UNIVERSIDAD DEL BIO–BIO
FACULTAD DE EDUCACIÓN Y HUMANIDADES
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
ESCUELA DE PEDAGOGÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA.

“SUCESIONES Y SERIES DE FUNCIONES”

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE
PROFESOR DE EDUCACIÓN MEDIA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

AUTORES: FUENTES VARGAS, JONATHAN RENE
MARDONES HERMOSILLA, VÍCTOR ALONSO
ZARATE MELO, FRANCISCO JAVIER NICOLÁS

Profesor Guía: Friz Roa, Luis

Profesor Informante: Riquelme Faúndez, Edgardo

CHILLÁN 2020

Agradecimientos.

Quiero iniciar agradeciendo de todo corazón al profesor Luis Friz Roa quien fue nuestro director de tesis por cada orientación y motivación para el logro de esta memoria de título.

Ahora bien, la primera persona o ser al que le debo lo que soy es a Dios y a él le tengo que dar gracias por mi familia y por la vida que escogí seguir, quiero agradecer a mis padres por cada esfuerzo que han hecho para que yo pudiera ser un profesional y pudiera salir adelante. Quiero agradecer a mi grupo de tesis que, si bien trabajamos a media máquina algunas veces, tuvimos problemas de comunicación y nos peleábamos cuando alguno no aportaba en lo que tenía que hacer, a pesar de eso supimos sobrellevar de buena manera esta situación y este es el fruto del trabajo que realizamos.

También quiero Agradecer a una persona muy importante Nicol Galdame S. Quien desde un tiempo a esta parte ha sido un pilar fundamental en cada uno de mis pasos, agradezco cada palabra de aliento y motivación que me diste para lograr cada una de mis metas, muchas gracias por tu apoyo y ayuda en esta etapa de Tesis.

Gracias Dios, Gracias Familia, Gracias Amigos y Gracias amor por nunca dejarme de lado y ayudarme siempre a ser mejor.

Francisco Zarate Melo

Agradezco de manera especial a la Universidad del Biobío, dado que, me permitió adquirir y formar mis bases como profesional. De igual modo, deseo agradecer a todo el cuerpo docente, principalmente a los que integraban la Facultad de Humanidades, pues fueron ellos los que me otorgaron todos y cada uno de mis conocimientos. También, es necesario destacar reconocer a todas las personas que fueron partícipes de este importante proceso en mi carrera profesional, ya sea de manera directa o indirecta, destaco entre ellos a mis compañeros de carrera y de facultad, gracias a todos ustedes, pues me brindaron un apoyo significativo, que el día de hoy se ve reflejado en la culminación de mi paso por la universidad.

En esta instancia, creo necesario agradecer de igual manera a mi querida madre Pilar Vargas, que fue mi mayor motivación en este proceso, asimismo, mi hermana Alison Correa y mi hijo, Evan Fuentes, puesto que fueron un apoyo incondicional e importante que me permitieron estar hoy en día donde estoy.

De igual modo, agradezco infinitamente a mi pareja, Rocío Gutiérrez, que con sus palabras me hacía sentir orgulloso de lo que soy y de lo que puedo llegar a ser. Espero algún día ser yo la fuerza que le permita avanzar en su camino.

Finalmente quiero dedicar este trabajo a mis estimados amigos y hermanos: Pablo Rivas, Sebastián Muñoz y Nicolás Acuña con los que forjé una hermosa

amistad, agradezco su infinito apoyo en los momentos cruciales, por extender su mano en momentos difíciles y por el amor brindado cada día, siempre tendrán un lugar importante en mi corazón.

Jonathan Fuentes Vargas.

En una primera instancia quiero agradecer al profesor Luis Friz Roa quién dirigió nuestra tesis, por su constante apoyo y correcciones necesarias para que es último trabajo de la Universidad resultara de una manera óptima.

También agradecer a mis compañeros de tesis que sin su ayuda esto no hubiese sido posible, no solo en la tesis, sino en otras asignaturas aprobadas de la carrera donde estudiamos juntos y compartimos en innumerables ocasiones.

Finalmente agradecer a mi familia por el apoyo constante que he recibido de ellos a lo largo de toda mi vida…

Víctor Mardones Hermosilla.

Índice General.

1. Preliminares.

1.1 Introducción.

La matemática es una ciencia intensa, dinámica y cambiante: de manera rápida y hasta turbulenta en sus propios contenidos y aún en su propia concepción profunda, aunque de modo más lento. Todo ello sugiere que, efectivamente, la actividad matemática no puede ser una realidad de abordaje sencillo.[1]

Por esta razón, tanto el aprendizaje como la enseñanza de la Matemática deben estar enfocados en el desarrollo de las destrezas necesarias para que el estudiantado sea capaz de resolver problemas cotidianos, a la vez que se fortalece el pensamiento lógico y creativo.[2]

Una de las ramas de la matemática que ha presentado mayor cambio ha sido el cálculo infinitesimal o simplemente el cálculo. Esto debido a que una gran cantidad de matemáticos fue perfeccionando cada vez cada uno de los objetos matemáticos. Se generó un cambio de paradigma a partir de las investigaciones de Newton y Leibniz, a raíz de las investigaciones se permitió enunciar el teorema fundamental del Cálculo.

El cálculo estudia objetos matemáticos como el límite, derivadas, integrales, series infinitas, etc. Abocándonos a las funciones podemos señalar que éstas pueden ser obtenidas como límites de sucesiones de funciones o sumas de series que convergen (a una función). Por lo tanto, a partir de una función se puede realizar el estudio de sucesiones, series de funciones y realizar un análisis de criterios y convergencia de éstas.

Las sucesiones y series de funciones son una parte fundamental en la historia del Cálculo Infinitesimal[3]. Lo primero que se debe tener claro es la diferencia en el concepto de sucesiones y series numéricas ya que se trabajará con ellas más

[1] (Guzman, 2007, pág. 3)
[2] (MINISTERIO DE EDUCACION)
[3] (Burgos, 2007, pág. 5)

adelante y es importante que el lector tenga una idea clara de cada uno de estos conceptos.

Se define a la sucesión de números reales $(x_n) = x_1, x_2, \ldots., x_n$. Se definirá la suma parcial n-esima de (x_n) como $S_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$, en la cual se suman cada uno de los elementos de la sucesión de números reales. A la sucesión de todas las sumas parciales de las sucesiones de números reales se le denomina serie asociada a (x_n). Se denota poniendo $(x_n, \sum)$.

Ejemplo:

$$x_n = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots. \frac{1}{n}$$

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$$

Ahora que entendemos que es una sucesión y cuáles son sus elementos nos resultará más fácil comprender que en la vida cotidiana se encuentran estos diferentes tipos de sucesiones.

Por ejemplo, pensemos en una competición de tenis. Hay siempre un ganador que sale de la competición final en la que han participado los dos finalistas. Para llegar ahí, se han celebrado unas semifinales en las que han participado 2 parejas (en total 4 jugadores). En la etapa anterior han competido 8 tenistas y así sucesivamente, ya que el número de participantes en cada etapa siempre será la mitad que, en la etapa anterior, pues en cada partido se elimina uno de los jugadores. Por esto podemos saber que cada fase está regida por un patrón.

Una de las historias más relevantes que involucran la noción de serie es la Paradoja de Aquiles y la Tortuga:

> *“Aquiles, llamado "el de los pies ligeros", guerrero más habilidoso de la región griega del norte del Peloponeso y quién mató a Héctor, príncipe troyano que se encargó de defender Troya durante la Guerra de Troya,*

> *decidió salir a competir en una carrera contra una tortuga. Ya que corría mucho más rápido que ella y estaba seguro de sus posibilidades de victoria, le dio una gran ventaja inicial. Al darse la salida, Aquiles recorrió en poco tiempo la distancia que los separaba inicialmente, pero al llegar allí descubrió que la tortuga ya no estaba, sino que había avanzado, más lentamente, una pequeña distancia. Sin desanimarse, siguió corriendo, pero al llegar de nuevo donde estaba la tortuga, ésta había avanzado un poco más. De este modo, Aquiles no ganaría la carrera, ya que la tortuga estaría siempre por delante de él".* [4]

La historia es considerada una paradoja, debido a que contradice la realidad pues sabemos que un corredor veloz le ganará a uno lento, a pesar de una gran ventaja que le den a este último.

[4] (ALFONSECA MORENO, 2017)

1.2 Análisis Epistemológico.

Isaac Newton (1642-1727). Matemático inglés. Comparte con Gottfried Leibniz el crédito por el desarrollo del cálculo integral y diferencial, que utilizó para formular sus leyes de la física y astronomía. También contribuyó en otras áreas de las matemáticas, desarrollando el teorema del binomio y las fórmulas de Newton-Cotes. Cuando se comenzó con el desarrollo del Cálculo Diferencial, el propio Newton las estudia en su tratado de Cálculo Diferencial donde discute sus soluciones a través de una expansión en series. Newton estudia la siguiente ecuación diferencial:[5]

$$\frac{dy(x)}{dx} = 1 - 3x + y(x) + x^2 + xy(x)$$

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716). Matemático Alemán. Comparte con Isaac Newton el crédito por el desarrollo del cálculo integral y diferencial.[6] En el desarrollo de series alternadas establece un criterio de convergencia que determina si la serie converge o diverge. Otra de sus contribuciones más significativas en el área de series y sucesiones es: la fórmula de Leibniz o Serie de Leibniz que estipula que: [7]

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} \dots = \frac{1}{4}$$

La expresión anterior es una serie infinita denominada serie de Leibniz, que converge a $\frac{\pi}{4}$ utilizando el símbolo de sumatoria, la serie se puede expresar como:

$$\sum_{n \to 0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$$

Leonhard Euler (1707-1783). Matemático Suizo. Las habilidades que desde temprana edad demostró para las matemáticas pronto le ganaron la estima del

5 (HERNÁNDEZ & LUIS, 2008, pág. 1)
6 (Unidad 8. Iniciación al cálculo de derivadas. Aplicaciones, pág. 1)
7 (REVILLA, 2014)

patriarca de los Bernoulli, quien fue uno de los más eminentes matemáticos de su tiempo y profesor de Euler en la Universidad de Basilea.[8]

Leonhard Euler realizó múltiples aportes en las matemáticas en cual podemos destacar: [9]

- Fue el precursor de la utilización de la letra e para denotar la base de los logaritmos neperianos.
- Popularizó la utilización de la letra π para denotar la razón entre la longitud de una circunferencia y su diámetro.
- Introdujo la notación i para $\sqrt{-1}$.

Pero el más significativo con respecto a nuestro tema, es que expresó número e mediante el cálculo de un límite:

$$e^x = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

Cabe mencionar que Leonhard Euler no se preocupaba por determinar para qué valores son o no son convergentes las series que obtuvo.

Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855). Matemático, astrónomo y físico alemán que contribuyó significativamente en muchos campos, incluida la teoría de números[10], el análisis matemático, la geometría diferencial, la geodesia, el magnetismo y la óptica. Muchos lo consideran "el príncipe de las matemáticas" y "el matemático más grande desde la antigüedad". Su obra tuvo una influencia notable en muchos campos de la matemática y de la ciencia. Su gran aporte en el área de las series y sucesiones se debe a su teorema, el cual determina la convergencia o divergencia de una serie infinita.

---

8 (ARMENTA, 2003, pág. 1)
9 (Medina, 2009)
10 (Vera, 2009, págs. 24-25)

Teorema (Criterio de Gauss para analizar convergencia o divergencia de una serie)[11]:

Sea $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una serie de términos positivos. Supongamos que existen una sucesión acotada $\{\theta_n\}$, $\beta \in R$. $\lambda > 0$ tales que:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{\beta}{n} + \frac{\theta_n}{n^{\lambda+1}}$$

Entonces:

i. Si $\beta > 1$. Se tiene que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ Converge.
ii. Si $\beta < 1$. Se tiene que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ Diverge.

Agustín-Louis Cauchy (1789-1857). Matemático Francés, miembro de la Academia de Ciencias de Francia y profesor de la Escuela Politécnica de París[12]. Por esa época Cauchy publicó su Curso de Análisis 1, un libro que pronto se convertiría en un clásico. A nosotros nos interesa el Capítulo VI," de las series (reales) convergentes y divergentes". Las series se venían usando desde los inicios del Cálculo Infinitesimal, pero hasta ese momento no había una discusión general sobre la convergencia.

En su Curso de análisis Cauchy enuncia entre otros resultados el teorema que afirma que, si una serie de funciones continuas es convergente, entonces su función límite es necesariamente continua. La importancia de este teorema consiste en el hecho que jugó un rol importante en el desarrollo del análisis, tal como veremos en lo que sigue. Sin embargo, el mismo Cauchy reconoce posteriormente en 1853, que su teorema era inexacto. En efecto, para que el resultado fuera correcto, se requería la convergencia uniforme, la cual fue introducida por Cauchy (sin darle ese apelativo), aunque de forma inadecuada. Su resultado era válido solamente para series de potencias, pero no para series más generales. Cauchy modifica el enunciado de su teorema de 1821, introduciendo lo que hoy día es conocido bajo el

11 (Vera, 2009, pág. 25)
12 (GUTIÉRREZ VÁZQUEZ, 2007, págs. 1-2)

criterio que lleva su nombre: El Criterio de Cauchy (1853) para la convergencia uniforme.

Teorema. (Criterio de Cauchy para Convergencia Uniforme de sucesiones de funciones).

Una sucesión de funciones f_n definidas en I, converge uniformemente si y sólo si $\forall\varepsilon > 0$, existe n_0 tal que $n > n_0$, p > 0 ⇒ $|f_{n+p} - f_n(p))| < \varepsilon$, x ∈ I[13]

Niels Henrik Abel (1802- 1829). Matemático Noruego. Dentro de sus mayores aportes se encuentra fue el primero en realizar una aplicación al cálculo fraccional en la solución de una integral que surgió en la formulación del problema de la tautócrona (hace referencia en encontrar la forma de la curva sobre un plano vertical, de tal forma que un objeto, al deslizarse por ella sin rozamiento alguno, llegue al final de su recorrido en un tiempo que es independiente del lugar que comience el movimiento). El desarrollo de esta aplicación permitió dar precisión al contexto de series infinitas, siendo esta su contribución más decisiva en el análisis.[14]

Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859). Matemático Alemán, hizo aportes en teoría de números, mecánica de fluidos, análisis matemático y estableció condiciones para la convergencia de las series de Fourier.

