



UNIVERSIDAD DEL BÍO-BÍO
FACULTAD DE EDUCACIÓN Y HUMANIDADES
DEPARTAMENTO CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
PEDAGOGÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

OPERACIONES COGNITIVAS QUE REALIZAN LOS ESTUDIANTES DE OCTAVO AÑO BÁSICO AL RESOLVER PROBLEMAS GEOMÉTRICOS

**MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE PROFESOR DE EDUCACIÓN MEDIA EN
EDUCACIÓN MATEMÁTICA**

AUTORES:

BARRERA VEGA, MARGOT CAMILA

CONTRERAS CONTRERAS, CEPH ANYELO

Profesor guía:

Dr. Rosales Riady, Marco Antonio

CHILLÁN 2019

AGRADECIMIENTOS

- Al profesor Dr. Marco Antonio Rosales por sus orientaciones que permitieron concretar esta tesis.
- A los alumnos involucrados en esta investigación, que mostraron una excelente participación al momento de desarrollar las actividades.
- A nuestras respectivas familias, las cuales nos brindaron un apoyo incondicional durante todo nuestro proceso académico, seguridad y el afecto.

TABLA DE CONTENIDO

Introducción.....	4
1. Capítulo I.....	5
1.1. Aspectos experienciales.....	6
1.2. Antecedentes de la literatura científica.....	8
1.3. Formulación del problema como tal.....	11
1.3.1. Formulación de la pregunta de investigación.....	11
1.3.2. Formulación de la relevancia de la investigación.....	11
1.4. Objetivos.....	12
1.4.1. Objetivos generales.....	12
1.4.2. Objetivos específicos.....	12
2. Capítulo II.....	13
2.1. Marco teórico.....	14
3. Capítulo III.....	17
3.1. Metodología.....	18
3.2. Situaciones.....	19
3.3. Sujetos de estudio.....	20
3.4. Diseño metodológico.....	20
3.5. Análisis a priori.....	21
4. Capítulo IV.....	26
4.1. Análisis de las producciones.....	27
5. Capítulo V.....	39
5.1. Confrontación.....	40
5.2. Conclusión.....	42
6. Capítulo VI.....	43
6.1. Cronograma.....	44
7. Capítulo VII.....	45
7.1. Bibliografía.....	46

INTRODUCCION

El presente artículo forma parte de un trabajo de investigación que representa la tesis de pregrado en la carrera de pedagogía en educación matemática de la universidad del Bio-Bio, campus la Castilla, Chillán.

La presente investigación va en la línea de la geometría, debido a que esta área cada vez está más presente en las evaluaciones que los estudiantes deben enfrentar, como lo es el caso de la prueba PSU y Simce, por lo que se hace necesario conocer como los estudiantes procesan estos conocimientos para formular estrategias para su aprendizaje.

La temática consiste en reflexiones sobre los contenidos geométricos enseñados hasta el 8° año de formación básica, analizando diferentes ejercicios, de construcción y análisis de figuras en geometría plana.

A partir del desarrollo de estas situaciones, se han encontrado dificultades tanto de orden matemático como cognitivos, donde se evidencia la falta de ejercitación en el uso de instrumentos geométricos y el validar sus razonamientos matemáticamente para la resolución de las situaciones.

Lo anterior plantea una interrogante sobre ¿Cuáles son los procesos cognitivos que realiza el estudiante? ¿Cuál de estos se deberían fortalecer? ¿qué estrategia se podría ayudar superarlo? Cuestión de identificar estas interrogantes y sus respuestas para generar situaciones en que los estudiantes desarrollen las habilidades faltantes, hemos construido dos situaciones con enunciados poco comunes y puestos en práctica con algunas fases de la metodología de la ingeniería, que tiene como finalidad plantear la problemática que existe en la enseñanza y aprendizaje de la geometría y buscar identificar las operaciones cognitivas que realizan los estudiantes al momento de resolver problemas geométricos.

Resolución de problemas de construcción geométrica con estudiantes de 8° año básico del liceo Bicentenario Marta Brunet Cáraves. Para este análisis nos apoyamos en el marco teórico de R. Duval, y otros investigadores (Barreto, 2012, Guzmán, 2009, Marmolejo, 2011). Los sujetos de estudios son estudiantes de 8° año básico, de los cuales se escogieron 8 estudiantes al azar para examinar sus respuestas.

CAPÍTULO I: PROBLEMATIZACIÓN

1.1 ASPECTOS EXPERIENCIALES

Al estar presentes en una sala de clases y desarrollar nuestra experiencia pedagógica, nos permite observar diversos factores que inciden en el proceso de aprendizaje de los estudiantes. En este contexto, al realizar la Pre-Práctica Profesional, y trabajar la unidad curricular, correspondiente a Geometría, dejó en evidencia el profundo problema motivacional y disciplinar que afecta a la gran mayoría de los estudiantes.

En Geometría, existen problemas que se arrastran desde muy temprano en la educación de los estudiantes, como lo plantea (santos trigo 1997) se priorizan ejercicios operacionales sin poner énfasis en la esencia del contenido, lo que trae por consecuencia una visión formal de las matemáticas.

Debido a esta falencia disciplinar, al enfrentar la educación media, los estudiantes llegan con muchas lagunas conceptuales, haciéndose el trabajo muy dificultoso. Por ejemplo, Según Garzón, pese a la importancia de las matemáticas hay un fuerte rechazo por parte de los estudiantes para su aprendizaje, ya que la perciben como aburrida, acartonada, compleja, complicada, difícil de entender, reservada sólo para algunos, todo lo cual genera intranquilidad, miedo, ansiedad, inseguridad, desconcierto, incertidumbre, la gran mayoría de los jóvenes odian las matemáticas (Garzón, 2013, p. 7). No obstante, en este rechazo influyen las características propias de las matemáticas como ser precisa; es decir, no ambigua, que es abstracta. Además del estereotipo transmitido con frecuencia por padres, amigos y familiares que comentan sus experiencias no gratas en esta área del conocimiento. Por tanto, la misma sociedad se ha encargado de promover que las matemáticas son difíciles y destinadas para los “más inteligentes” (Gil, Blanco, & Guerrero, 2006) traduciéndose en estudiantes con prejuicios sobre esta asignatura.

Otro aspecto a considerar, es que la mayoría de los liceos municipales, poseen un muy alto índice de vulnerabilidad, esto significa que los estudiantes tienen poco apoyo de sus padres, por consecuencia “resulta importante considerar que este factor presenta importantes diferencias, ya que en sectores vulnerables muchas veces los largos horarios laborales dificultan que las familias se involucren en la educación y formación de sus hijos (Fernald, Marchman y Weisleder, 2013, en Weiss, 2014) Esto es algo que afecta de forma directa a los resultados de aprendizaje de los

estudiantes. Debido a lo anterior, la asignatura de Matemática, y específicamente geometría y estadísticas, se vuelve una verdadera odisea para los estudiantes, debido a falencias disciplinares, desmotivación, sumado a los factores contextuales del alumno, suelen dar la imagen de un tema intratable.

