UNIVERSIDAD DEL BÍO-BÍO
FACULTAD DE CIENCIAS EMPRESARIALES
ESCUELA DE INGENIERÍA CIVIL INFORMÁTICA

SOBREYECTIVIDAD EN SUBSHIFTS ASOCIADOS A MÁQUINAS DE TURING

Pablo Alfonso Concha Vega

Profesor guía: Rodrigo Torres Avilés

Enero de 2019

Chillán, Chile

Memoria presentada para optar al grado de Ingeniero Civil en Informática

Resumen

Esta Investigación se presenta para dar conformidad a los requisitos exigidos por la Universidad de Bío-Bío en el proceso de titulación para la carrera de Ingeniería Civil en Informática.

Una máquina de Turing es un modelo matemático computacional que simboliza a una máquina abstracta, la cual manipula símbolos en una cinta siguiendo una serie de instrucciones definidas para esta. La importancia de las máquinas de Turing radica en que la computación actual se basa en estos modelos, es decir, los limites de lo que un computador puede y no puede hacer pueden ser estudiados con ellas.

Por otro lado, la teoría de sistemas dinámicos permite estudiar la evolución en el tiempo de un sistema. Aplicando esta teoría a máquinas de Turing se han definido en la literatura los sistemas dinámicos conocidos como “máquina de Turing con cinta móvil”, “máquina de Turing con cabezal móvil” y “t-shift”.

En la literatura se han estudiado diversas propiedades sobre estos sistemas dinámicos, entre las cuales la sobreyectividad y la decibilidad de dicha propiedad son de interés en este trabajo.

Puntualmente, en este trabajo se propone un nuevo sistema dinámico denominado “h-shift” y se aborda la decibilidad de la propiedad de sobreyectividad en los sistemas dinámicos derivados de máquinas de Turing “h-shift” y “t-shift de radio 1”.

El aporte de este trabajo es concluir sobre la decibilidad del problema de la sobreyectividad en el t-shift de radio 1, que resulta ser decidible, y del problema de sobreyectividad en el h-shift, que resulta ser indecidible mediante una reducción al problema de alcanzabilidad.

Abstract

A Turing machine is a mathematical model of computation that defines an abstract machine, which manipulates symbols on a tape according to rules defined previously. The importance of Turing machines lies in the fact that existing computation is based on these models, in other words, the limits of what a computer can do can be studied with them.

On the other hand, the dynamical systems theory allows studying the evolution of a system in function of the time. Applying this theory to Turing machines, some dynamical systems have been defined in the literature. They are knowns as "Turing machine with moving tape", "Turing machine with moving head" and "t-shift".

In literature, different properties of these systems have been studied, among which the surjectivity and its decidability are of interest for this work.

Specifically, in this work a new dynamical system is proposed and it’s called "h-shift" and the decidability of the surjectivity of the dynamical systems "h-shift" and "t-shift with radius 1" is tackled.

The main contribution of this work is to prove the decidability of the surjectivity problem in the t-shift with radius 1 and to demonstrate the undecidability of the surjectivity problem in the h-shift by a reduction to the reachability problem.

Índice de Contenido

Índice de Figuras

Índice de Tablas

1 Introducción

A muy grandes rasgos se puede decir que la computación es obtener una salida a partir de una entrada, dicha salida puede ser el resultado de un cálculo matemático, por ejemplo.

Las dinámicas que resuelven un problema no son relevantes desde el punto de vista de la efectividad computacional, ya que, múltiples dinámicas pueden resolver un mismo problema. Sin embargo, una computación compleja no puede alcanzarse con dinámicas demasiado simples, es decir, existe una relación entre estos conceptos. Una manera de abordar este tema es considerar las máquinas de Turing con las herramientas de sistemas dinámicos.

En este trabajo se presentan algunos sistemas dinámicos derivados de máquinas de Turing, en particular TMT (Turing Machine with moving Tape), TMH (Turing Machine with moving Head), t-shift (de radio 0 y 1) y h-shift, y se abordan sus propiedades sobreyectivas, no sin antes presentar una base teórica junto a algunos problemas preliminares.

La importancia de estudiar la sobreyectividad en máquinas de Turing radica en el hecho de que esta propiedad es equivalente a la reversibilidad en máquinas de Turing completas. La reversibilidad implica una menor disipación de calor en los sistemas de cómputo, lo que conlleva a un mejor rendimiento y a una menor consumo de electricidad, es más, teóricamente hablando, es posible desarrollar mecanismos de cómputo con nula disipación de calor haciendo uso de esta propiedad [1]. Bajo este mismo concepto de disipación de calor, es que la reversibilidad podría tener aplicaciones incluso en sistemas cuánticos de computación.

El aporte de este trabajo es abordar el problema de la sobreyectividad en el t-shift de radio 1, que resulta ser decidible, y el problema de la sobreyectividad en el h-shift, que resulta ser indecidible. Sin embargo, también se aborda la sobreyectividad en máquinas de Turing y en sus sistemas dinámicos equivalentes: TMT y TMH.

El resto de este documento se divide en un marco teórico necesario para comprender la temática de fondo (Sección 2), un apartado de sistemas dinámicos de máquinas de Turing (Sección 3), para luego explicar los problemas de sobreyectividad en sistemas dinámicos de máquinas de Turing (Sección 4) y finalmente, las conclusiones generales (Sección 5).

2 Marco Teórico

2.1 Teoría de Conjuntos

Si bien el lenguaje matemático es de cierta manera universal, en esta sección definiremos algunos conceptos de teoría de conjuntos utilizados en este documento.

2.1.1 Conjuntos $\mathbb{N}$ y $\mathbb{N}_0$

En este trabajo se considerará al conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ como todos los números enteros mayores que 0, es decir:

$$\mathbb{N} = \{1,2,3,\dots\}$$

Asimismo, el conjunto $\mathbb{N}_0$ se utilizará como el conjunto de los naturales y el 0, es decir:

$$\mathbb{N}_0 = \{0\} \cup \mathbb{N} = \{0,1,2,3,\dots\}$$

2.1.2 Función

Una función es un objeto matemático que explicita una relación entre elementos de dos conjuntos posiblemente distintos.

Usualmente una función se denota como $f: A \to B$, donde A se denomina “conjunto de partida” o, más formalmente, “dominio” de la función. Mientras que B corresponde al conjunto de llegada, también denominado como “co-dominio” de la función. Para que una función sea de hecho una función, es necesario que cada elemento de su dominio tenga relación con, a lo más, un elemento de su co-dominio.

2.1.3 Sobreyectividad

Sea $f: X \to Y$ una función, se dice que esta es sobreyectiva si cumple que:

$$\forall y \in Y \; \exists x \in X: f(x) = y$$

En otras palabras, una función f es sobreyectiva, si y sólo si, cada elemento de Y es la imagen de al menos un elemento de X.