Dirichlet, que en 1829 logró el primer avance verdaderamente significativo en el estudio de la convergencia de las series de Fourier de señales periódicas al establecer con todo rigor una clase de funciones lo suficientemente amplia como para justificar su utilidad en numerosas aplicaciones. Concretamente, demostró el siguiente resultado:

[13] (RUIZ, pág. 1)

[14] (SANCHEZ MUÑOZ, 2011, pág. 7)

***Teorema (Dirichlet) Sea x(t) una señal 2π- periodica y sea $S_n(x)(t)$ la suma parcial n-esima de la serie de Fourier de x. Entonces $S_n(x)$ admite la siguiente representación de integral:*[15]**

$$S_n(x)(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(t+s)D_n(s)ds, donde D_n(s) = \frac{sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)s\right)}{sin\left(\frac{1}{2}s\right)}$$

Y Dirichlet concluyó que esta expresión es uniformemente convergente mediante la utilización de Series de Fourier.

Karl Weierstrass (1815 - 1897). Matemático Alemán. Fue uno de los precursores del rigor en el análisis y se le conoce como el “padre del análisis moderno”. Su obra refina el concepto de qué es un número y qué es la función en las matemáticas y eleva el nivel de autocrítica[16], tanto en las definiciones como en el rigor de las demostraciones. Su motivación por el estudio de las series viene dada por Gudermann quien dictaba conferencias sobre funciones elípticas y series de potencias.

Uno de sus principales aportes en series de funciones es la prueba M de Weierstrass en la cual se puede ver si una serie de funciones converge uniformemente.

Teorema (Si $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ es una serie de funciones y $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ es una serie dominante convergente de la serie de funciones, entonces esta converge uniformemente).

Brook Taylor (1685 - 1731). Matemático Británico, fue nombrado miembro de la prestigiosa Royal Society (organización que reúne a científicos prestigiosos de

---

15 (Convergencia puntual y uniforme de las series de Fourier: teorema de Dirichlet y necesidad de la regularidad, pág. 9)

16 (Martínez, 2015, pág. 5)

Londres) y formó parte de la comisión que debía juzgar si la autoría del cálculo diferencial correspondía a Newton o a Leibniz.[17]

Taylor mostró interés en el problema del desarrollo de funciones. En ese entonces se utilizaba que a una función polinómica f(x) de grado n, le correspondería las siguientes notaciones:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \text{ó } también\ f(a+h) = c_0 + c_1 h + \cdots + c_n h^n$$

Taylor utilizando ideas del Cálculo de diferencias finitas, y su tenacidad para generalizar descubrió la fórmula de Taylor:

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + h^2 \frac{f''(x)}{2!} + \cdots$$

Que se refiere a una aproximación de funciones mediante una serie de potencias o suma de potencias enteras de polinomios.

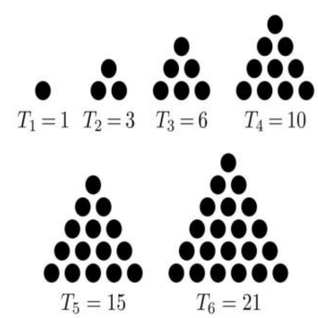
17 (Martínez, 2015)

1.3 Marco Teórico.

Para iniciar en el estudio de sucesiones y series de funciones reales, es primordial comprender sus orígenes y transformaciones a lo largo de la historia. Ya para el 508 A.C. se trabajan problemas que indican las primeras menciones acerca de las sucesiones.

Una sucesión es la acción, continuación o prosecución de sucesos, cosas, personas o números. Siendo esta última la que nos compete. La sucesión matemática es un conjunto ordenado de términos que cumplen una ley determinada o patrón común[18]. Por lo anterior, es esencial definir formalmente este concepto: si a cada entero positivo n se le asocia un número real a_n, por lo tanto, se dice que el conjunto ordenado a_1, a_2, ..., a_n, ..., define una sucesión infinita denotada por $\{a_n\}$[19]. Uno de los primeros indicios de series y sucesiones fue la conformación de los números triangulares.

Un número triangular es aquel que se puede componer en forma de un triángulo equilátero[20] (por convención, el primer número triangular es el 1). La regla de formación de este número figurado es «cada término se obtiene sumando al anterior». Los números triangulares junto con otros números figurados, fueron objeto de estudio por Pitágoras y los Pitagóricos, siendo reconocidos como los primeros indicios de series y sucesiones.



De la ilustración se pueden obtener los primeros seis términos de la sucesión:

18 (UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA, pág. 2)

19 (BRUZUAL & DOMINGUEZ, 2005, pág. 1)

20 (SORANDO MUZÁS, pág. 6)

$$1,3,6,10,15,21$$

A partir de ésta, una serie numérica $\{s_n\}$, se define como la sucesión de las sumas parciales de los términos de la sucesión $\{a_n\}$, es decir:

$$s_1 = a_1, s_2 = a_1 + a_2, s_3 = a_1 + a_2 + a_3,$$

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Retomando el ejemplo anterior, la serie asociada a la sucesión $\{\frac{n(n+1)}{2}\}$ es:

$$1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21 + \ldots + \frac{n(n+1)}{2} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2}$$

Donde $\{s_n\}$ denota la suma parcial de los n primeros términos, entonces se denota como[21] :

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_k$$

Finalmente se desea saber si la suma de esta serie infinita existe y es un número real, por lo cual se debe calcular el límite de la expresión[22] :

$$\lim_{n \to \infty} s_n = s$$

Entonces se dice que la serie es convergente y su suma es S. De lo contrario si $\{s_n\}$ no converge se dice que la serie diverge y no tiene suma.

---

[21] (APOSTOL, 1999, pág. 469)

[22] (APOSTOL, 1999, pág. 470)

Para revisar la convergencia y divergencia de una serie se utilizará el Criterio del Cociente (o de D´Alambert):

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de términos positivos tal que $\lim_{n \to \infty} a_n = L$. Entonces:

a) Si $L < 1 \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ Converge.
b) Si $L > 1 \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ Diverge.[23]

Una sucesión de funciones se define como una aplicación que se le realiza a cada número natural n haciendo corresponder a este una función f_n. Se suele utilizar el símbolo $\{f_n\}$ para designar la sucesión de funciones dadas por $n \rightarrow f_n, \forall\, n \in N$

Desde ahora en adelante supondremos que las funciones f_n son funciones reales definidas en un intervalo I[24].

Ahora a partir de una sucesión de funciones $\{f_n\}$ podemos formar otra, que se obtenga sumando consecutivamente los $\{f_n\}$, a esta la llamaremos $\{s_n\}$, donde:

$$s_1 = f_1, s_2 = f_1 + f_2, s_3 = f_1 + f_2 + f_3$$

Así, finalmente:

$$s_n = f_1 + f_2 + f_3 + \cdots + f_n$$

Generalizando, $s_n = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$. La sucesión $\{s_n\}$ se llama serie de término general f_n y se representa por el símbolo $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$.

La convergencia de sucesiones y series de funciones puede ser uniforme y/o puntual.

La convergencia puntual se define como: Sea S el conjunto de puntos x para los cuales la sucesión $f_n(x)$ converge. La función f definida en S por la siguiente igualdad.

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x), \forall x \in S$$

23 (Vian, pág. 147)

24 (PÉREZ GONZÁLES, pág. 583)

Se le llama función límite de la sucesión f_n y decimos que esta sucesión converge puntualmente a f en el conjunto S, lo que se denotará por $f_n \to f$.

La convergencia uniforme se define como: una sucesión de funciones f_n se llama uniformemente convergente hacia f en un conjunto S si para todo $\varepsilon > 0$ exite un v (dependiente de ε) tal que $n \gg v$ lo que implica que [25]:

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \forall\, x \in S$$

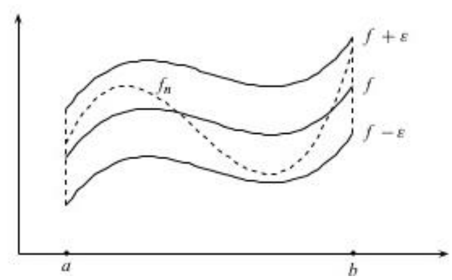


Figura 1: "Representación de convergencia uniforme"

A continuación, realizaremos un paréntesis para hablar de conceptos asociados a números reales. Se dice que una sucesión $\{x_n\}$ es:

- Creciente: cuando $x_n \leq x_{n+1}$ para todo $n \in N$.[26]

Ejemplo: la sucesión $x_n = \{2,4,6,8,10, \dots ,2n\}$

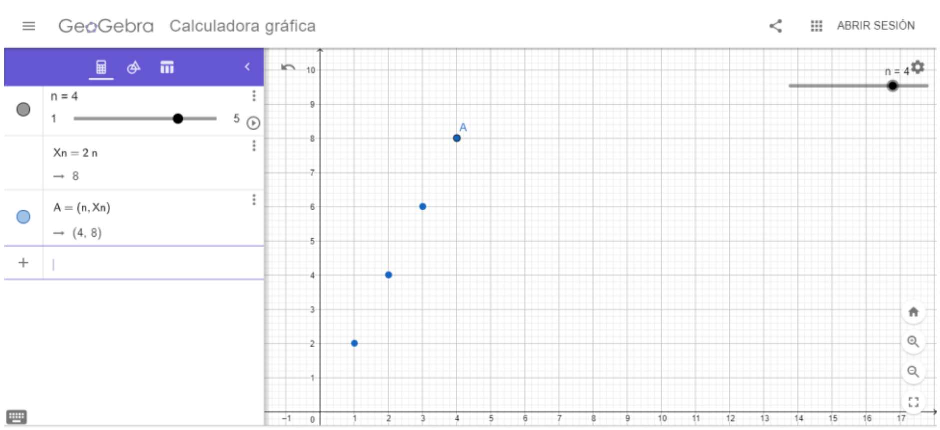


Figura 2: "Representación de sucesión monótona creciente"

25 (APOSTOL, 1999, pág. 517)

26 (Sucesiones monótonas, pág. 49)

- Decreciente: cuando $x_n \geq x_{n+1}$ para todo $n \in N$.[27]

Ejemplo: la sucesión $x_n = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots, \frac{1}{2n}\right\}$

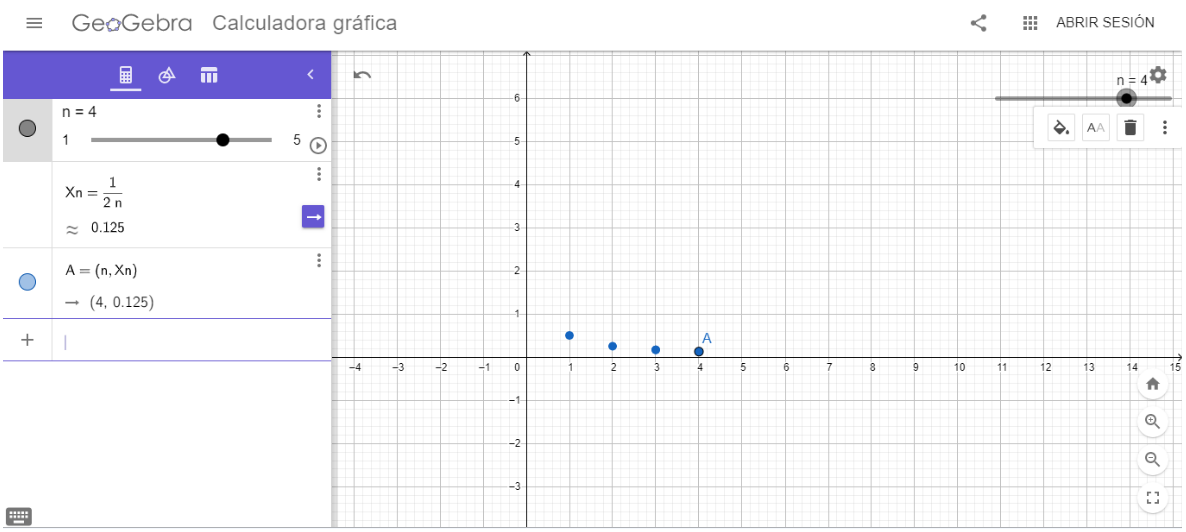


Figura 3: "Representación de sucesión monótona decreciente"

A continuación, se enuncia el teorema del valor medio

Sea $f(x)$ continua en $[a,b]$ y derivable en $(a,b) \rightarrow \exists c \in (a,b) / f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

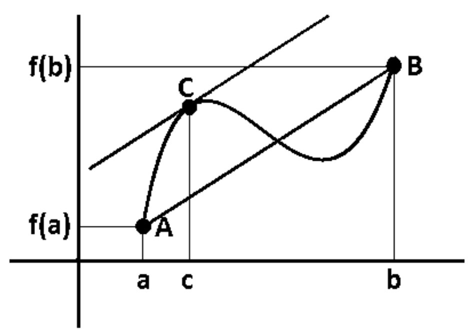


Figura 4: "Teorema del Valor Medio"[28]

[27] (Sucesiones monótonas, pág. 49)

[28] Imagen extraída desde https://ekuatio.com/teorema-del-valor-medio-ejercicios-resueltos/

Demostración:

Sea H, una función que va a ser continua en un intervalo cerrado y derivable en un abierto.

$$g(x) = f(x) - \left[f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)\right]$$

La función $g(x)$ es continua ya que esta compuesta de sumas y productos de funciones continuas en un intervalo cerrado $[a, b]$. Tambien la funcion $g(x)$ es derivable en un intervalo abierto (a, b).

$$g(a) = 0$$

$$g(b) = 0$$

Por lo tanto, cumple con el teorema de Rolle[29] es decir, $\exists c \in (a, b) g'(c) = 0$

Al cumplir con el teorema de Rolle derivamos $g(x)$

$$g(x)' = \left(f(x) - \left[f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)\right]\right)'$$

$$g(x)' = f'(x) - \left[f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right]$$

Por Teorema de Rolle sabemos que existe un punto c entre (a, b) tal que $g'(c) = 0$.