Además, otro problema que se presenta es que la mayoría de los establecimientos, suelen dejar esta unidad rezagada, estigmatizando su contenido, y esto se refleja en los resultados que obtienen los estudiantes. Por lo tanto, trabajar el área de geometría y estadísticas, utilizando medios innovadores y motivadores, es algo de suma urgencia. Se debe encantar a los estudiantes con este tema tan importante y entretenido.

Si queremos lograr que los estudiantes se interesen en la geometría, tenemos que tener en cuenta el medio del cual ellos se rodean, ya que con solo observar les podemos decir que su alrededor está lleno de elementos geométricos, que solo basta apreciarlos y observarlos de la manera adecuada(geométrica), ya que así el aprendizaje de este tema se les haría más fácil y además les podría resultar entretenido, ya que pueden trabajar a través de la experiencia y trabajando con lo concreto y con cosas que ellos tienen a su alrededor, ya que ellos podrían desarrollar sus habilidades imaginativas y creativas al trabajar.

1.2 ANTECEDENTES DE LA LITERATURA CIENTÍFICA.

La importancia de la geometría en el sistema escolar radica en que proporciona una formación del pensamiento lógico y deductivo, formarlos en un pensar geométrico, racional y no empírico, abstracto, que ya no se basa en objeto presentes, sino conceptuales. No obstante, este objetivo no siempre se cumple y queda en evidencia tras analizar los resultados de evaluaciones estandarizadas que se aplican en nuestro país.

En el caso de la evaluación nacional SIMCE (2017); y otras mediciones internacionales como lo es la prueba PISA (2015), los estudiantes adquieren un mayor conocimiento de cómo están preparados en diversas asignaturas. Pero, uno de los problemas que acentúan la forma en que los estudiantes conciben y aprenden matemática, que incluye geometría, es la brecha socioeconómica entre estudiantes. En este sentido las brechas socioeconómicas marcan fuertemente la calidad y eficiencia de la educación. Esto a raíz de que el estado pasa a ser meramente un subsidiador en la educación, cubriendo así solamente las demandas por la educación, pero dejando de lado la responsabilidad por las necesidades educativas de la población.

“Esto ha generado una profunda segmentación y fragmentación del sistema, afectando gravemente su equidad y calidad y aumentando el desequilibrio socioeducativo en desmedro de los sectores más postergados de nuestra sociedad.” (bloque social, 2006)

En el año 2017 los resultados de la evaluación SIMCE refleja que existe una brecha de conocimiento de casi 80 puntos entre estudiantes dependiendo de su grupo socioeconómico. Esto se explica en la investigación “**Las condiciones socioeconómicas y su influencia en el aprendizaje: un estudio de caso**” de Jama, V. y Cornejo, J. (2016), la cual hace referencia a que a la falta de bienes económicos dificulta más el aprendizaje puesto que los docentes reciben menos dinero para capacitarse, el establecimiento tiende a invertir menos en recursos didácticos y los estudiantes se enfrentan a un contexto mucho más complejo que el solo ir a clases y estudiar.

En los resultados del SIMCE podemos observar que en 4° básico esa brecha se ha ido manteniendo, pero con el tiempo tendiera a disminuir a pesar del grupo socioeconómico; pero en los niveles superiores, ya sea en 8° básico o en 2° medio, al principio esta brecha se mantenía constante, presentaba poca variación, pero a medida que pasa el tiempo se ha ido aumentando.

Estudiando a Chile en la última década, podemos observar que este se ubica por sobre el promedio de los países latinoamericanos, ya que “en las tres pruebas rendidas (Ciencias Naturales, Lectura y Matemática) los alumnos de Chile se ubicaron en el primer lugar a nivel latinoamericano, lo que indica que el sistema educativo chileno consigue mejores resultados en la región” (educación, 2016), no obstante, los aprendizajes no son del todo satisfactorio cuando se analiza el desempeño de los estudiantes en los Niveles de Aprendizajes que se establece en lo curricular. Así lo arrojan los resultados de la prueba PISA 2015, En la que “casi la mitad de los estudiantes se ubica debajo del Nivel 2, lo que indica una alarmante falta de capacidad para identificar y comprender la función de la matemática en la vida cotidiana y en problemas que requieran este tipo de conocimientos” (educación, 2016).

Los investigadores venezolanos Tovar, E. & Mayorga, L. (2015) mencionan a Vílchez (1999), quien presenta un estudio sobre la matemática en los centros educativos costarricenses, tanto en la educación básica como en educación superior indicando que “uno de los problemas que encontramos subyace en que los estudiantes muestran una apatía automática frente a los retos que le imponen la rigurosidad y la abstracción, características propias de esta ciencia en una investigación”. Añaden además que, en el contexto mexicano, según Cantoral, Farfán, Cordero, Alanís, Rodríguez, y Garza (2005), se presenta la dificultad que tienen los estudiantes al enfrentarse a sus cursos de geometría, “En particular al hacer demostraciones y una manifestación de esto es el alto índice de reprobados, lo cual es común en diferentes escuelas” (p. 152). Esto indica, según los venezolanos Tovar, E. & Mayorga, L. (2015) que “los educandos presentan errores en la representación, identificación, caracterización de figuras y cuerpos geométricos según su apariencia global”.

Las investigadoras venezolanas Franchi y Hernández (2004) resaltan que “muchos de los errores que cometen los estudiantes de geometría involucran a su vez errores derivados del mal uso de las definiciones básicas, del desconocimiento de las nociones geométricas, y algunos otros se derivan de la resistencia a utilizar el razonamiento lógico básico para demostrar proposiciones en geometría”.

El argentino Vilella (2001) plantea que “enseñar geometría en la escuela supone ofrecer a los alumnos la posibilidad de: describir, entender e interpretar el mundo real y sus fenómenos; resolver una amplia variedad de problemas que implican usos de estimación, aproximación y medición;

acceder paulatinamente, mediante el uso de técnicas y de las explicaciones sobre ellas se pueden dar, a un modo de teoría axiomática; formular conjeturas y preguntas; proponer pruebas, estrategias; elaborar refutaciones, ejemplos y contraejemplos de los fenómenos que se describen y modelizan primero, para aplicar las conclusiones a otros fenómenos; recuperar la capacidad de asombro y de análisis de lo visual, de la imagen; construir esquemas básicos de respuestas a situaciones cotidianas provenientes tanto del medio social como de las otras áreas de estudio, así como de la propia matemática, que involucran la conceptualización de lo espacial”

Para abordar esta área el estudiante debe estar familiarizado tanto como se forma el espacio geométrico euclidiano, forma de figuras y sus propiedades.

1.3 FORMULACIÓN DEL PROBLEMA PROPIAMENTE TAL.

1.3.1 Formulación de la pregunta de investigación.

¿Qué operaciones cognitivas utilizan los estudiantes al momento de resolver problemas geométricos?

1.3.2 Formulación de la relevancia de la investigación.

Esta investigación tiene la finalidad de establecer cuáles son los procesos cognitivos que los estudiantes de 8° año básico utilizan al momento de resolver problemas geométricos. Consecuente con esto, además de ofrecer un diagnóstico claro para tratar de que a futuro los profesores ellos tomen en consideración lo entregado por los resultados de esta investigación, y realicen actividades con el fin de desarrollar las operaciones cognitivas en las cuales los estudiantes no han desarrollado a plenitud, para que así les permita que adquieran un aprendizaje más sólido y más significativo.