2.1.4 Inyectividad

Una función $f: X \to Y$ se dice inyectiva si a elementos distintos del conjunto X les corresponden elementos distintos del conjunto de llegada Y. Esto es:

$$(\forall a, b \in X)\ f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$$

2.1.5 Alfabetos y Palabras

Un alfabeto corresponde a un conjunto finito de símbolos, usualmente denotado con Σ. A su vez, una palabra corresponde a la concatenación de símbolos. A partir de un alfabeto Σ, podemos definir tres conjuntos importantes:

- Σ^*: Conjunto que contiene todas las palabras finitas que pueden ser formadas a partir de los símbolos de Σ.
- $\Sigma^{\mathbb{N}}$: Conjunto que contiene todas las palabras infinitas hacia la derecha que pueden ser formadas a partir de los símbolos de Σ.
- $\Sigma^{\mathbb{Z}}$: Conjunto que contiene todas las palabras bi-infinitas, es decir, infinitas hacia la derecha y hacia la izquierda, que pueden ser formadas a partir de los símbolos de Σ.

2.1.6 Palabras Finitas, Infinitas Hacia La Derecha y Bi-Infinitas

Una palabra finita corresponde a una seguidilla de largo finito de elementos pertenecientes a un alfabeto dado. Por otra parte, una palabra infinita hacia la derecha corresponde a una seguidilla de símbolos de largo infinito y que posee una posición inicial. Finalmente, una palabra bi-infinita es una seguidilla infinita de símbolos que no posee un inicio ni un fin determinado.

Para comprender mejor estos conceptos, consideremos el alfabeto $\Sigma = \{0,1\}$ con el fin de definir, a modo de ejemplo, algunas palabras finitas, infinitas hacia la derecha y bi-infinitas.

	Ejemplo 1	Ejemplo 2	Ejemplo 3
Palabras finitas	11111111	10	01010
Palabras infinitas hacia la derecha	11111111…	001100110011…	0101010101…
Palabras bi-infinitas	…11111111…	…0001010010…	…01010000000…

Tabla 1. *Ejemplos de palabras finitas, infinitas y bi-infinitas*

Cabe destacar que no hace falta de una estructura repetitiva o de un patrón en ninguno de estos tipos de palabras.

En términos generales podemos decir que una palabra finita w es de la forma $w_0 w_1 w_2 \dots w_{n-1} w_n$. Mientras que una palabra infinita hacia la derecha u es de la forma $u_0 u_1 u_2 u_3 \dots$. Y que, asimismo, una palabra bi-infinita ω es de la forma $\dots \omega_{-2}\omega_{-1}\omega_0\omega_1\omega_2 \dots$.

2.1.7 Subshift

La función shift σ, es una función definida tanto para $\Sigma^{\mathbb{Z}}$ como para $\Sigma^{\mathbb{N}}$. En el caso de $\Sigma^{\mathbb{N}}$ tenemos que $\sigma(\omega_0\omega_1\omega_2 \dots) = \omega_1\omega_2 \dots$, mientras que para $\Sigma^{\mathbb{Z}}$ tenemos que $\sigma(\dots \omega_{-2}\omega'_{-1}\omega_0\omega_1\omega_2 \dots) = \dots \omega_{-1}\omega'_0\omega_1\omega_2 \dots$, donde ´ denota la posición central de una palabra. Un subshift es un conjunto cerrado a la operación shift, es decir, para un subshift S se cumple que:

$$\forall s \in S : \sigma(s) \in S$$

2.2 Máquina de Turing

Siguiendo a Morita [1], una máquina de Turing (MT) corresponde a una tripleta (Q, Σ, δ), donde Q es un conjunto finito de estados, Σ es un conjunto finito de símbolos y δ corresponde a la relación de transición, cuya interpretación y notación depende de si se está tratando con una máquina de Turing escrita en quíntuplas o cuádruplas. Además, podemos definir las proyecciones de δ, las cuales son δ_Q,δ_D y δ_Σ , que nos entregan tan solo el estado, el desplazamiento o el símbolo a escribir de una transición respectivamente. Una MT trabaja sobre una cinta, usualmente bi-infinita (infinita hacia la izquierda y hacia la derecha), la cual está completamente escrita con símbolos de Σ.

Clásicamente una MT dispone de un estado inicial q_0 y de un símbolo especial denominado "símbolo blanco". La computación comienza en el estado q_0, dada una entrada w, y finaliza cuando la máquina alcanza un estado final q_F. En el caso del problema abordado en esta tesis, se estudia la dinámica que una MT sigue dada una configuración arbitraria, es por esto que no se consideran los estados iniciales, los estados finales, ni el símbolo blanco.

2.2.1 Configuración

En una máquina de Turing, una configuración es un elemento de la forma (ω, i, q) perteneciente a $\Sigma^{\mathbb{Z}} \times \mathbb{Z} \times Q$, donde ω corresponde a la palabra escrita en la cinta, i es la posición del cabezal de la máquina y q corresponde al estado interno actual de la misma. Sobre una configuración podemos definir la función $\pi_Q: \Sigma^{\mathbb{Z}} \times \mathbb{Z} \times Q \to Q$, que entrega el estado de la configuración.

2.2.2 Máquina de Turing Escrita en Cuádruplas

Cuando se trata de una máquina de Turing escrita en cuádruplas, tenemos que $\delta \subseteq (Q \times \Sigma \times \Sigma \times Q) \cup (Q \times \{/\} \times \{-1, 0, +1\} \times Q)$ (ver Figura 1). Para este tipo de casos existen dos tipos de instrucciones: escritura y movimiento. Una instrucción de escritura es una cuádrupla (q, s, s', q'), la cual puede ser aplicada sobre una configuración (ω, i, q'') si $\omega_i = s$ y $q = q''$, dejando así la configuración (ω', i, q'), donde $\omega'_i = s'$ y $\omega'_k = \omega_k$ para toda $k \neq i$. Por otra parte, una instrucción de movimiento es una cuádrupla $(q, /, d, q')$, la cual puede ser aplicada a una configuración (ω, i, q'') si $q = q''$, dejando así la configuración $(\omega, i + d, q')$.

2.2.3 Máquina de Turing Escrita en Quíntuplas

Una máquina de Turing puede ser también escrita en quíntuplas, en este caso consideramos a la relación de transición como $\delta \subseteq Q \times \Sigma \times Q \times \Sigma \times \{-1, 0, +1\}$. Una instrucción corresponde a una quíntupla (q, s, q', s', d), la cual puede ser aplicada a una configuración (ω, i, q'') si $\omega_i = s$ y $q = q''$, dejando así la configuración $(\omega', i + d, q')$, donde $\omega'_i = s'$ y $\omega'_k = \omega_k$ para toda $k \neq i$.

