z)}{\Delta z} = f\,'(z)+g\,'(z)$$

Queda entonces demostrado.

3. $(f(z)\cdot g(z))' = f\,'(z)\cdot g(z)+f(z)\cdot g\,'(z)$

Demostración

Tenemos que;

$$(f(z)\cdot g(z))' = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)\cdot g(z+\Delta z)-f(z)\cdot g(z)}{\Delta z}$$

$$=$$

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)\cdot g(z+\Delta z)-f(z)\cdot g(z)+f(z)\cdot g(z+\Delta z)-f(z)\cdot g(z+\Delta z)}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{g(z+\Delta z)\cdot[f(z+\Delta z)-f(z)]}{\Delta z} + \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z)\cdot[g(z+\Delta z)-g(z)]}{\Delta z}$$

$$= f\,'(z)\cdot g(z) + f(z)\cdot g\,'(z)$$

Queda entonces demostrado.

4. Si $g(z) \neq 0$, entonces $\left(\dfrac{f(z)}{g(z)}\right)' = \dfrac{f\,'(z)g(z)-f(z)g\,'(z)}{g^2(z)}$

Demostración

$$\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)' = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\dfrac{f(z+\Delta z)}{g(z+\Delta z)} - \dfrac{f(z)}{g(z)}}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\dfrac{g(z)f(z+\Delta z)-f(z)g(z+\Delta z)}{g(z+\Delta z)g(z)}}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{1}{g(z+\Delta z)g(z)} \cdot \lim_{h \to 0} \frac{g(z)f(z+\Delta z)-f(z)g(z+\Delta z)}{\Delta z} =$$

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{1}{g(z+\Delta z)g(z)} \cdot \lim_{\Delta z \to 0} \frac{g(z)f(z+\Delta z)-f(z)g(z+\Delta z)-g(z)f(z)+g(z)f(z)}{\Delta z}$$

$$= \frac{1}{g^2(z)} \cdot \lim_{\Delta z \to 0} \frac{g(z)\left[f(z+\Delta z)-f(z)\right]-f(z)\left[g(z+\Delta z)-g(z)\right]}{\Delta z}$$

$$= \frac{1}{g^2(z)}\left[g(z)\cdot \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} - f(z)\cdot \lim_{\Delta z \to 0} \frac{g(z+\Delta z)-g(z)}{\Delta z}\right]$$

$$= \frac{f\,'(z)g(z)-f(z)g\,'(z)}{g^2(z)}$$

Queda entonces demostrado.

3.7.1.2. Derivada de funciones elementales

En la siguiente tabla se muestran las derivadas de las funciones elementales, antes estudiadas en este capítulo. Observe que estas fórmulas son idénticas a las de cálculo elemental.

$\frac{d}{dz}c = 0$	$\frac{d}{dz}\ln z = \frac{1}{z}$	$\frac{d}{dz}\tanh z = \text{sech}^2 z$
$\frac{d}{dz}z^n = nz^{n-1}$	$\frac{d}{dz}\log_a z = \frac{\log_a e}{z}$	$\frac{d}{dz}\coth z = -\text{csch}^2 z$
$\frac{d}{dz}e^z = e^z$	$\frac{d}{dz}\sin^{-1} z = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$	$\frac{d}{dz}\text{sech} z = -\text{sech} z \tanh z$
$\frac{d}{dz}a^z = a^z \ln a$	$\frac{d}{dz}\cos^{-1} z = \frac{-1}{\sqrt{1-z^2}}$	$\frac{d}{dz}\text{csch} z = -\text{csch} z \coth z$
$\frac{d}{dz}\sin z = \cos z$	$\frac{d}{dz}\tan^{-1} z = \frac{1}{1+z^2}$	$\frac{d}{dz}\sinh^{-1} z = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}$
$\frac{d}{dz}\cos z = -\sin z$	$\frac{d}{dz}\cot^{-1} z = \frac{-1}{1+z^2}$	$\frac{d}{dz}\cosh^{-1} z = \frac{1}{\sqrt{z^2-1}}$
$\frac{d}{dz}\tan z = \sec^2 z$	$\frac{d}{dz}\sec^{-1} z = \frac{1}{z\sqrt{z^2-1}}$	$\frac{d}{dz}\tanh^{-1} z = \frac{1}{1-z^2}$
$\frac{d}{dz}\cot z = -\csc^2 z$	$\frac{d}{dz}\csc^{-1} z = \frac{-1}{z\sqrt{z^2-1}}$	$\frac{d}{dz}\coth^{-1} z = \frac{1}{1-z^2}$
$\frac{d}{dz}\sec z = \sec z \tan z$	$\frac{d}{dz}\sinh z = \cosh z$	$\frac{d}{dz}\text{sech}^{-1} z = \frac{-1}{z\sqrt{1-z^2}}$
$\frac{d}{dz}\csc z = -\csc z \cot z$	$\frac{d}{dz}\cosh z = \sinh z$	$\frac{d}{dz}\text{csch}^{-1} z = \frac{-1}{z\sqrt{z^2+1}}$

