

**UNIVERSIDAD DEL BÍO-BÍO**  
**FACULTAD DE INGENIERÍA**  
**DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA EN MADERAS**



**Cristian Alfredo Chávez Toro**

**Tesis presentada para la obtención del grado de Magíster en Ciencia  
y Tecnología de la Madera.**

**SIMULACIÓN BIDIMENSIONAL DE ESFUERZOS DE SECADO  
EN LA MADERA A TRAVÉS DE CVFEM**

**DIRECTOR DE TESIS:** Dr. Carlos Hernán Salinas Lira

**CO-DIRECTOR DE TESIS:** Dr. Rubén Ananías Abuter

**CONCEPCIÓN - CHILE**

**2009**

*Dedicatoria*

*A mis padres, por su apoyo verdadero, puro e incondicional.*

## Agradecimientos

*Agradezco sinceramente:*

*A Dios, por enseñarme a valorar las cosas que perduran. Por darme fuerza ante los obstáculos y por levantarme las veces que caí. En todo momento trabajé con mi vida, esculpiendo un carácter único para cumplir sus propósitos. A Él le debo todo lo que soy y lo que puedo ser.*

*A mis Padres, Luís y Mirta, que admiro con todo el corazón y mente por sus enseñanzas sublimes.*

*A mi profesor, Dr. Carlos Salinas Lira por su preocupación y apoyo sincero en mis estudios de postgrado.*

## RESUMEN

El presente trabajo se relaciona con la simulación numérica del problema esfuerzo/deformación en la madera debido a los cambios de humedad que experimenta durante un proceso isotérmico de secado. En este contexto, se simula el transporte bidimensional del contenido de humedad al interior de la madera, modelado de acuerdo con el concepto de Potencial Hídrico, vinculado a los esfuerzos asociados al fenómeno de contracción libre y sorción mecánica debido a gradientes de humedad. Recurrente de lo anterior, un modelo matemático caracterizado por un sistema de ecuaciones diferenciales parciales no lineales de segundo orden es resuelto numéricamente a través del Método de Volúmenes de Control basado por Elementos Finitos (CVFEM). Resultados de diversos problemas y aplicaciones para una sección en el plano radial tangencial de madera de *álamo* son indistintamente cotejados con datos experimentales, soluciones analíticas y simulaciones numéricas disponibles en la literatura especializada.



## SUMMARY

The present work was related to the numerical simulation of the stress strain problem in the wood due to the changes of moisture content that it experiment during an isothermal drying process. In this context, was simulated the two-dimensional transport of the moisture content in wood using the concept of Water Potential and simultaneously, the stress associated with the free shrinking and mechano sorptive phenomenon, caused by gradients of humidity, according to classic elasticity theory. As a consequence, a mathematical model characterized by a system of partial not linear second order differential equations was solved numerically throw Control Volumes Finite Elements Method (CVFEM). Results of diverse test problems and applications for a section in the radial tangential plane of *aspen* wood were shown. Them arranged with experimental information, analytical solutions and numerical available data given in the literature.

# ÍNDICE

<b>CAPITULO I</b> .....	1
Introducción.....	2
Objetivos .....	4
Revisión Bibliográfica .....	5
 <b>CAPITULO II</b> .....	 11
Simulación del Transporte de Humedad.....	12
Modelo Físico .....	12
Modelo Matemático .....	13
Modelo Numérico .....	15
Resultados y Discusiones.....	22
Conducción bidimensional isotrópica.....	22
Transporte de humedad en madera de <i>álamo</i> .....	24
 <b>CAPITULO III</b> .....	 30
Simulación de Esfuerzos y Deformaciones .....	31
Modelo Físico .....	31
Modelo Matemático .....	33
Modelo Numérico .....	36
Resultados y Discusiones.....	43
Placa plana de acero sometida a tracción.....	43
Difusión de calor y esfuerzos termicos en placa de acero .....	54
Transporte de humedad y esfuerzos de secado en madera de <i>álamo</i> .....	60

<b>CAPITULO IV</b> .....	76
Conclusiones .....	77
Bibliografía.....	79
Nomenclatura .....	86
<b>APENDICES</b> .....	89
A. Datos Experimentales .....	90

---

---

# CAPITULO I

---

---

## Introducción

La madera es un biomaterial poroso e higroscópico altamente heterogéneo, que se destaca por presentar propiedades marcadamente diferenciadas en las direcciones radial, tangencial y longitudinal, por lo cual admite un tratamiento de material ortotrópico, Rémond y Perré (2008).

El secado artificial de la madera es un proceso físico que consiste en provocar en ella una pérdida controlada de humedad, fundamentalmente inducida por su exposición a un ambiente caracterizado por una temperatura, presión, humedad relativa y velocidad del aire, Gatica (2006).

La modelación del proceso de secado de madera, como disciplina científica, ha permitido tener avances notables en la tecnología de dicho proceso, estos avances se sintetizan en: Maximización de las tasas de secado, mejoras en la calidad de la madera y menor consumo de energía.

Los modelos matemáticos descritos en la literatura para la simulación del secado de madera, se sustentan en ecuaciones diferenciales que describen los fenómenos físicos de transporte de calor y masa, sumado a las consecuencias de dicho proceso, particularmente, el relativo al problema tensión/deformación debido a gradientes de humedad.

Aquellos modelos diferenciales relacionados, no son integrables de manera exacta por lo cual requiere de un enfoque numérico para su integración a través diversos métodos aportados por el cálculo numérico computacional, tales como: El Método de Diferencias Finitas (FDM), Elementos Finitos (FEM), Volúmenes Finitos (CVM), etc. En el presente caso, un híbrido de los anteriores como lo es el Método de Volúmenes Finitos basado por Elementos Finitos (CVFEM), que incorpora la flexibilidad topológica del FEM a la conservatividad del CVM.

El objetivo de este estudio es desarrollar un modelo matemático que permita simular los esfuerzos y deformaciones que experimenta la madera durante un proceso isotérmico de secado, inducidos por gradientes de humedad.

Para describir y modelar estos fenómenos físicos (estado de esfuerzos y deformaciones) se procede previamente, con la simulación numérica de la difusión de humedad al interior de la madera. Esto permite obtener los gradientes de humedad, los cuales inducen cambios dimensionales y por consiguiente, esfuerzos y deformaciones.

En consecuencia, para calcular los esfuerzos y deformaciones al interior de la madera durante el proceso de secado, es necesario conocer y comprender el fenómeno de transporte de humedad al interior del material como fuerza que induce cambios dimensionales.

En este sentido, como metodología de trabajo, se idealizan fenómenos bidimensionales de transporte que caracterizan la física fundamental del proceso del secado y deformación en la madera, esto es: 1) Conducción bidimensional isotrópica (validación del código para difusión); 2) Difusión de humedad en madera de *álamo* sometida a condiciones de contorno de convección y simetría (aplicación al transporte de humedad en la madera); 3) Placa plana de acero sometida a tracción en condiciones de contorno de desplazamiento libre o restringido para el caso de esfuerzos y deformaciones (validación del código de esfuerzo/deformación elástico); 4) Placa plana de acero para estudiar difusión de calor y esfuerzos térmicos inducidos (validación del código para esfuerzo/deformación por deformación y creep); 5) Transporte de humedad y esfuerzos de secado en madera de *álamo* con condiciones de contorno combinadas de difusión de humedad y deformación (objetivo último del presente trabajo). Dichos fenómenos y su comportamiento son simulados en una sección rectangular, la cual permite cotejar los fenómenos en estudio con datos experimentales, analíticos y numéricos disponibles en la literatura especializada, a partir de lo cual se validan las simulaciones presentadas.

# Objetivos

## Objetivo general

- Simular los esfuerzos y deformaciones bidimensionalmente en la madera durante el proceso de secado<sup>1</sup>, usando CVFEM.

## Objetivos específicos

- Simular procesos de difusión transiente de humedad usando CVFEM.
- Simular difusión de humedad que induce esfuerzos y deformaciones al interior de la madera.
- Simular procesos de esfuerzos y deformación transiente usando CVFEM que incluyan deformación libre y creep.
- Simular los esfuerzos y deformación en la madera durante el secado que consideren contracción y sorción mecánica.

---

<sup>1</sup> Las características del secado se describen correspondientemente para cada problema planteado (Pág. 23, 31).