1.4 OBJETIVOS

1.4.1 Objetivo General:

- Identificar las operaciones cognitivas que realizan los estudiantes de Octavo Año Básico de un colegio de la comuna de Chillán al momento de resolver ejercicios en el área de geometría.

1.4.2 Objetivos Específicos:

- Establecer el nivel de conocimientos geométricos en el que se encuentran los estudiantes de Octavo Año Básico de un colegio de la comuna de Chillán según los paradigmas geométricos G1 y G2.
- Determinar las dificultades y errores que enfrentan los estudiantes al momento de utilizar sus conocimientos al resolver problemas geométricos en el nivel escolar de Octavo Año Básico.

CAPITULO II: MARCO TEÓRICO

2.1 MARCO TEÓRICO

El marco teórico que sustenta esta investigación se centra en la Teoría de los Aprendizajes Intelectuales en Geometría de Raymond Duval (2001), y se complementa con la Teoría de los Paradigmas Geométricos trabajados en el proyecto Ecos- Conicyt de Alain Kuzniak, Guzman (2006).

Tomamos en consideración el modelo teórico propuesto por Duval como parte fundamental de nuestra investigación, pues notamos que ha sido trabajado por diversos autores: Torregrosa y Quesada (2007), Barreto (2008), Guzmán (2009), Marmolejo (2010) y Rosales (2016). Los cuales concuerdan a la hora de establecer que el aprendizaje de la geometría está directamente relacionado con el desarrollo cognitivo y subyacente a las operaciones matemáticas.

En efecto, dentro de la última década en el campo de la didáctica de las matemáticas han aparecido diversas teorías cognitivas las cuales otorgan una gran importancia a la hora de hablar sobre diferentes nociones como lo es la visualización, capacidad espacial, razonamiento geométrico, pensamiento espacial o visión espacial.

La definición y caracterización de los procesos de visualización y razonamiento es un avance en esta línea de conocimiento. En particular, consideramos que la caracterización de los procesos de visualización y razonamiento, al igual que el estudio de su coordinación como puerta de entrada hacia el razonamiento deductivo, resulta de gran importancia para resolver los problemas geométricos (Duval, 1998).

Para realizar el proceso de visualización en la resolución de problemas de geometría, es conveniente conocer el significado de visualización, distinguiendo las acepciones vinculadas a las características de la acción hecha por el sujeto sobre una configuración. Por lo tanto, es de acá, en donde introducimos el término aprehensión, cuya definición, es "captar o concebir las formas de las cosas sin hacer juicio de ellas o sin afirmar ni negar" (RAE, on line).

Rosales (2016) menciona que, en relación a la visualización Duval (1998) establece diferentes tipos de aprehensiones para esta operación cognitiva:

- Aprehensión perceptiva: se refiere a la identificación simple de una configuración, es un proceso básicamente intuitivo.
- Aprehensión discursiva: es la actividad cognitiva que produce una asociación de la configuración con afirmaciones matemáticas (definiciones, teoremas, axiomas). Esta asociación es bidireccional, de lo visual a lo discursivo, y viceversa.
- La aprehensión operativa: consiste en la modificación de la configuración inicial para resolver un problema geométrico. Ésta puede ser un cambio figural en la que se le añaden o quitan elementos a la configuración original, generándose nuevas subconfiguraciones. También, la aprehensión operativa puede ser de reconfiguración en la cual hay una manipulación como piezas de un puzle. En el análisis de las producciones de los estudiantes se toman en consideración estos tres tipos de aprehensiones y sus interacciones.
- Aprehensión secuencial: se establece en relación al proceso de construcción, en la cuales las propiedades e instrumentos que se utilizaran (regla, compas, procesador) imponen orden y un protocolo de construcción en el cual se establece un orden en base a propiedades y características de los instrumentos, y simultáneamente la designación de las unidades figurales, formas D0 (puntos), D1 (segmentos y líneas abiertas o no, rectas), D2 (polígonos, circunferencias, ángulos,...) y D3 (poliedros, cuerpos redondos).

Respecto a los paradigmas geométricos formulados por Kusniak (2008), Rosales (2016), los sintetiza señalando que:

- Geometría Natural o Física, Geometría I (G1): Cuyos objetos son físicos, concretos existentes en la realidad. Se representan por dibujos o figuras concretas. Se opera con material concreto, pliegues, reglas, etc. La validación se realiza por la verificación mediante acciones y manipulación de instrumentos y/o por medición. El razonamiento es el pragmático.
- Geometría Axiomática Natural o Geometría II (G2): (Geometría Euclidiana). Sus objetos son figuras ideales (no concretas). Son representaciones de objetos de la realidad. Por ejemplo, una circunferencia es el modelo de una rueda de bicicleta. La validación de propiedades se realiza a través definiciones y teoremas (instrumentos teóricos).
- Geometría Axiomática Formal o Geometría III (G3): Sus objetos son figuras ideales sin ninguna relación con el mundo real. La validación se realiza a través de definiciones y teoremas. El razonamiento es lógico-formal.

CAPITULO III: METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN

3.1 METODOLOGÍA

La metodología de investigación utilizada en este trabajo es cualitativa, un estudio de casos, considerando 5 estudiantes de 8° año básico, trabajando individualmente en una ficha que está compuesta de dos situaciones con dos tareas cada una.

Las tareas consisten en:

- a) construir la configuración asociada al enunciado propuesto.
- b) Analizar las propiedades de la figura construida
- c) Establecer el protocolo de construcción dejando de manifiesto el orden de construcción.
- d) Identificar figuras geométricas sobrepuestas o yuxtapuestas.

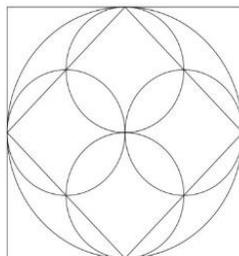
3.2 SITUACIONES

Situación I. Trace una circunferencia con centro en A y radio AB y otra con centro en B y mismo radio. Esas dos circunferencias, se cortan en dos puntos. Elija uno de ellos y llámelo R, trace los segmentos AR y RB obteniendo un triángulo.

- a. Construya la figura, siguiendo los pasos mencionados en la situación I.
- b. Analice las características del triángulo resultante y explique su categorización.

Situación II.

Figura. 1



- a) Dada la figura1, redacte un programa de construcción, especificando cada paso para que el lector obtenga como resultado la producción exacta de dicha figura.
- b) Identifique y mencione al menos cuatro de las figuras geométricas que se encuentran en la figura (1).

3.3 LOS SUJETOS PARTICIPANTES EN EL ESTUDIO

Los participantes en esta actividad son estudiantes de 8° básico del Liceo Bicentenario Marta Brunet Cárvaves.

Se seleccionaron 3 estudiantes por situación, de un total de 30 estudiantes participando en el curso, los cuales se encontraban cursando la unidad de geometría, donde se abordan contenidos como clasificación de triángulos y configuración de figuras en 3D además poseen los conocimientos de cursos anteriores, en particular el curso de 7° básico donde ya conocen los conceptos geométricos de circunferencia, radio, diámetros, rectas y clasificaciones de ángulos. Dichos conocimientos deberían permitir a los estudiantes enfrentarse de manera eficaz antes los problemas planteados.