Cabe decir que el modelo de quíntuplas y el modelo de cuádruplas son equivalentes en poder de cómputo, pero no en dinámica, es decir, con ambos modelos es posible realizar los mismos cálculos, pero por lo general, en el modelo de cuádruplas se necesita el doble de instrucciones que en modelos de quíntuplas.

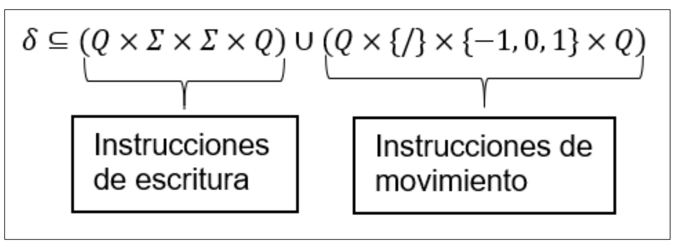

***Figura 1**. Relación de transición en cuádruplas*

2.2.4 Traducción de Cuádruplas a Quíntuplas

Para traducir una máquina de Turing escrita en cuádruplas a una equivalente pero escrita en quíntuplas, debemos reemplazar cada transición de la forma $\delta(q, \alpha) = (p, \beta)$ por $\delta(q, \alpha) = (p, \beta, 0)$, con $q, p \in Q$ y $\alpha, \beta \in \Sigma$. Asimismo, aquellas transiciones de movimiento $\delta(s, /) = (t, m)$, donde $s, t \in Q$ y $m \in \{-1, 0, +1\}$, deben ser reemplazadas por $\delta(s, \gamma) = (t, \gamma, m)$ para todo $\gamma \in \Sigma$.

2.2.5 Máquina de Turing Determinista

Una MT es determinista si para cada configuración posible se puede aplicar, a lo más, una instrucción. En términos de quíntuplas, lo anterior mencionado es equivalente a definir δ como una función $\delta: Q \times \Sigma \rightarrow Q \times \Sigma \times \{-1, 0, +1\}$.

2.2.6 Máquina de Turing Completa

Se dice que una MT es completa si para cada configuración posible existe al menos una instrucción que puede ser aplicada, es decir, la MT no se detiene.

2.2.7 Máquina de Turing Inyectiva

Una MT es inyectiva si cada configuración proviene de a lo más una configuración previa. En el modelo de cuádruplas esto es equivalente a decir que para cada par de cuádruplas distintas (q, s, s', q') y (q'', s'', s''', q') pertenecientes a δ, se cumple que:

$$(s \neq /) \wedge (s'' \neq /) \wedge (s' \neq s''')$$

2.2.8 Máquina de Turing Sobreyectiva

Una MT es sobreyectiva si cada configuración proviene de al menos una preimagen.

2.2.9 Máquina de Turing Reversible

Se dice que una MT es reversible si esta es determinista e inyectiva. Para una MT escrita en el modelo de cuádruplas, reversar las cuádruplas genera la MT inversa. La reversa de una instrucción de escritura (q, s, s', q') es (q', s', s, q). La reversa de una instrucción de movimiento $(q, /, d, q')$ es $(q', /, -d, q)$. Es evidente que una MT reversible es completa si y solo si su MT reversa es completa.

Notar que, si una MT cumple con la propiedad de completitud, existe equivalencia entre sobreyectividad y reversibilidad.

2.3 Sistema Dinámico

Un sistema dinámico es un par (X, T), donde X corresponde a un espacio métrico que viene acompañado implícitamente de d, que es una métrica aplicable a X, y $T: X \to X$ es denominada “función global de transición”.

Para cualesquiera $x, y, z \epsilon X$ la métrica d debe cumplir las siguientes propiedades:

1. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x \equiv y$
2. $d(x, y) = d(y, x)$
3. $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$

Para un elemento $x \in X$ podemos definir su órbita, que no es más que la evolución infinita del elemento. Esta se define como:

$$\mathcal{O}(x) = \{T(x), T^2(x), T^3(x), \dots, T^{\mathbb{N}}(x)\}$$

El par (X, d) (excluyendo la función global de transición T) se conoce como “espacio métrico”. Un ejemplo de espacio métrico puede ser un plano cartesiano de dos dimensiones, el cual vendría a ser el espacio medible, y la distancia euclidiana, que tomaría el rol de métrica.

2.3.1 Métrica de Cantor

Contextualizando un poco, la métrica utilizada en los sistemas dinámicos abordados en esta tesis es denominada métrica de Cantor, la cual, dados $x, y \in \Sigma^{\mathbb{Z}} \cup \Sigma^{\mathbb{N}} \cup \Sigma^*$, se define como:

$$d(x, y) = 2^{-i}$$

Donde

$$i = \min(|j| : x_j \neq y_j)$$

En términos más simples, i corresponde a la mínima distancia respecto a la posición 0 en la cual x e y son distintas.

2.3.2 Factor Columna

Sea π una función tal que:

$$\pi(x) = x_0$$

La cual es aplicable a cualquier elemento de un sistema dinámico basado en la métrica de Cantor. El factor columna τ corresponde a aplicar la función π sobre un elemento x y su órbita $\mathcal{O}(x)$, es decir:

$$\tau(x) = \left(\pi(y)\right)_{y \in \hat{\mathcal{O}}(x)}$$

Donde

$$\hat{\mathcal{O}}(x) = x \cup \mathcal{O}(x)$$

Asimismo, podemos definir el factor columna de radio r, redefiniendo la función π_r como:

$$\pi_r(x) = x_{-r}x_{-r+1} \ldots x_{-1}x_0x_1 \ldots x_{r-1}x_r$$

De esta manera $\pi_0(x) = \pi(x)$.

Dicho lo anterior, el factor columna de radio r, τ_r corresponde a aplicar la función π_r sobre un elemento x y su órbita $\mathcal{O}(x)$, es decir:

$$\tau_r = \left(\pi_r(y)\right)_{y \in \hat{\mathcal{O}}(x)}$$

2.4 Decibilidad

Se dice que un problema es decidible cuando existe una MT que pueda solucionarlo, asimismo, un problema es indecidible cuando no existe una MT que pueda resolverlo para cada caso. Un ejemplo clásico de problema indecidible es el denominado “halting problem” (problema del alto) [2], que se define como: Dada una máquina de Turing M y una entrada x, es imposible diseñar otra MT que decida si M se detendrá con x.

Teorema 1. El problema del alto es indecidible.

Esquema de demostración. Supongamos la MT H, la cual recibe como entrada la especificación de una MT M y una entrada x. La máquina H entrega como salida 1 si M se detiene con x o 0 si es que no. Además, definamos N como una MT que solo se detiene con la entrada 0.

Finalmente, definamos la máquina de Turing X como la unión de la máquina H y de la máquina N (en ese orden), es decir, H decide si una MT M se detiene con una entrada x y luego N se detiene si resulta ser que M no se detiene con x y viceversa.