## Revisión Bibliográfica

La madera es un biomaterial no homogéneo, anisotrópico, poroso y no saturado sobre el cual intervienen mecanismos de transporte de humedad, en diversas escalas, por ejemplo: Difusión a nivel molecular, efectos capilares al nivel de medianas escalas y deformaciones a macro escalas Turner y Mujumdar (1997). Las diversas complejidades, inherentes a la madera, exigen fuertes simplificaciones para modelar y simular el secado de la madera. En términos generales implica aceptar la hipótesis del medio continuo, eliminar la heterogeneidad, considerar la anisotropía sólo relevante en las direcciones principales, asumirla como indeformable para efectos de fenómenos de transporte y en equilibrio termodinámico para balances de calor y masa. La humedad es uno de los aspectos críticos del secado, encontrándose el contenido de agua que la define, en estado líquido, gaseoso y ligada en las paredes celulares, Siau (1995). Además, en el proceso de secado se alteran los equilibrios de esfuerzo mecánicos ocasionando la deformación del material, Lewis *et al.* (1979), Morgan *et al.* (1982).

En base a lo anterior se han desarrollado diversos modelos y estrategias para la simulación del transporte de calor y masa bajo los preceptos clásicos difusivos, Chen *et al.* (2007) y aquellos desarrollados por Luikov (1966) y Whitaker (1977), citados en una revisión dada por Hernández y Quinto (2005), Perré y Degiovanni (1990), Perré *et al.* (1993), Turner y Ferguson (1995 a y b) y Turner (1996), todos estos investigadores simulan y modelan bidimensionalmente el transporte de calor y masa en la madera, bajo un enfoque de Whitaker (1977). Posteriormente Ferguson (1998), incorpora la deformación asociada al proceso de secado de la madera. Liu y Cheng (1989), Gui *et al.* (1994) Pang (2000) y Pang (2007) simulan el secado de la madera bajo un enfoque de Luikov. Los métodos difusivos han sido revalorados recientemente, prueba de ello es el reciente trabajo de Donghua y Muhammad (2007).

El modelo matemático implementado en este trabajo sigue la línea de investigación fundamentada por Luikov (1966) y desarrollada en el tiempo por autores de la Universidad Laval, entre otros, Cloutier *et al.* 1992, Cloutier y Fortin (1993, 1994), Tremblay *et al.* (1999 y dos trabajos en 2000) y Defo *et al.* (1999a, 1999b y 2000). Se



establece que el potencial hídrico es la fuerza motriz que induce el flujo de humedad en la madera bajo condiciones isotérmicas, se obtiene así un sistema de ecuaciones diferenciales parciales no lineales de segundo orden para los procesos de transporte por conducción de energía y difusión de concentración descritas para las variables de humedad, temperatura y presión. En particular, para el caso del secado convencional, que se estudia en este trabajo, las variables de temperatura y presión pueden ser omitidas, restando sólo la ecuación de transporte de concentración de humedad (Cloutier y Fortin, 1994).

Los esfuerzos y deformaciones son fenómenos físicos que se producen debido a la acción de fuerzas internas o externas en los materiales, Zienkiewicz y Taylor (2000). En la madera expuesta a un ambiente de secado actúan fuerzas que inducen esfuerzos y deformaciones, propiciadas básicamente por gradientes de humedad y de temperatura (transporte de calor y masa), Turner y Perré (1997).

La contracción que experimenta la madera durante el secado induce el desarrollo de esfuerzos mecánicos a través de su estructura, McMillen (1963). Estos esfuerzos son afectados por los cambios de humedad, las restricciones mecánicas, la anisotropía y el comportamiento viscoelástico de la madera, entre otros factores, Keey *et al.* (2000). Este comportamiento reológico de la madera, implica que cuando ésta se somete a fuerzas externas prolongadas en el tiempo o por corto tiempo pero superando el límite elástico, la deformación asociada no se recupera completamente, quedando con una deformación permanente como consecuencia del comportamiento viscoelástico de la madera, Young (1957). En adición, los cambios de humedad favorecen el desarrollo de esfuerzos higromecánicos, tanto o más importantes que la deformación plástica, Keey *et al.* (2000). Otra característica importante dependiente del tiempo que presentan los materiales viscoelásticos es la relajación, lo que implica que la fuerza necesaria para mantener el mismo nivel de deformación disminuye con el tiempo, como consecuencia de una adecuación por flujo interno en la madera, Wu y Milota (1994 y 1995).

Los modelos usados en la literatura para determinar los esfuerzos y deformaciones durante el proceso de secado de la madera se han caracterizado principalmente por la cantidad de factores y/o variables consideradas que inducen cambios dimensionales y en consecuencia, esfuerzos y deformaciones al interior de la madera.

Las contribuciones parciales de esfuerzos y deformaciones que experimenta la madera en el proceso de secado son provocadas principalmente por el transporte de humedad y energía al interior de la madera. Para esta última, el nivel de temperatura, es una contribución que en forma directa (dilatación térmica) es poco significativa en comparación a la contribución indirecta pues, los estados de temperatura inducen cambios importantes en las propiedades (principalmente el módulo de elasticidad) de la madera, Pang (2000).

En líneas generales, la modelación de las tensiones de secado en la madera es un proceso complejo que implica deformaciones permanentes y/o transitorias debido a su comportamiento viscoelástico e higromecánico.

En mayor detalle, el transporte de humedad al interior de la madera durante el proceso de secado provoca cambios dimensionales y variaciones en las propiedades del material, y por consecuencia, se inducen esfuerzos y deformaciones. A estos fenómenos totales producidos en la madera durante el proceso de secado contribuyen básicamente cinco componentes de esfuerzos y deformaciones parciales. Estas son: 1) Contracción libre, provocada por disminución del contenido de humedad bajo el punto de saturación de la fibra (Moisture shrinkage); 2) Esfuerzos elásticos inducidos por contenidos de humedad y temperatura en las propiedades del material (Elastic Stress Properties); 3) Sorción mecánica (Mechano-Sorptive Strain); 4) Incrementos de esfuerzos en un lapso de tiempo (Creep strain); 5) Dilatación térmica (Temperature induced strain).

Las contribuciones 1,2 y 3 son estudiadas por Kang *et al.* (2004) que predice esfuerzos y deformaciones en dos dimensiones resolviendo las ecuaciones con métodos analíticos. Ferguson (1998) también en dos dimensiones, usa métodos numéricos descritos para analizar los esfuerzos y deformaciones en el secado de maderas ocasionados por la contribución higromecánica.

Modelos más completos, pero unidimensionales, que consideran el estudio de todas las contribuciones listadas anteriormente son presentados por Pang (2000), el cual resuelve las ecuaciones por métodos de integración directa aplicado al secado de *Pinus radiata*, incluido el proceso de alivio de esfuerzos. De forma similar, Chen *et al.* (1997),

presentan un trabajo en el mismo enfoque pero aplicado a un proceso de secado por alta temperatura.

En el mismo contexto de secado, pueden ser citados modelos desarrollados por Lin y Cloutier (1996), Dahlblom *et al.* (1996), Martensson y Stevensson (1996), en donde se simulan los esfuerzos de secado bidimensionalmente en el plano radial tangencial. En estos casos, la contribución inducida por dilatación térmica en forma directa es omitida por su menor magnitud relativa.

Trabajos actuales modelados con mayor rigor, en los que se aplican aproximaciones de convección y difusión de humedad, son los aportados por Rémond *et al.* (2006) y Rémond y Perré (2008), desarrollados en el contexto de esfuerzos en el secado de la madera incorporando las deformaciones provocadas por cambios de humedad y el fenómeno del creep.

En consecuencia, de la revisión realizada para la modelación bidimensional, existen trabajos de diversos autores, tales como: Kang *et al.* (2004), Ferguson (1998), dos trabajos en el mismo año de Ferguson (1997), Martensson y Stevensson (1996), Lin y Cloutier (1996), Dahlblom *et al.* (1996) y Mauget y Perré (1996), Thuvander *et al.* (2002), Cheng *et al.* (2007), en todos ellos se simula bidimensionalmente los esfuerzos de secado en el plano radial/tangencial de la madera, en virtud de su mayor relevancia en cuanto al fenómeno de deformación durante el secado.

