



UNIVERSIDAD DEL BÍO-BÍO
FACULTAD DE EDUCACIÓN Y HUMANIDADES.
DEPARTAMENTO CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
PROGRAMA DE MAGÍSTER EN EDUCACIÓN

La simbolización visual y su impacto en algoritmos de adición-sustracción

Tesis para la obtención del grado académico de Magíster en Educación

Autor:
José Manuel Rodríguez Gutiérrez
Profesor Patrocinante:
Francisco Rodríguez Alveal

Chillan, Enero del 2018

Dedicatoria

La presente investigación está dedicada a todos aquellos que inspiraron en mi vida el bello arte de educar, vale decir, mi familia, cercanos, profesores y en especial a todos los educandos que de una u otra forma generaron ese sentido de vocación y han abierto espacios de aprendizaje constante en mi carrera profesional, pues un profesor jamás delimita sus conocimientos y sus estudiantes son el motor de la búsqueda de respuestas para mejorar constantemente el proceso de enseñanza-aprendizaje de los mismos.

Agradecimientos

Quisiera agradecer en primer lugar, a mis hijos Tomás y José Manuel y a mi compañera de vida Alicia Manríquez, por ser los que me motivan constantemente a crecer como persona y profesional, al brindar todo el afecto posible en los altos y bajos que depara la vida.

En segundo lugar, agradecer a mi madre y a toda mi familia que inculcó una serie de valores que han impactado significativamente en mi cotidianidad, a modo de analogía, como tal cual un jardinero riega y protege su jazmín para verlo florecer.

En tercer lugar, mencionar a una sabia persona quien me dijo un día: “La vida es un tango y hay que saberlo bailar”. Dicha frase marcó mi vida, pues ante cada situación problemática o de incertidumbre recuerdo estas palabras que dijo mi abuelo para tratar de inculcar la resiliencia, en mi inocente mentalidad de niño.

En cuarto lugar, reconocer el gran apoyo brindado por el profesor Francisco Rodríguez Alveal, quien fue un pilar fundamental en la guía de mi proyecto investigativo, al brindar el tiempo necesario para encauzar el camino hacia la meta. Al mismo tiempo no puedo dejar de mencionar a los académicos Elke Walther y Salvador Llineros, cuya experticie me alentó a seguir inmiscuyendo en las dificultades de aprendizaje matemático y aportaron con bibliografía bastante interesante a este estudio.

Finalmente quisiera mencionar a todas aquellas personas que se cruzaron en mi camino, pues de una u otra manera aportaron en la búsqueda del conocimiento y ayudaron a construir los cimientos en mi sentido de pertenencia al mundo de la educación.

Por todo esto y mucho más, gracias.

ÍNDICE

RESUMEN.....	5
INTRODUCCIÓN.....	5
1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN.....	7
1. Formulación del problema de investigación.....	8
1.1. Antecedentes del problema:	8
1.2. Formulación del problema.....	9
1.3. Justificación del problema.....	9
1.4. Pregunta de investigación	10
1.5. Objetivos de la investigación	10
1.6. Hipótesis.....	11
2. MARCO TEÓRICO REFERENCIAL.....	12
2.1. Las nociones viso- espaciales incipientes y las estructuras operatorias de la inteligencia	13
2.2. Discusión teórica en torno al desarrollo de habilidades viso-espaciales.....	16
2.3. La operatoria y los algoritmos.....	19
2.4. Dificultades de adición y sustracción asociadas a la simbolización visual.....	21
2.5. Nuevos aportes al aprendizaje matemático	26
2.6. Estrategias didácticas y simbolismos visuales.	29
3. MARCO METODOLÓGICO	34
3.1. Enfoque del estudio.....	34
3.2. Tipo y diseño estudio	35
3.3. Población y muestra.....	35
3.4. Técnicas de levantamiento de información	35
3.5. Análisis de la información.....	36
4. PRESENTACIÓN DE RESULTADOS.....	37
5. CONCLUSIONES	45
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	48
CRONOGRAMA	53

ÍNDICE DE TABLAS Y GRÁFICOS

Tabla N° 1 Estadísticos descriptivos simbolización visual y aprendizajes matemáticos.	40
Figura N° 1 Distribución porcentaje de logro en simbolización visual de estudiantes de colegios municipalizados y particulares subvencionados.....	41
Figura N° 2 Distribución porcentaje de logro en aprendizajes matemáticos de estudiantes de colegios municipalizados y particulares subvencionados.....	43
Tabla N° 2 Correlación de Pearson simbolización visual y aprendizajes matemáticos.....	45

RESUMEN

El conocimiento matemático y su aplicación tienen profundas consecuencias en la cotidianidad de las personas. Es por este motivo que desde los inicios de la escolaridad, específicamente en NT1 y NT2, se trabajan una serie de actividades de aprendizaje conducentes al desarrollo de habilidades lógico matemáticas, que posibilitan forjar las bases para la adquisición de prácticas complejas como lo son la aplicación de algoritmos de adición y sustracción. Es por su funcionalidad, la evidente preocupación del Ministerio de Educación del Gobierno de Chile e instituciones internacionales (NCTM, 2013) por brindar una gran importancia a la enseñanza de las matemáticas. Es dentro de este contexto, que surgen diversas dificultades de aprendizaje matemático en los primeros niveles de la enseñanza básica, ocasionados por el escaso desarrollo de ciertas capacidades en los niveles de educación parvularia. Ante esta situación particular, diversos teóricos buscan causalidad a estas problemáticas que guardan relación con las representaciones matemáticas y sus interpretaciones simbólicas de tipo viso-espacial (Skemp, 1993; Blanco y Bermejo, 2009; Arrieta, 2003; Friz, Sanhueza y Sánchez, 2009; Farnham, 1983; Friedman, 1995). En base a los antecedentes anteriormente estipulados, la investigación en curso, tiene por objetivo determinar la incidencia de la simbolización viso-espacial (Skemp, 1993; Farhamm, 1983; Arrieta, 2003) en la aplicación de algoritmos de adición y sustracción (Castro, Rico y Castro, 1995; Godino, Batanero & Font, 2003) en estudiantes de segundo año básico. La indagación se sustenta en el paradigma positivista, con un enfoque metodológico cuantitativo de tipo correlacional y diseño no experimental trasversal (Huaquín, 2010; Villegas, 2005). La población se encuentra constituida por estudiantes de primer ciclo, pertenecientes a segundo año de enseñanza básica de establecimientos pertenecientes a la ciudad de Chillán, por otra parte, el muestreo será no probabilístico constituido por 75 estudiantes de 2° básico pertenecientes a establecimientos de dependencia municipal y 120 estudiantes de dependencia particular subvencionada del mismo nivel. Dentro de esta misma lógica, las técnicas de relevamiento de información a utilizar corresponden a dos test: El primer instrumento corresponde al test de organización perceptiva de la Batería Psicopedagógica Evalúa 2 versión adaptada para Chile (García y Manjón, 2011), El segundo instrumento corresponde a un test de adición y sustracción (Rodríguez y Rodríguez, 2015). Lo interesante de este estudio radica en la necesidad de detectar a los niños con Dificultades de Aprendizaje Matemático de manera temprana, para así no confundir la caída del C.I. con un diagnóstico cognitivo, sino más bien, determinar la especificidad del problema como tal (Blanco y Bermejo, 2009) y esto permitirá realizar una intervención en los primeros años de escolaridad para suplir las falencias que presenta el niño o niña.

INTRODUCCIÓN

Desde los inicios de nuestra escolaridad, la enseñanza de los aprendizajes matemáticos, específicamente la aplicación de algoritmos de adición y sustracción juegan un rol importante en el actual curriculum educacional, puesto que este tipo de contenidos propios de la asignatura, son transversales a diversas disciplinas jugando un papel importante debido a su funcionalidad para hacer frente a situaciones de la cotidianidad. Pese a la gran importancia que se le da a la enseñanza de las operatorias aritméticas de base a inicios del sistema educativo formal (NB1), esto no se armoniza con el trabajo previo de nociones lógico matemáticas que son funcionales a la aplicación de este tipo de operaciones, es así como la simbolización visual desempeña un rol preponderante a la hora de realizar adiciones y sustracciones, pues interviene en cada uno de los procedimientos propios de las operaciones matemáticas como forma de representación.

Dentro de la misma lógica, es importante destacar que la enseñanza de la matemática lamentablemente se prioriza la didáctica a través de formas representación verbal-algebraica, en detrimento de la visual, lo cual repercute notablemente en la consecución de los aprendizajes de adición y sustracción, pues debido a la etapa de desarrollo de los educandos se debe trabajar desde la comprensión de representaciones más concretas, por sobre lo abstracto, para de esta manera seguir una concatenación hacia la comprensión de procedimientos complejos, es así como Fernández y Arias (2013) afirman que cada concepto pasa así por diferentes fases hasta alcanzar lo que supuestamente es el objetivo matemático: la abstracción.

La simbolización visual, cumple un protagonismo importante a la hora de aplicar algoritmos (adición y sustracción), debido a que la posición de un dígito afecta la representación de un número (valor posicional), muestra el número al cual se sustrae o adiciona, determina la correspondencia entre conjuntos y a la vez se utiliza para establecer matrices según el orden de estos (Skemp, 1993). En vista de lo planteado con antelación y sumado a las dificultades de aprendizaje matemático demostradas por estudiantes de segundo año básico, surge la pregunta ¿Cuál es la incidencia que tiene la simbolización visual en la aplicación de algoritmos de adición y sustracción?, Lo interesante de dilucidar esta pregunta de investigación, es que se puede determinar la incidencia de la simbolización visual en la aplicación de algoritmos de adición y sustracción, del mismo modo, aporta a la detección temprana de las Dificultades de Aprendizaje de las Matemáticas (DAM) vinculadas con aspectos viso-espaciales y de esta manera encauzar el proceso de enseñanza- aprendizaje. Para efectos de la

investigación, su enfoque se ampara en el paradigma positivista, con un modelo cuantitativo de tipo correlacional y diseño no experimental-transversal. Por otra parte el muestreo será no probabilístico constituido por 75 estudiantes de segundo año básico pertenecientes a establecimientos de dependencia municipal y 120 estudiantes de establecimientos de dependencia particular subvencionada del mismo nivel.

1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

1. Formulación del problema de investigación

1.1. Antecedentes del problema:

De Acuerdo al programa de estudio de matemáticas para segundo año básico (MINEDUC, 2013) “el conocimiento matemático y la capacidad para usarlo tiene profundas consecuencias en el desarrollo, el desempeño y la vida de las personas” (p.30). Es por este motivo que desde los inicios de nuestra escolaridad, específicamente en NT1 y NT2, se desarrollan una serie de actividades de aprendizaje conducentes al desarrollo de habilidades lógico matemáticas, que posibilitan forjar las bases para la adquisición de habilidades complejas como lo son la aplicación de algoritmos de adición y sustracción. Es así como en los programas pedagógicos de educación parvularia del Ministerio de Educación, núcleo de aprendizaje “Relaciones lógico matemáticas y cuantificación” (2008), estipula que:

Los diferentes procesos de pensamiento de carácter lógico-matemático a través de los cuales la niña y el niño intentan interpretar y explicarse el mundo. Corresponden a este núcleo los procesos de desarrollo de las diferentes dimensiones de tiempo y espacio, de interpretación de relaciones causales y aplicación de procedimientos en la resolución de problemas que se presentan en su vida cotidiana (p.127).

Por otra parte, el Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas norteamericano (NTCM, 2013) establece como objetivos en sus prácticas de enseñanza de las matemáticas lo siguiente:

Usar y relacionar representaciones matemáticas. La enseñanza efectiva de las matemáticas motiva a los estudiantes a hacer conexiones entre diferentes representaciones matemáticas para profundizar en la comprensión de los conceptos y procedimientos matemáticos, y como herramienta para la resolución de problemas (p.4).

Es evidente, la gran preocupación por parte instituciones internacionales y en particular del ministerio de educación chileno por manifestar una gran importancia a la enseñanza de las matemáticas en los procesos de escolarización, por la funcionalidad anteriormente mencionada. Es dentro de este contexto, que en la enseñanza de esta asignatura en particular, surgen diversas dificultades de aprendizaje matemático en los primeros niveles de la enseñanza básica, ocasionados por el escaso desarrollo de ciertas capacidades en los primeros niveles de educación parvularia. Ante esta situación particular diversos autores como Skemp (1993), Blanco y Bermejo (2009) Arrieta (2003), Friz, Sanhueza & Sánchez (2009), Farnham-Diggory (1983), Friedman (1995), entre otros, buscan

explicar esta problemática, uno de los factores que han investigado como incidente, es referente a las representaciones matemáticas y sus interpretaciones simbólicas de tipo viso-espacial. Es así como este tipo de capacidades viso-espaciales pueden incidir en la aplicación de algoritmos, específicamente en adición y sustracción para efectos de la investigación.