3.4 DISEÑO METODOLÓGICO

El diseño consta de las siguientes fases: Análisis a priori de las situaciones, Aplicación, Análisis de las producciones, Confrontación de los análisis y Conclusiones.

3.5 ANÁLISIS A PRIORI

A continuación, se presenta el análisis a priori de cada situación, donde se indica la configuración a la que deben llegar, su protocolo de construcción, los conocimientos previos que los estudiantes deben utilizar para la resolución de problemas y las actividades cognitivas correspondientes que deben ser evidenciados. En cuanto a las tareas de probar y mostrar, se espera que realicen algunas de las siguientes acciones:

- a) Construyendo circunferencias.
- b) Trazando segmentos y/o rectas
- c) Trazando arcos de circunferencia, haciendo coincidir lo solicitado con el radio de la circunferencia.

Análisis a priori situación 1

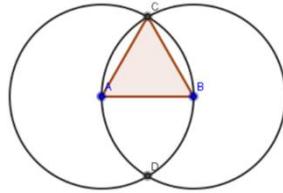
Esta situación contiene dos tareas y se espera que los estudiantes tengan como conocimientos previos los siguientes:

- Construcción de triángulos y figuras geométricas
- Los conceptos de circunferencia, diámetro y radio.
- Clasificación de triángulos.
- Rotular con notaciones adecuadas.
- Trazado de rectas.

En relación a las operaciones cognitivas, se espera obtener las siguientes:

- Aprehensión discursiva (justificación verbal a lo visual)
- Aprehensión operativa (desarrollo del enunciado a la construcción solicitada)
- Aprehensión perceptiva (identifican propiedades)
- Aprehensión secuencial (orden de construcción)

Para la **Tarea 1**, se espera que los estudiantes construyan la siguiente configuración:



Entre los posibles errores se pueden considerar:

- a) Mala rotulación, y en consecuencia construcción errónea de la figura. (ap. Discursiva, y ap. operativa)
- b) Utilización incorrecta de los instrumentos de construcción.

Para la **tarea 2** se espera que los estudiantes clasifiquen la figura de acuerdo a las siguientes observaciones:

- Ambas circunferencias poseen la misma longitud, además de que el centro de cada circunferencia, coincide con el lado de la otra, dando como resultado el radio de la circunferencia.
- El triángulo resultante se forma producto de la unión de tres segmentos de rectas correspondientes a radios de las circunferencias congruentes, dando como resultado un triángulo equilátero basándose en la clasificación de triángulos según sus lados.

Entre los posibles errores se pueden considerar:

Poseen dificultades al identificar características de los triángulos.

Análisis a priori situación II

Esta situación contiene dos tareas y se espera que los estudiantes tengan como conocimientos previos los siguientes:

- Construcción de triángulos y figuras geométricas
- Los conceptos de circunferencia, diámetro y radio.
- Clasificación de triángulos.
- Rotular con notaciones adecuadas.
- Trazado de rectas.

En relación a las operaciones cognitivas, se espera obtener las siguientes:

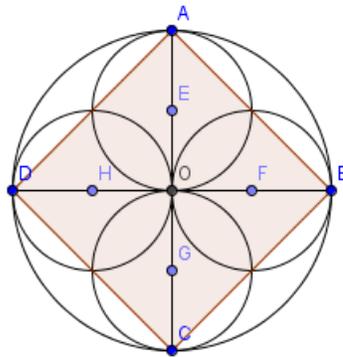
- Aprehensión discursiva (justificación verbal a lo visual)
- Aprehensión operativa (desarrollo del enunciado a la construcción solicitada)
- Aprehensión perceptiva (identifican propiedades)
- Aprehensión secuencial (orden de construcción)

Para la **tarea 1** se espera que los estudiantes, establezcan un programa de construcción de la figura entregada, de tal modo que el lector de dicho programa pueda llegar a construir la figura sin la necesidad de verla.

Se espera que el programa de construcción contenga los siguientes pasos:

- Trace una recta horizontal que pase por el centro de la hoja y una recta perpendicular a ella y llame al punto de intersección O.
- Construya una circunferencia de centro O y de radio cualquiera.
- Llame a las intersecciones que se generan con ambas rectas como A, B, C y D.

- Una los puntos A, B, C, D formando un cuadrado.
- Construya un cuadrado que contenga la circunferencia, cuyos lados sean de la misma medida que el diámetro de la circunferencia y que pase por los puntos A, B, C y D.
- Ubicar por medio de compas y regla el punto medio de las rectas de \overline{OA} , \overline{OB} , \overline{OC} , \overline{OD} y nómbralos como E, F, G y H.
- Construya 4 circunferencia, una de centro E y de radio (\overline{EO}) , otra de centro F y radio (\overline{FO}) , seguido de una de centro G y radio (\overline{GO}) y finalmente una circunferencia de centro H y radio (\overline{HO}) .



Entre los posibles errores se pueden considerar:

- Determinar el punto medio por intuición, no considerando herramientas geométricas como la mediatriz o bien simetral.
- Perfeccionar la figura completándola a mano alzada para que sus intersecciones coincidan, no usando correctamente los instrumentos para la construcción.
- Realizar una traducción incorrecta de procedimientos matemáticos descritos en un lenguaje cotidiano.
- Ignorar el programa de construcción de la perpendicularidad de rectas.
- Confundir conceptos de circunferencia con círculo.

Para la **tarea 2** se espera que los estudiantes identifiquen figuras sobrepuestas y yuxtapuestas tales como:

- Cuadrados
- Circunferencias
- Triángulos
- Semicircunferencias
- Arco
- Cuerda
- Flor de cuatro pétalos.

Entre los posibles errores se pueden considerar:

Identificar de forma errónea el cuadrado que aparece en el centro de la figura, otorgándole las características de un rombo.

CAPITULO IV: PRESENTACIÓN Y ANÁLISIS DE DATOS

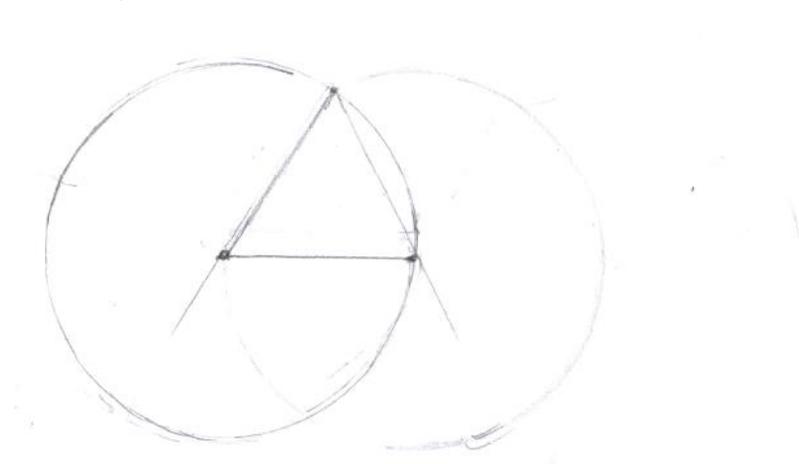
4.1 ANÁLISIS DE ALGUNAS DE LAS PRODUCCIONES

Los estudiantes serán denominados por Ek-j, donde k indica el numero corresponde al estudiante y j indica la situación 1 o 2.