Los modelos tridimensionales aplicados a esfuerzos de secado son escasos. Sin embargo, hay unos pocos autores que aportan trabajos de relevancia, como lo son: Ormarsson *et al.* (1998, 1999 y 2000). En estos artículos se desarrolla, un estudio teórico numérico con Elementos Finitos para el problema 3D, la simulación correspondiente de los esfuerzos de secado y una aplicación para observar la influencia de los anillos de crecimiento en el fenómeno esfuerzo-deformación, respectivamente. Siguiendo con la línea de estudio, Ormarsson *et al.* (2003) trabaja con elementos finitos y principalmente simula la variación de humedad sumada a los esfuerzos al interior de madera laminada. También, Eriksson *et al.* (2004 y 2005) muestra un trabajo experimental y de simulación para columnas de madera laminada, en estos casos, estudia la orientación ortogonal de la sección radial-tangencial para observar los

cambios dimensionales producidos en cuanto a torsión y flexión 3D que presenta la madera para las distintas orientaciones del plano transversal en el ensamble de la columna. Un trabajo más actual es el de Keuneke y Niemz (2008), que modelan el comportamiento elástico de la madera ante cargas aplicadas. En consecuencia, la simulación tridimensional del problema esfuerzos-deformación es un problema muy complejo y abierto a ser estudiado proponiendo modelos aplicados. La escasez de autores que han abordado esta línea de investigación se debe a una razonable hipótesis de falta de relevancia, ya que los cambios dimensionales en la dirección longitudinal son del orden del 0.1%, Siau 1995. Por otra parte existe una velada razón de recursos de equipamiento y cálculo computacional. Sin embargo, observando los trabajos existentes y conociendo la importancia de la estabilidad dimensional de la madera después del secado, es muy interesante observar los resultados de curvaturas, torsiones y flexiones que sólo pueden ser apreciables tridimensionalmente.

El modelo matemático para los esfuerzos y deformaciones, al igual que para la difusión de humedad, lo constituyen ecuaciones diferenciales parciales no lineales de segundo orden. Para la integración de dichas ecuaciones, existen diversos métodos numéricos, entre otros, Elementos Finitos (FEM), Volúmenes Finitos (FVM), Diferencias Finitas (FDM), etc. De los anteriores, surgen diversos métodos híbridos, en particular, uno conformado por FEM y FVM, que se le denomina como: Método de Volúmenes de Control conformado por Elementos Finitos, reconocido por las siglas en inglés CVFEM. Este método, desarrollado por Baliga y Patankar (1980), consiste básicamente en definir un Volumen de Control (Volumen Finito) en base a contribuciones parciales de Elementos Finitos. Sus ventajas radican principalmente en la cualidad intrínseca de conservación del Método de Volúmenes Finitos sumado a la versatilidad topológica dada por el Método de Elementos Finitos, Turner y Perré (1997). En el contexto de modelación en secado de madera y relacionado a la simulación de esfuerzos y deformaciones, el método CVFEM ha sido implementado por los dos trabajos de Ferguson *et al.* (1997), Turner y Perré (1997), Ferguson (1998). En particular, Ferguson (1998) realiza una comparación de rendimientos y comprueba eficiencia para el cálculo de esfuerzos y deformaciones en el proceso de secado de madera mediante el CVFEM por sobre la eficiencia de los Elementos Finitos.

En síntesis, resultados destacados de investigación en el contexto de los esfuerzos y deformaciones producidos en la madera durante el proceso de secado son dados por: Lewis *et al.* (1979), Morgan *et al.* (1982), Ranta-Maunus (1975) y Ranta-Maunus (1989) citados por ambos trabajos realizados por Ferguson (1997), como también Ranta-Maunus (1975) citado por Pang (2000). Los mencionados trabajos, citados por todos los investigadores especializados, han marcado directrices y fundamentos para la tecnología del secado de la madera tendiente a la predicción y/o cálculo de esfuerzos y deformaciones durante dicho proceso. En general, los autores coinciden en el comportamiento sinusoidal de los esfuerzos y deformación en el transcurso del tiempo de secado con distribución semi opuesta desde la superficie hacia el interior de la madera. En particular, modelos dados por Perré *et al.* (1993), Chen *et al.* (1997), Svensson and Martensson (2002), Kang *et al.* (2004), Pang (2000, 2002 y 2007), Rémond y Perré (2006) y Rémond y Perré (2008), aplican y simulan tecnologías que permiten optimizar el proceso de secado, disminuyendo los esfuerzos residuales en la madera después de un secado y por ende mejorar sus propiedades mecánicas. Básicamente, en las investigaciones se puede rescatar que el comportamiento de los esfuerzos y deformaciones en la madera durante el proceso de secado siguen una línea definida. Esto es, en la primera etapa de secado, la superficie de la madera trabaja a tensión debido que las capas internas de la madera impiden su contracción. De forma recíproca, en esta primera etapa, las capas al interior de la madera trabajan a compresión por la reacción a la contracción experimentada en la superficie. Al final del secado, los comportamientos de los esfuerzos y deformaciones son opuestos a la primera etapa de secado, Turner y Perré (1997). Lo anterior es objeto de simulación en el presente trabajo.

---

---

## CAPITULO II

---

---

## Simulación del Transporte de Humedad

La simulación del transporte de humedad se basa en el fenómeno de difusión de ésta al interior de la madera considerando el concepto de potencial hídrico como energía que induce la difusión.

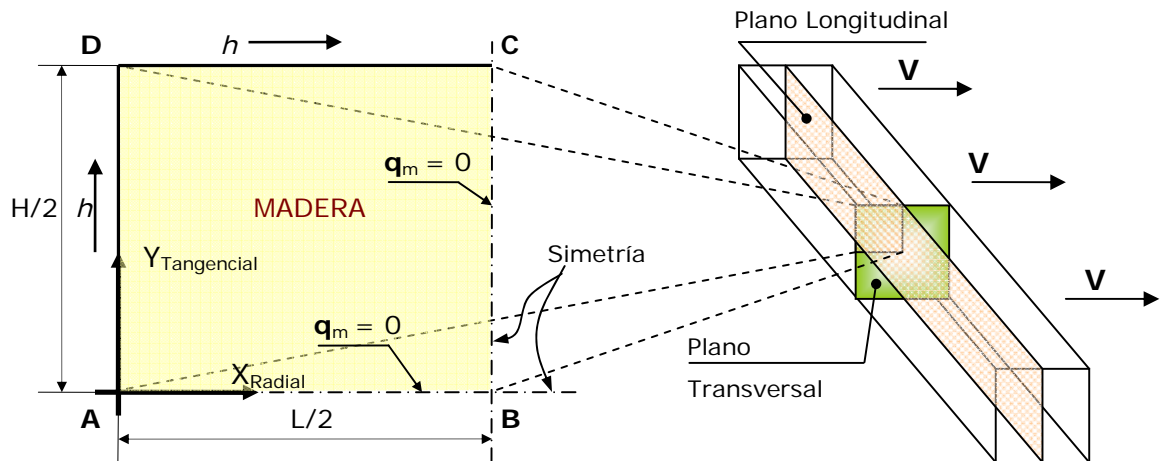
Los desarrollos de la simulación numérica del transporte de humedad al interior de la madera se muestran a continuación:

### MODELO FÍSICO

Se considera una pieza de madera sólida de *álamo* (*Populus tremuloides*) sometida a un proceso de secado convectivo caracterizado por un coeficiente convectivo  $h$ , esquematizada en la figura 1. Se asume un medio homogéneo ortotrópico de propiedades variables con el contenido de humedad  $CH$ , Coeficiente de conductividad de humedad  $k_{ii}(CH)$  y potencial hídrico  $\psi(CH)$ . Las propiedades relevantes para el problema, obtenidas por Cloutier *et al.* 1992 y Cloutier y Fortin (1993), son dadas en el apéndice A.

La simetría respecto al flujo y forma de la madera permite asumir un transporte bidimensional de humedad en el plano transversal (Radial/Tangencial), caracterizado por un largo  $L$  y un ancho  $H$  iguales a 0.045 (m). La configuración anterior permite reducir a un cuarto el dominio de cálculo.