Queda de manifiesto que dos de las facetas de las matemáticas, representadas por una parte por el lenguaje y los símbolos, y por otra, por las representaciones espaciales, son enteramente complementarias en su naturaleza y que una y otra deberían recibir una razonable cuota de atención en todo programa de matemáticas (Arrieta, 2003:58).

1.2. Formulación del problema

Según Skemp (1993) existen los sistemas de representación "verbal-algebraico" y "visual", siendo complementarias, donde , el simbolismo visual incide en el sistema verbal-algebraico, a manera de ejemplo tenemos que: La posición de un dígito afecta la representación de un número (valor posicional), muestra el número al cual se sustrae o adiciona, determina la correspondencia entre conjuntos y a la vez se utiliza para establecer matrices según el orden de estos. Dichos significados que se construyen a partir de los símbolos visuales, en ocasiones son desligados de la enseñanza formal de las matemáticas dejando de lado las capacidades y funciones, que se deben desarrollar previamente. "Cada concepto pasa así por diferentes fases hasta alcanzar lo que supuestamente es el objetivo matemático: la abstracción" (Fernández y Arias, 2013: 158). Es así como antes de llegar a esta etapa culmine y de gran complejidad, no se debe dejar de lado el trabajo transversal de aspectos viso-espaciales, que configuran la simbolización visual, para posteriormente desarrollar aspectos abstractos que se ejecutan al momento de aplicar un algoritmo matemático.

En vista de lo planteado con antelación, se observan inconvenientes en simbolización visual, lo cual repercute en la aplicación de algoritmos de adición y sustracción, aplicados por estudiantes de 2° año básico de establecimientos de dependencia particular subvencionado y municipalizado de la ciudad de Chillán.

1.3. Justificación del problema

En la enseñanza de las matemáticas, se han evidenciado diversas dificultades en los estudiantes relacionadas con la simbolización visual, las cuales se manifiestan al momento de aplicar un algoritmo en las operaciones de adición y sustracción, presentado inconvenientes de reserva, canje, valor posicional, productos y diferencias

erróneas (Valdivieso, 2016). Dentro de esta misma lógica, es que los estudiantes cometen errores vinculados con el valor que se le asigna a un dígito dependiendo de su ubicación, los cuales repercuten negativamente en los algoritmos desarrollados (Chamorro, 2003). En este contexto, en la didáctica de educación matemática, específicamente en la enseñanza algorítmica, esta se basa en la simbolización verbal algebraica (abstracto), en detrimento de la simbolización visual (concreta), la cual es desarrollada a inicios de educación parvularia y NB1, sin embargo, con el pasar de los años se deja de lado el trabajo de estas relaciones simbólicas. En vista de lo planteado con antelación, es de interés seguir investigando esta temática y determinar las repercusiones de la simbolización visual en los algoritmos aplicados en adición y sustracción.

Según Blanco y Bermejo (2009):

Concluimos subrayando la necesidad de detectar a los niños con dificultades lo más precozmente posible, ya que sólo a edades tempranas evitamos confundir el diagnóstico debido a la “caída” de las puntuaciones de coeficiente intelectual, pudiendo constatar más fácilmente la especificidad de las DAM. Más tarde puede que no sea posible. Por otro lado, esta detección precoz no sólo permitirá intervenir en el área de su dificultad, sino también a no descuidar aquellas habilidades en las que el niño es más competente, ya que si se trabajan adecuadamente le ayudarán en el futuro, al menos, a tener una autoestima más positiva(p. 34).

1.4. Pregunta de investigación

¿Cuál es la incidencia de la simbolización visual en los algoritmos de adición y sustracción aplicados por estudiantes de segundo año básico de establecimientos de dependencia particular subvencionada y municipalizada de la ciudad de Chillán?

1.5. Objetivos de la investigación

1.5.1. Objetivo general

Determinar la incidencia de la simbolización visual en los algoritmos de adición y sustracción aplicados por estudiantes de segundo año básico de establecimientos de dependencia particular subvencionada y municipalizada de la ciudad de Chillán.

1.5.2. Objetivos específicos

- A) Establecer el nivel de logro alcanzado en simbolización visual, por estudiantes de segundo año básico de establecimientos de dependencia particular subvencionada y municipalizada de la ciudad de Chillán.

- B) Establecer el nivel de logro alcanzado en la aplicación de algoritmos de adición y sustracción por estudiantes de segundo año básico de establecimientos de

dependencia particular subvencionada y municipalizada de la ciudad de Chillán.

1.6. Hipótesis

La simbolización visual incide en la aplicación de algoritmos de adición y sustracción en estudiantes de segundo año básico.

2. MARCO TEÓRICO REFERENCIAL

2.1. Las nociones viso- espaciales incipientes y las estructuras operatorias de la inteligencia

Como se ha mencionado anteriormente, desde los inicios de nuestra escolaridad, específicamente en NT1 y NT2, se desarrollan una serie de actividades de aprendizaje conducentes al desarrollo de habilidades lógico matemáticas, que posibilitan forjar las bases para la adquisición de habilidades complejas como lo son la aplicación de algoritmos de adición y sustracción. “Por lo tanto en el nivel de educación parvularia se trabajan contenidos como números, orden, correspondencia, clases, a través de actividades de lógica, cálculo, medida y relaciones espaciales...” (Friz, Sanhueza y Sánchez, 2009: 49). Es así como en los programas pedagógicos de educación parvularia del Ministerio de Educación Chileno (MINEDUC, 2008), se aborda el núcleo de aprendizaje “Relaciones lógico matemáticas y cuantificación” con el objetivo de que los niños y niñas desarrollen procesos de pensamiento referidos a este ámbito, con el cual puedan interpretar y explicarse el mundo, considerando las diversas dimensiones del tiempo y el espacio, estableciendo causales y aplicando procedimientos en las problemáticas que presentan en su cotidianidad. Es así como, uno de los aspectos que se considera al momento de trabajar estas habilidades, es el de desarrollar experiencias de aprendizaje relacionadas con aspectos viso-espaciales, de esta manera, en los programas pedagógicos de educación parvularia (MINEDUC,2008), se establecen como aprendizajes esperados que los niños y niñas sean capaces de:

- ✓ Identificar la posición de objetos y personas, mediante la utilización de relaciones de orientación espacial de ubicación, dirección y distancia.(NT1)
- ✓ Establecer relaciones de orientación espacial de ubicación, dirección, distancia y posición respecto a objetos, personas y lugares, nominándolas adecuadamente.(NT1)
- ✓ Resolver problemas prácticos y concretos que involucran nociones y habilidades de razonamiento lógico-matemático y cuantificación. (NT2)
- ✓ Identificar la posición de objetos y personas, mediante la utilización de relaciones de orientación espacial de ubicación, dirección y distancia, y nociones de izquierda y derecha (en relación así mismo).(NT2)

Es así, como queda de manifiesto que a temprana edad, establecimientos educacionales enseñan aspectos esenciales, como lo es la incipiente enseñanza de nociones viso-espaciales, las cuales concatenadas con una serie de habilidades lógicas matemáticas, juegan un rol preponderante en el éxito o dificultades, al momento de aplicar un ejercicio matemático relacionado con adición y sustracción.

Ahora bien, sabemos que no necesariamente la promoción o transición de un nivel a otro, significa que el o la estudiante presenta un nivel de competencia adecuado, para desarrollar aprendizajes matemáticos de mayor complejidad, es así como surgen dificultades de aprendizaje matemático relacionados con la simbolización visual, las cuales son causadas en gran parte por falencias de nociones espaciales y estas se ven manifestadas con el pasar del tiempo principalmente en la aplicación de algoritmos en las operaciones de base anteriormente mencionadas. Según Friz, et al. (2009) estos errores básicamente tienen su génesis en las falencias de estimulación temprana de habilidades viso-espaciales, las cuales impiden que la información presentada sea procesada de manera adecuada.

De esta manera, es evidente el rol fundamental que adquiere en la educación temprana la adquisición de habilidades espaciales, las cuales posteriormente darán pie al desarrollo de la simbolización visual, Ahora bien, ¿Por qué algo tan trascendental como lo es la enseñanza de aspectos viso-espaciales se pierde del curriculum con el transcurso de los niveles iniciales de la enseñanza básica? ¿Por qué perduran tales problemáticas siendo que estas fueron trabajadas en la escolaridad temprana?. Para poder responder tales interrogantes, primero es necesario revisar el programa de estudio de matemáticas para primer año básico (MINEDUC, 2013), en el cual se estipulan cinco ejes, los cuales son: números y operaciones, patrones y álgebra, geometría, medición, datos y probabilidades. En estos ejes se alude a objetivos de aprendizaje relacionados con aspectos espaciales, entre estos podemos mencionar:

- ✓ Contar números del 0 al 100 de 1 en 1, de 2 en 2, de 5 en 5 y de 10 en 10, hacia adelante y hacia atrás, empezando por cualquier número menor que 100.(eje números y operaciones)
- ✓ Describir la posición de objetos y personas con relación a sí mismos y a otros objetos y personas, usando un lenguaje común (como derecha e izquierda).(eje geometría)

Dentro de esta misma lógica, el programa de estudio de segundo año básico (MINEDUC, 2013) se explicita que se debe trabajar en torno a los ejes: números y operaciones, patrones y álgebra, geometría, medición, datos y probabilidades, en donde se pueden mencionar los siguientes objetivos relacionados directamente con el desarrollo de nociones espaciales:

- ✓ Contar números del 0 al 1 000 de 2 en 2, de 5 en 5, de 10 en 10 y de 100 en 100, hacia adelante y hacia atrás, empezando por cualquier número menor que 1 000.(eje números y operaciones)
- ✓ Representar y describir la posición de objetos y personas con relación a sí mismos y a otros objetos y personas, incluyendo derecha e izquierda y usando material concreto y dibujos.(eje geometría)

Únicamente, estos objetivos de aprendizajes de la enseñanza básica están vinculados directamente con el desarrollo de habilidades viso-espaciales, quedando de manifiesto la escasa articulación existente entre los niveles de transición NT1, NT2 y NB1 (°1 y 2° básico).

En base a estos antecedentes, se evidencia que no se potencian estos aspectos, y se ve a este tipo de habilidad lógico matemática como una etapa ya superada en los primeros niveles de la educación parvularia, no obstante, es necesario trabajar transversalmente en el curriculum los aspectos viso-espaciales. Por otro lado, se asocia la enseñanza del ámbito espacial al eje geometría, lo cual lógicamente, juega un rol importante, más aún, en la aplicación de algoritmos de adición y sustracción juega un rol más trascendental, sin embargo, no se le da la importancia que realmente debiese tener, puesto que, la simbolización visual contenida en sus procedimientos es visto como algo “lógico” que todos debiesen manejar.

Es así como la enseñanza de las matemáticas y los aprendizajes esperados relacionados con adición y sustracción se ven íntimamente relacionados con aspectos verbales algebraicos, generando ciertos inconvenientes en los estudiantes, pues, como afirma Skemp (1993) el simbolismo viso-espacial interviene en cada detalle del sistema verbal algebraico. Mediante este análisis, la investigación de la enseñanza de estos aspectos espaciales, han sido menospreciados en la didáctica de las matemáticas, lo que ha significado un error profundo, ya sea, por su omisión como enseñanza transversal y articulada o por su escaso trabajo en educación parvularia. Dentro de esta misma lógica Bértolo (2005) plantea mediante técnicas de neuro-imagen, PET(tomografía por emisión de positrones)y FMRI (resonancia magnética) que las imágenes mentales utilizan la percepción visual, argumentando que estas variables no se deben aislar o no tomar en cuenta, del mismo modo Kosslyn (2001) afirma que las imágenes y aspectos visuales están íntimamente relacionadas con diversas funciones cognitivas, de este modo las imágenes se están convirtiendo en unas de las funciones cognitivas mejor comprendidas y al mismo tiempo han tenido un protagonismo histórico en las teorías de función mental.