3.7.1.3. Regla de la cadena

La regla de la cadena del cálculo real sigue siendo valida para las funciones de variable compleja, entonces se cumple que;

$$\frac{d}{dz}(g \circ f) = g\,\acute{}(f(z)) \cdot f\,\acute{}(z)$$

3.7.1.4. Ejemplos

1) Haciendo uso del límite, calcular la derivada de: $f(z) = z^2$
Solución:
Sea:

$$f\,\acute{}(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z+\Delta z) - z^2}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{z^2 + 2z\Delta z + (\Delta z)^2 - z^2}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{2z\Delta z + (\Delta z)^2}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} 2z + \Delta z = 2z$$

Por lo tanto; $f\,\acute{}(z) = 2z$

2) Estudiar la derivabilidad de $f(z) = \overline{z}$
Solución:
Sea;

$$f\,\acute{}(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\overline{(z+\Delta z)} - \overline{z}}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\overline{z} + \overline{\Delta z} - \overline{z}}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} = \frac{0}{0}$$

vemos que se presenta una indeterminación, pero sabemos que $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$, por lo tanto pensaremos en dos caminos de acercarnos a z:

1. $\Delta x = 0$ y $\Delta y \to 0$
2. $\Delta x \to 0$ y $\Delta y = 0$

Tomemos el camino 1, entonces:

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\overline{\Delta y}}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{-\Delta y}{\Delta y} = -1$$

Ahora veamos el camino 2:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\overline{\Delta x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$$

luego

$$\lim_{\Delta y \to 0} \neq \lim_{\Delta x \to 0}$$

como los límites no coínciden, $f(z) = \overline{z}$ no es derivable.

3) Calcular la derivada de $f(z) = \dfrac{x}{x^2+y^2} - i\dfrac{y}{x^2+y^2}$

Solución:

$$f\,'(z) = \frac{d}{dx}u(x,y) + \frac{d}{dy}v(x,y)$$

Siguiendo la regla de derivadas para el cociente de funciones, tenemos que:

$$f\,'(z) = \frac{x^2+y^2-x(2x)}{(x^2+y^2)^2} - i\frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

por lo tanto;

$$f\,'(z) = \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2} - i\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

3.7.2. Ecuaciones de Cauchy Riemann

Sea la función $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ derivable en el punto $z_0 = x_0 + iy_0$. Entonces existen las primeras derivadas parciales de las funciones $u(x,y)$ y $v(x,y)$ en el punto (x_0,y_0) y estas cumplen las ecuaciones de Cauchy Riemann.

$$\frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial x} = \frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial y} \text{ y } \frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial x} = -\frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial y}$$

Supongamos que una función f está definida en una vecindad del punto z_0 por medio de la función $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$

y que $f\,'(z_0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h}$, entonces;

$$f\,\acute{}(z_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}$$

$$= \lim_{(\triangle x,\triangle y)\to(0,0)} \frac{f(x_0+\triangle x+i\,(y_0+\triangle y))-f\,(x_0+iy_0)}{\triangle x+i\triangle y}$$

$$= \lim_{(\triangle x,\triangle y)\to(0,0)} \frac{u\,(x_0+\triangle x,y_0+\triangle y)+iv\,(x_0+\triangle x,y_0+\triangle y)-(u\,(x_0,y_0)+iv\,(x_0,y_0))}{\triangle x+i\triangle y}$$

Primero calcularemos:

$$f\,\acute{}(z_0) = \lim_{\triangle x\to 0} \frac{u\,(x_0+\triangle x,y_0)+iv\,(x_0+\triangle x,y_0)-(u\,(x_0,y_0)+iv\,(x_0,y_0))}{\triangle x}$$

$$= \lim_{\triangle x\to 0} \frac{u\,(x_0+\triangle x,y_0)-u\,(x_0,y_0)+i\,(v\,(x_0+\triangle x,y_0)-v\,(x_0,y_0))}{\triangle x}$$

$$= \frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial x}+i\frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial x}$$