Las condiciones iniciales y de contorno son: 1) Humedad inicial  $CH=CH_{ini}$ . 2) Condición de contorno del tipo Neumann de flujo nulo ( $\mathbf{q}_m=0$ ) en los ejes de simetría ( $x=L/2$  e  $y=0$ .) y 3) Convección en las superficies  $x=0$  e  $y=H/2$ .



**Figura 1.** Esquema del problema físico planteado: Difusión de humedad en el plano radial/tangencial.

## MODELO MATEMÁTICO

El modelo matemático considera que la variación local de la concentración de humedad, es equivalente a la divergencia del flujo y se puede escribir de acuerdo con el modelo propuesto por Cloutier *et al.* (1992), en la forma implementada por Salinas *et al.* (2004). Esto es:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \nabla \mathbf{q}_m = 0 \quad (1)$$

Donde:  $C$  Concentración de humedad ( $kg_{agua} / m^3_{madera-humeda}$ ).

$\mathbf{q}_m$  Flujo de humedad ( $kg_{agua} / m^2_{madera-humeda} s$ ).

Suponiendo pequeñas variaciones de temperatura y equilibrio entre las fases del agua en la madera, el flujo de humedad  $\mathbf{q}_m$  puede ser descrito en función del tensor de conductividad  $\underline{K}$  y el potencial hídrico  $\psi$  ( $J / kg$ ) como:

$$\mathbf{q}_m = -\underline{K}(CH, T, P) \vec{\nabla} \psi \quad (2)$$

Donde:  $CH$  Contenido de Humedad (%).

$T$  Temperatura ( $^{\circ}C$ ).

$P$  Presión ( $Pa$ ).



En particular, el transporte de humedad es determinado en forma indirecta a través del potencial hídrico, considerando la madera como un medio ortotrópico bidimensional en el plano  $x, y$ . Este puede ser expresado como<sup>2</sup>:

$$\frac{\partial}{\partial t}(c_{\psi}\psi) = \frac{\partial}{\partial x}\left(k_{xx}\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k_{yy}\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) \quad (3)$$

Donde:  $k_{xx}$  y  $k_{yy}$  Conductividades ortogonales ( $kg^2_{agua} / m_{madera-húmeda} s J$ )

$$c_{\psi} = \frac{G_m \rho_m}{100} \frac{\partial CH}{\partial \psi}$$

Capacidad concentración de masa  
 ( $kg^2_{agua} / J m^3_{madera-húmeda}$ ).  $G_m$  Gravedad específica,  $\rho_m$  densidad específica.

Las conductividades  $k_{xx}$  y  $k_{yy}$  y la variación de humedad en relación al potencial,  $\partial CH / \partial \psi$ , son parámetros físicos de transporte determinados experimentalmente (valores en apéndice A, figura A1).

Alternativamente, (3) puede ser expresada en función del contenido de humedad M ( $100 kg_{agua} / kg_{madera\_seca}$ ):

$$\frac{\partial}{\partial t}(c_M CH) = \frac{\partial}{\partial x}\left(k'_{xx}\frac{\partial CH}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k'_{yy}\frac{\partial CH}{\partial y}\right) \quad (4)$$

Donde  $k'_{xx} = k_{xx} \frac{\partial \psi}{\partial CH}$  y  $k'_{yy} = k_{yy} \frac{\partial \psi}{\partial CH}$  Conductividades Modificadas

$$(kg_{madera-seca} / m_{madera-húmeda} s)$$

$$c_m = \frac{G_m \rho_m}{100}$$

Capacidad concentración de humedad

$$(kg_{madera\_seca} / m^3_{madera-humedad}).$$

<sup>2</sup> Observar que los coeficientes  $c_{\psi}$ ,  $k_{xx}$  y  $k_{yy}$  son ahora dependientes de la variable transportada y para el caso de la difusividad dependiente también de la dirección. Todo lo anterior, configura un transporte de masa no lineal ortotrópico.

## MODELO NUMÉRICO

El modelo matemático dado por la ecuación (1, 3 o 4) para el caso de transporte de humedad; puede ser presentado en forma genérica por una Ecuación de Difusión Transiente no lineal de segunda orden, donde la variable independiente es denominada  $\phi$  (ver variables y propiedades específicas en la Tabla 1). En particular, el modelo para la difusión térmica fue implementado numéricamente a través de CVFEM en el contexto de tesis de doctorado de Gatica (2007)<sup>3</sup>, y para este trabajo, análogamente se implementa CVFEM para la difusión de humedad al interior de la madera con difusividades ortotrópicas. Esto es:

$$\frac{\partial_{c_\phi} \phi}{\partial t} + \nabla \left( \underbrace{\vec{J}}_{\text{Flujo}} \right) = S \quad \text{con} \quad \vec{J} = -\Gamma \nabla \phi \quad (5)$$

Donde:

- $\phi$  Variable transportada
- $t$  Tiempo (s)
- $c_\phi$  Capacidad
- $\Gamma$  Coeficiente de difusión
- $S = S_0 - S_1 \phi$  Terminó fuente como función lineal de  $\phi$ .

Considerando un volumen (dominio)  $\forall$  conformado por un contorno  $\Omega = \Omega_\phi + \Omega_c$ , se tienen las siguientes condiciones iniciales y de contorno:

$$\phi = \begin{cases} \phi_0 \text{ para } t = 0 & \text{Valor inicial} \\ \phi_\phi \text{ en } \Omega_\phi & \text{Dirichlet} \\ \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial n} \text{ en } \Omega_c & \text{Neumann} \end{cases} \quad (6)$$

<sup>3</sup> Gatica Y. 2007. Simulación Tridimensional del Transporte de Calor y Masa en la Madera. Anteproyecto de tesis de Doctorado en Ciencias e Industrias de la Madera. Dpto. Ing. En Maderas. Facultad de Ingeniería. U. del Bío Bío.

**Tabla 1:** Variables y Propiedades<sup>4</sup> para la ecuación genérica (5)

Variable	$\phi$	$c_\phi$	$\Gamma$	Condición contorno ( $\mathbf{q}_\phi$ ) e inicial ( $\phi$ )			Ec
				X=0 ; Y=H/2	Y=0 ; X=L/2	t=0	
Potencial	$\psi$	$\frac{G_m \rho_m}{100} \frac{\partial CH}{\partial \psi}$	$k_{xx} ; k_{yy}$	$h_\psi (\psi_s - \psi_\infty)$	0	$\psi_{inicial}$	(3)
Humedad	CH	$\frac{G_m \rho_m}{100}$	$k_{xx} \frac{\partial CH}{\partial x} ; k_{yy} \frac{\partial CH}{\partial y}$	$h_m (CH_s - CH_\infty)$	0	$CH_{inicial}$	(4)

Al integrar (5) en el dominio  $\forall$ , de acuerdo con el Teorema de Green, la integral de la divergencia en el dominio  $\forall$ , se transforma en una integral en el contorno  $\Omega$ . Esto es:

$$\int_{\forall} \frac{\partial}{\partial t} (c_\phi \phi) d\forall - \int_{\Omega} (\Gamma \nabla \phi \hat{\mathbf{n}}) ds = \int_{\forall} S d\forall \quad (7)$$

- Donde:
- $\forall$  Volumen de control
  - $\Omega$  Contorno de  $\forall$
  - $\hat{\mathbf{n}}$  Vector unitario normal externo a  $\Omega$

Considerando el dominio  $\forall$ , conformado por  $nl$  Volúmenes Finitos (VF) ( $\forall^l$  con  $(l=1, nl)$ ) de contorno  $\Omega^l$ . De forma similar, cada VF es constituido por  $nk$  contribuciones parciales de Elementos Finitos (EF) de contorno  $\Omega_k^l$  con  $(k=1, nk)$  (ver figura 2). Esto es:

$$\forall = \sum_{l=1}^{nl} \forall^l \quad \text{con} \quad \forall^l = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{nk} \forall_{EF_k}^l \quad (8)$$

$$\Omega^l = \sum_{k=1}^{nk} \Omega_k^l$$

Ahora la ecuación diferencial originalmente planteada para el dominio  $\forall$ , también es válida para los subdominios  $\forall^l$  con  $(l=1, nl)$ . Esto último es el fundamento que permite resolver en términos discretos de acuerdo con el Método de Volúmenes Finitos. La ecuación diferencial en cuestión conlleva a plantear una ecuación algebraica para cada

<sup>4</sup> Valores de  $k_{xx}, k_{yy}$  y  $\frac{\partial M}{\partial \psi}$  son determinados experimentalmente para cada especie. En particular, son usados valores obtenidos por Cloutier *et al.* (1992).