Por otra parte, Piaget, Beth, Dieudonne, Lichnerowicz, Choquet y Gattegno (1961), establecen que en la enseñanza de las matemáticas se encuentra ligada a aspectos abstractos, no obstante, se suele invisibilizar esta característica lo cual es un error, ahora bien, no quiere decir de que se enseñe inmediatamente desde la abstracción en los primeros años de escolaridad, sino más bien, aplicar la enseñanza a medida de que se desarrollen ciertas estructuras del pensamiento. De esta manera, es evidente que en la enseñanza de esta disciplina existe un grave error, puesto que se enseñan aspectos abstractos sin considerar las capacidades de los estudiantes y menos aún

sus habilidades desarrolladas, y en este caso particular la adquisición de habilidades viso-espaciales, las cuales no son trabajadas a cabalidad como debiese ser.

La psicología, en este contexto ha realizado profundos aportes a la enseñanza de las estructuras matemáticas, estableciendo, que existen estructuras operatorias de la inteligencia las cuales deben ser necesariamente consideradas. De esta manera, Piaget, et. al (1961), uno de los precursores de esta teoría, establece que existen las siguientes estadios cognitivos de las estructuras lógico-matemáticas: Preoperatoria (2 a 7-8 años), operatoria (7-8 a 11-12 años) y operaciones formales (posterior a los 11-12 años). En la primera etapa, se inicia con la relación entre el acto material y lo representativo, vale decir, que el niño (a) es más consiente de pensar lo que ya ha aplicado, o sea, una vez ejecutado materialmente este puede representarlo. Posteriormente, en la segunda etapa se interiorizan las acciones materiales mentalmente a causa de la función simbólica y en la última etapa no solo puede valerse de aspectos concretos, a la vez se puede enfrentar a problemas y planteamientos abstractos.

En base a lo planteado, queda de manifiesto que el aprendizaje de las matemáticas obedece a una serie de etapas, en la cual la abstracción es la etapa culmine y en donde el desarrollo de cada uno de los estadios posibilita la adquisición de las procedimientos posteriores, los cuales deben ser considerados en todo curriculum escolar, ahora bien, en base a estas teorías a nivel mundial se ha instaurado una cobertura del sistema escolar desde los primeros años de edad, sin embargo, se queda netamente en aspectos cronológicos (edad) y no en el verdadero sentido que presuponen los aportes realizados por Piaget (1961).

“En realidad si el edificio de las matemáticas reposa sobre las estructuras, que corresponden, por otra parte, a las estructuras de la inteligencia, es necesario basar la didáctica matemática en la organización progresiva de estas estructuras operatorias” (Piaget, et. al, 1961: 27).

2.2. Discusión teórica en torno al desarrollo de habilidades viso-espaciales

Los aspectos referentes al desarrollo de habilidades viso-espaciales, sin duda, son incidentes en cualquier contenido propuesto en el curriculum, específicamente y directamente se aborda con mayor cautela en geometría, sin embargo, es evidente

que las dificultades de aprendizaje matemático relacionadas con la aplicación de algoritmos de adición y sustracción, se encuentran íntimamente relacionadas con aspectos descendidos en habilidades espaciales, puesto que su operacionalización es puesta en marcha mediante nociones de este tipo. Es así, como Arrieta (2003) plantea que no hay duda de que los símbolos visuales son más comprensibles que una representación verbal-algebraica. Por esta razón, es fundamental no centrar toda la enseñanza a aspectos geométricos, sino más bien, extrapolar su enseñanza a las operaciones aritméticas de base.

Es por esta razón, que en el transcurso de estos años se han realizado una serie de investigaciones relacionadas con las dificultades de aspectos visuales que repercuten en la aparición de dificultades de aprendizaje matemático, es así, como surgen diversos postulados que pretenden dar una explicación concreta, sin embargo, no utilizan el mismo concepto en el análisis de sus estudios, por lo cual surgen diversas definiciones que apuntan a la misma idea. Es en este contexto, que es necesario realizar una discusión, en torno a las diversas denominaciones que recibe esta problemática, para aunar criterios y no mal interpretar o confundir su definición.

Según Arrieta (2003), afirma que:

Adentrarse en el tema de la capacidad de visualización espacial supone adentrarse en un tema controvertido y aparentemente anárquico, pues difícilmente dos investigadores se ponen de acuerdo en conceptos básicos y fundamentales como: capacidad espacial, visualización, orientación espacial, relaciones espaciales, pensamiento espacial (p.60).

De esta manera, se pretende generar un orden conceptual, para lograr un mayor formalismo y seriedad a la investigación y trabajar un mismo concepto relacionado con aspectos espaciales.

En relación a los planteamientos anteriores, Arrieta (2003), utiliza en sus estudios el concepto de “capacidad de simbolización espacial”, afirmando que esta tiene una relación directa con la matemática, pues corresponde a la manera en que los individuos representan el mundo físico. Por otro lado, para afirmar sus postulados cita a diversos autores que utilizan conceptos tales como: Visualisers (Suwarsono,1982), modo de representación visual (Burden y Coulson, 1981), entre otros, asociando todo a un complejo proceso cognitivo.

Por otra parte, Friz, et. al. (2009), utiliza el concepto de “habilidades espaciales” para hacer referencia a las falencias procedimentales de estimulación temprana que afectan un adecuado procesamiento de la información y generan dificultades del aprendizaje matemático. Es así, como plantea que en su investigación los docentes

que forman parte de la muestra afirman que las D.A.M., guardan relación con aspectos perceptivos. En dónde las estudiantes de Educación parvularia (T=97) estuvieron de acuerdo en que las D.A.M. estaban relacionadas con aspectos perceptivos (M=3,14/DT=0.95/P=.001).

Desde otra perspectiva cognitivista, Blanco y Bermejo (2009) utilizan el concepto de “habilidades viso-espaciales” sustentado en la teoría del “self organization” las cuales están relacionadas íntimamente con el desarrollo en mayor grado del hemisferio cerebral izquierdo, la cual puede estar alterada por alguna disfunción o lesión, destacando que el C.I. puede verse afectado por las dificultades de aprendizaje. “Esto hace que no siempre se puedan observar las diferencias de CI entre las escala global de inteligencia y el rendimiento de una competencia curricular determinada” (Blanco y Bermejo, 2009 : 32)

En nuestro contexto nacional, Valdivieso (1973) denomina esta problemática utilizando el concepto de “alteraciones en el reconocimiento de orientación espacial” haciendo alusión a las diversas problemáticas generadas por un escaso desarrollo de habilidades espaciales las cuales repercuten de manera negativa al momento de aplicar los procedimientos de adición o sustracción. Es así como afirma:

...De mismo modo, el cambio que se produce en la secuencia espacial del sistema de sumar y restar (derecha a izquierda)..., crea problemas serios en el aprendizaje de esta última operación, cuando los niños no han establecido bien su percepción de la orientación espacial (p. 82).

Dentro de esta misma lógica, Farnham-Diggory (1983), denomina a estos inconvenientes como “problemas espaciales” en donde el sujeto posee serias dificultades a la hora de establecer relaciones en la operatoria a partir de puntos espaciales las cuales lógicamente tergiversaran un resultado. “Por lo visto lo que se ha perdido es la capacidad para mantener puntos espaciales de referencia, tales como la localización de las decenas, unidades y otras” (Farnham-Diggory, 1983: 104). Dichos postulados se encuentran amparados bajo investigaciones de Luria (1966) y Ginsburg (1977), los cuales utilizan respectivamente a su vez denominaciones tales como “aspectos espaciales” y “defectos de lógica”. Esto evidencia nuevamente la justificación de la discusión teórica planteada para unificar términos.

Desde otra perspectiva,(Skemp,1993) utiliza el concepto de “Simbolización visual”, haciendo referencia en sus escritos, a la existencia de dos tipos de imaginación e interpretación de la información de las matemáticas, en donde, existen dos sistemas simbólicos, por un lado el verbal algebraico que abstrae propiedades independientes de la configuración espacial , tal como lo son los números y es más fácil de comunicar,

por otro lado el espacial, el cual abstrae propiedades lógicamente espaciales, tales como forma y posición, mostrando estructura y siendo más difícil de comunicar en comparación al verbal algebraico al representar un pensamiento individual.

Skemp (1993) afirma:

"El valor del simbolismo visual se muestra también por el modo en que se superpone con el verbal-algebraico, en la forma de ordenación espacial de símbolos escritos...Una vez ya escritos , están presentes simultáneamente y se restaura la ordenación secuencial, inspeccionándolos en un orden convencional acordado".(p.117)

Es en este contexto, considerando que los algoritmos de adición y sustracción, presentan una serie de implicancias visuales en cuanto a su interpretación, para los efectos de esta investigación se utilizará el concepto de simbolización visual (Skemp, 1993), puesto que, es este postulado el que se aproxima a la aplicación de las operatorias anteriormente descritas. De esta manera, se quieren eliminar las ambigüedades conceptuales haciendo referencia a una definición clara y directamente relacionada con la aplicación procedimental aditiva o de sustracción, la cual es muy compleja, pues los símbolos matemáticos construidos para estos efectos son utilizados para generar un sistema universal los cuales están normados y están contenidos de aspectos visuales, los cuales se explicitaran en mayor detalle en el capítulo IV.

2.3. La operatoria y los algoritmos

Sin duda, la operatoria aritmética de base adquiere un rol fundamental en nuestra vida, en vista de que estas las aplicamos de manera cotidiana y automática, sin embargo, en ocasiones se pierde de vista la complejidad que presupone la aplicación de operatorias matemáticas, específicamente en los algoritmos de adición y sustracción. "Mediante el trabajo con las representaciones las personas asignan significados y comprenden las estructuras de las matemáticas, de ahí su interés didáctico". (Rico, 2009:3)

Es importante mencionar, que los algoritmos están relacionados con expresiones simbólicas, por ende, debo poder interpretar estos códigos para poder utilizar la concatenación de procedimientos conducentes. Es así, como Godino, Batanero y Font (2003) establecen que los símbolos matemáticos permiten expresar cantidades, realizar operaciones, fijar procesos, corregir posibles errores, obtener reglas y algoritmos ligados a expresiones simbólicas. De aquí, la importancia particular por prestar atención, a la complejidad de la aplicación y correcto uso de los algoritmos, en este caso, de adición y sustracción, puesto que el número en sí y sus símbolos poseen un carácter operatorio y estos representan aspectos objetivos de nuestra vida cotidiana como agregar, quitar, separar, juntar, regalar, etc. de este modo Castro, Rico y Castro (1995) afirman que las operaciones numéricas son las que dan importancia al número, y sin estos, podrían perder relevancia.

Es así, como las operaciones anteriormente mencionadas, adquieren una estructura singular, lo cual se conoce como algoritmo, antes de ello, Castro et. al (1995) establecen una serie de etapas en el aprendizaje de las operaciones aritméticas las cuales se describen a continuación:

Primera etapa, las acciones: en primera instancia se debe tener en cuenta las acciones y transformaciones que se realizan con los números considerando sus características lo que origina el concepto de operación.

Segunda etapa, uso de modelos: al construir la abstracción de los cambios y acciones numéricas en diversos contextos, aparecen los esquemas, los cuales originan los modelos representativos. Es así como cada operación tiene características singulares, que distinguen una de la otra.

Tercera etapa, simbolización: Al usar los modelos de una operación, se genera un mayor nivel de abstracción en la expresión simbólica de la misma, extrapolando a diversas situaciones un mismo modelo y situación.

Cuarta etapa, hechos numéricos: Usualmente con los números se establece una relación entre ellos para llegar a un resultado mediante la operación, a esto se le conoce como hecho numérico.

Quinta etapa, Algoritmos: Es aquella en que la construcción de hechos numéricos, reglas básicas y destrezas, permiten obtener un resultado de la operación.

“La importancia del algoritmo, es que simplifica la operación, puesto que, independiente de la amplitud de un número, este encausa el resultado si es bien aplicado o ejecutado, esto se explica en gran medida por una serie de características que tienen los algoritmos, entre estas podemos destacar: nitidez, eficacia y universalidad”. (Castro et. al. 1995 : 19)

En el orden de las ideas planteadas recientemente, la primera característica posibilita que el algoritmo se transforme en un proceso mecánico por su explicitación, la segunda, guía los resultados mediante una serie de pasos o procedimientos, siempre y cuando estos sean simples y por último un mismo algoritmo se aplica a situaciones de un mismo tipo, gracias a la tercera característica.