De forma análoga, obtenemos que:

$$f\,\acute{}(z_0) = \frac{u\,(x_0,y_0+\triangle y)+iv\,(x_0,y_0+\triangle y)-(u\,(x_0,y_0)+iv\,(x_0,y_0))}{i\triangle y}$$

$$= -i\frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial y}+\frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial y}$$

luego, $f\,\acute{}(z_0) = \frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial x}+i\frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial x} = -i\frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial y}+\frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial y}$

Igualamos partes reales e imaginarias y obtenemos:

$$\frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial x} = \frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial y} \text{ y } \frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial x} = -\frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial y}$$

conocidas como ecuaciones de Cauchy Riemann.

Proposición 1. El cumplimiento de las ecuaciones de Cauchy Riemann son un requisito para que $f\,\acute{}(z_0)$ exista. Sin embargo no es suficiente para que exista $f\,\acute{}(z_0)$. Como un resultado adicional se muestra que si las derivadas parciales de $u(x,y)$ y $v(x,y)$ son continuas en (x_0,y_0), entonces las ecuaciones de Cauchy Riemann son condición necesaria y suficiente para la existencias de $f\,\acute{}(z_0)$.

3.7.2.1. Ejemplos:

1) Verificar si la función; $f(z) = (x+y+4xy)+i\left(-2x^2+y+2y^2\right)$,satisface las ecuaciones de Cauchy Riemann.

Solución:

Tenemos que, $u(x,y) = x+y+4xy$ y $v(x,y) = -2x^2+y+2y^2$, entonces:

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = 1+4y \quad \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} = 1+4y$$

$$\frac{\partial v(x,y)}{\partial x} = -4x \; \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = 1 + 4y$$

Formando las ecuaciones de Cauchy Riemann:

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} = 1 + 4y - (1 + 4y) = 0$$

$$\frac{\partial v(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = -4x + 1 + 4x = 1$$

La primera ecuación se satisface para cualquier valor, no así la segunda, por tanto la función no es derivable en ningún punto del plano $\mathbb{C}$.
2) Determinar en que punto la siguiente función; satisface a las ecuaciones de Cauchy Riemann.

$$f(z) = \left(3y - 2xy + 2y^2\right) + \left(-3x + x^2 - 4xy - y^2\right)$$

Solución:

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} = -2y - (4x + 2y) = 4x$$

$$\frac{\partial v(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = 3 - 2x + 4y + (-3 + 2y - 4y) = 0$$

Podemos ver que ambas ecuaciones se cumplen, solo requiere que $4x = 0$, por tanto $x = 0$, entonces la función solo es derivable en el eje imaginario.
3) Determinar en que puntos, la función; $f(z) = \left(x^3 + y^2\right) + \left(1 + 2x^2 + 3y - 2x^3\right)$, es diferenciable.

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} = 3x^2 - (3) = 3x^2 - 3$$

$$\frac{\partial v(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = 2y + \left(4x - 6x^2\right) = 2y + 4x - 6x^2$$

de donde obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$(1) 3x^2 - 3 = 0$$

$$(2) 2y + 4x - 6x^2 = 0$$

por lo tanto, la función es diferenciable en $z_1 = -1 + 5i$ y $z_2 = 1 + i$.

Capítulo 4

Integrales de Variable Compleja

4.1. Integrales Indefinidas

Tenemos que $f(z)$ y $F(z)$ son funciones holomorfas en una región R, además $F´(z) = f(z)$. Entonces diremos que $F(z)$ es una integral indefinida o una antiderivada de $f(z)$, que se escribe como:

$$F(z) = \int f(z)dz$$

Al igual que en el caso real, dos integrales aparentemente iguales, difieren en una constante arbitraria c.

Ejemplo:

Como $\dfrac{d}{dz}\left(z^2 + 2z - \sin z\right) = 2z + 2 - \cos z$, lo podemos escribir:

$$\int (2z + 2 - \cos z)\, dz = z^2 + 2z - \sin z + c$$

4.2. Integrales de Línea

Tenemos que una funcion $f(z)$ continua en todos los puntos de una curva C, la cual supondremos finita.

Subdividamos C en n partes por medio de los puntos $z, z_2, ..., z_{n-1}$, elegimos arbitrariamente, y llamamos $a = z_0$, $b = z_n$ sobre cada arco que une z_{k-1}a z_k $(k = 1, 2, ..., n)$ elijamos un punto ξ_k.