E1-1

Situación I. Trace una circunferencia con centro en A y radio AB y otra con centro en B y mismo radio. Esas dos circunferencias, se cortan en dos puntos. Elija uno de ellos y llámelo R, trace los segmentos AR y RB obteniendo un triángulo.

- a. Construya la figura, siguiendo los pasos mencionados en la situación I.



- En la primera tarea el estudiante construye la figura respetando las instrucciones.
- Elige uno de los puntos. no rotula.
- Evidencia que conoce las nociones básicas de construcción necesarias para resolver la tarea, manifestando la aprehensión secuencial.
- El estudiante realiza la construcción bajo la aprehensión discursiva, ya que efectúa un pasaje que va de lo discursivo a lo visual, llegando a la construcción solicitada.

b. Analice las características del triángulo resultante y explique su categorización.

equilátero Tiene todos sus Lados iguales ya que se ocupan
las medidas de los radios que miden lo mismo ya marcan su centro

- En la segunda tarea, el estudiante tiene la noción de lo que es el radio de la circunferencia.
- Se da cuenta que para formar el triángulo tiene que tomar el radio de la circunferencia. Por lo cual, manifiesta una aprehensión discursiva al asociar la propiedad del radio Deduce que los lados del triángulo son todos iguales, siendo un triángulo equilátero.

Conclusión:

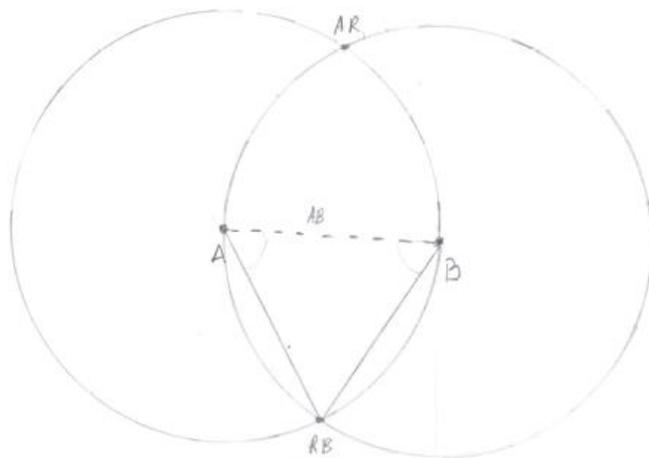
Aunque el estudiante no justifica las propiedades que utiliza para la construcción de la figura y su figura no es implacable, este demuestra poseer conocimientos del contenido. La demostración está situada en el paradigma G1 ya que es una representación de objetos son físicos, que son representados por dibujos o figuras concretas.

Las operaciones cognitivas que se perciben en el alumno 1 son: Aprehensión discursiva, es el pasaje que va de lo discursivo a lo visual, además explica por qué el triángulo es equilátero y por último al saber utilizar y expresar los códigos expresados en el enunciado, utilizando la aprehensión perceptiva, que consiste en saber visualizar las propiedades.

E2-1

Situación I. Trace una circunferencia con centro en A y radio AB y otra con centro en B y mismo radio. Esas dos circunferencias, se cortan en dos puntos. Elija uno de ellos y llámelo R, trace los segmentos AR y RB obteniendo un triángulo.

a. Construya la figura, siguiendo los pasos mencionados en la situación I.



- En la primera tarea el estudiante construye la figura respetando las instrucciones.
- Utiliza herramientas geométricas que permiten la construcción correcta de la figura, como por ejemplo el rotulador puntos, no obstante, lo realiza de forma errónea en alguno de ellos, como es el caso de dos de los puntos de intersección de la figura, los cuales se pide llamar a uno de ellos como “R” pero en su lugar el estudiante llama a las dos intersecciones como AR y RB lo que a su vez genera ambigüedad ya que al radio de la circunferencia de centro A y radio B lo llama AB, lo que no permite diferenciar un segmento de un punto ya que usa una rotulación que no permite diferenciarla.
- El estudiante realiza la construcción bajo la aprehensión discursiva, ya que efectúa un pasaje que va de lo discursivo a lo visual, llegando a la construcción solicitada.

- b. Analice las características del triángulo resultante y explique su categorización.

Triángulo isosceles: es cuando 2 de las tres medidas son iguales.

el triángulo está formado por la unión de puntos

A, b y RB

- En la segunda tarea correspondiente a la situación 1 el estudiante presenta problemas al recurrir de lo visual a lo discursivo ya que no relaciona las afirmaciones geométricas con figuras diferentes, no analiza exhaustivamente los axiomas y la propia configuración de lo anteriormente realizado.

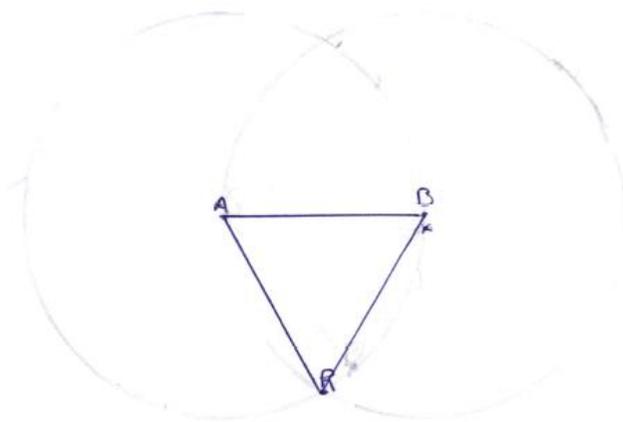
Conclusión:

El estudiante posee conocimientos de los contenidos y afirmaciones geométricas logrando destacar en la aprehensión perceptiva, pero posee dificultades al momento de analizar figuras, en el paso de lo pictórico a las afirmaciones matemáticas, impidiendo así avanzar en una mayor comprensión a las características de lo representado (problemas en la aprehensión discursiva). establece rótulos y sigue una secuencia lógica al momento de construir, pero es ambiguo en la rotulación por lo que no logra una correcta identificación lo que hace que se confunda al momento de analizar la tarea por lo que no domina la aprehensión operativa.

E3-1

Situación I. Trace una circunferencia con centro en A y radio AB y otra con centro en B y mismo radio. Esas dos circunferencias, se cortan en dos puntos. Elija uno de ellos y llámelo R, trace los segmentos AR y RB obteniendo un triángulo.

- a. Construya la figura, siguiendo los pasos mencionados en la situación I.



- En la primera tarea estudiante articula las instrucciones entregadas en la situación I construyendo figuras geométricas como triángulos y circunferencias.
- Evidencia un dominio del lenguaje geométrico al identificar intersecciones las cuales rotula eficazmente.
- Trazar segmentos entre puntos, en este caso \overline{AB} , \overline{BR} , \overline{RA} .

b. Analice las características del triángulo resultante y explique su categorización.

El triángulo es equilátero.

Porque todos sus \angle son iguales. y al sumarlos tienen que dar 180.