Busquemos ese punto c.

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Hemos llegado a la conclusión de que existe un punto $c$en donde la derivada es:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Dado que las sumas parciales de los términos de una serie numérica son una sucesión es necesario utilizar el límite para calcular la suma de las series. Se define el límite de una función como los valores obtenidos al evaluar la función en torno a

[29] Sea $f: [a; b] \to R$ una función continua en $[a; b]$ y derivable en en $(a;\ b)$ $. Si\ f(a) = f(b)$; entonces existe $c \in (a, b)$ de modo que $f'(c) = 0$.

un número determinado o cuando la variable tiende al infinito[30]. Cuando este proceso arrastra a la función hacia un número real, se dice que la función converge. De caso contrario la función diverge y no puede obtener un valor.

$$\lim_{x \to \infty} f\,(x) = b$$

Al estar hablando de series, es imprescindible mencionar dos conceptos muy importantes al momento de analizar el comportamiento de estas en valores cada vez más grandes. Estos son la convergencia y divergencia de una determinada serie.

1.3.1 Serie Convergente.

Se dice que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge o es una serie convergente cuando la sucesión de sumas parciales $\langle s_n \rangle$ tiene límite finito[31].

Como en el caso de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

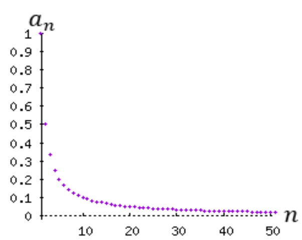


Figura 5: "Representación de Serie Convergente"

Podemos decir que al evaluar nuestra serie asociada con valores cada vez más grandes su gráfica tiende a cero, este sería el límite de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ que converge a cero.

30 (LÍMITES DE FUNCIONES, pág. 2)

31 (BRUZUAL & DOMINGUEZ, 2005, pág. 22)

1.3.2 Serie divergente.

Por otra parte, se dice que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge o es una serie divergente cuando la sucesión de sumas parciales $\langle s_n \rangle$ no converge (ya sea porque límite da + ∞, da - ∞ ó no existe).[32]

Como es el caso de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n^2$

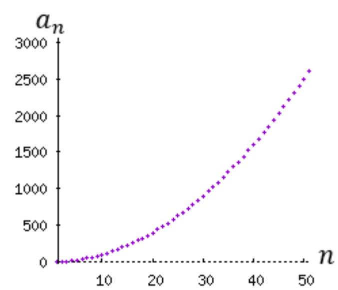


Figura 6: "Representación de Serie Divergente"

En este caso, al evaluar la serie con valores cada vez más grandes su gráfica se dispara hacia $+\infty$, por lo tanto, el límite de la sucesión $\sum_{n=1}^{\infty} n^2$ es $+\infty$, razón por la cual diverge.

1.3.3 Criterios de convergencia.

En el caso de nuestro objeto de estudio, las series pueden ser analizadas en su convergencia mediante la utilización de criterios. Los cuales con posterioridad serán demostrados en el desarrollo del proyecto de investigación. Dentro de los criterios más reconocidos para analizar convergencia uniforme de una serie tenemos:

Criterio de Weierstrass: Dada una serie de funciones $\sum f_n$ que converge puntualmente hacia una función f en un conjunto S. Si existe una serie numérica convergente de términos positivos $\sum k_n$ tal que $0 \leq |f_n(x)| \leq k_n$ para todo $n \in N$ y todo x de S, entonces la serie $\sum f_n$ converge uniformemente en S.

32 (BRUZUAL & DOMINGUEZ, 2005, pág. 22)

Criterio de Dirichlet: Dada una serie de funciones $\sum f_n$ y una sucesión de funciones $\{\delta_n\}$ donde f_n y δ_n son funciones de $S \subset R$en R**.** Se verifica que si la sucesión $\{\delta_n\}$converge uniformemente en S hacia la función nula, si la sucesión $\{\delta_n(x)\}$ es monótona para cada $x \in S$ y si la sucesión $\{s_n\}$de las sumas parciales de la serie $\sum f_n$está uniformemente acotada en S, entonces la $\sum f_n\, \delta_n$converge uniformemente en S.[33]

Criterio de Abel: Dada una serie de funciones $\sum f_n$y una sucesión de funciones $\{\delta_n\}$ donde f_n y $\delta_n$son funciones de $S \subset R$ en R**.** Se verifica que si la sucesión $\{\delta_n\}$ está uniformemente

Acotada en S, si la sucesión $\{\delta_n(x)\}$ es monótona para cada $x \in S$ y si la serie $\sum f_n$ es uniformemente convergente en S, entonces la serie $\sum f_n\, \delta_n$ converge uniformemente en S.

Hasta el momento solo se han considerado series y sucesiones de números reales $\{a_k\}$, sin embargo, también se pueden considerar las funciones *f(x)*. Por lo tanto, a continuación, observaremos algunos conceptos básicos de las funciones.

El concepto de función, es uno de los conceptos fundamentales en la matemática. Los primeros acercamientos los realizaron los babilonios con la utilización y construcción de tablas las cuales establecen una relación de dos números; un número natural con su raíz cuadrado y cubo[34]. Por lo tanto, una función se puede definir como una relación establecida entre dos variables, que asocia a cada valor del dominio (variable independiente x) un único valor del recorrido (variable dependiente y). Esta relación se representa mediante la forma:

$$y = f(x).$$

Para adentrarnos posteriormente en las series de funciones es fundamental recalcar el álgebra de las funciones, pues cumplirán un rol importante.

---

33 (Burgos, 2007, pág. 533)

34 (VARGAS NÚÑEZ, 2011, pág. 4)

1.3.4 Suma y diferencia de funciones

Sean f y g dos funciones reales de variable real definidas en un mismo intervalo. Se llama suma de ambas funciones, y se representa por $f \pm g$, a la función definida por[35]:

$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$$

El dominio de $f \pm g$ es $Dom_f \cap Dom_g$

1.3.5 Producto de funciones

Sean *f* y *g* dos funciones reales de variable real, y definidas en un mismo intervalo. Se llama función producto de fyg ,a la función definida por[36]:

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

El dominio de $f \cdot g$ es $Dom_f \cap Dom_g$

1.3.6 Cociente de dos funciones

Sean *f* y *g* dos funciones reales de variable real, y definidas en un mismo intervalo. Se llama cociente de *f* y *g*, a la función definida por[37]:

$$(f/g)(x) = f\,(x)/g\,(x), g(x) \neq 0$$

El dominio de f/g es $Dom_f \cap Dom_g$excluyendo los valores de x para los cuales $g(x) = 0$

1.3.7 Composición de funciones

---

35 (DÍAZ GÓMEZ, pág. 1)

36 (DÍAZ GÓMEZ, pág. 1)

37 (DÍAZ GÓMEZ, pág. 2)

Si f(x) es una función de A en B y g(x) es una función de B a C, entonces la función compuesta g o f es la función de A hacia C dada por[38]:

(g o f) (x) = g(f(x))

El dominio de gof es $Dom_{gof} = \{x \vee x \in Dom_f y f(x) \in Dom_g\}$

1.3.8 Integralidad de las funciones Limite (de una sucesión) y suma (de una serie)

Sea (f_n) una sucesión de funciones reales $f_n: [a,b] \to R$, que están todas definidas en un mismo intervalo compacto $[a,b]$ subconjunto de los Reales, se verifica que:

1. Si la sucesión de funciones (f_n) converge uniformemente en $[a,b]$ hacia su función limite $f: [a,b] \to R$ y si las funciones f_n son integrables en $[a,b]$, entonces f también es integrable en $[a,b]$ y su integral $\int_a^x f$ es el límite uniforme de la sucesión de integrales $\left(\int_a^x f_n\right)$ para $x \in [a,b]$, de forma que:[39]

$$\int_a^x \left(\lim_{n\to\infty} f_n(t)\right) dt = \lim_{n\to\infty}\left(\int_a^x f_n(t)dt\right) \quad (este\ limite\ es\ uniforme\ para\ x \in [a,b])$$

2. Si la serie de funciones $\sum f_n$ converge uniformemente en $[a,b]$ hacia su función suma $s: [a,b] \to R$ y si las funciones f_n son integrables en $[a,b]$, entonces s también es integrable en $[a,b]$ y su integral $\int_a^x S$ es la suma uniforme de la serie de integrales $\sum \int_a^x f_n$ para $x \in [a,b]$, de forma que:

$$\int_a^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\right) dt = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_a^x f_n(t)dt\right) \quad (esta\ suma\ es\ uniforme\ para\ x \in [a,b])$$

1.3.9 Derivabilidad de las funciones Limite (de una sucesión) y suma (de una serie)

Sea (f_n) una sucesión de funciones reales $f_n: I \to R$, que están todas definidas en un mismo intervalo acotado I. se verifica que:

---

38 (DÍAZ GÓMEZ, pág. 3)

39 (Burgos, 2007, pág. 541)

1. Si las funciones f_n son derivables en I, si la sucesión de las derivadas (f'_n) es uniformemente convergente en I y si existe algún $a \in I$ tal que la sucesión numérica $(f_n(a))$ es convergente, entonces (f_n) converge uniformemente en I hacia una función (limite), la cual que es derivable, en I, cuya derivada es el limite de (f'_n) de manera que:[40]

$$D\left[\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right] = \lim_{n\to\infty} D[f_n(x)] \qquad (este\ limite\ es\ uniforme\ para\ x \in I)$$

2. Si las funciones f_n son derivables en I, si la serie de las derivadas $\sum f'_n$ es uniformemente convergente en I y si existe algún $a \in I$ tal que la serie numérica $\sum f_n(a)$ es convergente, entonces $\sum f_n$ converge uniformemente en I hacia una función (suma), la cual es derivable, en I, y cuya derivada es la suma de $\sum f'_n$ de manera que:

$$D\left[\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} D[f_n(x)] \quad (esta\ suma\ es\ uniforme\ para\ x \in I)$$

[40] (Burgos, 2007, pág. 544)

1.4 Formulación del Problema.

Esta investigación será realizada bajo un enfoque demostrativo, debido a que se realizará un estudio de todos los aspectos referidos a nuestra temática de estudio, además de algunas demostraciones de convergencia de series.

El análisis matemático dentro de la línea de nuestra carrera es uno de los ramos más complejos para los estudiantes, debido a la abstracción necesaria para entender todos los tópicos y a la dificultas que se auto imponen los estudiantes, por este motivo pretendemos que al finalizar nuestra investigación los temas que abordemos queden claros al lector y sirvan como material de estudio complementario.

1.5 Objetivos.

1.5.1 Objetivo General.

- Estudiar las sucesiones y series de funciones reales.

1.5.2 Objetivo Específico.

- Identificar los diferentes criterios y teoremas que permiten analizar el comportamiento de una serie
- Estudiar las distintas definiciones asociadas a el concepto de sucesión y serie de función, además de la incorporación de las demostraciones respectivas.
- Estudiar distintos tipos de funciones desde una mirada relacionada a las series.

2. Convergencia de sucesiones y series de funciones.

A pesar de la mención realizada en la primera parte de este Proyecto de titulación, debemos hacer una revisión de los conceptos y a partir de estos avanzar para dejar toda información más clara al lector final.

Definición: Una sucesión de funciones se define como una aplicación que asigna a cada número natural n generando una función f_n. Se suele utilizar el símbolo $\{f_n\}$ para designar la sucesión de funciones dadas $n \to f_n$ para todo $n \in N$. Desde ahora en adelante supondremos que las funciones f_n son funciones reales definidas en un intervalo I.[41]

2.1 Convergencia de una sucesión de funciones.

2.1.1 Convergencia Puntual.

Definición: Sea S el conjunto de puntos x para los cuales la sucesión converge. La función f definida en S por la siguiente igualdad.

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \forall\, x \in S$$

Se le llama función límite de la sucesión $\{f_n\}$ y decimos que esta sucesión converge puntualmente af en el conjunto S, lo que se denotará por $f_n \to f$

Ejemplo

Sea f_n la función dada por

$$f_n = \frac{x}{1 + nx^2}$$

---

[41] (González, pág. 583)

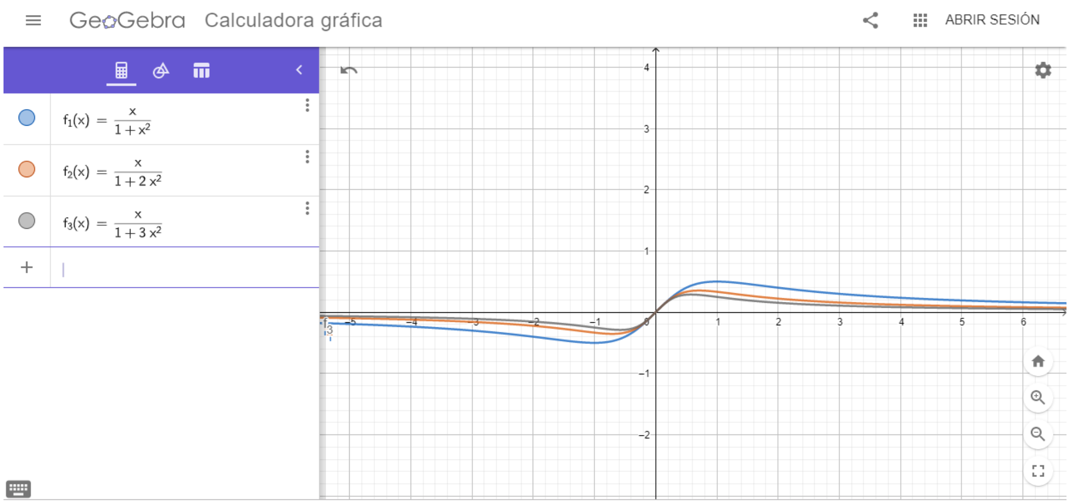


Figura 7: "Representación de la sucesión de funciones."