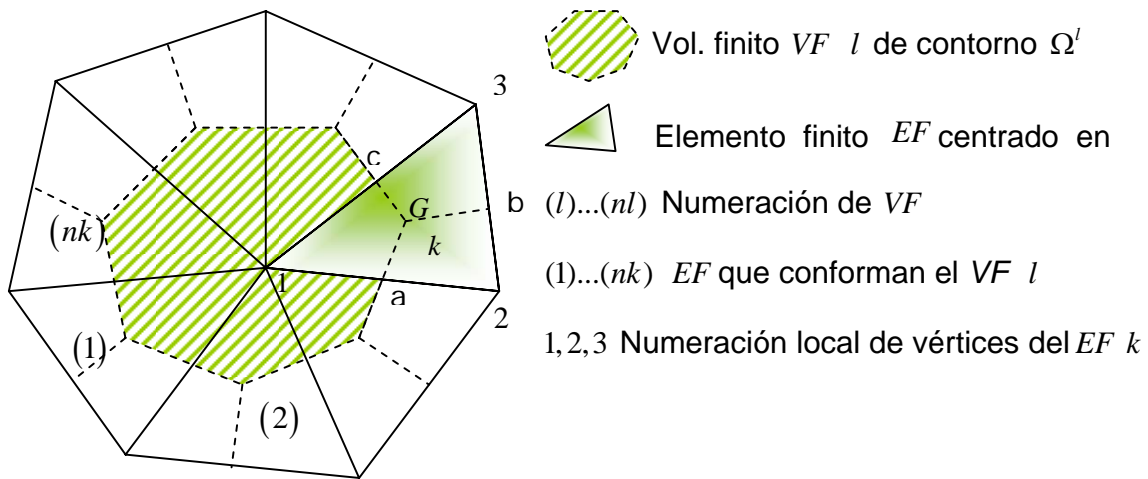
subdominio cuya solución conjunta (sistema de ecuaciones) permite obtener valores discretos de la variable independientes involucrada ( $\phi$ ). Sea entonces la ecuación integrada en el VF:

$$\int_{\forall^l} \frac{\partial}{\partial t} (c_\phi \phi) d\forall^l - \int_{\Omega^l} (\Gamma \nabla \phi \hat{\mathbf{n}}) ds = \int_{\forall^l} S d\forall^l \quad \text{con } (l = 1, nl) \quad (9)$$

Donde:  $\nabla \phi$  Gradiente igual a  $\left( \frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)$

$\hat{\mathbf{n}}$  Vector normal unitario externo  $(n_x, n_y)$

Esquemáticamente, el volumen finito es el observado en la figura 2.



**Figura 2.** Volumen Finito  $l$  conformado por  $nk$  Elementos Finitos.

Donde los segmentos son anotados como: Para el contorno de  $\forall$  se tiene:  $\Omega = \sum_{l=1}^{nl} \Omega^l$

Con  $\Omega^l = \sum_{k=1}^{nk} \Omega_k^l$  contorno del VF  $l$  ( $nl$ : número total de VF) donde  $\Omega_k^l$  pertenece al EF  $k$  y es parte del contorno  $\Omega^l$ .

Al considerar la variación local  $\frac{\partial}{\partial t} (c_\phi \phi)$  y la fuente  $S$  en el centroide del VF como predominante, se tiene para el término transiente:

$$\int_{\forall^l} \frac{\partial}{\partial t} (c_\phi \phi) d\forall = \frac{\partial}{\partial t} (c_\phi \phi) \forall^l \quad (10)$$

Y evaluando la diferencial temporal, a través de diferencias finitas, se obtiene el valor integrado del término transiente, en función del tiempo actual ( $t=m \Delta t$ ) y el tiempo anterior ( $t=(m-1) \Delta t$ ). Esto es:

$$\frac{\partial}{\partial t}(c_\phi \phi) \nabla^l = \frac{\nabla^l}{\Delta t} \left( (c_\phi \phi)^m - (c_\phi \phi)^{m-1} \right), \text{ con } (t = m \Delta t) \quad (11)$$

Donde:  $m$  Contador de tiempo.

$\Delta t$  Paso de tiempo.

Similarmente, para la fuente:

$$\int_{\nabla^l} S dV = \nabla^l (S_0 - S_1 \phi^m) \quad (12)$$

El termino difusivo  $\nabla \phi^m \hat{n}$  es integrado espacialmente sobre el contorno del  $EF k$  igual a  $\Omega_k^l = \text{con } (k=1, nk)$  para el tiempo  $t=m \Delta t$  (omitido por simplicidad). Siendo así y al considerar que cada  $VF$  esta formado por contribuciones parciales de  $nk EF$ , conforme a lo mostrado en la figura 2, las contribuciones parciales difusivas del  $EF k$  a los  $VF$  centrados en los nodos locales  $l_i$  ( $i=1,2 \text{ y } 3$ ), se pueden escribir como:

$$\underbrace{\int_{\Omega_k^l} (\nabla \phi \hat{n}) ds}_{CD_k^{l_1}} = \underbrace{\int_{\Omega_{k_a}^l} (\nabla \phi \hat{n}) ds}_{CD_{k_a}^{l_1}} + \underbrace{\int_{\Omega_{k_c}^l} (\nabla \phi \hat{n}) ds}_{CD_{k_c}^{l_1}} \quad (13)$$

Donde:  $CD_{k_c}^{l_1}$  Contribucion de la variable  $\phi$  centrada en  $l_1$  del elemento  $k$ .

Expresiones similares pueden ser escritas para las contribuciones centradas en  $l_2$  y  $l_3$ .

Los subíndices  $a$ ,  $b$  y  $c$  representan segmentos de contorno  $\overline{aG}$ ,  $\overline{bG}$  y  $\overline{cG}$  respectivamente.

Para la integración anterior se define una variación lineal de  $\phi$  al interior del  $EF$ , es decir:

$$\phi(x, y) = Ax + By + C \quad (14)$$

Donde  $A, B, C$  son constantes definidas y determinadas con la solución del sistema de ecuaciones en función de los valores nodales  $\phi_1$ ,  $\phi_2$  y  $\phi_3$  iguales a:

$$A = \frac{y_2 - y_3}{D} \phi_1 + \frac{y_3 - y_1}{D} \phi_2 + \frac{y_1 - y_2}{D} \phi_3 \quad (15)$$

$$B = \frac{x_3 - x_2}{D} \phi_1 + \frac{x_1 - x_3}{D} \phi_2 + \frac{x_2 - x_1}{D} \phi_3 \quad (16)$$

$$C = \frac{x_2 y_3 - x_3 y_2}{D} \phi_1 + \frac{x_3 y_1 - x_1 y_3}{D} \phi_2 + \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{D} \phi_3 \quad (17)$$

$$D = (x_1 - x_2)(y_2 - y_3) - (x_2 - x_3)(y_1 - y_2) \quad (18)$$

De acuerdo con la notación de (13), la contribución integral difusiva del contorno definido por el segmento  $\overline{aG}$ , es dada por:

$$CD_{k_a}^I = \int_{\Omega_{k_a}^I} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) (n_{ax}, n_{ay}) ds \quad (19)$$

Y en consideración a (14), el gradiente de  $\phi$  es dado por:

$$\nabla \phi = \left( \frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) = (A, B) \quad (20)$$

Los flujos difusivos  $J_x$  y  $J_y$  en las direcciones ortotrópicas  $x$  e  $y$ , al considerar difusión  $\Gamma_x$  y  $\Gamma_y$ , respectivamente, son dados por:

$$\vec{J} = \left( \Gamma_x \frac{\partial \phi}{\partial x}, \Gamma_y \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) = (J_x, J_y) \quad (21)$$

Asumiendo el gradiente y la normal como constantes en el segmento de contorno  $\overline{aG}$ , la integral resultante es igual a:

$$\begin{aligned} CD_{k_a}^I &= (J_x, J_y) (n_{ax}, n_{ay}) \int_{\Omega_{k_a}^I} ds \\ &= (J_x n_{ax} + J_y n_{ay}) d_a \end{aligned} \quad (22)$$