¿Qué ocurrirá si introducimos la especificación de la máquina X en ambas entradas de sí misma ($X(X,X)$)? Hay dos posibilidades:

1. Si H da como respuesta que X se detiene con X, entregará 1 como entrada para N, la cual no se detendría.
2. Si H da como respuesta que X no se detiene con X, entregará 0 como entrada para N, la cual se detendrá.

Es posible observar que ambos casos nos llevan a una contradicción. Luego, como evidentemente la máquina N es fácil de construir, H no puede existir.

$\blacksquare$

En particular, en este trabajo se mencionan y utilizan los problemas de alcanzabilidad [3] y de estados bloqueantes [4], ambos indecidibles.

3 Sistemas Dinámicos de Máquinas de Turing

3.1 SD Tradicional de MT's

Como se mencionó anteriormente, un sistema dinámico corresponde a un par (X, T), dado esto, en el sistema dinámico tradicional de máquinas de Turing (Figura 2), X corresponde a las configuraciones de una MT dada ($Q \times \mathbb{Z} \times \Sigma^{\mathbb{Z}}$), mientras que T corresponde a la función de transición de la misma (δ). Es interesante mencionar que, para definir este SD no se necesitan todos los elementos de la definición tradicional de una MT, que son $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$. También cabe mencionar que, la métrica que acompaña a este SD es la métrica de Cantor con la siguiente modificación:

$$d(x, y) = \begin{cases} 1 \;\; si\; \pi_Q(x) \neq \pi_Q(y) \\ 2^{-i} \;\; en\; otro\; caso \end{cases}$$

Recordar que:

$$i = \min(|j| : x_j \neq y_j)$$

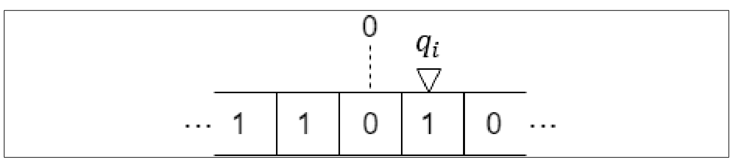

Figura 2. *Visualización del SD tradicional de MT's*

Es importante remarcar que para este sistema no se estudian sus propiedades dinámicas debido a problemas de compacidad. En particular, este problema se ve al avanzar infinitamente con el cabezal hacía alguna dirección, en dicho caso, este se saldría de la cinta y ese tipo de configuraciones no está definida. El hecho de que este SD no sea compacto, provoca que existan propiedades que no son interesantes de estudiar [5]. Este problema no ocurre con los SD definidos a continuación.

3.2 Máquina de Turing con Cinta Móvil

Máquina de Turing con cinta móvil es un SD propuesto en [5]. De aquí en adelante será nombrado por sus siglas en inglés TMT (Turing Machine with moving Tape). Podemos ver TMT como una transformación del SD tradicional de MT's, el cual, en lugar de mover el cabezal de la máquina, mueve a la cinta en la dirección opuesta. De este modo, el cabezal siempre queda en la posición central evitando problemas de compacidad. En la Figura 3 se puede observar cómo una misma configuración sería visualizada en el modelo tradicional y en TMT.

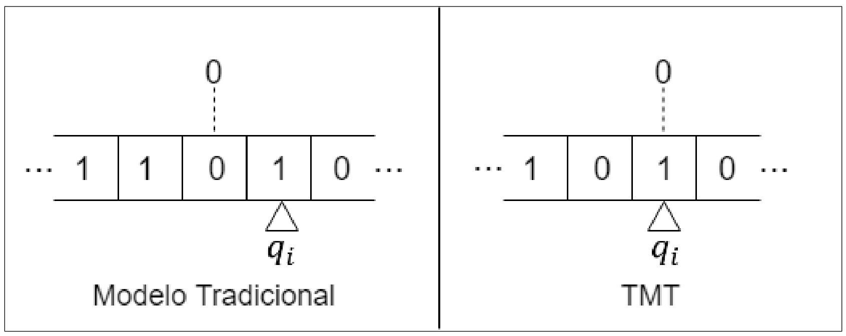

Figura 3. *Modelo tradicional vs. TMT*

El espacio métrico en TMT se define como:

$$X_T = \Sigma^{-\mathbb{N}} \times Q \times \Sigma^{\mathbb{N}_0}$$

Mientras que, al igual que en el SD tradicional, T corresponde a la función de transición de la MT asociada (δ).

Para denotar una configuración x en TMT se utiliza el siguiente formato $(\dots x_{-2}x_{-1}, q, x_0x_1x_2 \dots)$, siendo q un estado y x_0 el símbolo leído.

Para comprender como evoluciona una configuración en este SD, supongamos una configuración $x \in X$, tal que $x = (\dots x_{-2}x_{-1}, q, x_0x_1x_2 \dots)$ y que, además, leer el símbolo x_0 en el estado q implica escribir el símbolo α, moverse al estado s y avanzar una posición en la cinta, es decir, $\delta(q, x_0) = (s, \alpha, +1)$. Así $T(x) = (\dots x_{-2}x_{-1}\alpha, s, x_1x_2 \dots)$, donde s se encuentra en el centro. Asimismo, una transición de la forma $\delta(q, x_0) = (s, \alpha, 0)$ transformaría a x a $(\dots x_{-2}x_{-1}, q, \alpha x_1x_2 \dots)$

y una transición de la forma $\delta(q, x_0) = (s, \alpha, -1)$ dejaría a x como $(\ldots x_{-2}, q, x_{-1}\alpha x_1 x_2 \ldots)$.

3.3 Máquina de Turing con Cabezal Móvil

Al igual que TMT, máquina de Turing con cabezal móvil es un SD propuesto por Kůrka en [5], cuyas siglas provenientes del inglés corresponden TMH (Turing Machine with moving Head).

En TMH se inserta el estado de cada configuración dentro de la cinta en la posición que el cabezal debería estar, moviendo al resto de los símbolos hacia la derecha (Figura 4). La perspectiva utilizada para los elementos de este SD es que el símbolo que denota a un estado es el que se mueve a través de la palabra en función del movimiento indicado por la relación de transición de la MT asociada.

El espacio métrico en TMH se define como:

$$X_H \subset (Q \cup \Sigma)^{\mathbb{Z}}$$

Sujeto a que:

$$x \in X_H : |x|_Q \leq 1$$

Donde $|x|_Q$ indica la cantidad de estados presentes en x.

En TMH, las configuraciones se denotan simplemente como una palabra bi-infinita, como, por ejemplo, $x = \ldots x_{i-1} q x_i x_{i+1} x_{i+2} \ldots$, donde i es un entero cualquiera. Al igual que en TMT, el símbolo que se encuentra inmediatamente a la derecha del símbolo que denota el estado q, es el símbolo que se está leyendo.