Formemos la suma:

$$S_n = f(\xi_1)(Z_1 - a) + f(\xi_2)(Z_2 - Z) + ... + f(\xi_n)(b - Z_{n-1})$$

Si tomamos

$$Z_k - Z_{k-1} = \Delta Z_k, \text{ nos queda:}$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(Z_k - Z_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \cdot \Delta Z_k$$

Si las subdivisiones de C aumentan de tal forma que Δx tiende a cero. Entonces, la suma S_n se aproxima a un límite que denotamos como:

$$\int_a^b f(z)dz = \int_C f(z)dz$$

llamada integral compleja de línea a lo largo de la curva C.

4.2.1. Conexión entre integral real y compleja de línea

Si $f(z) = u(x,y) + iv(x,y) = u + iv$ la integral compleja de línea:

$$\int_C (u+iv)(dx+idy) = \int_C (udx - vdy) + i\int_C (vdx + udy)$$

4.2.2. Propiedades de las integrales

Si $f(z)$ y $g(z)$ son integrales a lo largo de C, además A es una constante, entonces se cumplen las siguientes propiedades:

1. $\int_C \{f(z) + g(z)\}\, dz = \int_C f(z)dz + \int_C g(z)dz$
2. $\int_C Af(z)dz = A\int f(z)dz$
3. $\int_a^b f(z)dz = \int_a^b f(z)dz$ donde a, b están sobre C
4. $\int_a^b f(z)dz = \int_a^m f(z)dz + \int_m^b f(z)dz$, donde a, b, m están sobre C

4.2.2.1. Tabla de integrales complejas de funciones especiales

$$\int z^n\,dz = \frac{z^{n+1}}{n+1}$$

$$\int \frac{dz}{z} = \ln z$$

$$\int e^z\,dz = e^z$$

$$\int a^z\,dz = \frac{a^z}{\ln a}$$

$$\int \sin z dz = -\cos z$$

$$\int \cos z dz = \sin z$$

$$\int \tan z dz = \ln \sec z = -\ln \cos z$$

$$\int \cot z dz = \ln \sin z$$

$$\int \sec z dz = \ln(\sec z + \tan z)$$

$$\int \csc z dz = \ln(\csc z - \cot z)$$

$$\int \sec^2 z dz = \tan z$$

$$\int \csc^2 z dz = -\cot z$$

$$\int \sqrt{z^2 \pm a^2}\,dz = \frac{z}{2}\sqrt{z^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\int \frac{dz}{\sqrt{z^2 \pm a^2}}$$

Figura 4.2.1: Tabla integrales complejas 1

$$\int e^{az}\sin bz\,dz = \frac{e^{az}(a\sin bz - b\cos bz)}{a^2+b^2}$$

$$\int e^{az}\cos bz\,dz = \frac{e^{az}(a\cos bz + b\sin bz)}{a^2+b^2}$$

$$\int \sqrt{a^2-z^2}\,dz = \frac{z}{2}\sqrt{a^2-z^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{z}{a}$$

$$\int \frac{dz}{z\sqrt{z^2-a^2}} = \frac{1}{a}\cos^{-1}\frac{a}{z}$$

$$\int \sec z\tan z\,dz = \sec z$$

$$\int \csc z\cot z\,dz = -\csc z$$

$$\int \sinh z\,dz = \cosh z$$

$$\int \cosh z\,dz = \sinh z$$

$$\int \tanh z\,dz = \ln\cosh z$$

$$\int \coth z\,dz = \ln\sinh z$$

$$\int \frac{dz}{\sqrt{z^2\pm a^2}} = \ln\left(z+\sqrt{z^2\pm a^2}\right)$$

$$\int \frac{dz}{z^2+a^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{z}{a}$$

$$\int \frac{dz}{z^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left(\frac{z-a}{z+a}\right)$$

$$\int \frac{dz}{\sqrt{a^2-z^2}} = \sin^{-1}\frac{z}{a}$$

$$\int \frac{dz}{z\sqrt{a^2\pm z^2}} = \frac{1}{a}\ln\left(\frac{z}{a+\sqrt{a^2\pm z^2}}\right)$$

Figura 4.2.2: Tabla integrales complejas 2

4.2.3. Cambio de variable - integrales curvilíneas

Sea $z = g(\zeta)$ una función contínua de variable compleja $\zeta = u + iv$, supongamos que la curva C en el plano z le corresponde la curva $C´$en el plano ζ y que la derivada $g´(\zeta)$ es contínua sobre $C´$, entonces:

$$\int_c f(z)dz = \int_c f\left(g\left(\zeta\right)\right) g´\left(\zeta\right) d\zeta$$