Donde:  $d_a$  es la longitud del segmento  $\overline{aG}$

Similarmente, para el segmento  $\overline{cG}$  se tiene:

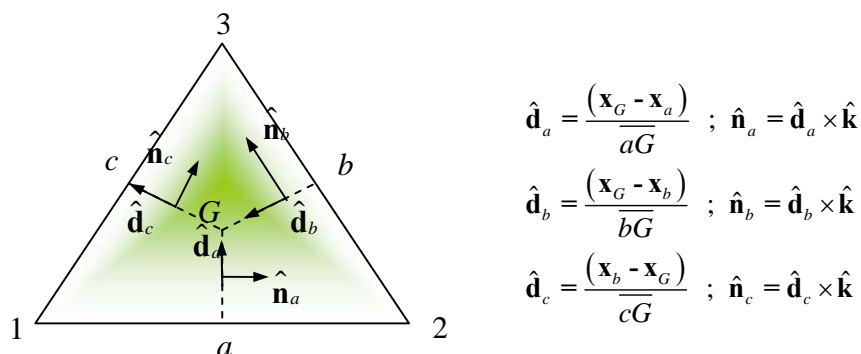
$$CD_{k_c}^I = (J_x n_{cx} + J_y n_{cy}) d_c \quad (23)$$

Donde:  $d_c$  es la longitud del segmento  $\overline{cG}$

Los vectores normales unitarios  $\mathbf{n}_a$  y  $\mathbf{n}_c$  son definidos como:

$$\begin{aligned}\mathbf{n}_a &= (n_{ax}, n_{ay}) = \left( \frac{y_G - y_a}{d_a}, \frac{-x_G + x_a}{d_a} \right) \\ \mathbf{n}_c &= (n_{cx}, n_{cy}) = \left( \frac{y_c - y_G}{d_c}, \frac{-x_c + x_G}{d_c} \right)\end{aligned}\quad (24)$$

Las direcciones de estos vectores se pueden observar en la figura 3.



**Figura 3.** Definición de normales  $\overline{aG}$ ,  $\overline{bG}$ ,  $\overline{cG}$  y Donde  $\hat{\mathbf{n}}_a$ ,  $\hat{\mathbf{n}}_b$ ,  $\hat{\mathbf{n}}_c$  se definen en  $\mathbb{R}^3$ .

De acuerdo con las últimas definiciones se obtiene:

$$CD_{ka}^{l_1} = CD_{ka_1}^{l_1} \phi_1 + CD_{ka_2}^{l_1} \phi_2 + CD_{ka_3}^{l_1} \phi_3 \quad (25)$$

Donde:

$$CD_{ka_1}^{l_1} = \left( \frac{(y_2 - y_3)(y_G - y_a)}{D_k} + \frac{(x_3 - x_2)(x_a - x_G)}{D_k} \right)$$

$$CD_{ka_2}^{l_1} = \left( \frac{(y_3 - y_1)(y_G - y_a)}{D_k} + \frac{(x_1 - x_3)(x_a - x_G)}{D_k} \right)$$

$$CD_{ka_3}^{l_1} = \left( \frac{(y_1 - y_2)(y_G - y_a)}{D_k} + \frac{(x_2 - x_1)(x_a - x_G)}{D_k} \right)$$

$$D_k = (x_1 - x_2)(y_2 - y_3) - (x_2 - x_3)(y_1 - y_2)$$

Luego, se obtienen expresiones para las contribuciones de los segmentos de contorno  $CD_{kc}^{l_1}$ . Siendo de esta manera, la contribución del elemento  $k$  al VF  $l$  centrado en el nodo  $l$ , coincidente con el vértice local 1 ( $l^1$ ) del EF  $k$ , es igual a:

$$CD_k^{l_1} = (CD_{ka_1}^{l_1} + CD_{kc_1}^{l_1}) \phi_1 + (CD_{ka_2}^{l_1} + CD_{kc_2}^{l_1}) \phi_2 + (CD_{ka_3}^{l_1} + CD_{kc_3}^{l_1}) \phi_3 \quad (26)$$

Análogamente, la contribución a los VF centrados en 2 y 3 ( $VF^{l_2}$  y  $VF^{l_3}$ ) son iguales a<sup>5</sup>:

$$CD_k^{l_2} = (-CD_{ka_1}^{l_2} + CD_{kb_1}^{l_2})\phi_1 + (-CD_{ka_2}^{l_2} + CD_{kb_2}^{l_2})\phi_2 + (-CD_{ka_3}^{l_2} + CD_{kb_3}^{l_2})\phi_3 \quad (27)$$

$$CD_k^{l_3} = -(CD_{kb_1}^{l_3} + CD_{kc_1}^{l_3})\phi_1 - (CD_{kb_2}^{l_3} + CD_{kc_2}^{l_3})\phi_2 - (CD_{kb_3}^{l_3} + CD_{kc_3}^{l_3})\phi_3 \quad (28)$$

Nótese que para el segmento  $\overline{cG}$  y  $\overline{bG}$ , sólo es necesario cambiar los valores  $n_{ax}; n_{ay}$  por  $n_{cx}; n_{cy}$  y  $n_{bx}; n_{by}$ , según corresponda.

Finalmente, al considerar las contribuciones transiente y del término fuente, dadas por las ecuaciones (11) y (12), sumado a los términos difusivos dados por (26) a (28) la ecuación de difusión transiente bidimensional discreta, planteada en forma implícita para  $\phi$  en  $t = m \Delta t$  en un volumen genérico  $l$ , es dada por la siguiente expresión:

$$CL^l \phi^l + \sum_{k=1}^{nk} CD_k^l = CS^l \quad \text{válida para } l = 1, nl \text{ ecuaciones} \quad (29)$$

Donde:  $CL^l = \nabla^l \left( \frac{\rho}{\Delta t} + S_1 \right)$  y  $CS^l = \frac{\rho \nabla^l}{\Delta t} (\phi)^{m-1} + S_0 \nabla^l$ .

De esta forma, para cada valor "l" se obtendrá una ecuación algebraica formulada para el valor medio de  $\phi$  en cada subdominio  $\nabla^l (\phi^l)$ , configurando un sistema de  $nl \times nl$  ecuaciones de la forma  $[A]\{\phi\} = \{B\}$ . Donde la matriz **A**, se compone de coeficientes ordenados, cuya diagonal principal es dominante, por esto puede ser resuelta con métodos iterativos. En este caso, son resueltos a través del método iterativo Gauss Seidel con SOR, con un coeficiente de relajación  $\omega = 0.9$ , Lapidus y Pinder (1982).

---

<sup>5</sup> Observar que de acuerdo a la definición del sentido de la normal las contribuciones  $CD_{ka_1}^{l_2}$ ,  $CD_{ka_2}^{l_2}$  y  $CD_{ka_3}^{l_2}$  del EF  $k$  requieren ser negadas (sentido contrario) al ser incorporadas como aporte al  $VF^{l_2}$ . Similarmente con  $CD_{kb_1}^{l_3}$ ,  $CD_{kc_1}^{l_3}$ ,  $CD_{kb_2}^{l_3}$ ,  $CD_{kc_2}^{l_3}$ ,  $CD_{kb_3}^{l_3}$  y  $CD_{kc_3}^{l_3}$  para el  $VF^{l_3}$ .