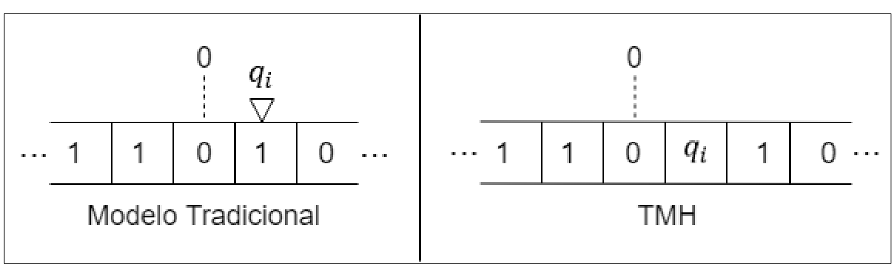

Figura 4. *Modelo Tradicional vs. TMH*

3.4 T-shift

Un t-shift (de radio 0), también denotado como S_T, es un subshift que almacena el carácter leído junto al estado en el que se encuentra una máquina de Turing en cada momento de la computación, es decir, condensa la información relevante del historial de cálculo de la misma.

Este SD se deriva de aplicar el factor columna sobre cada uno de los elementos (configuraciones) pertenecientes al espacio métrico de TMT para una máquina en particular.

Supongamos una máquina de tan sólo un estado llamado q, el cual reemplaza cualquier cosa que lea por un 0 para luego moverse a la derecha (Figura 5). A continuación, se presenta como derivar un elemento perteneciente al t-shift de esta máquina:

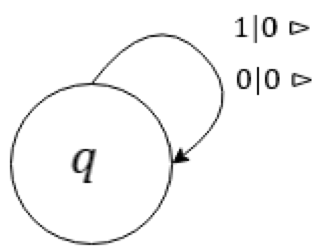

Figura 5. *Máquina borradora*

Sea la configuración $x = (\ldots {}^{\omega}0, q, 10101^{\omega} \ldots)$, donde ${}^{\omega}0$ denota una cantidad de 0's a la izquierda y 1^{ω} denota una cantidad infinita de 1's hacia la derecha. Así, la órbita de x sería:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(x) = \{ & (\ldots {}^{\omega}0, q, 0101^{\omega} \ldots), \\ & (\ldots {}^{\omega}0, q, 101^{\omega} \ldots), \\ & (\ldots {}^{\omega}0, q, 01^{\omega} \ldots), \\ & (\ldots {}^{\omega}0, q, 1^{\omega} \ldots), \\ & (\ldots {}^{\omega}0, q, 1^{\omega} \ldots), \ldots \} \end{aligned}$$

Notar que la configuración $(\ldots{}^{\omega}0, q, 1^{\omega}\ldots)$ se repetirá infinitamente en la órbita de x.

Es importante recordar que en TMT las configuraciones siempre tienen a los estados actuales, en este caso q, en la posición central junto al símbolo que se está leyendo. De este modo, aplicar el factor columna sobre x nos entrega el siguiente elemento del t-shift: $\begin{smallmatrix}1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1^{\omega}\\ q & q & q & q & q & q\end{smallmatrix}$.

Del mismo modo, podemos aplicar el factor columna de radio 1 para obtener el t-shift de radio 1 (S_T^1) de la máquina asociada. Así, tomando nuevamente como ejemplo a la configuración x y a su órbita, el elemento perteneciente al t-shift de radio 1 asociado a esta configuración es $\begin{smallmatrix}010 & 001 & 010 & 001 & 011 & 011^{\omega}\\ q & q & q & q & q & q\end{smallmatrix}$.

Podemos apreciar que los espacios métricos de S_T y de S_T^1 corresponden a un subconjunto de $(Q \times \Sigma)^{\mathbb{N}}$ y a un subconjunto de $(Q \times \Sigma^3)^{\mathbb{N}}$ respectivamente. Es sencillo apreciar que S_T y S_T^1, son cerrados a la función shift, es decir, son subshift's.

3.5 H-shift

un h-shift (S_H) se deriva de aplicar el factor columna sobre cada elemento perteneciente al TMH de una MT.

Para comprender mejor este SD, utilicemos nuevamente la máquina borradora de la Figura 5, pero esta vez con una configuración de TMH $x = \cdots{}^{\omega}0q1'1^{\omega}\ldots$. Su órbita corresponde a:

$$\begin{aligned}\mathcal{O}(x) = \{&\ldots{}^{\omega}00q'1^{\omega}\ldots,\\ &\ldots{}^{\omega}000'q1^{\omega}\ldots\\ &\ldots{}^{\omega}000'0q1^{\omega}\ldots,\ldots\}\end{aligned}$$

Así, aplicar el factor columna sobre la configuración x nos da el elemento $1q000^{\omega}$ el cual pertenece al S_H de la máquina borradora.

Cabe mencionar que el espacio métrico de un S_H es un subconjunto de $(Q \cup \Sigma)^{\mathbb{N}}$. Es fácil apreciar que S_H es de hecho un subshift.

4 Sobreyectividad en SD de MT

Una máquina de Turing $M = (Q, \Sigma, \delta)$ escrita en quíntuplas es sobreyectiva si y sólo si, para cada $q' \in Q$ y $s', r', t' \in \Sigma$ existe al menos un estado $q \in Q$ y un símbolo $s \in \Sigma$ tales que $\delta(q, s) = (q', s', +1)$, $\delta(q, s) = (q', r', -1)$ o bien $\delta(q, s) = (q', t', 0)$. En palabras simples, una MT es sobreyectiva si para cada configuración existe al menos una configuración anterior.

Si para algún q' no se cumple la condición de sobreyectividad anteriormente mencionada, entonces se dice que q' es un estado defectivo. Así, una máquina es sobreyectiva si y sólo si no posee estados defectivos.

Determinar la sobreyectividad de una MT cualquiera es simple, ya que tan solo basta con tomar cada posible tripleta de símbolos con el cabezal de la máquina en medio y determinar si para cada estado, estas tripletas de símbolos tienen un pasado. Para este proceso se necesitan verificar $|\Sigma \times \Sigma \times \Sigma \times Q|$ combinaciones. Este proceso es aplicable SD tradicional de MT, a TMT y a TMH, además, son equivalentes, es decir:

$$sobreyectividad\ MT \ \Leftrightarrow sobreyectividad\ TMT \ \Leftrightarrow sobreyectividad\ TMH$$

4.1 Sobreyectividad en t-shift

Se dice que un t-shift es sobreyectivo si y sólo si:

$$(\forall u \in S_T)(\exists a \in Q \times \Sigma)\ au \in S_T$$

Plantearse el problema de la sobreyectividad en el t-shift nace de la dicotomía de que la no-sobreyectividad en una MT no necesariamente implica no-sobreyectividad en su t-shift. Para visualizar esto existe un ejemplo sencillo: Utilicemos nuevamente la máquina borradora de la Figura 5 y analicemos la tripleta $10'0$ sobre el estado q, podemos apreciar que esta no tiene pasado debido a que, como todas las instrucciones vienen desde la izquierda escribiendo 0, no hay manera de haber escrito el 1 presente en la tripleta ni tampoco de haber llegado desde la derecha, en otras palabras, la máquina borradora no es sobreyectiva. Sin embargo, su t-shift asociado sí lo es, ya que, para todo $s \in S_T$ tenemos que $s_0 = {}^{0}_{q}$, o bien, $s_0 = {}^{1}_{q}$ y es fácil apreciar que en ambos casos podemos anexar tanto ${}^{0}_{q}$ como ${}^{1}_{q}$, al comienzo de s, ya que, lo que la máquina haya leído en un instante no condiciona al resto del t-shift. Dicho esto, podemos observar que la no-sobreyectividad en la MT no necesariamente implica no-sobreyectividad en su t-shift.