Para analizar la convergencia puntual decimos que:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{1+nx^2} = 0 = f(x), \forall x \in R$$

$$\{f_n(x)\}\ converge\ puntualmente\ a\ f(x) = 0, \forall x \in R$$

2.1.2 Convergencia Uniforme

Definición: Diremos que una sucesión de funciones que converge puntualmente en el conjunto S hacia una función límite f. La sucesión de funciones $\{f_n\}$ converge uniformemente hacia $f(x)$ en el conjunto S si para todo ε > 0 existe un v tal que $n \geq v$ implica que

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \forall x \in S$$

Lo que denotamos como $f_n \to^{c.u} f$

Se establece que una sucesión de funciones no converge uniformemente al cumplir la condición de no convergencia uniforme.

2.1.3 Condición de No Convergencia Uniforme.

La sucesión $\{f_n\}$ no converge uniformemente en el conjunto S hacia la función límite f si, y sólo sí, existe un $\varepsilon_0 > 0$, existe una sucesión $\{x_n\}$ de puntos de S y existe una subsucesión[42] de $\{f_n\}$ tales que:

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| \geq \varepsilon_0, \forall x \in S$$

Ejemplo:

Sea f_n la función dada por

$$f_n = \frac{x}{1+nx^2}$$

Su gráfica fue mostrada en la página anterior. A continuación, analizaremos la convergencia uniforme asociada a esta sucesión de funciones.

$$\lim_{n\to\infty} Sup\,\{|f_n(x) - f(x)|\} = \lim_{n\to\infty} sup_{x\in R}\left\{\left|\frac{x}{1+nx^2}\right|\right\}$$

Calcularemos las derivadas para poder ocupar el supremo.

$$\left\{\frac{x}{1+nx^2}\right\}$$

$$f(x) = \frac{x}{1+nx^2} \qquad f'(x) = \frac{(x)'(1+nx^2) - (x)(1+nx^2)}{(1+nx^2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{(1+nx^2) - (x)(2nx)}{(1+nx^2)^2} \qquad f'(x) = \frac{1+nx^2 - 2nx^2}{(1+nx^2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{1-nx^2}{(1+nx^2)^2}$$

Ahora para ver el máximo y mínimo que posee la sucesión de funciones, procederemos a igualar la derivada a cero

$$f'(x) = 0$$

---

42 Sea $\{s_n\}$una sucesión. Sea $f: R \to R$ una función estrictamente creciente. Se llama subsucesión de $\{s_n\}$ generada por f, a la sucesión $\{u_n\}$ definida por:

$u_n = s_{f(n)};$ $\{u_n\} \subseteq \{s_n\}$

$$f'(x) = 0 \rightarrow \frac{1 - nx^2}{(1 + nx^2)^2} = 0 \leftrightarrow 1 - nx^2 = 0 \leftrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{n}}$$

Procederemos a continuación a calcular la segunda derivada de la sucesión de funciones asociada:

$$f'(x) = \frac{1 - nx^2}{(1 + nx^2)^2} \quad f''(x) = \frac{(1 - nx^2)'(1 + nx^2)^2 - (1 - nx^2)(1 + nx^2)^2}{(1 + nx^2)^4}$$

$$f''(x) = \frac{-2nx(1 + nx^2)^2 - (1 - nx^2)2(1 + nx^2)(2nx)}{(1 + nx^2)^4}$$

$$f''(x) = \frac{-2nx(1 + 2nx^2 + n^2x^4) - (1 - nx^2)(1 + nx^2)(4nx)}{(1 + nx^2)^4}$$

$$f''(x) = \frac{-2nx(1 + 2nx^2 + n^2x^4) - (1 + nx^2 - nx^2 - n^2x^4)(4nx)}{(1 + nx^2)^4}$$

$$f''(x) = \frac{-2nx(1 + 2nx^2 + n^2x^4) - (1 + nx^2 - nx^2 - n^2x^4)(4nx)}{(1 + nx^2)^4}$$

$$f''(x) = \frac{-2nx(1 + 2nx^2 + n^2x^4) - (1 - n^2x^4)(4nx)}{(1 + nx^2)^4}$$

$$f''(x) = \frac{-2nx - 4n^2x^3 - 2n^3x^5 - (4nx - 4n^3x^5)}{(1 + nx^2)^4}$$

$$f''(x) = \frac{-2nx - 4n^2x^3 - 2n^3x^5 - 4nx + 4n^3x^5}{(1 + nx^2)^4}$$

$$f''(x) = \frac{-6nx - 4n^2x^3 + 2n^3x^5}{(1 + nx^2)^4}$$

$$f''(x) = \frac{-6nx - 4n^2x^3 + 2n^3x^5}{1 + 4\mathrm{n}x^2 + 6n^2x^4 + 4n^3x^6 + n^4x^8}$$

Evaluando en los puntos críticos tenemos que:

$$f''\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{-6n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - 4n^2\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^3 + 2n^3\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^5}{1 + 4n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2 + 6n^2\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^4 + 4n^3\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^6 + n^4\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^8} =$$

$$\frac{-\sqrt{n}}{2} < 0, máximo\ de\ la\ función.$$

$$f''\left(\frac{-1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{-6n\left(\frac{-1}{\sqrt{n}}\right) - 4n^2\left(\frac{-1}{\sqrt{n}}\right)^3 + 2n^3\left(\frac{-1}{\sqrt{n}}\right)^5}{1 + 4n\left(\frac{-1}{\sqrt{n}}\right)^2 + 6n^2\left(\frac{-1}{\sqrt{n}}\right)^4 + 4n^3\left(\frac{-1}{\sqrt{n}}\right)^6 + n^4\left(\frac{-1}{\sqrt{n}}\right)^8} =$$

$$\frac{\sqrt{n}}{2} > 0, mínimo\ de\ la\ función.$$

El supremo de la función es $\frac{1}{\sqrt{n}}$. Ahora sustituyendo el supremo en el valor de x y tomando el límite tenemos que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{1 + n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2} = 0$$

Entonces tenemos que $\{f_n(x)\}$ converge uniformemente a $f(x) = 0, \forall x \in R$

2.1.3.1 Caracterizaciones de la convergencia Uniforme.

Caracterización de Cauchy.

La sucesión $\{f_n\}$converge uniformemente en S hacia $f: S \to R$ (función límite) si, y sólo si, para cada $\varepsilon > 0$ existe un $v \in N$ tal que:

$$p, q \geq v \Rightarrow \left|f_p(x) - f_q(x)\right| < \varepsilon, \forall x \in S$$ [43]

Sabemos que una sucesión de Cauchy, es una sucesión tal que, para cualquier distancia dada, por muy pequeña que sea, siempre se puede encontrar un término de la sucesión tal que la distancia entre dos términos cualesquiera posteriores es menor que la dada.

Demostración.

Primero, probaremos que la sucesión $\{f_n\}$ converge uniformemente, entonces la sucesión es de Cauchy.

Sabemos que dado $\varepsilon_0 > 0$, en este caso $\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon}{2}$ existe $v \in N$ / $|f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Para todo $x \in S$ y todo $n \geq v$. Por lo tanto, para todo $x \in S$, se verifica que:

$$p, q \geq v \Rightarrow \left|f_p(x) - f_q(x)\right| = \left|f_p(x) - f(x) + f(x) - f_q(x)\right|$$
$$\leq \left|f_p(x) - f(x)\right| + \left|f(x) - f_q(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Por lo tanto $\{f_n\}$ es una sucesión de Cauchy.

Ahora, mostraremos que $\{f_n\}$ es una sucesión de Cauchy, entonces la sucesión $\{f_n\}$ converge uniformemente.

Sabemos que

$$p, q \geq v \ \rightarrow \left|f_p(x) - f_q(x)\right| < \varepsilon, \forall\, x \ \in S \ y \ \forall\, p, q \ \geq v$$

Así la sucesión $\{f_n(x)\}$ es de Cauchy en R, por tanto, tiene límite, cuando $n \to \infty$ al que llamaremos $f(x)$. Si bien la sucesión converge, aún falta demostrar que la convergencia es uniforme, para esto:

---

[43] (Burgos, 2007, pág. 528)

Dado $\varepsilon > 0$, existe $v \in N$ tal que$|f_n(x) - f_{n+h}(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$, para cualquier $x \in S$, $n \geq v$ y $h > 0$.

Haciendo que $h \to \infty$, nos encontramos con que, para $x \in S$ y $n \geq v$, es:

$$\varepsilon > \frac{\varepsilon}{2} \geq \lim_{h\to\infty} |f_n(x) - f_{n+h}(x)| = |f_n(x) - f(x)|$$

Lo que demuestra que $\{f_n\} \to^{c.u} f en S$.

2.1.3.2 Caracterización del Supremo

La sucesión $\{f_n\}$ converge uniformemente en S hacia una función $f: S \to R$ si y sólo si:

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = 0 \text{ siendo } \sigma_n = sup\ \{|f(x) - f_n(x)|\ x\ \in S\}^{44}$$

Demostración.

Probaremos primero que: la sucesión $\{f_n\}$ converge uniformemente en S hacia f, entonces $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = 0$

Como $\{f_n\}$ converge uniformemente, considerando $\frac{\varepsilon}{2}$ .Entonces se cumple que:

$$\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ N\ \in \frac{N}{|f(x) - f_n(x)|} < \frac{\varepsilon}{2}, \forall\ n\ \geq N, x\ \in S.$$

Sea $\sigma_n\ =\ sup\ |f(x) -\ f_n(x)| \leq\ \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$, luego $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = 0$

Ahora, mostraremos que: $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = 0$, entonces la sucesión $\{f_n\}$ converge uniformemente en S:

Como $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = 0$, entonces $\sigma_n = sup\{|f(x) - f_n(x)/x \in\ S|\} \leq 0$, además, σ_n es la menor de las cotas superiores entonces:

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \sigma_n \leq 0 < \varepsilon$$

---

[44] (Burgos, 2007, pág. 528)

Así, $\{f_n\}$ converge uniformemente en S.

2.2 Convergencia de una serie de funciones.

Definición: A partir de la sucesión $\{f_n\}$ se pueden obtener las sumas parciales de sus términos, vale decir:

$$s_1 = f_1, \;\; s_2 = f_1 + f_2, \;\; s_3 = f_1 + f_2 + f_3, \;\; s_n = f_1 + f_2 + f_3 + \cdots + f_n$$

Donde $s_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$, se denomina suma parcial de los n primeros términos y $\{s_n\}$ es la llamada serie de funciones, que se denota por $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$.[45]

2.2.1 Convergencia Puntual.

Definición: Se dice que una serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge puntualmente en S hacia la función $s: S \to R$, que se denomina función suma y se denota $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n\,(x)$ si (s_n) converge puntualmente. Esto es, si para cada $x \in S$ y cada $\varepsilon > 0$ existe un $v \in N$ (que depende de x y ε) tal que:

$$|s(x) - s_n(x)| < \varepsilon \,, \forall\, n \, \geq v$$[46]

2.2.2 Convergencia Uniforme.

Definición: Se dice que una serie de funciones $\sum f_n$ converge uniformemente en S hacia una función $s: S \to R$ (función suma) si su sucesión de sumas parciales $\{s_n\}$ converge uniformemente en S hacia s, es decir, si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $v \in N$ (que depende solo de ε) tal que:

$$|s_n(x) - s(x)| = |r_n(x)| < \; \varepsilon, \forall\, x \, \in S, \forall\, n \, \geq N.$$

Aquí, $r_n(x)$ es el resto n-ésimo de la serie $\sum f_n$, para cada $x \in S$[47]

---

[45] (Ortega, pág. 185)

[46] (Burgos, 2007, pág. 522)

[47] (Burgos, 2007, pág. 525)

Además, si $\sum f_n$ converge uniformemente, también converge puntualmente en S, sin embargo no siempre se cumple el recíproco

Condición de No Convergencia Uniforme

También se establece que una serie de funciones no converge uniformemente si cumple la condición de no convergencia uniforme.

La serie $\sum f_n$ no converge uniformemente en S hacia la función $s: S \to R$ si, y sólo si, existe un $\varepsilon_0 > 0$, existe una sucesión $\{x_n\}$ de puntos de S y existe una subsucesión de $\{s_n\}$ tales que:

$$|s_n(x_n) - s(x_n)| \geq \varepsilon_0, \forall\, n \in N.$$ [48]

2.2.2.1 Caracterizaciones de la Convergencia Uniforme.

Caracterización de Cauchy.

La serie $\sum f_n$converge uniformemente en S (hacia su suma) si y sólo si, para cada $\varepsilon > 0$ existe un $v \in N$ tal que:

$$|f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \ldots + f_{n+h}(x)| < \varepsilon, \forall\, x \in S, \forall\, n \geq v, \forall\, h > 0$$ [49]

Demostración.

Primero, mostraremos que la $\sum f_n$ converge uniformemente, entonces la $\sum f_n$ es de Cauchy.

Como $\sum f_n$ converge uniformemente, entonces $\forall x \in S, n \geq v$ se cumple que:

$$|s_n(x) - s(x)| < \varepsilon$$

[48] (Burgos, 2007, pág. 525)

[49] (Burgos, 2007, pág. 528)

Ahora fijamos n de tal forma que $m > n$, $m = n + h$.

$$|s_m(x) - s_n(x)| = \left|\sum_{k=1}^{n+h} f_k\,(x) - \sum_{k=1}^{n} f_k\,(x)\right|$$

$$= |f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x) + f_{n+1}(x) + \cdots + f_{n+h}(x) - f_1 - f_2 - \cdots - f_n(x)|$$

$$= |f_{n+1}(x) + \cdots + f_{n+h}(x)| < \varepsilon$$

De esta forma concluimos que $\sum f_n$ es de Cauchy. Ahora, probaremos que la $\sum f_n$ es de Cauchy, entonces $\sum f_n$ converge uniformemente.