Otro modelo relacionado con la aplicación de algoritmos (Salgado y Alameda, 2013) establece que todo cálculo debiese considerar el procesamiento de los símbolos escritos, recuperación de datos aritméticos de base y finalmente aplicación del procedimiento (algoritmo) el cual es explícito al momento de comenzar desde la columna derecha, establecer el producto correspondiente de los sumandos de manera vertical y reservas según sea pertinente.

Si bien, ambos modelos planteados con antelación explican la lógica con la cual operan los algoritmos y las diversas etapas previas para alcanzar el último fin, es importante destacar que este proceso no es para nada simple, por lo cual al momento de implementar la enseñanza de los mismos mecanismos se debe considerar la concatenación previa que debe existir entre las distintas etapas y de las cuales se debe velar por la correcta comprensión y concepción previa de cada una de ellas, antes de complejizar aún más las operaciones aritméticas, en este caso particular de adición y sustracción.

2.4. Dificultades de adición y sustracción asociadas a la simbolización visual.

La educación matemática y el aprendizaje de la misma, se encuentra en su totalidad representada mediante simbolismos, los cuales deben ser interpretados para poder ser comprendidos y ejecutados, es aquí, dónde se construyen los significados mismos de esta ciencia exacta. “El estudio de las estructuras mismas, es una parte importante de las matemáticas; y el estudio de la manera en que se construyen y funcionan se encuentra el verdadero núcleo del aprendizaje de la matemáticas” (Skemp, 1993 : 43)

Es en este mismo contexto, que es trascendental considerar a priori, las representaciones utilizadas en la operatoria aritmética de adición y sustracción, puesto

que, a partir de su explicitación, a posteriori se realizará la correcta o errónea comprensión del procedimiento algorítmico conducente construir su significado, vale decir, de no tener claridad en la comprensión al momento de captar la información, difícilmente se ejecutará de manera adecuada un algoritmo, ya sea, por una mala interpretación o simplemente por una mala comprensión de la representación analizada. Es en este sentido, que es complejo enseñar los procedimientos o algoritmos que involucran adición o sustracción. Es así, como Skemp (1993) señala que las matemáticas han sido descritas como un “cálculo del pensamiento”, pues sus sistemas simbólicos los hacen así.

Dentro de esta misma lógica, Skemp (1993) señala que existen dos sistemas principales de representación simbólica, por un lado se tiene la simbolización verbal – algebraica y por otro lado la simbolización visual. Pese al predominio actual del sistema verbal –algebraico, la simbolización visual tiene una gran importancia, pues las palabras apenas son escritas, estas en primera instancia son vistas y no oídas.

Es así como pueden existir diversos errores, al momento de aplicar algoritmos de adición y sustracción, tales como, confusión en el ordenamiento o encolumnamiento de los dígitos, dificultades asociadas a la horizontalidad del procedimiento ejecutado al adicionar o sustraer erróneamente dependiendo de la posición (Unidades, decenas y centenas), minuendos y sustraendos mal ejecutados en su operatoria, reservas mal posicionadas, inversión de izquierda / derecha – abajo /arriba en la ejecución del algoritmo, entre otras, las cuales alteran el total o la diferencia calculada, puesto que se tergiversa por los diversas falencias descritas con antelación.

Según Friz, Sanhueza y Sánchez (2009):

La alta frecuencia de errores procedimentales está relacionada con el desarrollo inadecuado de los procesos perceptivos como las dificultades en la lectura de símbolos numéricos o signos. También son recurrentes los problemas de encolumnamiento que dejan ver falencias en la estimulación temprana de habilidades viso espaciales que impiden procesar la información adecuadamente (p.50)

Del mismo modo, Farnham-Diggory (1983), establece lo siguiente:

Este tipo de defectos lógicos puede aparecer también en el manejo de los números. Por ejemplo, un paciente puede escribir el número 1029 como 129, demostrando así un fallo en la captación de la lógica del cero como ocupante de un lugar. De modo semejante, el paciente puede escribir el número 1000 29 en

el orden en que los números fueron nombrados, sin considerar las relaciones significativas. Los defectos lógicos de este tipo tienen su origen, probablemente, en problemas espaciales. (p.104)

A la vez, existen otras dificultades relacionadas con la problemática anteriormente descrita, las cuales fueron categorizadas por Luria (1966) en: defectos de lógica y aspectos relacionados con el espacio, dificultades en la planificación de la resolución de problemas, perseveración de procedimientos erróneos e incapacidad para aplicar procedimientos básicos. Dichas trabas se ven relacionadas íntimamente con aspectos viso-espaciales, las cuales fueron descubiertas a través de la experimentación, desde esos años ya era evidente esta problemática, no obstante, no se le otorga mayor importancia en la enseñanza de las matemáticas, en nuestra actualidad, lo cual deja en evidencia que no estamos aprendiendo de la historia.

De esta manera, la simbolización espacial, incide notablemente en los algoritmos aplicados en las operaciones anteriormente descritas, puesto que representa procedimientos contruidos a partir de lo abstracto, es así, como la enseñanza de las matemáticas no debiese ser, didácticamente traducida a meros procedimientos verbales y algebraicos, sino más bien, incorporar aspectos visuales que faciliten la comprensión de la complejidad de los símbolos. "...las representaciones graficas o ayudas visuales han sido y son ampliamente utilizadas pensando, sin precisar más, que lo visual, al reunir las características de lo abstracto y lo concreto, podría servir de puente entre lo uno y lo otro". (Puig y Cerdán, 1995: 187)

Es así, como las diversas lógicas y secuencias de pasos, que conlleva la ejecución de un algoritmo de adición y sustracción, debe enseñarse, posteriormente al desarrollo de habilidades viso-espaciales o de simbolización visual, las cuales lamentablemente han sido descuidadas en la didáctica de las matemáticas, por la simple razón de que se prioriza los aspectos verbales y algebraicos. Para esclarecer este problema, se propone la siguiente analogía : Supongamos, que pretendo enseñar a conducir a un joven de 15 años, que presenta grandes falencias de simbolización viso-espacial, lo más probable es que aprenda, puesto que ha adquirido un cierto desarrollo psicomotriz que posibilita la ejecución de diversas tareas al mismo tiempo, sin embargo, no llegaría muy lejos puesto que las señaléticas de tránsito están contenidas de símbolos visuales los cuales no serían interpretados y alguna infracción o accidente causaría, por otra parte no tendría buenas referencias para llegar a un destino determinado. De esta manera, lo mismo sucede con un estudiante, que se le enseñan algoritmos de adición y sustracción, sin antes tener desarrollada la simbolización visual que construye los significados dentro de la operación, ahora bien, no es el único factor incidente en vista de la complejidad que presupone la adición y

sustracción, pero si es un determinante. Es así, como Mora (2003), menciona que los algoritmos están centrados en seguir un conjunto de acciones concatenadas para solucionar tareas específicas, sin dejar de lado un estricto rigor mecánico y ordenado, a la vez plantea que sus observaciones en aula, evidencian que para los estudiantes no es fácil seguir la secuencia de un algoritmo paso a paso, sino más bien, cuando se tiene alguna experiencia y habilidad de procedimientos matemáticos o algoritmos, esta se realiza de manera automática.

Es evidente entonces, la relación existente entre la simbolización espacial y la aplicación de algoritmos de adición y sustracción, ahora bien, la diferencia radica en que una debiese ser potenciada en los inicios de la escolaridad en el área lógico matemática, sin abordarse como una pincelada, sino, dar la verdadera importancia que nunca debió haber perdido. Posterior a ello, se pueden ejecutar los algoritmos anteriormente descritos, por las razones expuestas con antelación. Siguiendo con la misma idea, Luria (1966) citado por Farnham-Diggory (1983) establece que:

El análisis de números compuestos formados de acuerdo con el sistema decimal requiere de la diferenciación de categorías, que ocupan distintas posiciones en el espacio cuando se escriben, e incluso cuando se imaginan es necesario retener su organización espacial. Está claro por lo tanto, que cuando se perturba la síntesis espacial y... se han desintegrado las ideas espaciales, la estructura categorial de número se pierde fundamentalmente. (p.104)

Para esclarecer de mejor manera esta problemática Ginsburg (1977) citado por

Farnham-Diggory (1983), explicita uno de sus experimentos:

1. Ralph, un niño de once años, en el quinto grado, trabajaba con dos años de retraso respecto del nivel normal, mostrando una...laguna entre trabajo escrito y conocimiento informal de aritmética. Sus aptitudes informales, eran, sin duda, notables. Si le presentaban colecciones de objetos para sumar (por ejemplo, 23 peniques y 18 peniques), podía agrupar los objetos y contar por grupos de cinco o por decenas. Resolvía problemas mentalmente mediante ingeniosos procedimientos de reagrupación. Por ejemplo, para sumar $78 + 58$ "tomo 70 y 50, contando por decenas, y hacen 120. Tomo 5 de 75, y hacen 125. Del 8 tomo 5 más para hacer 130, y 3 más son 133". De esta manera podía sumar números de tres dígitos mentalmente. También era muy hábil con sustracciones que incluían objetos reales y resta mental; en ambos casos hacía uso de procedimientos de agrupación y reagrupación.

Al mismo tiempo, los cálculos escritos por Ralph evidenciaban errores rotundos pues localizaba dígitos de izquierda a derecha como en:

$$\begin{array}{r} 2 \quad 3 \\ + \quad 5 \\ \hline 7 \quad 3 \end{array}$$

No sabía cómo llevar. Por ejemplo dados:

$$\begin{array}{r} 1 \quad 9 \\ + \quad 1 \quad 6 \\ \hline \end{array}$$

Comenzaba a sumar por la izquierda, diciendo $1 + 1 = 2$.

Después sumaba $9 + 6 = 15$, con lo que le habría dado,

$$\begin{array}{r} 1 \quad 9 \\ + \quad 1 \quad 6 \\ \hline 2 \quad 1 \quad 5 \end{array}$$

Pero no está claro cómo llegó a darse cuenta de que 215 tenía demasiados dígitos . ¡ Su solución era simplemente ignorar el 5!

Entonces daba una respuesta de 21. En caso de sustracciones, si se le pedía que hiciera $15 - 7$, en un papel (había obtenido ya mentalmente la respuesta correcta) escribía

$$\begin{array}{r} 1 \quad 5 \\ - \quad 7 \\ \hline 6 \quad 5 \end{array}$$

Después de haber alineado los números de manera incorrecta, hacía uso del método común de restar el número menor del mayor.

Vemos que Ralph era hábil en aritmética, excepto cuando tenía que calcular por escrito... Nunca resolvía problemas sobre papel, a menos que yo se lo dijera. Las respuestas más absurdas y contradictorias no le preocupaban. Parecía estar convencido de que las respuestas son distintas cuando trabajan los problemas sobre el papel que cuando se efectúan de modo informal [mentalmente], y que ambos procedimientos eran correctos. Cuando le pregunté qué respuesta era exacta, dijo: "ambas", y al decirle que me explicara por qué, contestó: "el caso es diferente", Para Ralph, el trabajo escrito y los procedimientos informales eran algo separado, pero igual (p.112)

Para finalizar las ideas anteriormente expuestas, el caso evidencia nuevamente las falencias que puede presentar un estudiante con dificultades de simbolización visual, puesto que en particular, la aplicación de algoritmos de adición y sustracción obedece a la manera en que se representa mentalmente la información dependiendo

de los símbolos contruidos a partir del espacio. De este, modo queda de manifiesto nuevamente la importancia de desarrollar estos aspectos desde los inicios de nuestra escolaridad. Pese a las falencias descritas anteriormente y con ánimos de mejorar las prácticas propias del proceso de enseñanza-aprendizaje Bafalluy, Noel y Pascale (2011) como resultado de una de sus investigaciones, concluyen que la mayoría de sus participantes preferían abordar o resolver operaciones aritméticas con códigos visuales o más bien visualización mental, lo cual reafirma las repercusiones que tiene el desarrollo viso-espacial en el aprendizaje matemático.