En [4] se demuestra que el problema de determinar la sobreyectividad en el t-shift es un problema indecidible en quíntuplas.

4.1.1 Estado Bloqueante

Un estado q es bloqueante hacia la izquierda (derecha) si, luego de pasar por él, no se pude volver a la posición $-1(+1)$ respecto a q. Matemáticamente esto es:

$$(\forall u \in S_T)(\forall s \in \Sigma)\, u_1 = (s, q) \Rightarrow \left[(\forall j \in \mathbb{N}) \sum_{k=1}^{j} \delta_D(u_k) \neq -1(+1) \right]$$

Además, q puede ser s-bloqueante hacia la izquierda (derecha) si para un $s \in \Sigma$ dado, tenemos que:

$$(\forall u \in S_T)\, u_1 = (s, q) \Rightarrow \left[(\forall j \in \mathbb{N}) \sum_{k=1}^{j} \delta_D(u_k) \neq -1(+1) \right]$$

Finalmente, q es un estado es bloqueante si $\forall s \in \Sigma$ es s-bloqueante, ya sea hacia la derecha o hacia la izquierda.

4.1.2 Nociones de Sobreyectividad en t-shift

La sobreyectividad en S_T puede ser definida bajo ciertas nociones, se dice que S_T es sobreyectivo si y sólo si para cada $q' \in Q$ se cumple al menos una de las siguientes condiciones:

1. q' no es defectivo: si q' no es defectivo, entonces, independiente del contexto, este podrá ser alcanzado desde alguna configuración

2. q' es bloqueante hacia la izquierda (derecha) y es alcanzable desde la izquierda (derecha): si esto se cumple, ninguna configuración que produzca $u \in S_T$, con $u_1 = (q', s_1)$, es capaz de visitar nuevamente la posición $-1(+1)$, así, cualquier $(q, s) \in Q \times \Sigma$ que cumpla que $\delta_Q(q, s) = q'$ y que $\delta_D(q, s) = +1(-1)$, puede ser añadido al principio de u.

3. q' es bloqueante y es alcanzable desde la izquierda y desde la derecha: si q' es un estado bloqueante, $u \in S_T$ comienza con $u_1 = (q', s_1)$ y q' es s_1-bloqueante a la izquierda (derecha), entonces ninguna configuración que produzca u es capaz de revisitar la posición $-1(+1)$ en TMT. De este modo, cualquier par $(q, s) \in Q \times \Sigma$ que satisfaga que $\delta_Q(q, s) = q'$ y $\delta_D(q, s) = +1(-1)$ puede ser añadido al principio de u.

Podemos apreciar que decidir si un estado es bloqueante permite determinar si S_T es sobreyectivo. Sin embargo, resulta que verificar la propiedad bloqueante es un problema indecidible.

4.1.3 Indecibilidad del Problema de los Estados Bloqueantes

Para demostrar la indecibilidad de este problema se realiza una reducción al problema de alcanzabilidad, que es conocido como un problema indecidible [3]. El problema de alcanzabilidad se define como: dada una máquina de Turing M y dos estados $q_0\ y\ q_F$, decidir si existe alguna configuración $(\omega, 0, q_0)$ que alcance al estado q_F en tiempo finito.

Teorema 2. El problema de los estados bloqueantes es indecidible

Demostración. Sea $M = (Q, \Sigma, \delta)$ una máquina de Turing y $q_0, q_F \in Q$ dos estados. Asumimos que M al pasar por el estado q_0 nunca visita la posición a la izquierda de la posición 0, es decir, M solo trabaja en el lado derecho de la cinta. Definamos M' tal como M, pero con un estado q_{aux} y las siguientes transiciones extras (ver Figura 6):

$$\delta(q_F, s) = q(q_{aux}, s, -1), \text{ y}$$

$$\delta(q_{aux}, s) = (q_{aux}, s, -1) \text{ para cualquier } s \in \Sigma$$

De este modo, M alcanza al estado q_F para una configuración $(\omega, 0, q_0)$ si y solo si el estado q_0 de M' no es bloqueante hacia la izquierda.

■

Es importante mencionar que el problema de estados bloqueantes hacia la izquierda es equivalente al problema de estados bloqueantes hacia la derecha.

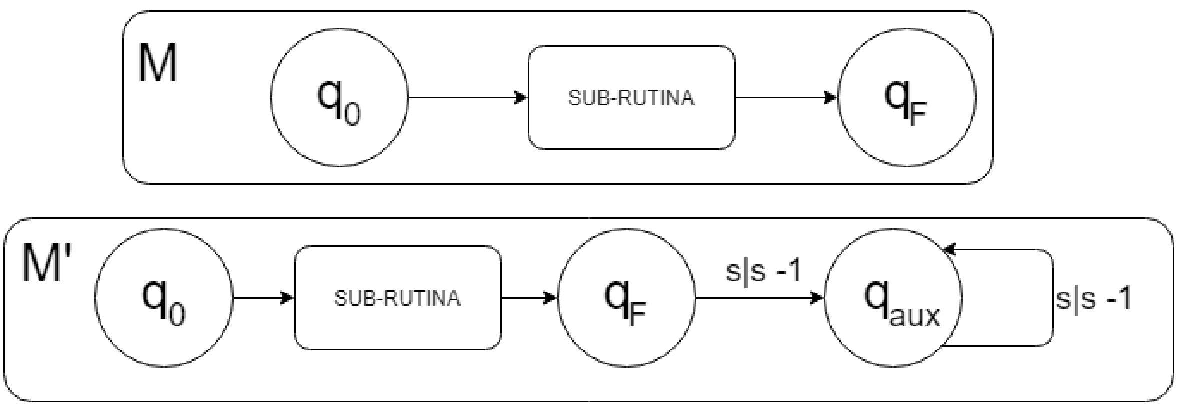

Figura 6. *Máquinas M y M'*

Teorema 3. El problema de la sobreyectividad en S_T es indecidible.