Como ya demostramos que $\sum f_n$ es de Cauchy, entonces $\sum f_n$ tiene un límite al que llamamos s, por lo tanto, converge, pero debemos probar que su convergencia es uniforme:

Dado $\varepsilon > 0$, $\exists\, v \in N / |s_n(x) - s_{n+h}(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall\, x \in S, n \geq v, h > 0$

Ahora bien, haciendo que $h \to \infty$, tenemos que:

$$\varepsilon > \frac{\varepsilon}{2} \geq |s_n(x) - s_{n+h}(x)| \to |s_n(x) - s(x)|; \quad cuando\ h \to \infty$$

Por lo tanto, probamos que la serie $\sum f_n$ converge uniformemente.

Caracterización del supremo.

La serie $\sum f_n$converge uniformemente en S hacia su suma sí y sólo sí, (llamando s_n y r_n a la suma parcial y resto n-ésimos, respectivamente).

$\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = 0$, siendo $\sigma_n = \sup\{|s(x) - s_n(x)| = |r_n(x)| / x \in S\}$ [50]

[50] (Burgos, 2007, pág. 528)

Demostración.

Mostraremos primero que la $\sum f_n$ converge uniformemente en S hacia su suma $s: S \to R$,

Entonces:

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = 0, \text{ siendo } \sigma_n = \sup\{|s(x) - s_n(x)| = |r_n(x)| / x \in S\}$$

Como $\sum f_n$ converge uniformemente, entonces:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists\, v \in N / |s(x) - s_n(x)| = |r_n(x)| < \varepsilon$$

Sabemos que $\sigma_n = \sup\{|s(x) - s_n(x)| = |r_n(x)| / x \in S\}$, entonces, por definición se supremo se cumple que:

$$|s(x) - s_n(x)| = |r_n(x)| \leq \sigma_n$$

Ahora bien, como $r_n(x)$ es la diferencia (y la más pequeña) y además es menor que ε entonces se cumple que:

$$|r_n(x)| \leq \sigma_n < \varepsilon$$

Lo que significa que:

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = 0$$

Ahora, probaremos que $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = 0$, entonces la serie $\sum f_n$ converge uniformemente en S.

Como $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = 0$, sabemos que $\sigma_n = \sup\{|s(x) - s_n(x)| = |r_n(x)| / x \in S\}$ y como σ_n es la menor de las cotas superiores tenemos que:

$$|s(x) - s_n(x)| = |r_n(x)| \leq \sigma_n \leq 0 < \varepsilon$$

Por lo tanto, la serie $\sum f_n$ converge uniformemente en S.

2.2.2.2 Criterios de Convergencia.

Criterio de Weierstrass.

Sea $\sum f_n$ una serie de funciones $f_n: S \subset R \to R$ y sea $\sum k_n$ una serie de términos reales positivos. Si $|f_n(x)| \leq k_n$ para todo $x \in S$ y cada $n \in N$ (en cuyo caso se dice que $\sum k_n$ es mayorante de $\sum f_n$ en S) y si $\sum k_n$ es convergente, entonces la serie $\sum f_n$ es uniformemente convergente en S.[51]

Demostración.

Sea $\sum k_n$ una serie numérica convergente de términos positivos. De acuerdo al criterio general de convergencia de Cauchy para series numéricas, tenemos que:

$\forall \varepsilon > 0, \exists v \in N / \forall\, q, p > v$ se cumple que $\left|k_{p+1} + k_{p+2} + \ldots + k_q\right| < \varepsilon$

O más bien

$$\sum_{n=p+1}^{q} k_n < \varepsilon$$

Ahora a partir de la caracterización de Cauchy tenemos que:

$$|f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \cdots + f_{n+h}(x)| \leq |f_{n+1}(x)| + |f_{n+2}(x)| + \cdots + |f_{n+h}(x)| \leq$$

$$k_{p+1} + k_{p+2} + \cdots k_q < \varepsilon, \forall\, x \in S$$

Es decir, $|f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \cdots + f_{n+h}(x)| < \varepsilon$, la serie es de Cauchy y por lo tanto converge uniformemente en S.

$$|f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \cdots + f_{n+h}(x)| \leq |f_{n+1}(x)| + |f_{n+2}(x)| + \cdots + |f_{n+h}(x)|$$
$$\leq \sum_{n=p+1}^{q} k_n < \varepsilon$$

De esta manera concluimos que la serie $\sum f_n$converge uniformemente en S.

[51] (Burgos, 2007, pág. 531)

Generalización del criterio de Weierstrass.

Sean $\sum f_n$ y $\sum \varphi_n$ dos series de funciones, reales y definidas en $S \subset R$. Si $|f_n(x)| \leq \varphi_n(x)$ para todo $x \in C$ y cada $n \in N$ (en cuyo caso se dice que $\sum \varphi_n$ es serie mayorante $\sum f_n$ de en S) y si $\sum \varphi_n$ es uniformemente convergente en S, entonces $\sum f_n$ también es uniformemente convergente en S.[52]

Demostración.

Como $\sum \varphi_n$ converge uniformemente en S, de acuerdo a la caracterización de Cauchy para la convergencia uniforme.

$$\forall \in > 0, \exists\, v \ \in N / \varphi_{n+1}(x) + \varphi_{n+2}(x) + \cdots + \ \varphi_{n+h}(x) < \varepsilon$$

$$h > 0, \varphi_n(x) \geq 0, \forall\, x \ \in S, \forall\, n \ \geq v$$

Ahora para verificar que $|f_n(x)| \leq \varphi_n(x)$

$$|f_{n+1}(x) + \cdots + f_{n+h}(x)| \leq |f_{n+1}(x)| + \cdots + |f_{n+h}(x)| \leq \varphi_{n+1}(x) + \cdots + \varphi_{n+h}(x) < \varepsilon$$

Es decir, de acuerdo a la caracterización de Cauchy tenemos que $\sum f_n$ converge uniformemente en S.

Criterio de Dirichlet.

Se considera una serie de funciones $\sum f_n$ y una sucesión de funciones $\{\varphi_n\}$ donde f_n y φ_n son funciones de $S \subset R$ en R. Se verifica que: si la sucesión $\{\varphi_n\}$, converge uniformemente en S hacia la función nula, si la sucesión $\{\varphi_n(x)\}$ es monótona para cada $x \in S$ y si la sucesión $\{s_n\}$ de las sumas parciales de la serie $\sum f_n$ está

[52] (Burgos, 2007, pág. 532)

uniformemente acotada en S[53], entonces la serie $\sum f_n \varphi_n$converge uniformemente en S[54].

Demostración.

Se recurre a la caracterización de Cauchy de convergencia uniforme:

sea $K > 0$ una cota de todas las sumas parciales s_n en S, de forma que $|s_n(x)| \leq K$,

$\forall x \in S\ , n \in N$, y como la sucesión $\{\varphi_n(x)\}$ es monótona, se puede deducir que:

$$\left|f_{n+1}(x) + \cdots + f_{n+p}(x)\right| = \left|s_{n+p}(x) - s_n(x)\right| \leq \left|s_{n+p}(x)\right| + |s_n(x)| \leq 2K$$

Luego se recurre a la desigualdad de Abel.

Desigualdad de Abel:

Dadas dos sucesiones de números reales $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$. Si la sucesión $\{a_n\}$ es monótona (creciente o decreciente) y la serie $\sum b_n$ tiene sus sumas parciales acotadas por k > 0 (esto es, $|b_1 + \ldots + b_n| \leq k$, para todo $n \in N$ es:

$$|a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n| \leq k(|a_1| + 2|a_n|)$$

Demostración.

En primer lugar, llamaremos φ_n a la suma n-ésima de la serie $\sum b_n$, esto es:

$$\varphi_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$$

A partir de esto obtenemos lo siguiente:

$$\varphi_1 = b_1$$

$$\varphi_2 = b_1 + b_2 \rightarrow \varphi_2 - \varphi_1 = b_2$$

$$\varphi_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n \rightarrow \varphi_n - \varphi_{n-1} = b_n$$

---

53 Se dice que una sucesión de funciones esta uniformemente acotada en S, si todas sus funciones están acotadas en S y admiten una misma cota K.

54 (Burgos, 2007, pág. 533)

Luego tenemos que:

$$\begin{aligned} &a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + \cdots + a_nb_n \\ &= a_1\varphi_1 + a_2(\varphi_2 - \varphi_1) + a_3(\varphi_3 - \varphi_2) + a_n(\varphi_n - \varphi_{n-1}) \\ &= a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 - a_2\varphi_1 + a_3\varphi_3 - a_2\varphi_2 + \cdots a_n\varphi_n - a_n\varphi_{n-1} \\ &= \varphi_1(a_1 - a_2) + \varphi_2(a_2 - a_3) + \cdots + \varphi_{n-1}(a_{n-1} - a_n) + \varphi_n a_n \end{aligned}$$

Recurriendo a la desigualdad triangular, tenemos:

$$\begin{aligned} &|a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n| \\ &\leq |a_1 - a_2||\varphi_1| + |a_2 - a_3||\varphi_2| + \cdots + |a_{n-1} - a_n||\varphi_{n-1}| + |a_n||\varphi_n| \\ &\leq [|a_1 - a_2| + |a_2 - a_3| + \cdots + |a_{n-1} - a_n|]k + |a_n|k \end{aligned}$$

(Pues las sumas parciales de $\sum b_n$ están acotadas).

Luego como la sucesión $\{a_n\}$ es monótona, ocurre que todas las diferencias $a_i - a_{i+1}$ tienen el mismo signo, es decir:

$$|a_i - a_{i+1}| = \begin{Bmatrix} a_i - a_{i+1} & ; si\ \{a_n\}\ es\ decreciente \\ a_{i+1} - a_i & ; si\ \{a_n\}\ es\ creciente \end{Bmatrix}$$

Eliminando de esta manera términos de la desigualdad, quedando solo el primer y último término, es decir: $|a_1 - a_n|$.

$$|a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n| \leq |a_1 - a_n|k + |a_n|k$$

$$\leq (|a_1| + |-a_n|)k + |a_n|k \leq k(|a_1| + 2|a_n|)$$

Retomando nuestra demostración, tenemos que:

$$\left|f_{n+1}(x)\varphi_{n+1}(x) + \cdots + f_{n+p}(x)\varphi_{n+p}(x)\right| \leq 2k\left(|\varphi_{n+1}(x)| + 2\left|\varphi_{n+p}(x)\right|\right) \quad (1)$$

Además, si se considera un ε_0 cualquiera, y como $\{\varphi_n\}$ converge uniformemente en S hacia la función nula, existe un $v \in N$ tal que se cumpla:

$$|\varphi_n(x)| < \frac{\varepsilon}{6k}, \forall n \geq v, \forall x \in S$$

Entonces: $\forall x \in S$

$$2K\left(|\varphi_{n+1}(x)| + 2\left|\varphi_{n+p}(x)\right|\right) < 2K\left(\frac{\varepsilon}{6K} + 2\frac{\varepsilon}{6K}\right) = \varepsilon \qquad (2)$$

Finalmente, de (1) y de (2) se deduce que:

$$\left|f_{n+1}(x)\varphi_{n+1}(x) + \cdots + f_{n+p}(x)\varphi_{n+p}(x)\right| < \varepsilon, \forall n \geq v, \forall p > 0, \forall x \in S$$

Demostrando que $\sum f_n \varphi_n$ converge uniformemente en S.

Consecuencia del Criterio de Dirichlet.

Un caso particular de este criterio ocurre cuando se considera la sucesión $\{a_n\}$ monótona de números reales con $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ y si $\sum f_n$ es una serie de funciones, de $S \subset R$ en R, que tiene su sucesión $\{s_n\}$ de sumas parciales uniformemente acotadas (cota común) en S, entonces la serie de funciones $\sum a_n f_n$ converge uniformemente en S.

Siguiendo la demostración anterior, basta considerar una función constante φ_n

$x \to \varphi_n(x) = a_n$, entonces $\sum f_n\varphi_n = \sum a_n f_n$ que es uniformemente convergente en S.[55]

Criterio de Abel

Se considera una serie de funciones $\sum f_n$ y una sucesión de funciones $\{\varphi_n\}$ donde f_n y φ_n son funciones de $S \subset R$ en R. Se verifica que: si la sucesión $\{\varphi_n\}$ está uniformemente acotada en S, si la sucesión $\{\varphi_n(x)\}$ es monótona para cada $x \in S$.

55 (Burgos, 2007, pág. 534)

y si la serie $\sum f_n$es uniformemente convergente en S, entonces la serie $\sum f_n \varphi_n$ converge uniformemente en S[56].

Demostración.

Como φ_n está uniformemente acotada llamaremos $K > 0$ a una cota de todas las funciones, tal que $|\varphi_n(x)| \leq K$ para $x \in S$. Además, como la serie $\sum f_n$ converge uniformemente en S a través de la caracterización de Cauchy:

Tenemos que:

$$\left|f_{n+1}(x) + \cdots + f_{n+p}(x)\right| < \frac{\varepsilon}{3K}, \forall n \geq v, p > 0, \forall x \in S^{57}$$

Anteriormente la monotonía de $\{\varphi_n(x)\}$, para $todo\ x \in S$, nos permite recurrir a la desigualdad de Abel, de donde se deduce que:

$$\left|f_{n+1}(x)\varphi_{n+1}(x) + f_{n+p}(x)\varphi_{n+p}(x)\right| < \frac{\varepsilon}{3K}(\left|\varphi_{n+1}(x) + 2\left(\varphi_{n+p}(x)\right)\right|)$$

Dado que $\left|\varphi_{n+p}(x)\right| < K$, por lo tanto, podemos plantear lo siguiente:

$$\left|f_{n+1}(x)\varphi_{n+1}(x) + f_{n+p}(x)\varphi_{n+p}(x)\right| < \frac{e}{3K} \cdot 3K = \varepsilon, \forall n \geq v, \forall p > 0, \forall x \in S$$

Armando de esta manera que la serie $\sum f_n \varphi_n$ converge uniformemente en S.