2.5. Nuevos aportes al aprendizaje matemático

Con la incipiente interdisciplinariedad para abordar la complejidad de los fenómenos educativos, surgen los aportes de diversas áreas del conocimiento humano, de esta manera las neurociencias cognitivas han adquirido un gran protagonismo en la comprensión de los procesos cerebrales que se encuentran supeditados al proceso de enseñanza – aprendizaje. Es así como con el pasar de los años se han fortalecido vínculos entre neurocientíficos y educadores, pues mediante la comprensión del funcionamiento de nuestro cerebro, se logran esclarecer ciertas cuestiones relacionadas con la enseñanza, de este modo Puebla y Talma (2011) establecen que los hallazgos de dicha ciencia se encuentran en estrecha vinculación con elementos que son propios de la educación, como lo es la didáctica, evaluación y curriculum, es más, la Organización para la Cooperación y Desarrollo Económico (OCDE, 2007) fomenta la investigación neurocientífica para fortalecer la educación de sus estudiantes y una serie de universidades como Harvard (Programa Mind),

Cambridge (Centro de neurociencias en educación) y el instituto Max Planck tienen como foco la investigación de estas áreas.

Dentro de este mismo contexto las investigaciones ligadas a la neurociencia están en estrecha vinculación con el aprendizaje matemático, evidenciando que las imágenes y/o aspectos viso-espaciales son vistas desde este enfoque como un factor que incide notablemente en las estructuras del pensamiento humano de acuerdo a lo abordado en el capítulo 2.1, es así como Kosslyn (2001) estipula que con la aparición de las neurociencias se ha abierto una arista en el estudio de las imágenes y la comprensión de las mismas.

Ahora bien, los aspectos anteriormente descritos claramente se encuentran relacionados con la simbolización visual, pues es a partir de este tipo de nociones que se configura la comprensión de aspectos tales como la aplicación de operatoria aditiva o de sustracción, de esta manera la neurociencia trata de explicar que ciertas áreas del cerebro (lóbulos parietales posteriores) se encargan del procesamiento de propiedades espaciales. Dentro de esta misma lógica, Kosslyn (2001) brinda una gran importancia al modelamiento de ciertos procesos y manipulación de objetos, pues las "neuronas espejo" se encuentran vinculadas con la transformación de esquemas mentales de tipo visual. De este modo y según lo planteado con antelación, se puede evidenciar la importancia que tienen la utilización de estrategias didácticas concretas para responder a la etapa de desarrollo del niño(a) y al mismo tiempo para que logre el desarrollo de habilidades viso-espaciales conducentes al desarrollo de la simbolización visual.

Es así como estos estudios en particular evidencian que la manera en que se perciben aspectos viso-espaciales afectan las estructuras neuronales, lo cual reafirma los efectos de los símbolos visuales para la comprensión del mundo que nos rodea. Dentro de este postulado, los diversos teóricos de esta área agregan que los procesos neuronales propios de los aspectos viso-espaciales y/o perceptivos tienen como funcionalidad la representación de un estímulo o situación.

Desde esta misma mirada, Oliveira, Marquéz y Neves (2015) plantean que hay ciertas cuestiones relacionadas con el cálculo mental, las cuales se dan de manera implícita, no obstante con el pasar de los años la matemática comienza a volverse un tanto abstracta y por ende, se comienzan a evidenciar ciertas falencias, todo esto se ha logrado determinar gracias a los avances neurocientíficos que permiten conocer el procesamiento de la información referida al conocimiento matemático por parte del cerebro. Es así, como gracias a estos estudios se han logrado dilucidar ciertos descubrimientos tales como la estrecha relación existente entre la discalculia del desarrollo y la percepción viso-espacial (Balbi y Dansilio, 2010) a través de sus

estudios clínicos, los cuales aportaron respecto a las consideraciones previas al momento de aprender matemáticas, pues si no se educan de manera temprana aspectos viso-espaciales lo más probable es que esto tenga como consecuencia una falencia del cálculo, por la no consideración de elementos claves para el desarrollo del aprendizaje matemático.

Bafalluy y Pérez (2014), establecen que en sus estudios de activación cerebral vinculados con matemáticas lograron identificar la participación del lóbulo parietal bilateral, lóbulo frontal y corteza prefrontal las cuales se encuentran íntimamente ligadas a aspectos visuales. La importancia de este estudio en particular claramente radica en la especificidad de identificar aquellas áreas del cerebro que trabajan aspectos espaciales y que al mismo tiempo son fundamentales a la hora de aprender las matemáticas.

Del mismo modo, Dehaene (1997) desprende que el procesamiento numérico bajo la lógica neuronal opera a partir del tamaño, distancia entre los dígitos y aspectos visuales en que los números son trabajados, lo cual nuevamente demuestra que para abordar el proceso de enseñanza aprendizaje de algoritmos, no se debe dejar de lado los aspectos relacionados con la simbolización espacial, pues estos de una u otra forma trascienden notablemente a la hora de encontrar un producto o diferencia determinada.

Fortaleciendo los postulados anteriores y vinculando aún más esta disciplina con el aprendizaje matemático, Salguero y Alameda (2013) establecen que ambos hemisferios cerebrales poseen mecanismos de identificación visual los cuales conjugados entre sí representan aspectos tales como características y ubicación de símbolos matemáticos. Al mismo tiempo los procedimientos de dígitos de mayor amplitud los cuales son abordados algorítmicamente por su complejidad, implican coordinaciones de tipo viso-espacial.

Por otra parte y en un caso más extremo, Radford y André (2009) establecen que algunas áreas del cerebro (lóbulo parietal izquierdo) que se encuentran lesionadas pueden ocasionar problemas de discalculia las cuales se relacionan con inconvenientes espaciales al momento de ejecutar una operación aritmética, lo cual se pudo evidenciar gracias a la experimentación con pacientes que tenían algún tipo de lesión cerebral.

Ahora bien, la mayoría de los estudios y conclusiones desprendidas de los autores citados, provienen de ambientes no educativos y aparatos tecnológicos que permiten esclarecer el funcionamiento de nuestro cerebro. Sin embargo, ello no quiere

decir que los descubrimientos se deban aislar del aprendizaje, sino más bien se necesita de una conexión que permita comprender la forma en que el o la estudiante construye sus conocimientos. De este modo Valdivieso (2016) establece que gracias a este tipo de estudios se han logrado establecer las modificaciones en las conexiones cerebrales y las zonas del cerebro más involucradas con el cálculo.

Es así como la importancia de las neurociencias en educación matemática cobra un sentido de pertenencia significativo y al mismo tiempo conlleva la configuración y/o desafío de un nuevo profesorado que sea capaz de complementar las neurociencias y la educación, con el objetivo de otorgar mayor científicidad al proceso de enseñanza-aprendizaje de nuestros educandos, en base a lo planteado con antelación Mogollón (2010) afirma que en un futuro no muy lejano y en vista de las necesidades que han emergido en la enseñanza de las matemáticas la formación inicial docente se debe focalizar en la función cerebral y sus repercusiones educativas.

2.6. Estrategias didácticas y simbolismos visuales.

La enseñanza de los algoritmos de adición y sustracción, forman parte importante del curriculum educacional a nivel internacional y en particular en nuestro país, puesto que componen las operaciones aritméticas de base para desenvolvemos en la sociedad debido a su clara funcionalidad, pues es una clara manera de representación de la realidad. De hecho Orton (2003) afirma que el aprendizaje de las matemáticas se centra netamente en el desarrollo de estructuras algorítmicas por su gran utilidad. De ahí el interés de diversos investigadores por tratar de dilucidar teorías, estrategias y/o metodologías conducentes a encauzar un desarrollo adecuado de este tipo de habilidades matemáticas, pues no es para nada fácil, ni menos simple el poder explicar cómo opera el aprendizaje en un(a) niño(a). Es así como Ballester (2009) enfatiza la necesidad de enriquecer cada vez más el quehacer pedagógico desde las bases didácticas, las cuales deben tener una connotación científica para lograr estructurar el procedo de enseñanza-aprendizaje.

Uno de los principales autores en esta temática, fue Brunner (1960) quien consigné tres etapas en el modo de representación (enactiva, icónica y simbólica),

además de las estructuras que consignó Piaget (1961) en las estructuras cognitivas de la inteligencia, que forjaron los cimientos para las estrategias didácticas actuales.

De esta manera bajo el alero de los postulados mencionados con anterioridad, se comenzó a enseñar utilizando un referente que estaba dando buenos resultados, dicha metodología es llamada COPISI o también conocida con las siglas C.P.A. que forma parte de los pasos del método Singapur y básicamente su sustento hace referencia al aprendizaje significativo o profundo por parte de los educandos, por medio de la manipulación de material concreto, pasando por representaciones pictóricas y para finalizar con referentes simbólicos. De esta manera el aprendizaje matemático y específicamente de los algoritmos debe considerar esta progresión al momento de ser abordada, es así como Tello, Barriga y de la Cruz (2013) estipulan que este tipo de metodología opera desde la representación y visualización, con el objetivo de generar un aprendizaje focalizado en la manipulación. De esta manera, evidentemente dicha estrategia considera las formas de representación visual como un factor importante al momento de aprender, pues las matemáticas exponen al estudiante a diversas representaciones visuales (Orton, 2003).

En vista de lo planteado con antelación, podemos afirmar la estrecha relación de los métodos innovadores y más utilizados a nivel mundial con la consecución de los aprendizajes a través del desarrollo viso-espacial o utilizando explícitamente formas de simbolización visual, estableciendo un puente entre lo concreto y lo abstracto, de ahí la importancia de incluir esta forma de representación en toda estrategia didáctica. Bajo este mismo contexto, la enseñanza de algoritmos de adición y sustracción muchas veces de manera lamentable son abordados didácticamente de manera abstracta, sin establecer relaciones entre los componentes, lo cual desemboca en una mala interpretación de dichas representaciones y por lo tanto el producto o diferencia resultan erróneos, fruto del mal proceder. Es así como este método en contraste a lo anteriormente mencionado, busca el aprendizaje de estas operatorias en base a estrategias previas de manipulación de material concreto, para luego representarlas en imágenes o dibujos y culminando con lo abstracción de símbolos verbales-algebraicos, para así no caer en el error de creer que el proceso de enseñanza-aprendizaje de algoritmos es algo innato o antojadizo, sino más bien, es un proceso delicado y progresivo al mismo tiempo. Una afirmación clara que da cuenta de la complejidad del fenómeno, es lo planteado por Chamorro (2003) estableciendo que las mayores dificultades algorítmicas son ocasionadas por un uso incorrecto del valor de posición y mal alineamiento de dígitos, gestionando muchas veces de manera errada las relaciones entre las representaciones que forman parte de una adición y sustracción. Esto que para un adulto puede parecer fácil e inclusive mecánico, para un niño no lo es, pues las estructuras a través de las que operan las representaciones matemáticas son complejas.

De este modo es evidente, el gran aporte de este tipo de metodología, pues es atingente al proceso de enseñanza-aprendizaje relacionada con la aplicación de algoritmos de adición y sustracción, pues por un lado considera la etapa de desarrollo del niño(a) y al mismo tiempo considera en su génesis la manipulación y representación visual previa a la abstracción, siendo un referente didáctico imperante para abordar las dificultades de aprendizaje matemático relacionado con inconvenientes vinculados con la simbolización visual. En base los aportes de este tipo de metodología Espinoza, Matus, Barbe, Fuentes y Márquez (2016) aseveran que el Instituto de Investigación Americano (A.I.R.) y el Educational Research Institute Of América (E.R.I.A.) en sus informes emanados respectivamente en el 2005 y 2010 dejan constancia de que en sus experimentaciones los estudiantes que fueron sometidos al método tuvieron logros de aprendizaje significativos, por sobre aquellos casos que no estuvieron involucrados con esta estrategia didáctica. Del mismo modo Leong, Weng y Cheng (2015) en sus estudios comprueban el alto impacto del método en la enseñanza de los primeros niveles de escolaridad.