Esto se cumple si g es holomorfa en una región que contiene a la curva $C´$

4.2.3.1. Ejemplos:

1. Calcular la integral; $\int\limits_\gamma \overline{z}dz$, con $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \mid f(z) = \overline{z}$ y $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C} \mid \gamma(t) = e^{it}$

Solución:

Como $\gamma(t) = e^{it}$, entonces $\gamma(t) = \cos t + i\,\text{sin}t$, es una circunferencia de radio 1 y centro $(0, 0)$

Luego la integral estará definida por:

$$\int\limits_\gamma \overline{z}dz = \int_\gamma f\left\{\gamma\left(t\right)\right\} \gamma´\left(t\right) dt$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \left[\left(\cos t - i \sin t\right)\left(-\sin t + i \cos t\right)\right] dt$$

$$= i \int\limits_0^{2\pi} \left(\sin^2 t + \cos^2 t\right) dt = i\left[t\right]_0^{2\pi} = 2\pi i$$

2. Calcular la integral $\int_\gamma Re(z)dz$, con $\gamma : [0, \pi] \to \mathbb{C} \mid \gamma(t) = (1 + \cos t) + 2i \sin t$

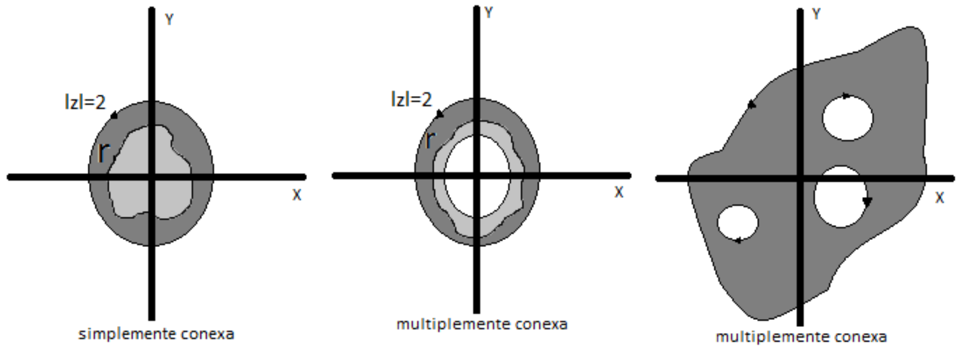
Solución:

Como $\gamma(t) = (1 + \cos t) + 2i \sin t$, entonces:

$$\int_\gamma Re(z)dz = \int\limits_0^{\pi} \left(1 + \cos t\right)\left(-\sin t + 2i \cos t\right) dt$$

$$= \int\limits_0^{\pi} \left(-\sin t - \sin t \cos t\right) dt + 2i \int\limits_0^{\pi} \left(\cos t + \cos^2 t\right) dt$$

$$= \left[\cos t + \frac{\cos^2 t}{2}\right]_0^{\pi} + 2i\left[\sin t + \frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4}\right]_0^{\pi} = -2 + \pi i$$



Cuadro 4.1: regiones simple y multiplemente conexas

3. Calcular la integral $\int_\gamma (Re(z) + Im(z))dz$, con γ el trozo de la parábola $y = -x^2 + 1$, que une los puntos -1 y $2 - 3i$.

Solución:

De la parábola $y = -x^2 + 1$ podemos desprender que , además $-1 \leq t \leq 2$. Por lo tanto nuestra integral quedará definida como:

$$\int_\gamma (Re(z) + Im(z))dz = \int_{-1}^{2} \left(t + 1 - t^2\right)(-2ti + 1)\, dt$$

$$= \int_{-1}^{2} \left(t + 1 - t^2\right) dt - 2i \int_{-1}^{2} \left(t^2 + t + t^3\right) dt$$

$$= \left[\frac{t^2}{2} + t - \frac{t^3}{3}\right]_{-1}^{2} - 2i \left[\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4}\right]_{-1}^{2} = \frac{3}{2} - \frac{59}{6} i$$

4.2.4. Regiones simple y multiplemente conexas

Una región $\mathscr{R}$ es simplemente conexa, si cualquier curva simple cerrada de $\mathfrak{R}$ se puede contraer tanto como se desee sin salirnos de la región. En caso de que al contraer la curva exista algún punto de ella fuera de $\mathfrak{R}$, se dice que la región es multiplemente conexa.

En forma coloquial una región multiplemente conexa es aquella curva cerrada que presenta agujeros en su interior, en caso contrario se habla de una curva simplemente conexa.