- En la segunda tarea correspondiente a la situación I, el estudiante señala que el triángulo formado por las intersecciones de la circunferencia “*es equilátero, porque todos sus ángulos son iguales y al sumarlos tienen que dar 180°*” considerando así teoremas del arco pero que el estudiante no explica concretamente las propiedades y herramientas geométricas que se utilizan para determinar la clasificación de este.
- Por lo que manifiesta una aprehensión discursiva al asociar elementos tales como ángulos con el arco de la circunferencia.

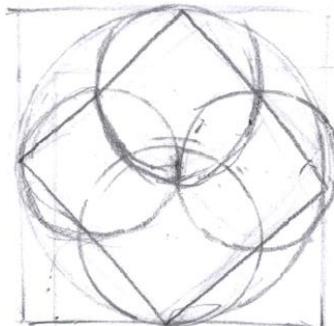
Conclusiones:

El estudiante tiene conocimientos de figuras geométricas y elementos de esta; las aprehensiones que se perciben en este estudiante son la aprehensión operativa puesto que el estudiante lleva lo axiomático y discursivo a lo visual, además muestra conocimientos en la aprehensión discursiva, identificando características geométricas del objeto observado, no obstante, al ejecutar esta aprehensión posee dificultades al momento de justificar su respuesta.

E1-2

- a) Dada la figura 1, redacte un programa de construcción, especificando cada paso para que el lector obtenga como resultado la producción exacta de dicha figura.

- 1 hacer un cuadrado
- 2 hacer una circunferencia desde el centro del cuadrado
- 3 hacer un cuadrado rotado
- 4 hacer pequeños círculos que intercepten al medio del cuadrado



En la primera tarea de la situación II el estudiante esboza una correcta organización del programa de construcción, no obstante, muestra un poco uso del lenguaje geométrico.

La construcción del estudiante está compuesta por 4 pasos, desarrollados a continuación.

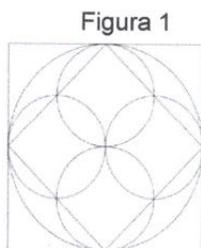
Punto 1. Hacer un cuadrado. El estudiante comienza la construcción de su figura analizándola de afuera hacia adentro, identificando la figura principal la cual servirá como base para la construcción

Punto 2. Hacer una circunferencia desde el centro del cuadrado. El estudiante utiliza adecuadamente el concepto de circunferencia, pero comete el error de ubicar punto medio, no dejando en claro el tamaño de la circunferencia, ya que no señala sus radios (elemento principal para la construcción de la circunferencia junto con el centro)

Punto 3. Hacer un cuadrado rotado. Al no rotular la figura se pierde la precisión de cuanto se debe rotar la figura y del tamaño de estas.

Punto 4. Hacer pequeños círculos que intercepten al medio del cuadrado. Al ubicar los puntos medios erróneamente, el estudiante construye una figura distinta a la solicitada, por lo cual el estudiante modifica la figura a mano alzada sin recurrir a los instrumentos para la construcción (compas y regla).

b) Identifique y mencione al menos cuatro de las figuras geométricas que se encuentran en la figura (1).



1 Cuadrado
1 Cuadrado rotado
1 circunferencia
4 Pequeños círculos
4 Triángulos

En la segunda tarea el estudiante menciona las siguientes figuras.

- 1 cuadrado
- 1 cuadrado rotado
- 1 circunferencia
- 4 pequeños círculos
- 4 triángulos

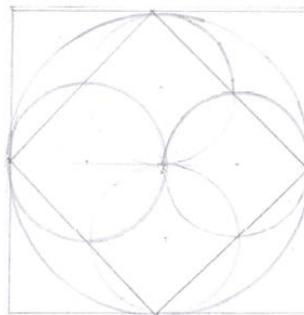
En esta tarea el estudiante identifica figuras del mismo tipo, pero le entrega una clasificación distinta debido a su tamaño y rotación como es el caso en que menciona “1 cuadrado” para luego decir “1 cuadrado rotado” y “circunferencia” con “4 círculos pequeños”.

Configura la imagen en base a figuras concretas y que son conocidas por él.

E5-2

a) Dada la figura1, redacte un programa de construcción, especificando cada paso para que el lector obtenga como resultado la producción exacta de dicha figura.

1. Trazar una circunferencia y su radio.
2. Dividir el radio para proceder a trazar las 4 circunferencias dentro de la circunferencia mayor.
3. Marcar un cuadrado dejando dentro todas las circunferencias.
4. Finalmente trazar un cuadrado rotado uniendo cada circunferencia.



En la primera tarea la construcción del estudiante está compuesta por 4 pasos, desarrollados a continuación.

Paso 1. Trazar una circunferencia y su radio. Menciona características de la circunferencia (como el radio) pero no entrega medidas de esta por ejemplo \overline{OA} .

Paso 2. Dividir el radio para proceder a trazar las 4 circunferencias dentro de la circunferencia mayor. Posee una configuración correcta de la figura mencionando ideas para la construcción de esta, pero carece de un lenguaje técnico al momento de referirse a conceptos geométricos utilizando un lenguaje coloquial.

Paso 3. Marcar un cuadrado dejando dentro todas las circunferencias. Las indicaciones son vagas y pocas precisas; lo que es consecuencia de no haber rotulado anteriormente, ya que no indica la longitud de sus medidas y la ubicación de sus vértices.

Paso 4. Finalmente trazar un cuadrado rotado uniendo cada circunferencia. Nuevamente se realiza un paso en el cual se entregan instrucciones que no garantizan la producción de la figura, ya que deja en libre albedrío del lector rotar el cuadrado en la posición que el estime conveniente

b) Identifique y mencione al menos cuatro de las figuras geométricas que se encuentran en la figura (1).



1. Rectangulo
2. Circunferencia
3. Cuadrado
4. Circulo

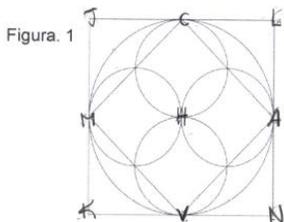
En la segunda tarea el estudiante menciona las siguientes figuras.

- Rectángulo
- Circunferencia
- Cuadrado
- Circulo

En esta tarea el estudiante observa las figuras con una mirada de forma sobrepuestas, ya que ve las imágenes por separadas entre sí y de estas menciona las distintas figuras que identifico sin especificar la cantidad de la misma figura presente en la imagen, menciona la existencia de un rectángulo, lo cual no se encuentra presente en la imagen, ya que ninguna de las figuras cumple con esa clasificación. También hace distinción entre circunferencia y circulo por lo cual no identifica propiedades correctamente.

E6-1

Situación II.



a) Dada la figura 1, redacte un programa de construcción, especificando cada paso para que el lector obtenga como resultado la producción exacta de dicha figura.

Trace una circunferencia con centro en H, construya un rombo con radios en V; A; C; M; luego trace 4 circunferencias con diámetro en HV, HA, HC, HM, por último trazar un cuadrado alrededor de la primera circunferencia, formando triángulos en MCJ; CAL; AVN; VMK.

La construcción del estudiante está compuesta las siguientes indicaciones, desarrollados a continuación.