## RESULTADOS Y DISCUSIONES

**Conducción bidimensional isotrópica.** Para efectos de validar los algoritmos computacionales y determinar diversos parámetros numéricos, se simula previamente la transferencia de calor permanente en una placa rectangular. El modelo es bidimensional y sus características geométricas quedan definidas por una altura  $H$  y longitud  $L$ . Las condiciones de contorno son del tipo Dirichlet: Temperatura  $T_2$  para la cara superior y  $T_1$  en la cara inferior y laterales respectivamente. Esto es:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad \text{con } T = \begin{cases} T_1 & \text{en } y = 0 ; x = 0 \text{ y } x = L \\ T_2 & \text{en } y = H \end{cases} \quad (30)$$

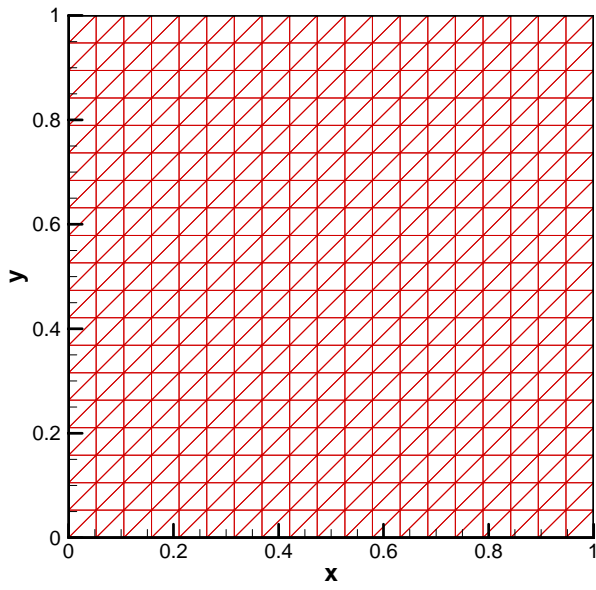
Su solución analítica para la ecuación (30), según Incropera y DeWitt (1999), es igual a:

$$T(x, y) = T_1 + \frac{2(T_2 - T_1)}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} + 1}{n} \text{sen} \frac{n\pi x}{L} \frac{\text{senh}(n\pi y/L)}{\text{senh}(n\pi H/L)} \quad (31)$$

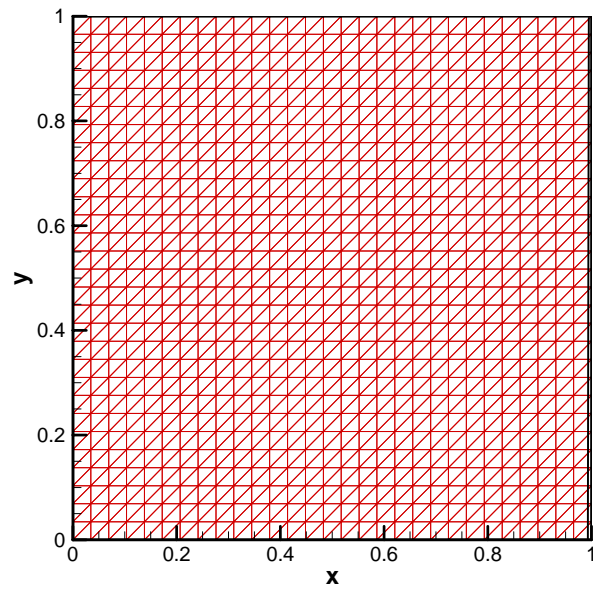
Cuya solución convergente se encuentra hacia el infinito, con  $n=100$  y con un error porcentual del 1%.

Los tipos de malla que se pueden usar para solucionar el problema se presentan en la figura 4.

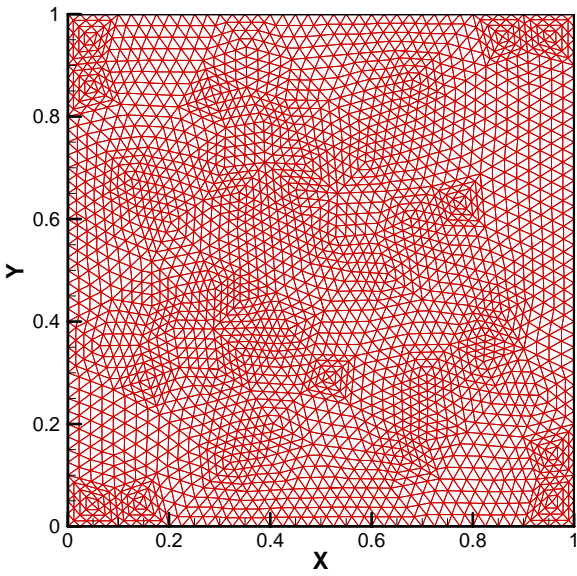
Resultados del presente método comparados con la solución analítica (31), obtenidos para las mallas estructuradas y no estructuradas mostradas en la figura 4, son dados en la figura 5. En la figura 5b se puede apreciar resultados de temperatura en el corte diagonal (Tramo AC), comparado con la solución analítica, lo cual refleja plena concordancia para la malla 30x30 y una buena aproximación con las mallas 20x20. Además, los resultados con mallas no estructuradas altamente no uniformes (N5248/E2707 y N792/E435) también muestran una buena concordancia (sólo una pequeña desviación de ambas en el extremo superior). Esto último indica que el algoritmo responde bien a la falta de homogeneidad de la malla, lo cual demuestra consistencia y robustez del algoritmo en este aspecto.



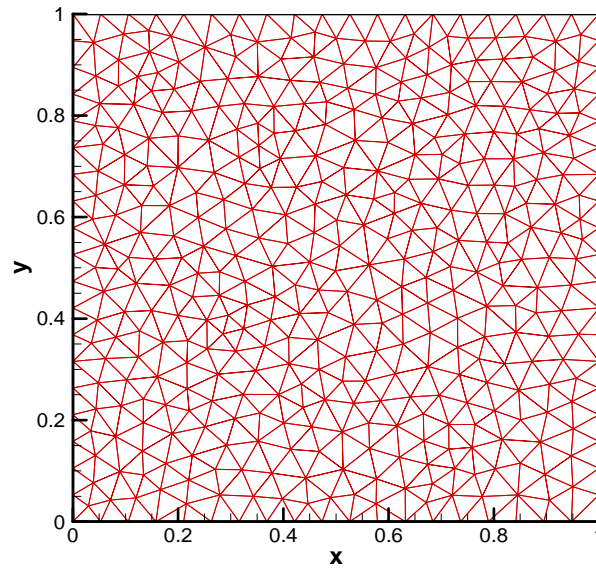
a)



b)

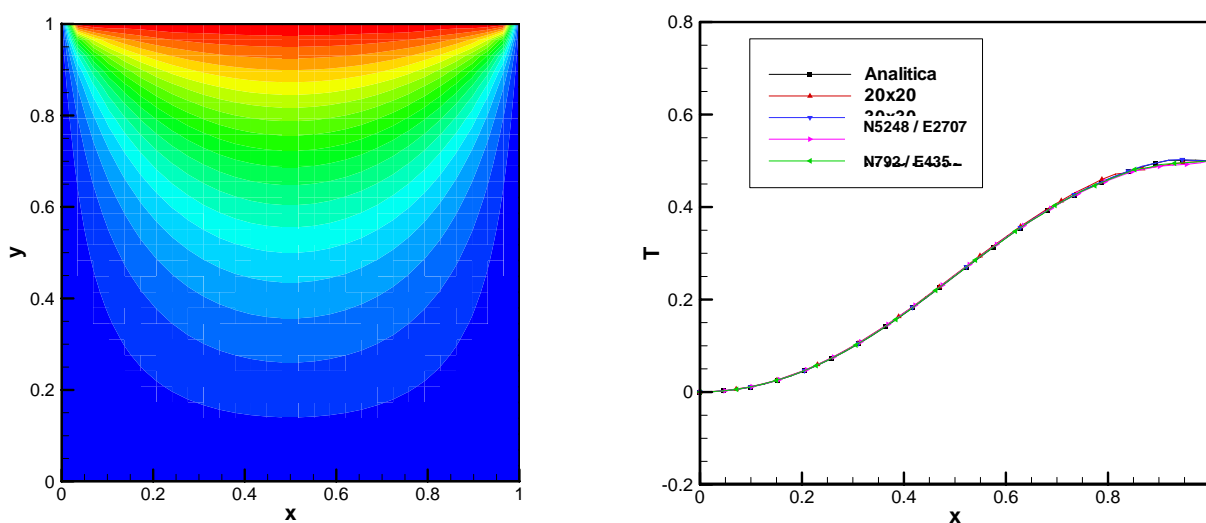


c)



d)

**Figura 4.** Tipos de mallas: a) y b) Estructurada 20x20 y 30x30, c) y d) No estructurada 5248 nodos con 2705 elementos (N5248/E2707) y 792 nodos con 435 elementos (N792/E435). x: distancia (m); y: distancia (m).



a)

b)

**Figura 5.** Resultados de conducción bidimensional (malla estructurada 30x30): a) Isotermas y b) Temperaturas en el corte diagonal A-C. T: Temperatura (°C); x: Distancia (m); y: Distancia (m).