Consecuencia del Criterio de Abel

Si $\sum k_n$ es una serie convergente de números reales, si $\{\varphi_n\}$ es una sucesión de funciones, de $S \subset R$ en R, que está uniformemente acotada (es decir, si las funciones φ_n tienen una cota común) en S y si la sucesión $\{\varphi_n(x)\}$ es monótona

[56] (Burgos, 2007, pág. 533)
[57] (Burgos, 2007, pág. 534)

para cada $x \in S$, entonces la serie de funciones $\sum k_n\varphi_n$ converge uniformemente en S.[58]

Demostración.

Debemos tener en consideración que el criterio de Abel trata a f_n como una función cualquiera, en el caso particular de Abel se considera a f_n como una función constante.

Por lo tanto, tenemos:

Sea f_n una función constante, donde $x \to f_n(x) = kn, \forall n \in N$. En este caso se trabaja con la serie convergente de números reales $\sum k_n$.

Es evidente que para $\{\varphi_n\}$ y $\sum f_n$ se cumplen condiciones ya vistas del criterio de Abel, luego tenemos que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n\varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty} k_n\varphi_n$$

Por lo tanto, podemos armar que $\sum_{n=1}^{\infty} k_n\varphi_n$converge uniformemente en S.

58 (Burgos, 2007, pág. 535)

3. Análisis de Funciones.

En el último apartado pretendemos indagar en distintas funciones, señalar sus principales propiedades y vincular cada una de estas con nuestro marco teórico con el fin de poder escribir cada una de las funciones como una serie.

Pero antes de eso debemos agregar algunas demostraciones de derivabilidad e integrabilidad puesto que serán utilizadas más adelante.

Demostración Integralidad de las funciones Limite (de una sucesión) y suma (de una serie)

Sea (f_n) una sucesión de funciones reales $f_n: [a,b] \to R$, que están todas definidas en un mismo intervalo compacto $[a,b]$ subconjunto de los Reales, se verifica que:

3. Si la sucesión de funciones (f_n) converge uniformemente en $[a,b]$ hacia su función limite $f: [a,b] \to R$ y si las funciones f_n son integrables en $[a,b]$, entonces f también es integrable en $[a,b]$ y su integral $\int_a^x f$ es el límite uniforme de la sucesión de integrales $\left(\int_a^x f_n\right)$ para $x \in [a,b]$, de forma que:[59]

$$\int_a^x \left(\lim_{n\to\infty} f_n(t)\right) dt = \lim_{n\to\infty} \left(\int_a^x f_n(t)dt\right) \quad (este\ limite\ es\ uniforme\ para\ x \in\ [a,b])$$

4. Si la serie de funciones $\sum f_n$ converge uniformemente en $[a,b]$ hacia su función suma $s: [a,b] \to R$ y si las funciones f_n son integrables en $[a,b]$, entonces s también es integrable en $[a,b]$ y su integral $\int_a^x S$ es la suma uniforme de la serie de integrales $\sum \int_a^x f_n$ para $x \in [a,b]$, de forma que:

$$\int_a^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\right) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_a^x f_n(t)dt\right) \quad (esta\ suma\ es\ uniforme\ para\ x \in\ [a,b])$$

Demostración.

[59] (Burgos, 2007, pág. 541)

La segunda propiedad es consecuencia de la primera: aquella se demuestra aplicando a esta última a la sucesión (s_n) de las sumas parciales de la serie $\sum f_n$.[60]

Solo nos preocuparemos de comprobar el primer punto.

Probemos en primer lugar que f es integrable en $[a,b]$, esto es, que para cada $\varepsilon > 0$, cualquiera existe una partición P_0 de $[a,b]$ tal que las sumas superior e inferior de f correspondientes a la partición P_0 difieren en menos de ε, o sea, que:

$$S(f,P_0) - s(f,P_0) < \varepsilon$$

Así es, en efecto: dado que (f_n) converge uniformemente hacia f en $[a,b]$, existe un $v \in N$ tal que:

$$|f(x) - f_v(x)| < \frac{\varepsilon}{3(b-a)}, \qquad \forall\, x \in [a,b]$$

O sea, verificándose que

$$f_v(x) - \frac{\varepsilon}{3(b-a)} < f(x) < f_v(x) + \frac{\varepsilon}{3(b-a)}, \quad \forall\, x \in [a,b]$$

Por tanto, para cualquiera que sea la partición P de $[a,b]$, se tiene:

$$s(f,P) > s(f_v,P) - \frac{\varepsilon}{3} \qquad y \qquad S(f,P) < S(f_v,P) + \frac{\varepsilon}{3} \qquad (1)$$

Por otra parte, como f_v es integrable en $[a,b]$, existe una partición P_0 de $[a,b]$ tal que

$$S(f_v,P_0) - s(f_v,P_0) < \frac{\varepsilon}{3} \qquad\qquad (2)$$

Acudiendo a las relaciones que se obtienen tomando $P = P_0$ en (1) y de (2), se concluye que:

$$S(f,P_0) - s(f,P_0) = [S(f,P_0) - S(f_v,P_0] + [S(f_v,P_0) - s(f_v,P_0] +$$

$$+\left[s(f_v,P_0) - s(f,P_{0)}\right] < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

Lo que prueba que f es integrable en $[a,b]$. Nos queda aún por comprobar que $\left(\int_a^x f_n\right)$ converge uniformemente hacia $\int_a^x f$ para $x \in [a,b]$. Así ocurre, ya que: dado $\varepsilon > 0$, como (f_n) converge uniformemente en $[a,b]$ hacia f, existe $v' \in N$ tal que

$$|f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}, \quad \forall\, n \geq v', \forall\, x \in [a,b]$$

[60] (Burgos, 2007, pág. 542)

Por tanto, para $n \geq v'$ y $x \in [a,b]$, se verifica que:

$$\left|\int_a^x f(t)dt - \int_a^x f_n(t)dt\right| \leq \int_a^x \big(f(t) - f_n(t)\big)dt \leq (x-a)\frac{\varepsilon}{2(b-a)} \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

Lo que prueba la convergencia uniforme de $(\int_a^x f_n)$ hacia $\int_a^x f$ para $x \in [a,b]$.

Demostración Derivabilidad de las funciones Limite (de una sucesión) y suma (de una serie)

Sea (f_n) una sucesión de funciones reales $f_n: I \to R$, que están todas definidas en un mismo intervalo acotado I. se verifica que:

1. Si las funciones f_n son derivables en I, si la sucesión de las derivadas (f'_n) es uniformemente convergente en I y si existe algún $a \in I$ tal que la sucesión numérica $(f_n(a))$ es convergente, entonces (f_n) converge uniformemente en I hacia una función (limite), la cual que es derivable, en I, cuya derivada es el limite de (f'_n) de manera que:[61]

$$D\left[\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right] = \lim_{n\to\infty} D[f_n(x)] \qquad (este\ limite\ es\ uniforme\ para\ x \in I)$$

2. Si las funciones f_n son derivables en I, si la serie de las derivadas $\sum f'_n$ es uniformemente convergente en I y si existe algún $a \in I$ tal que la serie numérica $\sum f_n(a)$ es convergente, entonces $\sum f_n$ converge uniformemente en I hacia una función (suma), la cual es derivable, en I, y cuya derivada es la suma de $\sum f'_n$ de manera que:

$$D\left[\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} D[f_n(x)] \quad (esta\ suma\ es\ uniforme\ para\ x \in I)$$

Demostración.

La segunda propiedad se deduce, de la primera, al aplicar esta a las sucesiones de las sumas parciales de las series $\sum f_n$ y $\sum f'_n$. Solo nos ocuparemos, pues en comprobar la primera.[62]

Para la demostración, vamos a recurrir a una sucesión de funciones auxiliares (φ_n), donde $\varphi_n: I \to R$ es la función:

[61] (Burgos, 2007, pág. 544)

[62] (Burgos, 2007, pág. 545)

$$\varphi_n(x) = \frac{f_n(x) - f_n(a)}{x - a}, si\ x \neq a\ ; \quad \varphi_n(a) = f'_n(a) \qquad (1)$$

Comprobemos, en primer lugar, que las funciones φ_n son continuas en I. Así es pues:

i. En el conjunto $I - \{a\}$, la función $\varphi_n($ para cualquier $n \in N)$ es cociente de funciones continuas con denominador no nulo, luego es continua.
ii. En el punto a, la continuidad la garantiza el que, según se desprende de (1), sea

$$\lim_{x \to a} \varphi_n(x) = f'_n(a) = \varphi_n(a)$$

Demostraremos ahora que (φ_n) es una sucesión uniformemente convergente en I, para ellos pongamos que:

$$\varphi_p(x) - \varphi_q(x) = \frac{\left[f_p(x) - f_q(x)\right] - \left[f_p(a) - f_q(a)\right]}{x - a}, \forall\ x\ \in I, \forall\ p, q\ \in N$$

Y apliquemos el teorema de los incrementos finitos a la función $t \to \left[f_p(t) - f_q(t)\right]$ en el intervalo cuyos extremos son los puntos $x, a\ \in I$, de lo que se obtiene que existe un punto ב $\in I$, comprendido entre los x y a tal que:

$$\left[f_p(x) - f_q(x)\right] - \left[f_p(a) - f_q(a)\right] = (x - a)\left[f'_p(\text{ב}) - f'_q(\text{ב})\right]$$

Lo que llevado a la anterior expresión de $\varphi_p(x) - \varphi_q(x)$ nos conduce a

$$\varphi_p(x) - \varphi_q(x) = f'_p(\text{ב}) - f'_q(\text{ב})\ , \forall\ x\ \in I - \{a\}$$

(2)

$$\varphi_p(a) - \varphi_q(a) = f'_p(a) - f'_q(a) \qquad segun\ (1)$$

Para cualquiera que sea $\varepsilon > 0$ como (f'_n) converge uniformemente en I y según la caracterización de Cauchy de la convergencia uniforme, existe $v\ \in N$ tal que:

$$\left|f'_p(x) - f'_q(x)\right| < \ \varepsilon \qquad \forall\ x\ \in I, \forall\ p, q\ \geq v$$

Por lo tanto, de (2) se deduce que

$$\left|\varphi_p(t) - \varphi_q(t)\right| < \varepsilon \qquad \forall\ t\ \in I, \forall\ p, q\ \geq v$$

(nótese que esto es así, tanto si es $t \neq a$ como si $t = a$, ya que a y la ב de (2) pertenecen ambas a I) lo que nos permite asegurar que (φ_n) es uniformemente convergente en I, lo que nos permite asegurar que (φ_n) es uniformemente convergente en I. Llamemos $\varphi: I\ \to R$ a la función limite (uniforme) de (φ_n) en I.

Veamos que la sucesión $\{f_n\}$ converge uniformemente en I. Recurriendo también aquí, a las funciones φ_n, podemos decir que para $p, q \in N$ y $x\ \in I$, que

$$f_p(x) = f_p(a) + (x-a)\varphi_p(x) \qquad y\ f_q(x) = f_q(a) + (x-a)\varphi_q(x)$$

Luego, restando y tomando valores absolutos, se tiene:

$$\left|f_p(x) - f_q(x)\right| \leq \left|f_p(a) - f_q(a)\right| + |x-a|\left|\varphi_p(t) - \varphi_q(t)\right|, \forall\, x\ \in I, \forall\, p, q\ \in N$$

Dado $\varepsilon > 0$ (cualquiera) y acudiendo a la caracterización de Cauchy de la convergencia uniforme, como (φ_n) es uniformemente convergente en I, existe $v_1 \in N$ tal que (llamamos δ a la amplitud del intervalo acotado I):

$$\left|\varphi_p(x) - \varphi_q(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2\delta} \quad \forall\, p\ \geq\ v_1, \forall\, q\ \geq\ v_1, \forall\, x\ \in I$$

Como la sucesión numérica $\left(f_n(a)\right)$ es convergente, existe $v_2\ \in N$ tal que:

$$\left|f_p(a) - f_q(a)\right| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall\, p\ \geq v_{2,} \forall \geq v_2$$

Por tanto, llamando $v = \max\{v_1, v_2\}$, de las tres últimas relaciones se infiere que:

$$\left|f_p(a) - f_q(a)\right| < \frac{\varepsilon}{2} + |x-a|\frac{\varepsilon}{2\delta} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \forall\, p\ \geq v, \forall\, x\ \in I.$$

Por lo que (f_n) es uniformemente convergente en I. Llamemos $f\colon I \to R$ el límite (uniforme) de la sucesión (f_n).

Para terminar, comprobemos que f es derivable en I y que su derivada es el límite (uniforme) de (f'_n), al que llamaremos $g\colon I \to R$; es decir veamos que es $f' = g$ en I. Bastara con que demostremos que existe $f'(a)$ y que es $f'(a) = g(a)$, ya que para cualquier otro punto b de I, como $(f_n(b))$ es convergente por serlo f_n en I, se verifican las mismas condiciones que en a y por ello, lo que se diga para a será, también, de aplicación a b. Por ser (φ_n) uniformemente convergente en I y como las funciones φ_n son continuas en I, se puede asegurar que φ es una función continua en I. En particular, que existe el límite de $\varphi(x)$ para $x \to a$ y que vale $\varphi(x)$. Ahora bien, como[63]

$$\varphi(a) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(a) = \lim_{n\to\infty} f'_n(a) = g(a)$$

$$\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f_n(x) - f_n(a)}{x-a} = \frac{f(x) - f(a)}{x-a}$$

Nos encontramos con que:

Existe $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ y vale $g(a)$

Es decir, con que existe $f'(a)$ y es igual a $g(a)$, como había que probar.