Es así, como este tipo de factor relacionado con los métodos de enseñanza utilizados por un profesor(a), puede ser utilizado para contrarrestar ciertas falencias de tipo viso-espacial que pueden repercutir en el aprendizaje de algoritmos, pues recordemos que independiente del desarrollo de este tipo de habilidades la manera en que abordamos el objetivo de aprendizaje debe estar contextualizado a la etapa de desarrollo del estudiante y en este caso particular el método COPISI viene a encauzar y direccionar la praxis pedagógica en la asignatura de matemáticas. Dicho de este modo, es el profesor el responsable de suplir las necesidades que presentan los educandos, es así como Chamorro (2003) establece que como entes participantes dentro del proceso de enseñanza aprendizaje se debe tratar de potenciar y hacer aparecer las técnicas que se encuentran supeditadas a los algoritmos, las cuales van mejorando de forma progresiva y dar el espacio de que cada educando descubra la mejor forma de aprender cálculos atendiendo sus necesidades y desarrollo intelectual. A partir de eso podemos aseverar de manera consistente la gran importancia que tienen este tipo de metodología, la cual viene a poner fin a una serie de falacias y mitos cometidos en la enseñanza de algoritmos de adición y sustracción, los cuales si no son bien trabajados a partir de lo mencionado en los postulados anteriores, lamentablemente el aprendizaje del niño(a) no tendrá buen fin, ni menos será significativo y por consiguiente ello acarreará una problemática posiblemente irreversible que impactará de manera transversal.

Si bien, los aportes del método COPISI son significativos, toda estrategia debe ser contextualizada, más aún si su génesis es extranjera, en este caso particular

Singapur. Es así como en Chile, específicamente el centro Félix Klein perteneciente a la Universidad de Santiago de Chile ha sido la precursora en la implementación del método Singapur a nuestra realidad mediante edición de libros, capacitaciones al cuerpo docente y/o directivos, talleres y diseño de instrumentos. Pese a lo implementado con antelación, no todas las escuelas de nuestro país se encuentran asesoradas por esta institución, sin embargo trabajan con textos escolares, los cuales están articulados con la metodología anteriormente descrita. Al mismo tiempo el Ministerio de Educación en las orientaciones didácticas de matemáticas (2013) establece la necesidad de implementar estrategias o modelos que operen desde lo concreto, pictórico y simbólico para la mejora de los aprendizajes, lo cual denota que existe una consideración en nuestra realidad sobre la importancia de estos componentes en nuestro currículum y los niveles de concreción en los cuales opera, no obstante es importante la vinculación con alguna institución como la anteriormente mencionada (C.F.K.) ,pues no se debe quedar todo en las buenas intenciones, sino más bien, se debe encauzar de la manera más prolija posible, en vista de que no es para nada antojadizo, ni menos al azar el sentido metodológico propuesto. Existen principios, fundamentos teóricos y una didáctica que trasciende al método COPISI, sin embargo, no se va más allá del medio para alcanzar un fin, lo cual puede poner en riesgo el verdadero sentido que tiene este método. De esta manera Espinoza, et al. (2016) afirma que la aplicación de dicho método se da de diversas maneras en cuanto a su implementación, y puede ser entorpecido la incorrecta apropiación por parte de los docentes, tensión constante con el paradigma actual y organización de los establecimientos, que una u otra manera pueden entorpecer o a la inversa.

3. MARCO METODOLÓGICO

3.1. Enfoque del estudio

Para los efectos de la investigación, el estudio se adscribe al paradigma positivista en el paradigma positivista con un modelo cuantitativo (Huaquín, 2010; Villegas, 2005), para así, dar cuenta de los fenómenos del proceso de enseñanza aprendizaje los cuales son observables y por ende, pueden ser cuantificados mediante aspectos estadísticos. Es así como Villegas (2005) afirma que este tipo de investigación tiene como base un problema y objetivos bien definidos, valiéndose de técnicas de recolección de datos para medir las variables sujetas a la investigación. De esta manera se otorga sistematicidad a los componentes que forman parte de la construcción del conocimiento y al mismo tiempo como afirma Hernández, Fernández y Baptista (2003) con este tipo de enfoque se saca provecho a la prueba de hipótesis de manera concreta al analizar los patrones de comportamiento de manera numérica, la cual puede apoyar una respuesta tentativa o refutar para dar soluciones alternativas ante un problema de investigación determinado, bajo la lógica de predicción y explicación a través de la descripción o establecimiento de relaciones causales.

3.2. Tipo y diseño estudio

La presente investigación es de carácter Correlacional utilizando un diseño no experimental de corte transversal (Villegas, 2005; Huaquín, 2010; Hernández et., al, 2003), cuya finalidad es establecer la incidencia de la simbolización visual en la aplicación de algoritmos de adición y sustracción, en estudiantes de 2 ° año básico, pertenecientes a establecimientos de dependencia municipal y particular subvencionado. Dicho diseño, se implementa para responder a los objetivos de la investigación y al mismo tiempo para hacer más enriquecedora la construcción del conocimiento, estableciendo relaciones entre dos o más variables a través de patrones de comportamiento de una muestra específica. Es así como Villegas (2005) plantea que los este tipo de diseños los emplea el investigador para experimentar una nueva técnica de enseñanza.

3.3. Población y muestra

La población se encuentra constituida por estudiantes de primer ciclo, pertenecientes a segundo año de enseñanza básica de la ciudad de Chillán de establecimientos de dependencia municipal y particular subvencionado, para efectos del estudio, se realizó un muestreo no probabilístico del tipo intencionado.

Producto de lo anterior la muestra está constituida por 75 estudiantes de segundo año básico pertenecientes a establecimientos de dependencia municipal y 120 estudiantes de establecimientos de dependencia particular subvencionada del mismo nivel.

3.4. Técnicas de levantamiento de información

Para efectos de los objetivos del presente estudio se aplicaran dos instrumentos, el primero corresponde a un “*Test de organización perceptiva*” elaborada por García, V. y Manjón, D. (2011) de la Bateria Psicopedagógica Evalúa 2. El segundo instrumento corresponde a un “*Test de adición y sustracción*” elaborado por Rodríguez y Rodríguez (2015) acorde a los contenidos de los textos entregados por el Ministerio de Educación de Chile de primer ciclo de enseñanza básica, como también a los lineamientos explicitados en las bases curriculares, del sector matemática.

Ambos instrumentos, fueron sometidos validación estadística mediante el coeficiente Alfa de Cronbach, el primeros de ellos entrego un valor de 0,85 y el segundo un alfa de 0,96. Lo que indica que el instrumento posee una buena consistencia interna, es decir, la información es considerada fiable para los efectos del estudio.

3.5. Análisis de la información.

Para el análisis de la información se consideraron métodos descriptivos univariados numéricos (porcentajes, promedios) y análisis inferencial como la prueba t-Student, coeficiente de correlación de Pearson considerando un nivel de significación ($p < 0,05$). El procesamiento de la información fue realizado en el paquete estadístico SPSS versión 13.0.

4. PRESENTACIÓN DE RESULTADOS

A partir de los objetivos planteados, se puede desprender una serie de resultados los cuales serán presentados a continuación, para así, a posteriori desglosar una serie de conclusiones conducentes a enriquecer el conocimiento científico desde el punto de vista educacional.

Claramente el papel de las formas de representación matemáticas juegan un rol preponderante a la hora de que los educandos de segundo año básico (NB1), apliquen algoritmos de adición y/o sustracción, de este modo, las relaciones viso-espaciales que se establecen al momento de ejecutar este tipo de operatoria matemática, deben ser consideradas en todo curriculum puesto que de la mano con la etapa de desarrollo de un niño(a), puede bien determinar el éxito o el fracaso en el sistema escolar, pues si no es abordada de manera temprana puede derivar a una dificultad de aprendizaje matemático (D.A.M.)

Para comenzar, a continuación y en coherencia con lo establecido, se dará cuenta del nivel de logro alcanzado por estudiantes de segundo año básico de establecimientos municipales y particulares subvencionados en el test de Simbolización visual y aprendizajes matemáticos.

Resultados obtenidos en simbolización visual y aplicación de algoritmos de adición y sustracción

	Mínimo	Máximo	Promedio	Desviación estándar	Asimetría
Simbolización visual	1	95	32,75	28,12	0,646
Aprendizajes matemáticos	0	100	32,96	24,17	0,589

TABLA 1: Estadísticos descriptivos simbolización visual y aprendizajes matemáticos.

En la tabla anterior, se evidencia que del total de estudiantes (N= 188) presentan un porcentaje de logro en la simbolización visual que fluctúa entre un 1,0% y a un 95,0 %, con un promedio de 32,75 % (D.E = 28,12) cabe hacer notar que la distribución de los porcentajes de logro presenta una asimetría positiva (C.A= 0,65) , situación que evidencia que en general los estudiantes alcanzan porcentajes de logro “bajos” en relación a la simbolización visual. Por otra parte en cuanto a aprendizajes matemáticos los porcentajes de logro varían entre un 0% y un máximo de 100%, con un promedio de 32,96 % (D.E=24,17) y una asimetría de 0,59.

De esta manera, en torno a los resultados se puede desprender que la media de simbolización visual y aprendizajes matemáticos se encuentra por debajo del 50,0% de logro, evidenciando que los estudiantes presentan dificultades, tanto en simbolización visual, como en aprendizajes matemáticos, lo cual puede explicarse por la escasa utilización de estrategias didácticas vinculadas con la construcción e interpretación de simbolismos visuales. Al mismo tiempo, se puede desprender y es evidente la heterogeneidad en cuanto al porcentaje de logro alcanzado por los estudiantes indicando que existe dispersión. Los resultados descritos pueden ser un claro indicador de que lamentablemente la didáctica de las matemáticas empleada por los docentes de dicha asignatura, no ha incidido de manera positiva , pues no responde a las necesidades de la actual sociedad, ni menos la etapa de desarrollo de los educandos, al no considerar estrategias conducentes al desarrollo de aspectos espaciales y considerarlos en la enseñanza de algoritmos de adición y sustracción. Recordemos que en la complejidad de este fenómeno educativo, el rol del docente es muy importante en el proceso de enseñanza aprendizaje, es así como Maldonado y Rodríguez (2016) establecen la importancia de la calidad de los aprendizajes en la

formación inicial docente de carreras de pedagogía y al mismo tiempo la inclusión de estrategias innovadoras en su formación. Otro estudio que asevera la importancia de las estrategias de los docentes en aula, es el de Mogollón (2010) el cual afirma que se debe formar un nuevo docente capaz de hacer frente a las problemáticas relacionadas con el cálculo, partiendo desde un cambio paradigmático en las ciencias de la educación (Currículum, evaluación y didáctica)

La siguiente representación nos permite visualizar la distribución de los porcentajes de logro según la dependencia del establecimiento en el cual se desenvuelve el estudiante,

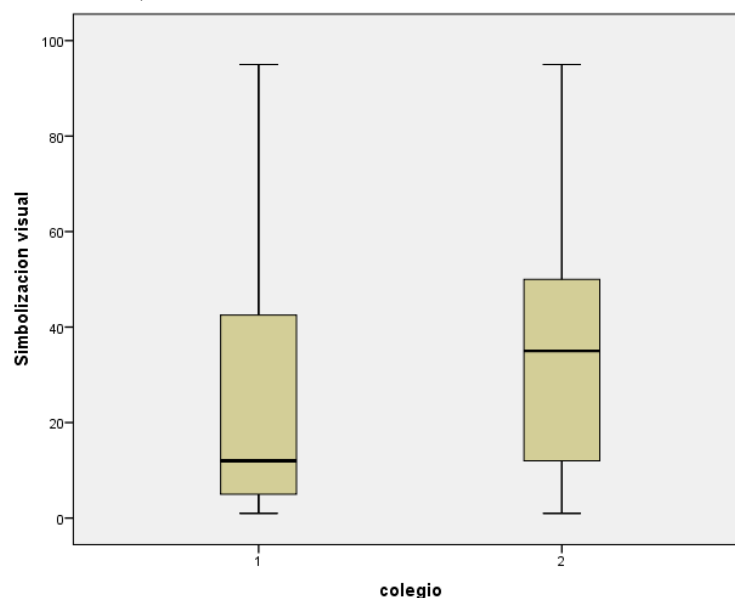


Figura 1: Distribución porcentajes de Logro en simbolización visual de estudiantes de colegios municipalizados (1) y particulares subvencionados (2).