4.2.4.1. Ejemplo:

Suponga la región $|z| < 2$. Si $\mathit{\Gamma}$ es cualquier curva simple cerrada en $\mathfrak{R} = |z| < 2$, vemos que esta se puede contraer sin salirse de $\mathfrak{R}$, por lo tanto es simplemente conexa.

En cambio la región $1 < |z| < 2$, es multiplemente conexa. Si observamos Γ contraerse, en algun momento saldrá de $\mathfrak{R}$.

4.3. Teorema de la Curva de Jordan

Una curva de Jordan, es aquella curva cerrada continua, que no se corta a si misma (puede o no ser finita)

Teorema: una curva de Jordan divide al plano en dos regiones, que poseen como frontera común a dicha curva. La región acotada, o sea la de dentro de la curva, se llama el interior de la curva $|z| < M, M \in \mathbb{R}^+$, la otra región se denomina exterior de la curva.

Toda curva de Jordan delimita una región simplemente conexa.

4.4. Integral de Regiones Cerradas

Para el cálculo de la integral de la frontera de una región C, que se recorre en sentido contrario a las manecillas del reloj, se utiliza la simbología:

$$\oint\limits_{C} f(z)dz$$

La integral al rededor de C, se llama, con frecuencia, integral de contorno.

4.5. Teorema de Green en el Plano

Si tenemos una región $\mathfrak{R}$ cerrada, simplemente conexa, recorrida en sentido antihorario, entonces se cumple que:

$$\oint P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_{\mathfrak{R}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

Con $P(x,y)$ y $Q(x,y)$ continuas y con derivadas parciales continuas.

nota: Si la trayectoria de la región $\mathfrak{R}$ es a favor de las manecillas del reloj, basta con calcular el inverso aditivo de la integral.

4.5.1. Forma compleja del teorema de Green

Sea $F(z,\overline{z})$ una función contínua, de derivadas parciales contínuas, sobre una región $\mathfrak{R}$ y su frontera C, donde $z = x + iy$, $\overline{z} = x - iy$ son las conjugadas complejas.

Se puede escribir el teorema de Green de la siguiente manera:

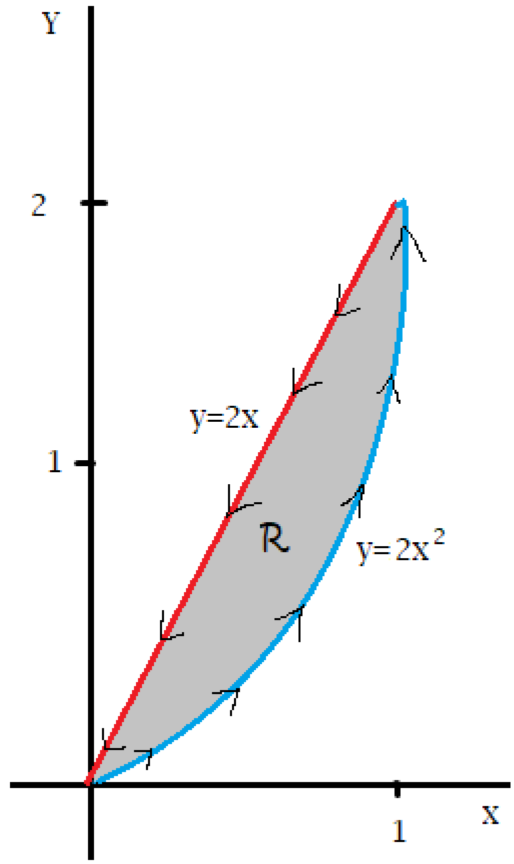


Figura 4.5.1: Región $\mathfrak{R}$

$$\oint F(z,\overline{z})dz = 2i\iint_{\mathfrak{R}} \frac{\partial F}{\partial x} dxdy$$

4.5.1.1. Ejemplos:

1) Haciendo uso del teorema de Green, calcular la integral; $\oint\limits_C \left(x^2+y^2\right)dx + 2xydy$, en la curva de la región $\mathfrak{R} : \left\{(x,y); 0 \le x \le 1, 2x^2 \le y \le 2x\right\}$

Solución:

Utilizando la fórmula de Green, nos queda que:

$$\oint\limits_C \left(x^2+y^2\right)dx + 2xydy = \int\limits_0^1 \int\limits_{2x^2}^{2x} \left[\frac{\partial 2xy}{\partial x} - \frac{\partial \left(x^2+y^2\right)}{\partial y}\right] dydx$$

$$\int_0^1 \int_{2x^2}^{2x} 4ydydx = \int_0^1 \left(8x^2 - 8x^4\right) dx = \frac{16}{15}$$