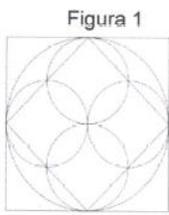
“Trace una circunferencia con centro en H, construya un rombo con radios en V; A; C; M, luego trace 4 circunferencias con diámetro en HV, HA, HC, HM, por último, trazar un cuadrado alrededor de la circunferencia, formando triángulos en MCJ; CAL; AVN; VMK”

La estudiante realiza la construcción trabajándola desde adentro hacia afuera tomando como eje principal la primera circunferencia construida. Rotula correctamente la figura pero hace un uso inadecuado de los términos geométricos, provocando una confusión hacia al lector como se menciona en el siguiente fragmento “construya un rombo con radio V;A;C;M” el cual no especifica en qué lugar de la circunferencia se ubicaran los puntos.

Menciona además el construir **“4 circunferencias con diámetro en HV, HA, HC, HM”** en donde utiliza los diámetros como elemento para la construcción en lugar de ubicar puntos medios y radios de las distintas circunferencias

Por último, la estudiante indica **“trazar un cuadrado alrededor de la circunferencia, formando triángulos en MCJ; CAL; AVN; VMK”** el cual no indica las debidas intersecciones del cuadrado con la figura, dando como resultado triángulos distintos o iguales dependiendo del lector, pero no consigue una precisión en la construcción de la figura solicitada.

- b) Identifique y mencione al menos cuatro de las figuras geométricas que se encuentran en la figura (1).



1. Círculo
2. Rombo
3. Cuadrado
4. Triángulo

En la segunda tarea el estudiante menciona las siguientes figuras.

- Círculo
- Rombo
- Cuadrado
- Triángulo

En esta tarea el estudiante observa las figuras con una mirada de forma sobrepuestas y yuxtapuestas ya que ve las imágenes por separadas entre sí y configuraciones nuevas, entre las que menciona el triángulo. Visualiza además figuras como el cuadrado, círculo y rombo; es en esta última (rombo) en la cual el estudiante clasifica según su posición la figura y no por sus características.

CAPÍTULO V: CONCLUSIONES

5.1 CONFRONTACIÓN DE LOS ANÁLISIS A PRIORI Y LOS RESULTADOS DE LA APLICACIÓN.

Situación 1: En la construcción de la figura asociada a la situación 1, desafío a los estudiantes a utilizar las aprehensiones discursivas ya que lleva el enunciado a una representación geométrica. Además, exigió la utilización de la aprehensión secuencial, al momento de seguir el protocolo de construcción y perceptiva ya que se deben identificar propiedades de la figura resultante.

En la situación 1 los tres estudiantes (E1, E2, E3) confeccionan una construcción utilizando los instrumentos de construcción geométrica (Regla y Compas).

Los estudiantes presentan un dominio de la aprehensión discursiva, producen eficazmente el cambio de lo discursivo a lo visual, se observa dificultades en la rotulación, en el caso del E1 no rotula la figura, E2 lo realiza, pero de forma errónea y el E3 lo realiza de forma correcta, no obstante en la tarea 2 de la situación 1 los estudiantes E2, E3 formulan correctamente algunas de las propiedades, pero no logran dar con la respuesta solicitada, ya que no distinguen con exactitud los radios de la circunferencias \overline{AB} , \overline{BR} , \overline{RA} , por otro lado el E1 utiliza la aprehensión perceptiva identificando las propiedades que le permitió llegar a una respuesta correcta.

Todos los estudiantes E1, E2, E3 demostraron habilidades ligadas a los paradigmas G1 y G2 ya que operan objetos concretos como la regla y compas para la construcción de figuras geométricas y posteriormente a la validación de sus construcciones por propiedades geométricas.

Situación 2: En esta situación la construcción de la figura asociada al enunciado implicó una aprehensión discursiva ya que desafío a los estudiantes a pasar de lo visual a lo discursivo, secuencial en la cual establecen un orden lógico para la construcción de la figura y perceptiva ya que al realizar el programa de construcción los estudiantes deben hacer uso de propiedades y elementos geométricos.

El E5 y E6 trabajan en la construcción personal de la figura para poder llegar a establecer un programa de construcción utilizando los instrumentos geométricos (compas y regla) en cuanto al E1 utiliza los elementos geométricos pero menor precisión que los demás ya que no logra la construcción de la figura.

Los estudiantes E1, E5, E6 mostraron habilidades ligadas a la aprehensión discursiva, al crear un programa de construcción que contuviera elementos geométricos que permitiera la construcción de la figura. Los estudiantes E1, E5, E6 presentan una configuración lógica de su programa de construcción, ligada a la aprehensión secuencial.

Referente la aprehensión perceptiva, el estudiante E1, identifica figuras geométricas para el desarrollo de su programa de construcción, pero no propiedades de estas, en la única instancia que lo hace es al momento de identificar el centro cuadrado. A diferencia de los estudiantes E5 y E6 cuyos programas hacen referencia a conceptos técnicos ligados al lenguaje geométrico, como, por ejemplo, E5, conoce la circunferencia y sus elementos; además tiene la noción de punto medio, pero no lo menciona como tal y el estudiante E6 al igual que el estudiante E5 utiliza un lenguaje geométrico en su programa identificando elementos tales como: circunferencia, centro, radio, rombo, cuadrado y triángulos, no obstante, esto implica una aprehensión perceptiva parcial ya que los programas de los tres estudiantes se caracterizan por una secuencia poco específica, debido a la falta de contenidos geométricos que permite la construcción de la figura solo del autor del programa o alguien que lo haya visto previamente, por consiguiente, al validar los programas con terceras personas no se logró dar con la figura solicitada.

En la tarea 2 de la situación 2 implica una aprehensión perceptiva, en la cual E1, E5 y E6 identifican figuras yuxtapuestas y sobrepuestas, relacionando las figuras geométricas observadas con propiedades geométricas de su conocimiento, como, por ejemplo, E1 y E6 hacen mención de circunferencia, cuadrado y círculo, en cuanto a E5 menciona el cuadrado y circunferencia, sin embargo, los estudiantes E5 y E6 confunden figuras tales como, rectángulo y rombo, respectivamente. El primero debido a la falta de dominio de elementos de la circunferencia, en este caso, al analizar el cuadrado con los diámetros de la circunferencia circunscrita, se obtiene como resultado, un polígono de cuatro lados iguales, por lo tanto, representa un cuadrado y el segundo estudiante (E6) basa su análisis en la rotación de la figura más que en sus propiedades.

Todos los estudiantes E1, E5 y E6 demostraron habilidades ligadas al paradigma G2, donde debían identificar propiedades geométricas para poder describir su construcción con mayor precisión e identificar figuras geométricas basándose en elementos técnicos, sin embargo, al estar en este paradigma sus instrucciones en el programa de construcción fueron incompletas, debido a la falta del lenguaje geométrico.

5.2 CONCLUSIÓN

Para este apartado es importante recordar que la finalidad de esta investigación, es conocer los procesos cognitivos que realizan los estudiantes de 8° básico al momento de enfrentarse a problemas geométricos.

En vista de la información obtenida y las reflexiones de esta, es que se concluye la finalidad de la investigación con los siguientes.