En cuanto a la especificidad de los porcentajes de logro obtenidos en simbolización visual por estudiantes pertenecientes a ambos tipos de dependencia de acuerdo a la figura 1, se puede dilucidar que ninguno de los estudiantes alcanza el logro óptimo en el test aplicado. Dentro del mismo contexto, en el caso de los estudiantes pertenecientes a establecimientos municipales, estos presentan una distribución asimétrica positiva en donde existe un mínimo de 1,0 %, Q1 (5%), Q2 (12 %). Q3 (42,5 %) y un máximo de 95% sin presentar datos atípicos. En base a lo expuesto se puede afirmar, que los resultados obtenidos en habilidades viso-espaciales, se encuentran descendidos al agrupar la mayoría de los resultados en el Q3 no superando el 42,5% de logro. Es así como son evidentes las dificultades de tipo viso espacial presentadas por los estudiantes de establecimiento municipalizados, puesto que la mayoría de los estudiantes tiene entre un 12% y 42,5% de logro. Dichos datos nos pueden dar luces del escaso trabajo en los inicios de la escolaridad, en donde el desarrollo de habilidades lógico matemáticas juegan un rol fundamental en

los aprendizajes matemáticos, de este modo, dicho indicador nos puede orientar en cuanto a las necesidades que requieren los estudiantes y así encauzar el proceso de enseñanza aprendizaje, pues claramente la simbolización visual juega un rol preponderante en la operatoria relacionada con la adición y sustracción. De este modo, si se logra detectar que la mayoría de los educandos se encuentran descendidos, los docentes en su praxis pueden tomar este referente e implementar estrategias conducentes a nivelar estos aspectos descendidos. Es así como Duval (1999) establece que el contexto del aprendizaje matemático no existe comprensión, sin visualización.

Del mismo modo en el caso de los estudiantes pertenecientes a establecimientos particulares subvencionados estos presentan una distribución asimétrica negativa en donde existe un mínimo de 1 %, Q1 (12%), Q2 (35 %). Q3 (50 %) y un máximo de 95% sin presentar datos atípicos. En términos comparativos al tipo de establecimiento anterior, en este caso presenta el mismo mínimo y máximo de porcentaje de logro, si bien los resultados igualmente se encuentran descendidos, la mayoría de los porcentajes de logro obtenidos no supera el 50%. Los porcentajes de logro obtenidos en simbolización visual evidentemente se encuentran descendidos, donde la mayoría de los estudiantes obtienen entre un 12% y un 35% de logro, no obstante existe un grupo menor que alcanza porcentajes de logro más altos que fluctúan entre un 35% y 50% de logro. Estos referentes nos dan cuenta que dichas falencias también se presentan en este tipo de establecimiento, lo cual indica que lamentablemente en la didáctica de las matemáticas el desarrollo de nociones visoespaciales no se le está dando la importancia que necesariamente debiese tener.

Dentro de este contexto, es necesario precisar la importancia de la simbolización visual en las formas de representación matemática, de hecho así lo afirman Salgado y Alameda (2013) al comprobar que los mecanismos visuales de ambos hemisferios cerebrales aportan al reconocimiento de dígitos, para finalmente representar y posicionar los símbolos numéricos. En base a estos antecedentes no se puede dejar desapercibido un escaso desarrollo espacial en los estudiantes, pues tiene un componente importante a la hora de realizar operaciones aritméticas de base. Lo mismo plantea Orton (2003) al aseverar que los componentes espaciales juegan un papel importante en las matemáticas.

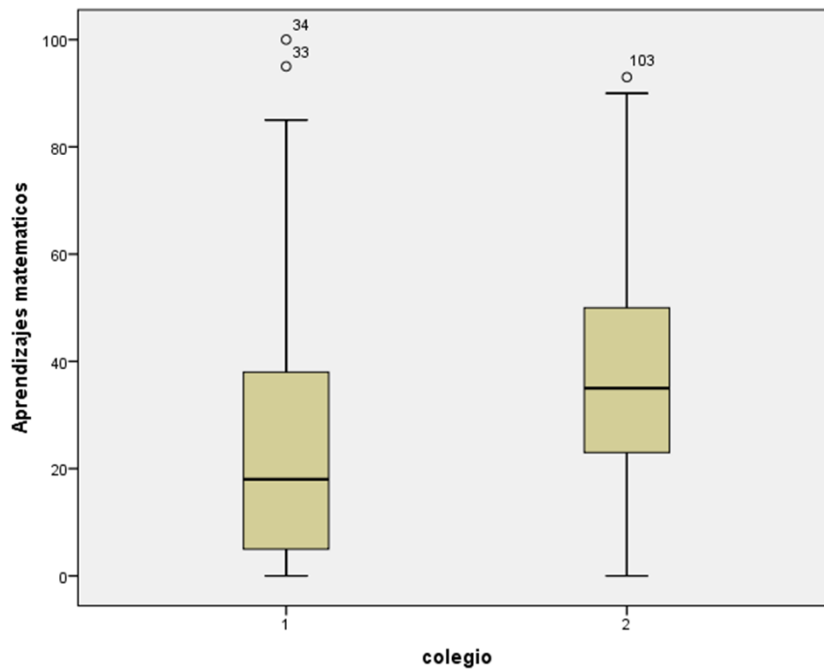


Figura 2: Distribución de porcentajes de logro en aprendizajes matemáticos de estudiantes de colegios municipalizados (1) y particulares subvencionados (2).

En cuanto a los porcentajes de logro obtenidos en aprendizajes matemáticos por estudiantes pertenecientes a ambos tipos de dependencia de acuerdo a la figura 2, se puede dilucidar que a diferencia de los casos anteriores se logra alcanzar un porcentaje óptimo en el test aplicado. Dentro del mismo contexto, en el caso de los estudiantes pertenecientes a establecimientos municipales, estos presentan una distribución asimétrica positiva en donde existe un mínimo de 0 %, Q1 (5%), Q2 (18 %). Q3 (38 %) y un máximo de 100% presentando dos datos atípicos. De esta manera, es evidente que la mayoría de los resultados obtenidos no supera el 38 % lo cual denota las falencias significativas en cuanto a los aprendizajes matemáticos, independiente de la homogeneidad de los porcentajes de logro en cuanto a su distribución, pese a ello existen dos casos particulares en los cuales se obtuvieron porcentajes por sobre el grupo, de los cuales uno obtuvo un desempeño óptimo.

Del mismo modo en el caso de los estudiantes pertenecientes a establecimientos particulares subvencionados estos presentan una distribución más simétrica en donde existe un mínimo de 0 %, Q1 (23%), Q2 (35 %). Q3 (50 %) y un máximo de 93% presentando un dato atípico. Es así como podemos afirmar, que los resultados obtenidos por parte de los estudiantes de este tipo de dependencia presentan un porcentaje de logro mayor, pese a ello, no supera el 50% y al mismo tiempo el máximo porcentaje de logro no alcanza el 100%. Valdivieso (2016) establece que estos aspectos descendidos en la aplicación de operaciones matemáticas se van complejizando de manera progresiva a medida que se van haciendo más abstractos,

razón por la cual es importante abordar las dificultades de aprendizaje matemático relacionadas con la aplicación de algoritmos de adición y sustracción.

Para concluir, podemos afirmar que tanto en simbolización visual, como en aprendizajes matemáticos, independiente del tipo de dependencia (municipal-particular subvencionado) los porcentajes de logro obtenidos se encuentran significativamente descendidos, no obstante, existe una diferencia en su distribución. A la vez es evidente, que los porcentajes de logro de los estudiantes de dependencia particular subvencionada denotan que existen menos falencias en comparación a los resultados obtenidos por los educandos pertenecientes al tipo de dependencia municipal. Claramente los resultados obtenidos explican la problemática que existe en la aplicación de adiciones y sustracciones a partir de las relaciones que establecen los simbolismos visuales, independiente del contexto en el cual se encuentra inmerso un educando las falencias son claras en este ámbito, lo cual se puede explicar por la progresión que tiene el curriculum nacional en la asignatura de educación matemática, pues no contempla la educación temprana de habilidades viso-espaciales lo cual repercute negativamente en la interpretación de las relaciones subyacentes a todo sistema numérico, por lo demás existe una especie de vacío didáctico pues todo se queda en una linda declaración de intenciones, sin ir más allá de una mera planificación didáctica. Ahora bien independiente, de las problemáticas a nivel macro, la ventaja de los estudiantes pertenecientes a establecimientos particulares subvencionados, por sobre los municipales, se puede explicar con la temprana estimulación a la cual está expuesto un niño(a) y al contexto socio-cultural, que puede de una u otra manera incidir en el desarrollo de habilidades viso-espaciales. Castillo, González y Puga(2011) en sus estudios comparativos entre calidad de aprendizajes entre colegios particulares subvencionados y municipales establecen que existen diferencias en cuanto al desempeño escolar, las cuales se pueden explicar por los mecanismos que subyacen a cada sistema como condiciones de aprendizaje, aspectos socioeconómicos, entre otros.

La información entregada con antelación, brinda una mayor especificidad a la investigación, puesto que nuestro sistema escolar se encuentra de cierta manera segregado (Castillo, et.,al, 2011), es por esta razón que se abordó el análisis en primera instancia en establecimientos diversa dependencia, para así contextualizar el fenómeno educativo y no sesgarlo a un solo contexto.

Incidencia de la simbolización visual en la aplicación de algoritmos de adición y sustracción

En coherencia a lo planteado en los objetivos, es importante destacar si se correlaciona o no la simbolización visual y la aplicación de algoritmos de adición y sustracción, para estos efectos el coeficiente de correlación de Pearson (Tabla 2)

	N° Estadístico	Simbolización visual	Aprendizajes matemáticos
Simbolización visual	Correlación de Pearson	1	0,798
	N	188	188
Aprendizajes matemáticos	Correlación de Pearson	0,798	1
	N	188	188
Significancia bilateral		0,01	

TABLA 2: Correlación de Pearson simbolización visual y aprendizajes matemáticos.

De acuerdo a los niveles de logro obtenidos, tanto en simbolización visual, como en la aplicación de algoritmos de adición y sustracción, se puede desprender mediante el análisis dispuesto, que la simbolización visual se correlaciona significativamente con la aplicación de algoritmos de adición y sustracción ($p= 0,798$,. Resultado que da cuenta que el desarrollo de habilidades viso-espaciales están íntimamente ligado con el aprendizaje matemático, puesto que las relaciones que se construyen en al aprendizaje de esta área, está marcada por simbolismos, lo cuales erróneamente en la enseñanza formal se direccionan a la abstracción (verbal-algebraico), perdiendo el foco en lo concreto (simbolización visual). Como consecuencia de ello, del mismo modo en que se enseñan cálculos, esto debe ir de la mano con la educación inicial de los educandos respecto a las representaciones mentales que estos van creando (Valdivieso, 2010).

De hecho, uno de los principales métodos que se han instaurado en las políticas ministeriales relacionadas con la enseñanza de las matemáticas tienen su génesis en la educación y desarrollo viso-espacial, de ahí el surgimiento del método COPISI , que opera desde la lógica de lo concreto, pasando por lo pictórico y para terminar en lo simbólico. Dicho de esta forma, es evidente que de una u otra manera se debe poner principal atención al efecto que tienen los simbolismos de tipo visual en la ejecución de adiciones y sustracciones, los cuales no son enfatizados de manera antojadiza, sino más bien, respetando la etapa de desarrollo de los educandos para su correcta interpretación.

Con los resultados obtenidos se deja en evidencia la notable deficiencia existente en el porcentaje de logro referente a aspectos viso-espaciales y algoritmos

de adición-sustracción, tanto en escuelas municipales, como en colegios particulares subvencionados. Ahora bien, es clara la incidencia que tiene la simbolización visual en la aplicación de adiciones y sustracciones, interviniendo en cada una de sus relaciones, ya sea de manera horizontal, vertical, en su posicionamiento y conjeturas propias de este tipo de operaciones, razón por la cual no se puede perder de vista el aprendizaje en este ámbito como una relación de sistemas, entendiendo que la interpretación que se da a través de los simbolismos visuales, interviene en cada paso que se aplica para llegar a un producto o diferencia determinada. De hecho, Balbi y Dansilio (2010), establecen que existe la evidencia científica suficiente para aseverar que la simbolización visual tiene un estrecho vínculo con los procesos del cálculo.