Demostración. Anteriormente vimos que, determinar la sobreyectividad en S_T es equivalente a resolver el problema de estados bloqueantes. Es por esto, y haciendo uso del Teorema 2, que podemos decir que este problema es también indecidible.

■

4.2 Sobreyectividad en t-shift de Radio 1

La sobreyectividad en el t-shift de radio 1 se cumple si y solo si:

$$(\forall u \in S_T^1)(\exists a \in Q \times \Sigma \times \Sigma \times \Sigma)\ au \in S_T^1$$

Plantearse el problema de la sobreyectividad en el t-shift de radio 1 nace debido a que, aparentemente, la dicotomía presente en el problema de la sobreyectividad del t-shift de radio 0 no está presente en este caso. De este modo cabe preguntarse ¿se mantendrá la no-sobreyectividad aumentando el radio a 1 en cada una de las posiciones de cada elemento del S_T? Es decir, utilizando el factor columna de radio 1, ya que por lo menos para la máquina borradora sí se mantiene. Consideremos un elemento de la forma $\substack{100 \\ q} \dots \in S_T^1$, es fácil de apreciar que para este elemento no existe un elemento anterior debido a que el 1 presente es conflictivo por los mismos motivos que la tripleta 100 en q es conflictiva en la máquina borradora. ¿Se mantendrá siempre esta relación?

Teorema 4. El problema de la sobreyectividad en S_T^1 es decidible.

Demostración. Como podemos apreciar, una posición de un elemento $a \in S_T^1$ es de la forma $\substack{\alpha\beta\gamma \\ q}$, con $q \in Q$ y $\alpha, \beta, \gamma \in \Sigma$. Bastaría con determinar si cada elemento a tiene un posible pasado para decidir sobre la sobreyectividad en el S_T^1. Es fácil apreciar que este proceso es idéntico a determinar la sobreyectividad en una MT, esto nos permite concluir que determinar la sobreyectividad en el t-shift de radio 1 es un problema decidible que de hecho puede ser resuelto en $|\Sigma \times \Sigma \times \Sigma \times Q|$ pasos.

∎

4.3 Sobreyectividad en h-shift

La sobreyectividad en el h-shift se define como:

$$(\forall u \in S_H)(\exists a \in Q \cup \Sigma)\; au \in S_H$$

Supongamos la máquina de Turing M, la cual trabaja sobre $\Sigma = \{0,1\}$. Esta máquina posee un solo estado q tal que $\delta(q,1) = (q,0,+1)$ y $\delta(q,0) = (q,0,-1)$ (ver Figura 7), esta MT se denomina "máquina semi-borradora".

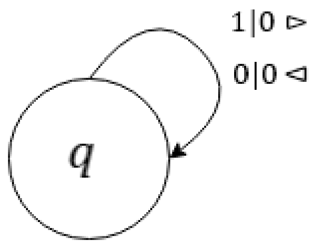

Figura 7. *Máquina semi-borradora*

Consideremos la configuración $x = \ldots 1q'110 \ldots$ y calculemos su órbita.

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(x) = \{ &\ldots 10'q10\ldots, && \ldots 10'0q0\ldots, \\ &\ldots 10'q00\ldots, && \ldots 1q'000\ldots, \\ &\ldots q1'000\ldots, && \ldots 0q'000\ldots, \\ &\ldots q0'000\ldots, && \ldots 00'000\ldots, \ldots \} \end{aligned}$$

Podemos observar que los 0's presentes en la configuración son una especie de barrera que impide que el cabezal de la máquina avance hacia la derecha, al igual que ocurre con los 1's, pero hacia la izquierda. Ya con esto podemos saber que el elemento perteneciente a S_H derivado de la configuración x es $v = q000q1q00^{\omega}$. Notar que el estado q está presente 3 veces s.

Verifiquemos si el elemento v posee algún pasado. Por la naturaleza del S_H, existen tres candidatos:

1. $qq000q1q00^{\omega}$
2. $1q000q1q00^{\omega}$

3. $0q000q1q00^{\omega}$

La primera opción es evidentemente imposible, ya que dicho elemento ni siquiera pertenece a este S_H. Por otra parte, la segunda opción es también inviable debido a que para obtener un elemento como ese hace falta una configuración anterior a x que sea de la forma … $q1'$ …, lo que dejaría un 0 en la posición -1, todo esto provocaría que se pierda el 1 presente en la posición -1 que actúa como barrera y que nos permitía ver al estado q por tercera vez en v, por lo que, en el mejor de los casos q estaría presente tan solo dos veces en la posición 0 de la configuración. Al igual que ocurre con la primera y la segunda opción, la tercera es también imposible debido a que para obtener un elemento de esa forma haría falta una configuración anterior a x de la forma … $0'q0$ …, para esto hay dos opciones:

- … $00'q0$ …, la cual provoca que q esté tan solo una vez en la posición 0 de la configuración.
- … $10'q0$ …, la cual genera que q pase tan solo 2 veces por la posición 0 de la configuración y en tiempos distintos a x.

Dicho todo esto, podemos concluir en que el S_H de la máquina semi-borradora no es sobreyectivo. Además, es clave destacar que la sobreyectividad en S_H se reduce en algunos casos a determinar si un estado (q en el caso de la máquina semi-borradora) aparece o no dentro de la evolución de una configuración.

4.3.1 Nociones de Sobreyectividad en h-shift

Notar algunas de las nociones de sobreyectividad para elementos $u \in S_H$, tales que $u_0 \in Q$, son bastante similares a las de los elementos del S_T. En particular, sea $u_0 = q'$, estas son:

1. q' no es defectivo: si q' no es defectivo, evidentemente existirá alguna configuración que genere un elemento $w \in S_H$, tal que $\sigma(w) = v$.

2. q' es defectivo, bloqueante hacia la izquierda y alcanzable desde la izquierda: que esto se cumpla, quiere decir que ninguna configuración $x \in X$ que produzca $u \in S_H$, tal que $u_0 = q'$, es capaz de visitar la posición -1. Así, se podría añadir al comienzo de u cualquier $s \in \Sigma$ que cumpla:

$$(\exists q \in Q): \delta_Q(q, s) = q' \wedge \delta_D = +1$$

Sin embargo, si q' es bloqueante hacia la derecha y alcanzable desde la derecha, no nos basta con encontrar un símbolo $s \in \Sigma$, tal que:

$$(\exists q \in Q): \delta_Q(q, s) = q' \wedge \delta_D = -1$$

para determinar una pre-imágen para u, ya que dicho símbolo s estaría en la posición $+2$ de la cinta. En términos simples, esta noción difiere bastante a las de S_T, por lo que podemos teorizar que la sobreyectividad en S_H no es equivalente a la sobreyectividad en el S_T.

4.3.2 Indecibilidad de la Sobreyectividad en el S_H

En esta sección se demuestra la indecibilidad del problema de la sobreyectividad en el S_H por reducción al problema de alcanzabilidad.