2) Demuestre la forma compleja del teorema de Green, o sea, demostrar que; $\oint F(z,\overline{z})dz = 2i \iint_{\Re} \dfrac{\partial F}{\partial x} dxdy$

Solución:

Sea $F(z,\overline{z}) = P(x,y) + iQ(x,y)$, luego por definición de integral compleja de línea, resulta:

$$\oint_C F(z,\overline{z})dz = \oint_C (P + iQ)(dx + idy)\}$$

$$= \oint_C Pdx - Qdy + i \oint_C Qdx + Pdy$$

Utilizando el teorema de Green, se cumple que:

$$= -\iint_{\Re} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy + i \iint_{\Re} \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y}\right) dxdy$$

$$= i \iint_{\Re} \left[\left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y}\right) + i\left(\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y}\right)\right] dxdy$$

Así entonces, se cumple que:

$$\oint F(z,\overline{z})dz = 2i \iint_{\Re} \tfrac{\partial F}{\partial x} dxdy$$

4.6. Teorema de Cauchy Goursat

Sea una región $\Re$ simple o multiplemente conexa y $f(z)$ holomorfa sobre esta y su frontera. Se cumple que:

$$\oint f(z)dz = 0$$

4.6.1. Ejemplos:

1) Haciendo uso del teorema de Cauchy, Calcular la integral $\displaystyle\oint_{|z|=3} \frac{e^{3z+1}}{z-5}dz$

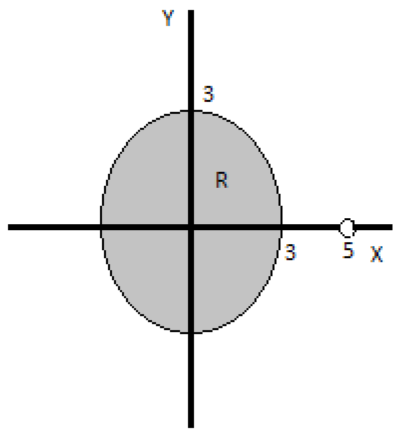


Figura 4.6.1: Región $|z| = 3$

Tenemos que $R : |z| \leq 3$ es la región que resulta ser un círculo con centro en el origen y radio 3. Y f presenta una singularidad sólo en $z = 5$. Luego, podemos ver que f es una función holoforma, para cualquier valor de z menos $z = 5$, pero $z = 5 \notin R$.

De modo que, en R, f es holomorfa.

Por lo tanto:

$$\oint_{z=3} \frac{e^{3z+1}}{z-5} dz = 0$$

2) Calcular; $\oint_{\gamma} \sin^2 \left(\frac{z^2+9}{z-3i} \right) dz$, donde γ es una elipse de centro 0 y semiejes 1 y 2.

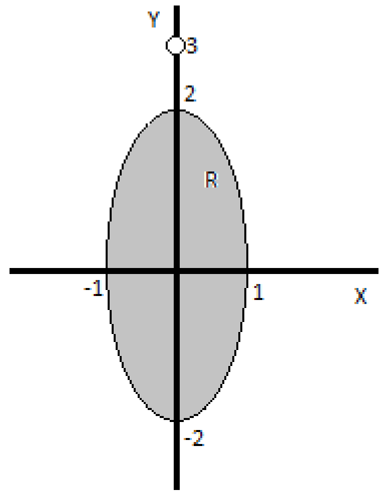


Figura 4.6.2: Elipse de ejes 1 y 2

podemos observar que $\sin^2\left(\dfrac{z^2+9}{z-3i}\right)$, es una funcion con una singularidad en $z = 3i$. Luego podemos ver que f es una función holomorfa, para cualquier valor de z, menos para $z = 3i$.

De modo que, en R, f es holomorfa.