5. CONCLUSIONES

En base a los antecedentes entregados anteriormente, se desprenden las siguientes conclusiones:

1.- Es importante educar aspectos referentes al desarrollo de habilidades viso-espaciales, puesto que repercute en la interpretación de formas de representación matemáticas, como lo es la simbolización visual. Es así como específicamente al momento de aplicar algoritmos de adición y sustracción esto se ve coartado, pues el niño(a) le resulta imposible establecer las relaciones simbólicas espaciales que forman parte de la operatoria del nivel y más aún, genera dificultades de aprendizaje matemático, al no asimilar de cierto modo las formas de representación que subyacen a su aplicación (Skemp, 1993; Farham- Diggory, 1983; Puig y Cerdan, 1995; Bafalluy et al, 2011; Radford y André, 2009; Dehaene, 1997)

2.- El sistema escolar debiese dar una razonable cuota de atención y énfasis a la educación viso-espacial temprana y continua, pues esto conlleva a la comprensión

de simbolismos visuales, (valor posicional, reserva, canje, productos y diferencias erróneas). Dicho de este modo, un simple dígito, en cuanto a su posicionamiento puede determinar la correcta aplicación de un algoritmo de adición y sustracción (Chamorro, 2003), he ahí la importancia de considerar las relaciones espaciales inmersas en este complejo mundo de representación de la realidad, entendiendo este fenómeno como construcción compleja. Godino et al (2003) desde su experticie recomiendan que todo curriculum escolar debe tomar en cuenta el proceso constructivo del conocimiento matemático.

3.- No se debe obviar que la simbolización visual es algo inherente al desarrollo cognitivo de los estudiantes, razón por la cual es importante cautelar el desarrollo de este tipo de habilidades de manera transversal en la enseñanza de las matemáticas. Es así como Orton (2003) establece que los aspectos viso-espaciales son un elemento clave en al aprendizaje de las matemáticas.

4.- El proceso de enseñanza- aprendizaje no se debe perder de vista la etapa de desarrollo del estudiante, por lo tanto no es correcto someter a un educando a un aprendizaje” descontextualizado”, haciendo referencia a una serie de métodos que poco o nada tienen que ver con la construcción de los símbolos matemáticos y las relaciones que intervienen. De hecho es necesario como afirma Ballester (2009) que en el actual contexto educativo en el que estamos inmersos, se deben utilizar métodos y/o estrategias didácticas fundamentadas con mayor científicidad, solo así se logra responder a los requerimientos del estudiantado.

5.- En base a lo planteado anteriormente es importante destacar que la didáctica que se utiliza juega un rol fundamental, pues la enseñanza temprana de aspectos viso-espaciales, propicia la adquisición de habilidades lógico-matemáticas, de este modo, se aborda el aprendizaje matemático de manera concreta antes de comenzar a comprender referentes abstractos. Dicho de otra manera el error principal es considerar o priorizar en la enseñanza de algoritmos de adición y sustracción, las formas de representación verbal-algebraica por sobre las visuales, lo cual al mismo tiempo no concuerda con la etapa de desarrollo de los estudiantes, puesto que, en los primeros niveles de escolaridad difícilmente se puede dar un énfasis a la abstracción, por sobre lo concreto. De este modo Oliveira, Marquez y Neves (2015) establecen lo siguiente:

La compleja arquitectura de los aprendizajes obliga a un diseño en permanente adaptación; al diseño y rediseño continuo de modos, métodos, estilos... en una búsqueda incesante del compromiso del profesor con el aprendizaje de los alumnos. ¿Qué diseño de enseñanza mejor sirve a esta arquitectura es una

búsqueda incesante ... Una cosa parece cierta - la mejora de la enseñanza de las matemáticas implica necesariamente la no sobrevaloración de una línea metodológica única. Por el contrario, tendrá que implicar un proceso de diversificación metodológica, basado en una coherente fundamentación psicosocial. (p.23)

6.- La simbolización visual se encuentra íntimamente vinculada con las formas de representación verbal-algebraica, pues interviene en cada una de sus relaciones al momento de operar. (Balbi y Dansilio, 2010; Valdivieso, 2010; Skemp, 1993)

7.- Pese a la gran dificultad presentada por ambos tipos de establecimientos, los mayores porcentajes de logro alcanzados fueron obtenidos por parte de los establecimientos particulares subvencionados, por sobre los municipalizados, lo cual evidencia una leve brecha que existe entre las habilidades adquiridas por ambos tipos de establecimiento (Castillo, et. al, 2011). Probablemente esto se encuentra íntimamente relacionado con el contexto socio-cultural, el cual desarrolla de manera implícita en mayor grado las relaciones de tipo viso espacial.

Todo esto lleva a concluir y a reafirmar la hipótesis de investigación, pues la simbolización visual incide notablemente en la aplicación de algoritmos de adición y sustracción en estudiantes de segundo año básico, tanto en establecimientos de tipo particular subvencionado, como municipalizado. “El aprendizaje de las matemáticas relaciona al alumno con imágenes, dibujos, gráficos y representaciones visuales muy diversas” (Orton, 2003:149)

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Arrieta , M. (2003). *Capacidad espacial y educación matemática: tres problemas para el futuro de la investigación*. Educación Matemática, 15(3) 57-76.
- Balvi, A. & Dansilio,S. (2010).*Dificultades de aprendizaje del cálculo: contribuciones al diagnóstico psicopedagógico*. Ciencias Psicológicas, vol. IV, núm. 1, mayo, 2010, pp. 7-15.
- Ballester, S. (2009).*Raíces de la didáctica de la matemática en Cuba*. Varona, núm. 48-49, pp. 88-94.
- Bértolo, H. (2005). *Visual imagery without visual perception?*. *Psicológica* , 26, 173-188.
- Blanco, M. & Bermejo, V.(2009). *El efecto mateo en niños con dificultades específicas del aprendizaje de las matemáticas*. Escritos de Psicología, Vol. 3, nº 1, pp. 30-36.89

- Castro, E., Rico, L. & Castro, E. (1995). *Estructuras aritméticas elementales y su modelización*. Grupo editorial Iberoamericana S.A. de C.V. Bogotá, Colombia.
- Colomé, À; Bafalluy, M. & Pascale, M. (2012). *Getting to the source: a questionnaire on the learning and use of arithmetical operations*. *Psicológica*, vol. 33, núm. 2, pp. 223-253.
- Chamorro, M. (2003) .*Didáctica de las matemáticas*. Pearson educación, España.
- Dehaene, S. (1997). *The number sense, how the mind creates mathematics*. Oxford University Press paperback. United states of América. 198 Madison Avenue, New York, New York 10016.
- Duval, R. (1999). *Representation, vision and visualization: cognitive functions in Mathematical thinking, basic issues for learning*. Actas for PME 23, 3-326.
- Espinoza, L., Barbe, J. & Galvez, G. (2011). *Limitaciones en el desarrollo de la actividad matemática en la escuela básica: el caso de la aritmética escolar*. *Estud. pedagóg.*, vol.37, n.1, pp. 105-125.
- Espinoza, L., Matus, C., Barbe, J., Fuentes & J., Márquez, F. (2016). *Qué y cuánto aprenden de matemáticas los estudiantes de básica con el método Singapur: evaluación de impacto y factores incidentes en el aprendizaje, enfatizando en la brecha de género*. *Calidad en la educación* N°45, pp. 90-131.
- Farnham-Diggory, S. (1983). *Dificultades de aprendizaje*. Ediciones Morata, S.A., Mejía Lequerica, 12. Madrid-4.
- Fernández, D. & Arias, G. (2013). *La expresión corporal como fuente de aprendizaje de nociones matemáticas espaciales en educación infantil*. *Retos. Nuevas tendencias en Educación Física, Deporte y Recreación*, nº 24, pp. 158-164.
- Friedman, L. (1995). *The Space Factor in Mathematics: Gender Differences*. *Review of educational research*, Vol.65, N. 1, pp. 22-50. doi: 10.3102/00346543065001022.
- Friz, M., Sanhueza Henríquez, S. & Sánchez, A. (2009). *Conocimiento que poseen los estudiantes de pedagogía en dificultades de aprendizaje de las matemáticas (DAM)*. *Estudios pedagógicos (Valdivia)*, 35(1), 47-62.

- Godino, J., Batanero, C. & Font, V. (2003). *Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para maestros*. ReproDigital. C/ Baza, 6, La Mediana, Polígono Juncaril, Albolote, 18220-Granada.
- Hernández, R., Fernández, C. & Baptista, P. (2003). *Metodología de la Investigación*. MCgGraw-Hill Interamericana editores S.A. Cedro núm. 512, Col. Atlampa delegación Cuauhtémoc 06450, México D.F.
- Hoong, L., Weng, H. & Cheng, L. (2015). *Concrete-Pictorial-Abstract: Surveying its origins and charting its future*. The Mathematics Educator, Vol. 16, No.1, 1-19
- Huaquín, M. (2010). *Investigación educacional*. Gráfica LOM, Concha y Toro 25, Santiago.
- Kosslyn, M. (2001). *Neural foundations of imagery*. Nature Reviews Neuroscience, Vol. 2. Pp.24-35.
- Maldonado, A. & Rodríguez, F. (2016). Innovación en los procesos de enseñanza-aprendizaje: Un estudio de casos con la enseñanza justo a tiempo y la instrucción entre pares. *Revista Electrónica Educare*, vol. 20, núm. 2, pp. 1-21
- Mora, D. (2003). *Estrategias para el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas*. *Rev. Ped.* [online]. 2003, vol.24, n.70, pp. 181-272.
- Mogollón, E. (2010). *Aportes de las neurociencias para el desarrollo de estrategias de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas*. *Revista Electrónica Educare*, vol. XIV, núm. 2, julio-diciembre, 2010, pp. 113-124.
- Oliveira, M., Marques, J. & Neves, A. (2015). *Condicionantes da aprendizagem da matemática: uma revisão sistêmica da literatura*. *Educ. Pesqui.*, São Paulo, Ahead of print.
- Orton, A. (2003). *Didáctica de las matemáticas*. ediciones Morata, s.l. cuarta edición, Mejia lequerica, Madrid.
- Piaget, J. & Szeminska, A. (1964). *Génesis del número en el niño*. Editorial Guadalupe, Mansilla 3865, 1425, Buenos Aires.
- Piaget, J., Beth, E., Dieudonne, J., Lichnerowicz, A., Choquet, G. & Gattegno, C. (1961). *La enseñanza de las Matemáticas*. Ediciones Aguilar, S.A. Juan Bravo, 38, España.

- Puig, L. & Cerdán, F. (1995). *Problemas aritméticos escolares*. Editorial síntesis, S.A. Vallehermoso, 3428015, Madrid.
- Puebla, R. & Talma, M. (2011). *Educación y neurociencias: La conexión que hace falta*. Estudios Pedagógicos XXXVII, Nº 2: 379-388, 2011.
- Radford, L. & André, M. (2009). *Cerebro, cognición y Matemáticas*. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (2009) 12(2): 215-250.
- Rico, L. (2009). *Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática*. PNA, 4(1), 1-14.
- Salguero, M. & Alameda, J. (2013). *Independence of basic arithmetic operations: Evidence from cognitive neuropsychology*. anales de psicología,, vol. 29, nº 3 , 1006-1012.
- Samaja, J. (1993). *Epistemología y metodología*. Editorial universitaria de Buenos Aires, Sociedad de economía mixta, Av. Rivadavia 1571/73 (1033).
- Skemp, R. (1993). *Psicología del aprendizaje de las matemáticas*. Ediciones Morata, S.L. Mejía Lequerica, 12.28004-Madrid.
- Tello, C., Barriga, P. & De la Cruz, O. (2013). *Crear tocando*. Tendencias pedagógicas Nº21, 2013.
- Valdivieso, L. (1973) *Trastornos de aprendizaje y de la conducta escolar*. Editorial Andres Bello. Santiago de Chile.
- Valdivieso, L. (1980). *El niño con dificultades para aprender*. Editorial Galdoc. Suecia 0173. Santiago de Chile.
- Valdivieso, L. (2016). *El aprendizaje de las matemáticas: Psicología cognitiva y neurociencias*. Revista investigación Arequipa. Vol.7, 11-29
- Villegas, L. (2005). *Metodología de la investigación pedagógica*. Editorial San Marcos, Perú.

CRONOGRAMA

Actividades	AGOSTO	SEPTIEMBRE	OCTUBRE	NOVIEMBRE	DICIEMBRE	ENERO	FEBRERO	MARZO	ABRIL	MAYO	JUNIO	JULIO
Planteamiento del problema	X											
Marco teórico referencial, necesario para el proyecto de investigación.	X	X	X									
Complementaciones del Marco Teórico.			X	X	X	X	X					
Diseño del marco metodológico	X	X										
Elaboración de instrumentos de investigación.			X	X	X							

Aplicación de Instrumentos de investigación pre-test.								X				
Intervención									X	X	X	
Aplicación de instrumentos de investigación post-test.											X	
Recopilación y tratamiento de la información.												X
Proceso de información, planteamientos finales y entrega de tesis												X