Teorema 5. El problema de la sobreyectividad en S_H es indecidible.

Demostración. Supongamos una máquina de Turing M reversible escrita en cuádruplas, la cual trabaja en la parte no negativa de la cinta. Además, definamos dos estados $q_0, q_F \in Q$ tales que, q_0 es inalcanzable y q_F no tiene transiciones definidas sobre él. Supongamos también que, si q_0 alcanza a q_F, el cabezal queda en la posición 0 de la cinta.

Ahora definamos las máquinas M^+ como la traducción de cuádruplas a quíntuplas de M, y a M^- como la traducción de cuádruplas a quíntuplas de la máquina inversa a M. Uniremos ambas máquinas con las siguientes transiciones:

$$\delta(q_{F+}, s) = (q_{F-}, s, -1),$$

$$\delta(q_{0-}, s\ ) = (q_{0+}, 0, +1), \text{ para todo } s \in \Sigma$$

Además, para aquellos estados q_i defectivos de M (excluyendo q_0), para los cuales no existe una transición de llegada definida para algún $c \in \Sigma$, tendremos que:

$$\delta(q_{i-}, c) = (q_{i+}, c, 0)$$

Finalmente, para aquellos estados q_j no completos de M, para los cuales no existe una transición de salida definida para algún $p \in \Sigma$, tendremos que:

$$\delta\left(q_{j+}, p\right) = (q_{j-}, p, 0)$$

Con esta construcción, que llamaremos M' (Figura 8, notar que "$*$" denota a aquellos símbolos que no están explícitos en las transiciones), nos aseguramos de que el único estado defectivo es q_{0+}. Notar que en algunos casos puede ser que $i = j$, sin embargo, esto no presenta ningún inconveniente.

Notar que la sobreyectividad del S_H de la máquina M' depende solamente del estado q_0, ya que es el único estado defectivo. Es más, la sobreyectividad del S_H depende de si q_0 es bloqueante a la izquierda, lo que sólo ocurrirá si no se alcanza el estado q_{F+}, en otros términos:

$$q_{0+} \text{ alcanza } q_{F+} \Leftrightarrow M' \text{ es sobreyectiva en } S_H$$

De este modo, resolver el problema de la sobreyectividad en el S_H es equivalente a resolver el problema de alcanzabilidad, que se sabe que es indecidible, luego, el problema de la sobreyectividad en S_H lo es también.

■

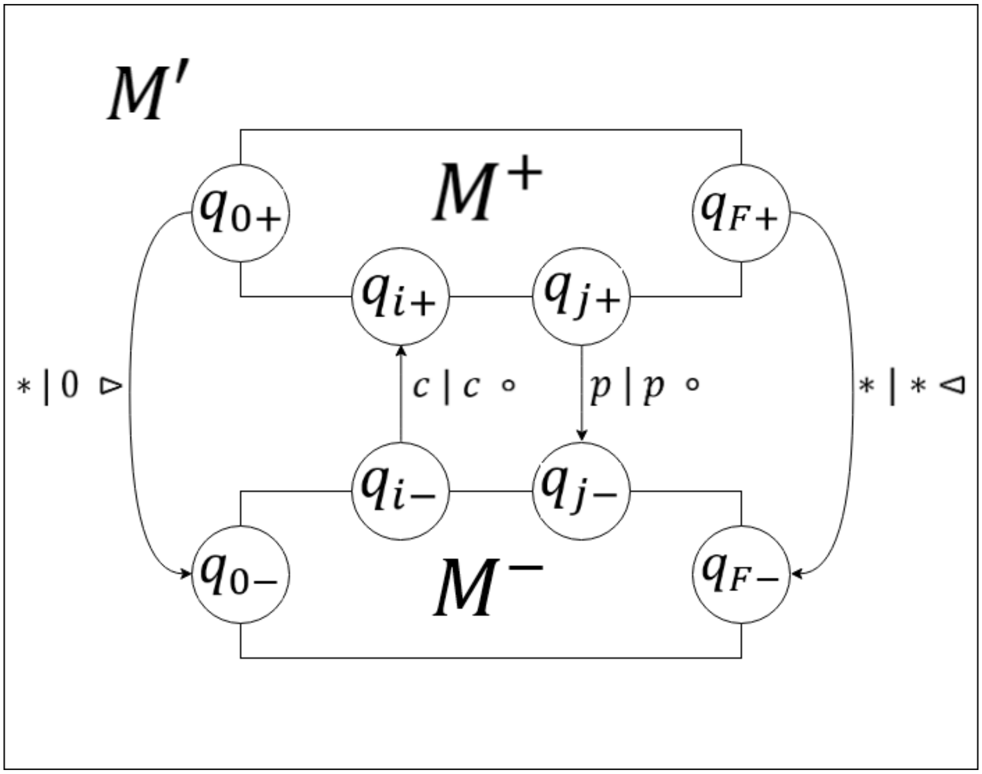

Figura 8. *Máquina de Turing M' (Sobreyectividad S_H)*

5 Conclusiones y Trabajo Futuro

Luego de analizar los problemas propuestos en este trabajo, se llega a la conclusión de que el problema la sobreyectividad en el t-shift de radio 1 es decidible, es más, podemos inferir que la sobreyectividad en este subshift es equivalente a la sobreyectividad de su máquina de Turing asociada.

Por otra parte, el problema de la sobreyectividad en el h-shift resultó ser indecidible. Esto se demosotró realizando una reducción de este problema al problema de alcanzabilidad utilizando el concepto de “estado bloqueante”.

Respecto al segundo problema abordado en este trabajo (Sobreyectividad en S_H), sería interesante plantearse si basta con aumentar el radio de 0 a algún r tal que el problema de la sobreyectividad en S_H^r sea un problema decidible. En particular, como aparentemente S_H tiene ciertos problemas en la posición $+2$ de la cinta al buscar una pre-imágen para un elemento que comience con un estado bloqueante hacia la derecha, es posible teorizar que $r = 2$ sería suficiente.

Referencias Bibliográficas

[1] K. Morita, A. Shirasaki, and Y. Gono, "A 1-tape 2-symbol reversible Turing machine," *IEICE Trans.*, vol. 72, no. 3, pp. 223–228, 1989.

[2] A. M. Turing, "On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem," *Proc. London Math. Soc.*, vol. 2, no. 1, pp. 230–265, 1937.

[3] J. Kari and N. Ollinger, "Periodicity and immortality in reversible computing," in *International Symposium on Mathematical Foundations of Computer Science*, 2008, pp. 419–430.

[4] R. Torres, N. Ollinger, and A. Gajardo, "Undecidability of the Surjectivity of the Subshift Associated to a Turing Machine BT - Reversible Computation," 2013, pp. 44–56.

[5] P. Kůrka, "On topological dynamics of Turing machines," *Theor. Comput. Sci.*, vol. 174, no. 1–2, pp. 203–216, Mar. 1997.