[63] (Burgos, 2007, pág. 546)

3.1 Logaritmo Natural

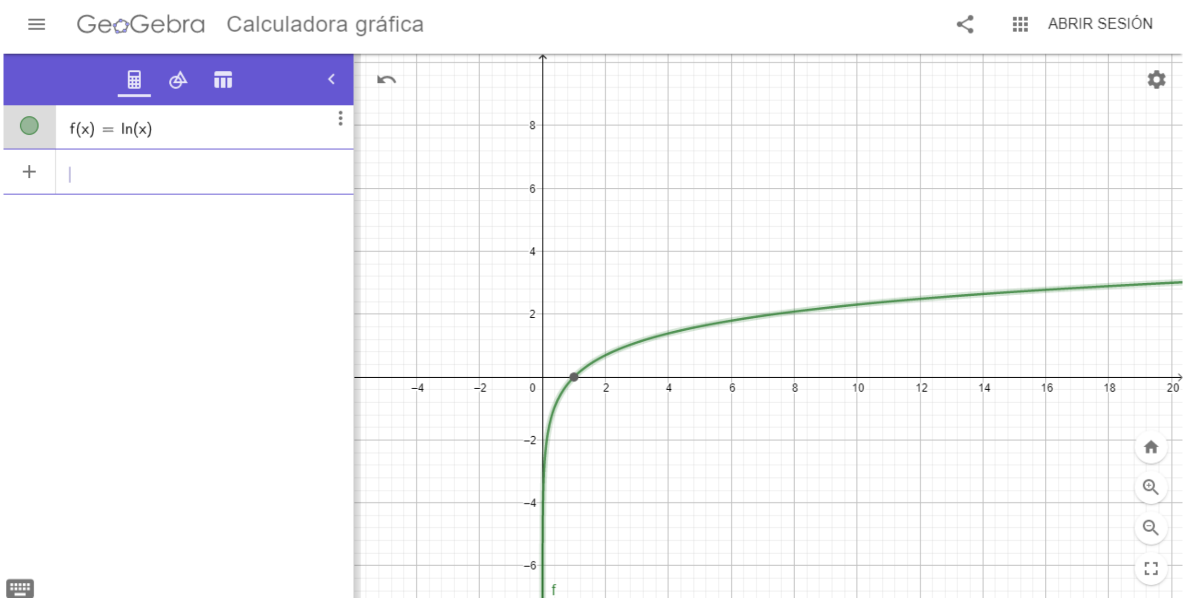


Figura 8: "Representación de la función Logaritmo Natural."

Definición: La regla de correspondencia

$$ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}dt = I^{-1}$$

Define una función con dominio $D_{ln} = (0, \infty)$ a esta función se le denomina logaritmo natural o simplemente logaritmo.

A raíz de la definición y del análisis del grafico se deduce que $\ln(x)$ es positiva para x > 1 y negativa para 0 < x < 1; además que $ln(1) = 0$.[64]

Propiedades de la función logaritmo Natural.

1. El dominio es de $(0, \infty)$ y el recorrido o rango es $(-\infty, \infty)$.
2. La función es continua, creciente e inyectiva.
3. La grafica es cóncava hacia abajo.

---

64 (Larson & H. EDWARS, 2010, pág. 324)

4. $\left(ln(x)\right)' = \frac{1}{x}$ por el teorema fundamental del cálculo.[65]

Demostración.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\ln(x+h)-\ln x}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\ln(\frac{x+h}{x})}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\ln(\frac{x}{x}+\frac{h}{x})}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(1+\frac{h}{x})}{x\cdot\frac{h}{x}} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\frac{h}{x}}\cdot\ln\left(1+\frac{h}{x}\right) =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{h}\cdot\ln\left(1+\frac{h}{x}\right) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{x}\cdot\ln(1+\frac{h}{x})^{\frac{x}{h}} = \frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\ln(1+\frac{h}{x})^{\frac{x}{h}} =$$

$$= \frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\ln(1+\frac{1}{\frac{x}{h}})^{\frac{x}{h}} = \frac{1}{x}\cdot\ \ln\cdot\ \lim_{h\to 0}(1+\frac{1}{\frac{x}{h}})^{\frac{x}{h}} = \frac{1}{x}\cdot\ln e = \frac{1}{x}$$

5. Su integral es $\int ln(x)dx = x\cdot ln(x) - x + C$

6. $\ln(x)$ escrito como serie.

Ahora escribiremos $\ln(x)$ como una serie de Taylor

Recordemos que la serie de Taylor (fin de la serie de Taylor)

$$f(x) = f(c) + \frac{f'(c)}{1!} + \frac{f''(c)}{2!} + \frac{f'''(c)}{3!} + \cdots + \frac{f^{n'}(c)}{n!}$$

Para poder hacer esto utilizaremos

$$f(x) = \ln x \qquad ;\ x_0 = 1$$

Comenzaremos calculando las derivadas respectivas

$$f(x) = \ln x \quad f'(x) = \frac{1}{x}\ o\ x^{-1} \quad f''(x) = -x^{-2} \quad f'''(x) = 2x^{-3} \quad f^{(4)}(x) = -6x^{-4}$$

Reemplazando con el valor de x_0 tenemos lo siguiente:

$$f(1) = \ln 1 = 0\,;\ f'(1) = \frac{1}{1};\ \ f''(1) = -(1)^{-2} = -1$$

[65] (Cesar, pág. 1)

$$f'''(1) = 2 \cdot 1^{-3} = 2; \; f^{(4)}(1) = -6 \cdot 1^{-4} = -6$$

Ahora reemplazando:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} + \frac{f''(x_0)}{2!} + \frac{f'''(x_0)}{3!} + \cdots + \frac{f^{n'}(x_0)}{n!}$$

$$f(x) = 0 + \frac{1}{1!}(x-1) + \frac{-1}{2!}(x-1)^2 + \frac{2}{3!}(x-1)^3 + \frac{-6}{4!}(x-1)^4$$

$$f(x) = 0 + (x-1)^1 - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{4}(x-1)^4 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \; (x-1)^n$$

Veamos ahora su radio de convergencia

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$$

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| \quad \mathit{converge\ en}\ |x-a| < R$$

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(-1)^{n+1}}{n}}{\frac{(-1)^{n+2}}{(n+1)}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}(n+1)}{(-1)^{n+2} n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n+1}{-n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$$

La serie converge en $|x-1| < 1$ $\qquad 0 < x < 2$

Si $x = 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n+1}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n}(-1)}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}, \mathit{diverge}$$

Si $x = 2$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \qquad \mathit{serie\ alternante}\ \frac{1}{n}\ \mathit{es\ decreciente}$$

$$\mathit{por\ lo\ tanto\ la\ serie\ converge}$$

Así quedaría definida la serie de Taylor de Logaritmo Natural de x.

3.2 Función Exponencial Natural.

La función inversa de la función logaritmo natural $f(x) = ln\ x$ se llama función exponencial natural y se denota por:$f^{-1}(x) = e^{x}$, esto es $y = e^{x}\ si\ y\ solo\ si\ x = \ln y$

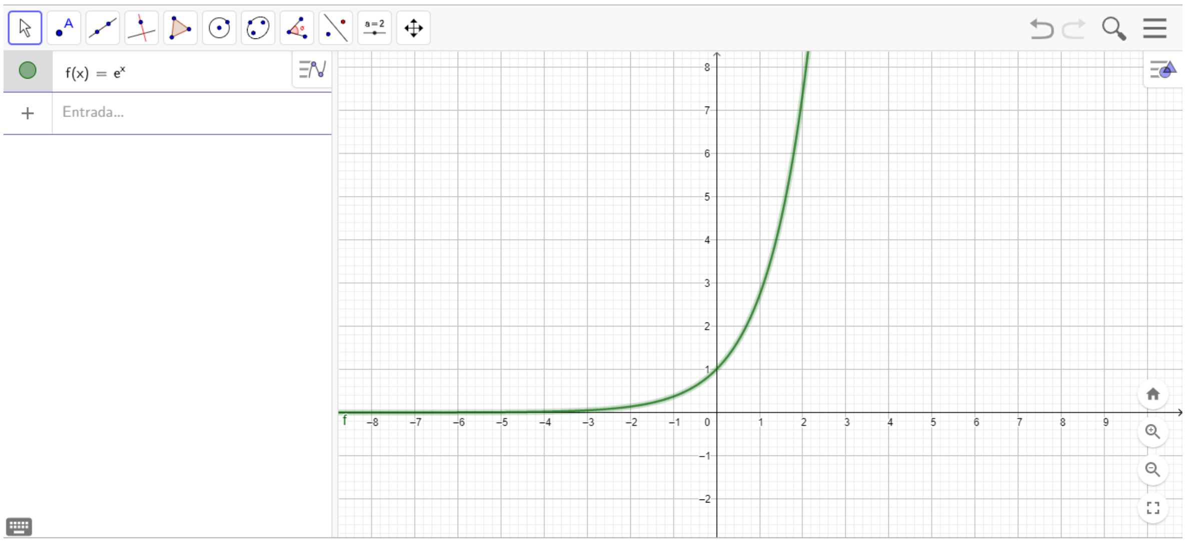


Figura 9: "Representación de la función Exponencial Natural."

A simple vista podemos decir que la función exponencial natural es creciente y su grafica cóncava hacia arriba

Propiedades de la función exponencial natural.

1. El dominio de $f(x) = e^{x}$ es $(-\infty, \infty)$ y el rango es $(0, \infty)$.
2. La función $f(x) = e^{x}$ es continua, creciente e inyectiva en todo su dominio.
3. La grafica de la función $f(x) = e^{x}$ es cóncava hacia arriba en todo su dominio.
4. $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x} = 0$ y $\lim\limits_{x\to\infty} e^{x} = 0$

5. $(e^x)' = e^x$ por el teorema fundamental del cálculo.[66]

$$f(x) = \ln x$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{e^{(x+h)} - e^x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^x \cdot e^h - e^x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^x(e^h - 1)}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^x(1+h)^{\frac{h}{h}} - 1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^x(1+h-1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^x \cdot h}{h} = e^x$$

6. Su integral es $\int e^x dx = e^x + C$
7. e^x escrito como serie de Maclaurin

$$f(x) = e^x \; alrededor \; de \; x_0 = 0$$

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)x}{1!} + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{n'}(0)}{n!}x^n$$

$$f(x) = e^x \quad f'(x) = e^x \quad f''(x) = e^x \quad f'''(x) = e^x$$

$$f(0) = e^0 = 1 \qquad f'(0) = e^0 = 1$$

$$f(x) = 1 + \frac{1\cdot x}{1} + \frac{1\cdot x^2}{2} + \frac{1\cdot x^3}{6} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1\cdot x^n}{n!}$$

Veamos ahora su radio de convergencia

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$$

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| \quad converge \; en \; |x-a| < R$$

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\frac{(1)^n}{n!}}{\frac{(1)}{(n+1)!}^{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(1)^n(n+1)!}{(1)^{n+1}n!}\right| = \lim_{n\to\infty} |n+1| = \lim_{n\to\infty} n+1 = \infty$$

---

66 (Cesar, pág. 1)

3.3 Seno del Ángulo.

Una función trigonométrica es aquella que da el valor de una razón trigonométrica en función del ángulo y ahora analizaremos la función seno.[67]

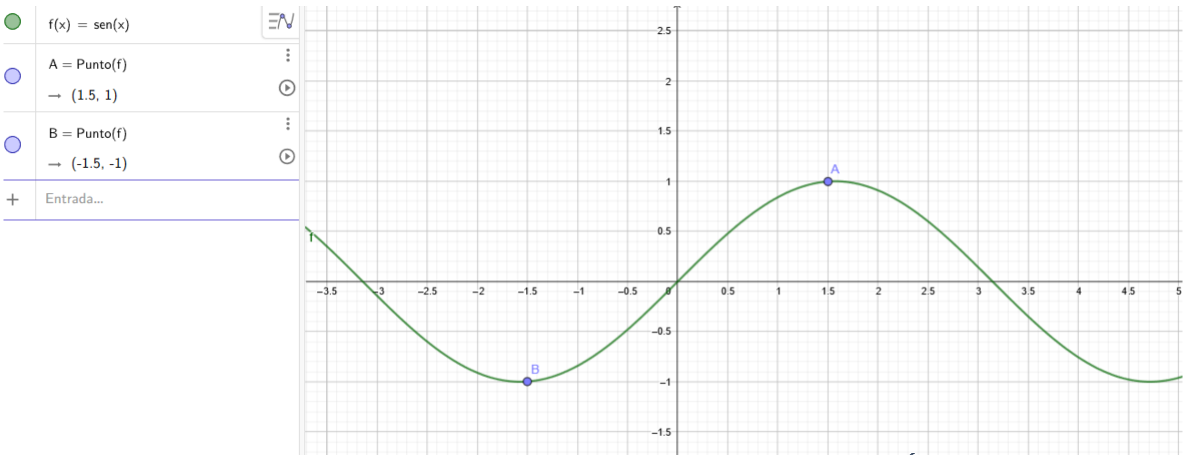


Figura 10: "Representación de la función Seno del Ángulo."

Propiedades de la función seno

1. El dominio de $f(x) = sen(x)$ es $(-\infty, \infty)$ y el rango es $[-1,1]$.
2. La función $f(x) = sen(x)$ es continua en todo Reales.
3. La gráfica de la función $f(x) = sen(x)$ es positiva en el intervalo $(0, \pi)$ y negativa $(\pi, 2\pi)$
4. $\left(sen(x)\right)' = \cos(x)$, por teorema fundamental del cálculo.

$$f(x) = \sin(x)$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h}$$

Por identidad trigonométrica del seno

$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$$

Aplicando esta identidad.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x)\cos(h) + \cos(x)\sin(h) - \sin(x)}{h} =$$

[67] (Eduardo, s.f.)