Por tanto:

$$\oint_{\gamma} \sin^2\left(\frac{z^2+9}{z-3i}\right) dz = 0$$

3) Calcular $\displaystyle\oint_{|z-2i|=4} \frac{z^2-i}{z^2+9} dz$

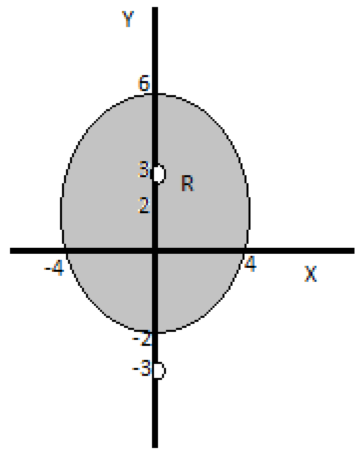


Figura 4.6.3: circunferencia centro (0,2)

Tenemos que R:$|z-2i| \leq 4$ es la región que resulta ser un círculo centrado en $z = 2i$ y de radio 4. Y f presenta dos singularidades, en $z = 3i$ y $z = -3i$, valores que se obtienen de igualar a cero el denominador de f. Luego, podemos ver que f es una función holomorfa para cualquier valor de z, menos para los valores de z en las singularidades de la función. Y que $z = 3i \in R$, mientras que $z = -3i \notin R$.

Como $z = -3i \notin R$, entonces f no resulta analítica en toda la región R. Luego, al haber una singularidad en la región de integración, no podemos aplicar el teorema de Cauchy.

Capítulo 5

Conclusiones

Si bien los números complejos son un cuerpo incluso más grande que los números reales, en esta tesis se indagaron solo tres de sus principales temas, con el fin de ayudar a futuros estudiantes de las carreras relacionadas con la matemática, o simplemente a cualquier persona que necesite apoyo en la comprensión, representación, comportamiento y ejercitación en las funciones de variable compleja.

Nos damos cuenta; que los números complejos de complejo solo tienen el nombre, ya que al analizarlos, podemos ver que no son más que una extensión de los números reales, la diferencia de estos está en la representación gráfica, ya que los reales son sobrepuestos sobre una recta unidimencional, mientras que los complejos se visualizan como un vector, por lo tanto, para graficarlos se requiere de un sistema de coordenadas bidimencional; de aquí, es donde nacen los elementos; módulo y argumento; muy importantes debido a que diferencian a un complejo de otro. De la misma forma con este trabajo, nos damos cuenta de la diferencia que existe al momento de representar el dominio y recorrido de una función compleja, se requiere de dos planos imaginarios para observar; primero el dominio de la función y posteriormente el recorrido de esta, lo que lo hace muy interesante. Así al aplicar una función de variable compleja sobre una región conocida, la puede convertir en otra región totalmente distinta e inesperada.

En el plano complejo observamos que; las definiciones, propiedades, lemas y demases son una extensión, con algunas pequeñas modificaciones de las observadas en el cuerpo de los reales, que muchas veces nos permiten manipular funciones de una forma muy conveniente. Un claro ejemplo de esto, es el caso de las integrales de ciertas funciones, que trabajando con el cuerpo real pueden ser un verdadero dolor de cabeza, mientras que utilizando algunos teoremas vistos en los complejos se vuelven realmente sencillas.

Durante nuestra vida como profesores de enseñanza media, enseñaremos prácticamente nada sobre este tema, pero; ¿cómo motivar a aquellos estudiantes que presenten interés, si sólo sabemos lo que nos piden enseñar?, hay que saber más para poder motivar, esto se aplica en todas las áreas y asignaturas. En nuestros alumnos está el futuro, y como docentes debemos ser capaces de formar personas pensantes y conscientes, que tengan las herramientas para cambiar de forma positiva el mundo en el que vivimos, quizá en nuestra sala de clases este un próximo Einstein, un Stephen Hawking o un Nikola Tesla y nosotros deberemos poseer las herramientas para reconocerlo y ayudarlo.

Bibliografía

[1] Churchill Ruel/ Word Brown James (1992). *Variable compleja y aplicaciones*, quinta edición.

[2] Derrick William (1987). V*ariable compleja con aplicaciones*, segunda edición.

[3] Rivero Francisco (2001). *Una introducción a los números complejos.*

[4] Nieto José I (1968). *Funciones de variable compleja.*

[5] Murray, Spiegel (1968). *Teoria y problemas de variable compleja.* Universidad de Montreal, Montreal Canada.

[6] Murray, Spiegel/ Lipschutz S./ Schiller J./ Spellman D. (2011). *Variable compleja,* segunda edición.

[7] Acevedo Bernardo (2006). *Variable compleja.* Universidad nacional de Colombia de Manizales, Manizales Colombia.

[8] Cánovas Jose (2009). *Apuntes de variable compleja.*

[9] Pérez G Francisco (2004). *Curso de análisis complejo.* Universidad de Granada, Granada España.

[10] González Artemio (2009). *Manuel de variable compleja.* Universidad Complutense de Madrid, Madrid España.

[11] Hidalgo Laura (2006). *Variable compleja I.* Universidad autónoma metropolitana-Iztapalapa, Ciudad de México México.