Conocer el nivel de profundidad en cuanto a conocimientos geométricos de los estudiantes del liceo Bicentenario Marta Brunet Cáraves, reconocer los procesos cognitivos que estos realizan para la resolución de ejercicios y Establecer la necesidad de intervención de profesores con el objetivo de favorecer el conocimiento disciplinares de los estudiantes en geometría.

Todo esto a raíz de los análisis arrojados por la investigación, donde muestra que los estudiantes movilizan conocimientos geométricos en un nivel de aprehensión operativa y discursiva, pero no logran desarrollar completamente las habilidades ligadas a esta última, y queda en manifiesto en sus programas de construcción los cuales evidencian una falta de conocimiento técnico en particular del lenguaje geométrico para lograr con éxito la aprehensión discursiva no obstante, gran parte de los estudiantes demuestra un orden lógico al momento de construir y explicar acciones y construcciones geométricas que dan como resultado una figura nueva.

Con estos resultados, estimamos la necesidad de crear enunciados que motiven al estudiante a descubrir y explorar el mundo geométrico, en el cual el estudiante acceda a una perspectiva visual de la enseñanza más que discursiva en la que lo desafíe a adquirir nuevos conocimientos y a conjeturar, probar y utilizar objetos propios de la geometría.

CAPITULO VI: CRONOGRAMA

6.1 CRONOGRAMA

2019		Abr	May	Jun	Jul	Ago	Sep	Oct	Nov	Dic
Proyecto	Selección y delimitación del problema.									
	Problematización									
	Justificación									
	Marco teórico									
	Metodología									
Investigación	Búsqueda de información complementaria.									
	Análisis preliminares.									
	Concepción y análisis a priori de la propuesta de las situaciones didácticas.									
	Análisis a posteriori									
	Confrontación de los análisis a priori y a posteriori (Validación Interna)									
	Conclusión									
Ejecución	Enseñanza unidad didáctica									
	Aplicación de la guía de situaciones didácticas.									
Correcciones y recomendaciones										
Elaboración de la copia final y entrega										

CAPITULO VII: BIBLIOGRAFIA

7.1 BIBLIOGRAFÍA

Agencia de Calidad de la Educación. (2015). *Programa para la Evaluación Internacional de Estudiantes*. Obtenido de http://archivos.agenciaeducacion.cl/Resultados_PISA2015.pdf

Agencia de la Calidad de la Educación. (2015). Reporte de Calidad. *Evolución de los Indicadores de Calidad de la Educación en Chile*. Obtenido de http://archivos.agenciaeducacion.cl/estudios/Estudio_Reporte_de_calidad.pdf

Barreto, J. (2008). *Deducciones del Teorema de Pitágoras a lo largo de la historia como recurso didáctico en el proceso enseñanza-aprendizaje de la matemática*. *Números*. Obtenido de <http://funes.uniandes.edu.co/3493/>

Bloque Social. (2006). *La crisis educativa en Chile*. Obtenido de http://opech.cl/bibliografico/calidad_equidad/Documento_Bloque_Social_Noviembre.pdf?fbclid=IwAR3wXj_cqa4UQIF0XcADM3ZD1D6rV13DvmTCWiTPh-yfkWMdQjSYDa4oh44

Cantoral, Frafán, Cordero, Alanis, Garza, & Rodríguez. (2005). *Desarrollo del Pensamiento Matemático*. México: Editorial Trillas.

Durán, F. ; Oliveras, M. (s.f.). *Los profesores de matemáticas y la educación intercultural*. Obtenido de http://www.fundacionfide.org/upload/19/59/matematicas_e_interculturalidad.pdf

Duval, R. (2001). *La Geometría desde un Punto de Vista Cognitivo*. Traducción de Hernandez, V. y Villalba, M. Obtenido de <http://fractus.uson.mx/Papers/ICMI/LaGeometria.htm>

Educación, R. d. (2016). *Revista de Educación*. Obtenido de http://www.revistadeeducacion.cl/pisa-2015-chile-mejora-significativamente-en-lectura/?fbclid=IwAR1VCPa0DtMwIbYek1wdm6nCCfjyfwiqYJ2FWfHbf_1FEVCdu_HGFOtg_GyA

Fabres, R. (2016). *Estrategias metodológicas para la enseñanza y el aprendizaje de la geometría, utilizadas por docentes de segundo ciclo, con la finalidad de generar una propuesta metodológica atingente a los contenidos*. Obtenido de https://scielo.conicyt.cl/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0718-07052016000100006&lng=en&nrm=iso&tlng=en

Franchi, L. & Hernández, A. (2004). Tipología de errores en el área de la geometría plana. *Revista Venezolana de Educación*. 24 , 63-71.

Garzón, N. O. (2013). *Elucubraciones del saber*. Universidad Central de Nicaragua UCN.

Gil, N., Blanco, L. y Guerrero, E. (2006). “El papel de la afectividad en la resolución de problemas matemáticos”. *Revista de Educación* 340 (Mayo-agosto) 551-569. España.

Guzmán, I. (2009). Actividades geométricas en la enseñanza. Análisis desde el punto de vista cognitivo. Union. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*.19 , 22-33. Obtenido de http://www.fisem.org/www/union/revistas/2009/19/Union_019_007.pdf

Jama, V., & Cornejo, J. (2016). Las condiciones socioeconómicas y su influencia en el aprendizaje: un estudio de casos. *Dominio de las ciencias* , 2 (1), 102-117. Obtenido de <https://dialnet.unirioja.es/ejemplar/446413>

Kuzniak, A. (2008). Diversidad de las matemáticas enseñadas "aquí" y "en otro lugar": el ejemplo de la geomtría. *Matematicalia* , 4 (1). Obtenido de http://www.matematicalia.net/index.php?option=com_content&task=view&id=446&Itemid=270

Marmolejo, G. (2010). La visualización en los primeros ciclos de educación básica. Posibilidades y complejidad. *Revista Sigma* , 10 (2), 10-26

Mineduc (2018). Resultados Simce revelan pocos avances en la última década y grandes desafíos en Educación básica y media. Obtenido de <https://www.mineduc.cl/2018/05/17/resultados-simce-revelan-pocos-avances-en-la-ultima-decada-y-grandes-desafios-en-educacion-basica-y-media/>

Rosales Riady, Marco Antonio, & Guzmán Retamal, Ismenia. (2016). Resolución de problemas de Construcción Geométrica con Estudiantes de Pedagogía en Educación Básica. *Paradigma*, 37(1), 135-160. Obtenido de http://ve.scielo.org/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1011-22512016000100008&lng=es&tlng=es

Tovar, E. & Mayorga, L. (2015). Errores en el aprendizaje de figuras y cuerpos geométricos en educación media general. *Revista Ciencias de la Educación*. 25(45). Obtenido de <http://servicio.bc.uc.edu.ve/educacion/revista/n45/art14.pdf>

Torregrosa, G. & Quesada, H. (2007). Coordinación de procesos cognitivos en Geometría. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 10(2), 275-300. Obtenido de http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-24362007000200005&lng=es&tlng=es

Villella, J. (2001). *Uno, dos, tres... Geometría Otra Vez*. Aique. Buenos Aires.

Weiss, H. (2014). *Nuevas orientaciones sobre el involucramiento familiar en el aprendizaje*. Santiago, Chile: Fundación CAP.