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x)\cos(h) - \sin(x)}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x)\sin(h)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\sin(x)\,(\frac{\cos(h) - 1}{h}) + \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x)\sin(h)}{h}$$

$$= \sin(x)\lim_{h\to 0}\frac{\cos(h) - 1}{h} + \cos(x)\lim_{h\to 0}\frac{\sin(h)}{h} = \sin(x)\cdot 0 + \cos(x)\cdot 1 = \cos(x)$$

5. $\int \sin(x)\,dx = -\cos(x) + C$
6. $sen(x)$ escrito como serie de Maclaurin

$$f(x) = sen(x)\ alrededor\ de\ X_0 = 0$$

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)x}{1!} + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^n(0)}{n!}x^n$$

Tenemos que:

$f(x) = sen(x)$ $f'(x) = \cos(x)$ $f''(x) = -sen(x)$ $f'''(x) = -\cos(x)$ $f^{(4)}(x) = sen(x)$

Ahora evaluamos las derivadas:

$$f(0) = 0\,, f'(0) = 1\,, f''(0) = 0\,, f'''(0) = -1\,, f^{(4)}(0) = 0$$

La serie de Taylor es:

$$f(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 - \frac{1}{11}x^{11} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

Por lo tanto: sen(x)= $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

Veamos ahora su radio de convergencia, utilizamos el criterio de razón

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n\,,converge\ si\ lim_{n\to\infty}} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$$

$$lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^{n+1}x^{2(n+1)+1}}{(2(n+1)+1)!}}{\frac{(-1)^{n}x^{2n+1}}{(2n+1)!}}\right|$$

$$lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}(2n+1)!\,x^{2n+3}}{(-1)^{n}(2n+3)!\,x^{2n+1}}\right|$$

$$lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n}(-1)(2n+1)!\,x^{2n+1}x^{2}}{(-1)^{n}(2n+3)(2n+2)(2n+1)!\,x^{2n+1}}\right|$$

$$lim_{n\to\infty}\ \frac{x^{2}}{(2n+3)(2n+2)} = 0\ < 1, \forall\, X$$

Por lo cual la serie es convergente.

3.4 Coseno del Angulo.

Una función trigonométrica es aquella que da el valor de una razón trigonométrica en función del ángulo y ahora analizaremos la función coseno.[68]

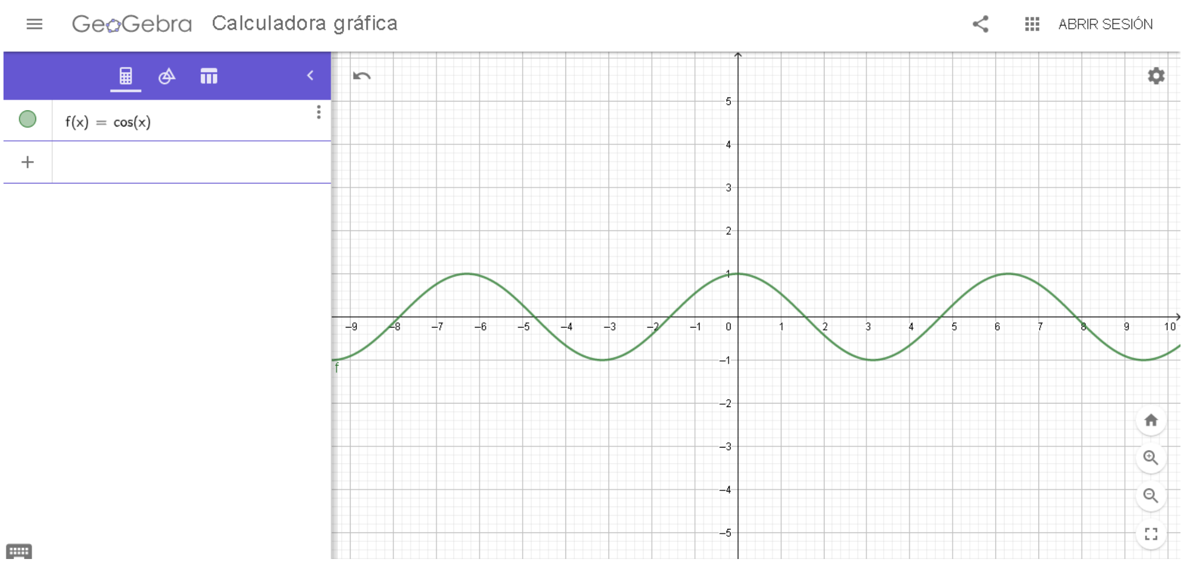


Figura 11: "Representación de la función Coseno del Ángulo."

Propiedades de la función coseno

1. El dominio de $f(x) = \cos(x)$ es $(-\infty, \infty)$ y el rango $[-1,1]$.
2. La función $f(x) = \cos(x)$ es continua en todos los Reales.
3. $(cos(x))' = -\text{sen}(x)$, por teorema fundamental del cálculo.

$$f(x) = \cos(x)$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h}$$

Por identidad trigonométrica del coseno.

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$

Utilizando esta identidad

[68] (Eduardo, s.f.)

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x)\cos(h) - \sin(x)\sin(h) - \cos(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x)\cos(h) - \cos(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x)\sin(h)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \cos(x)(\frac{\cos(h) - 1}{h}) + \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x)\sin(h)}{h} =$$

$$= \cos(x) \lim_{h\to 0} \frac{\cos(h) - 1}{h} + \sin(x) \lim_{h\to 0} \frac{\sin(h)}{h} =$$

$$= \cos(x) \cdot 0 - \sin(x) \cdot 1 = -\sin(x)$$

4. $\int \cos(x)\, dx = \sin(x) + C$

5. $\cos(x)$ escrito como serie de Maclaurin.

$$f(x) = \cos(x) \;\; alrededor\ de\ X_0 = 0$$

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)x}{1!} + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^n(0)}{n!}x^n$$

Tenemos que:

$$f(x) = \cos(x) \quad f'(x) = -\sin(x) \quad f''(x) = -\cos(x) \quad f'''(x) = \sin(x)$$

$$f^{(4)}(x) = \cos(x)$$

Ahora evaluamos las derivadas:

$$f(0) = 1\,, f'(0) = 0\,, f''(0) = -1\,, f'''(0) = 0\,, f^{(4)}(0) = 1$$

La serie de Tylor es:

$$f(x) = 1 + \frac{0\cdot x}{1!} + \frac{1\cdot x^2}{2!} + \frac{0\cdot x^3}{3!} + \frac{1\cdot x^4}{4!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!}x^{2n}$$

Por lo tanto:

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

Veamos ahora su radio de convergencia, utilizamos el criterio de razón

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n\ ,converge\ si\ lim_{n\to\infty}} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^{n+1}x^{2(n+1)}}{(2(n+1)!)}}{\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}x^{2(n+1)}(2n)!}{(2(n+1)!)(-1)^n x^{2n}}\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n(-1)(2n)!\,x^{2n}x^2}{(-1)^n(2n+2)(2n+1)(2n)!\,x^{2n}}\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{x^2}{(2n+1)(2n+1)} = 0 < 1, \forall x \in R$$

Por lo cual la serie es convergente.

Bibliografía

ALFONSECA MORENO, M. (7 de FEBRERO de 2017). *ASOCIACION ESPAÑOLA DE COMUNICACIÓN CIENTÍFICA*. Obtenido de ASOCIACION ESPAÑOLA DE COMUNICACIÓN CIENTÍFICA: https://www.aecomunicacioncientifica.org/el-problema-de-aquiles-y-la-tortuga/

APOSTOL, T. (1999). *Cálculo con funciones de una variable, con una introducción al álgebra lineal* (2 ed., Vol. 1). ESPAÑA.

ARMENTA, E. T. (2003). EL CÁLCULO SEGÚN EULER. *APUNTE DE HISTORIA DE LAS MATEMATICAS*, 19-26. Obtenido de Eduardo Tellechea Armenta

BRUZUAL, R., & DOMINGUEZ, M. (2005). *INTRODUCCIÓN A LAS SUCESIONES Y SERIES NUMÉRICAS.* UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA, FACULTAD DE CIENCIA. Obtenido de http://www.matematica.ciens.ucv.ve/labfg/mat3/ssmat3.pdf

Burgos, J. D. (2007). *CÁLCULO INFINITESIMAL DE UNA VARIABLE 2ED.* McGraw-Hill.

Cesar, R. (s.f.). *ANALISIS MATEMATICO BASICO.*

(s.f.). *Convergencia puntual y uniforme de las series de Fourier: teorema de Dirichlet y necesidad de la regularidad.* LAFA. Laboratorio de Analisis de Fourier Aplicado. Obtenido de Convergencia puntual y uniforme de las series de Fourier: teorema de Dirichlet y necesidad de la regularidad. (s.f.). LAFA. Laboratorio de Analisis de Fourier Aplicado, 3. Obtenido de http://www4.ujaen.es/~jmalmira/series_fourier_almira.pdf

DÍAZ GÓMEZ, J. L. (s.f.). *OPERACIONES CON FUNCIONES.* UNIVERSIDAD DE SONORA, DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS.

GUTIÉRREZ VÁZQUEZ, S. (JUNIO de 2007). CAUCHY: EL TRIUNFO DEL RIGOR. *REVISTA SUMA*, 83-89. Obtenido de https://revistasuma.es/revistas/55-junio-2007/cauchy-el-triunfo-del-rigor.html

Guzman, M. d. (2007). ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS Y LAS MATEMATICAS. *REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACION*, 19-58. Obtenido de https://doi.org/10.35362/rie430750

HERNÁNDEZ, H., & LUIS, N. (2008). *Sucesiones y Series: nociones básicas.* Obtenido de http://webdelprofesor.ula.ve/ciencias/nunez/cursos/MetodosMatematicos2/2008B/S01_C01.pdf

(s.f.). *LÍMITES DE FUNCIONES.* Obtenido de http://cimanet.uoc.edu/cursMates0/IniciacionMatematicas/pdf/C%2026Limites%20de%20funciones.pdf

Martínez, A. T. (2015). *Series de Taylor y Series de Fourier: Un estudio Comparativo.* UNIVERSIDAD DE GRANADA, DEPARTAMENTO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO. Obtenido de https://www.ugr.es/~acanada/docencia/matematicas/definitivoAlejandraTorresMartinezTFG.pdf

Medina, M. Á. (10 de DICIEMBRE de 2009). *LAS APORTACIONES DE EULER A LA NOTACION MATEMATICA*. Obtenido de LAS APORTACIONES DE EULER A LA NOTACION MATEMATICA: https://www.gaussianos.com/las-aportaciones-de-euler-a-la-notacion-matematica/

MINISTERIO DE EDUCACION, E. (s.f.). *LA IMPORTANCIA DE ENSEÑAR Y APRENDER MATEMÁTICA. .* Obtenido de http://web.educacion.gob.ec/_upload/10mo_anio_MATEMATICA.pdf

PERÉZ GONZÁLES, F. J. (s.f.). *Apuntes de cálculo diferencial e integral de funciones de varias variables.* UNIVERSIDAD DE GRANADA, DEPARTAMENTO DE ANALISIS MATEMATICO. Obtenido de https://www.ugr.es/~fjperez/textos/apuntes_calculo_dif_int_func_varias_var.pdf

PÉREZ GONZÁLES, F. J. (s.f.). *CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL DE FUNCIONES DE UNA VARIABLE.*

REVILLA, F. (7 de 6 de 2014). *FERNANDO REVILLA*. Obtenido de SERIES ALTERNADAS, CRITERIO DE LEIBNIZ: http://fernandorevilla.es/blog/2014/06/07/series-alternadas-criterio-de-leibniz/

RUIZ, C. (s.f.). *AMPLIACION DE MATEMÁTICAS.* Obtenido de http://www.mat.ucm.es/~cruizb/2-AM/Apuntes-i/Apuntes-14/Suces-funciones-1.pdf

SANCHEZ MUÑOZ, J. M. (1 de OCTUBRE de 2011). Historias de Matemáticas Génesis y desarrollo del Cálculo Fraccional. *REVISTAPM*, 15. Obtenido de http://www2.caminos.upm.es/Departamentos/matematicas/revistapm/revista_impresa/numero_1/genesis_y_desarrollo_del_calculo_fraccional.pdf

SORANDO MUZÁS, J. M. (s.f.). *La Teoría de Números.* Obtenido de http://matematicasentumundo.es/HISTORIA/2_Teoria_Numeros.pdf

(s.f.). *Unidad 8. Iniciación al cálculo de derivadas. Aplicaciones.* Obtenido de http://docentes.educacion.navarra.es/mpastorg/cd_alumno/modeloG/1bach_CSS/Datos/biografias/12.pdf

UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA. (s.f.). Obtenido de MATEMÁTICA I: http://www.mate.unlp.edu.ar/practicas/111_3_0509201317502.pdf

VARGAS NÚÑEZ, M. E. (2011). *El concepto de función y sus aplicaciones en situaciones relacionadas con fenomenos físicos, que conducen a un modelo cuadrático, una propuesta para trabajar en el grado noveno.* UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA, FACULTAD DE CIENCIAS, BOGOTÁ. Obtenido de http://www.bdigital.unal.edu.co/7276/1/01186564.2012.pdf

Vera, R. R. (2009). *Criterio del segundo cociente para convergencia de series numéricas.* UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA, FACULTAD DE CIENCIAS, Caracas. Obtenido de http://www.matematica.ciens.ucv.ve/labfg/tesis/rfrangie/tesisrfrangie.pdf

Cesar, R. (s.f.). *ANALISIS MATEMATICO BASICO.* Obtenido de https://drive.google.com/drive/folders/1zp68wQ7wK6H5NKmdidFRaRTBiqem7EHs

Eduardo. (s.f.). *La Guia Matematica*. Obtenido de La Guia Matematica: https://matematica.laguia2000.com/general/funcion-coseno

Larson, R., & H. EDWARS, B. (2010). *Calculo 1 de una variable.* Mexico DF: Mc Graw Hill.

Ortega, J. (s.f.). *Series de Funciones.* Obtenido de https://www.cimat.mx/~jortega/MaterialDidactico/Analisis/Cap10v4.pdf

(s.f.). *Sucesiones monótonas.* Obtenido de https://www.ugr.es/~rpaya/documentos/CalculoI/2013-14/Monotonas.pdf

Software Geogebra.