**Transporte de humedad en madera de álamo.** Se considera el transporte bidimensional transiente de humedad en madera de álamo en una sección transversal en el plano radial-tangencial de la madera. Para el problema esquematizado en la figura 1, sus propiedades son dadas en el apéndice A, tabla A1 y figuras A1-A3. En particular, su magnitud característica se define por  $L=H=0.045$  m. Como condición inicial se considera  $M_{ini}=135\%$  y como condición de contorno: flujo nulo en los ejes de simetría ( $x=L/2$  e  $y=0$ .) y convección en las superficies  $x=0$  e  $y=H/2$ . Lo anterior según discutido en el ítem de modelo matemático del presente trabajo.

La figura 6, muestra una malla característica utilizada en las modelaciones, la cual presenta un refinamiento de tipo logarítmico hacia las superficies con convección. En dichas regiones se tienen grandes gradientes de humedad, los cuales pueden ser captados por mallas de este tipo.

La figura 7, muestra un análisis de consistencia y convergencia en relación al tipo de malla (distribución de elementos: uniforme, cosenoidal y logarítmica) para valores de humedad en el tramo CD. Se observa que las distribuciones que concentran elementos

hacia las regiones de convección se aproximan mejor a la solución convergente, lo cual se consigue con una malla logarítmica 30x30.

La figura 8 muestra curvas de secado (contenido de humedad media v/s tiempo) para diversos pasos de tiempo. Se puede apreciar soluciones convergentes para  $dt = 0.1$  horas al utilizar una malla logarítmica 30x30. Este resultado sumado a los mostrados en la figura 7 permiten concluir que una malla logarítmica de 30x30 y un paso de tiempo de 0.1 h son adecuados para obtener simulaciones convergentes. Esta malla y paso de tiempo son utilizados en la generación de resultados mostrados en las figuras 8-11.

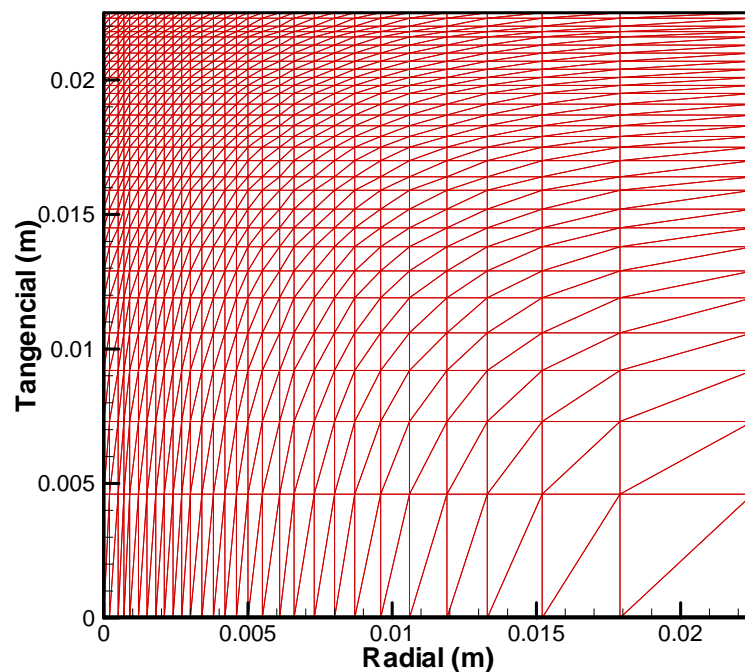
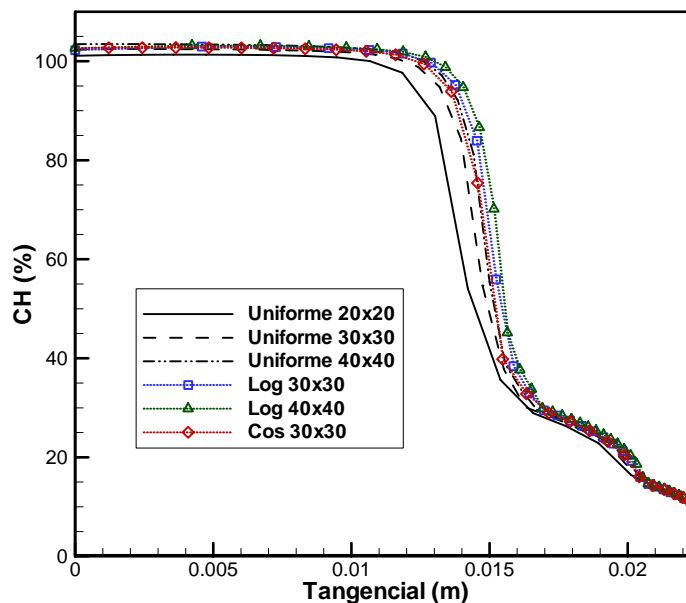
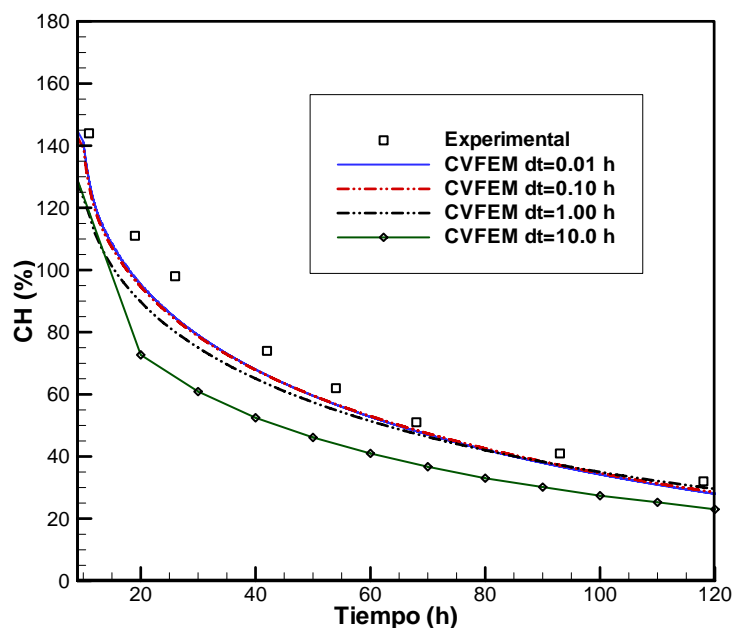


Figura 6. Malla con refinamiento logarítmico de 30x30.

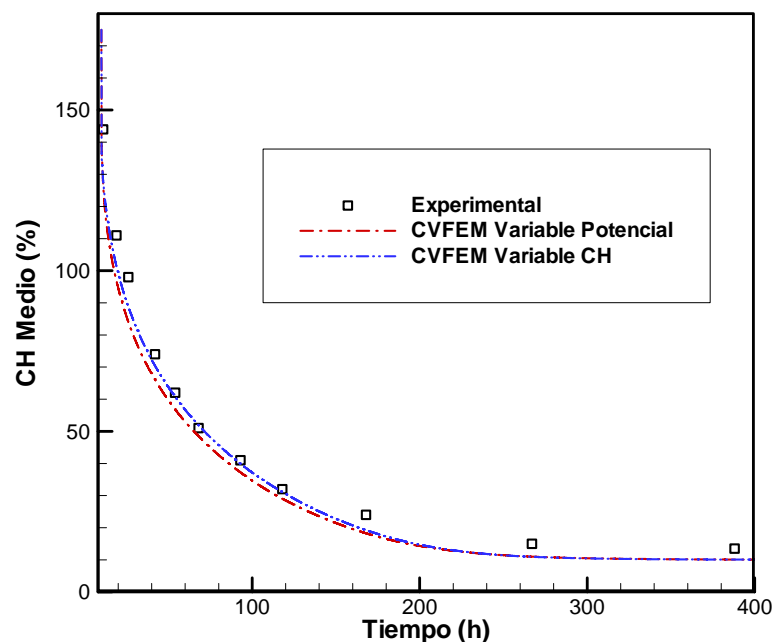


**Figura 7.** Contenido de humedad (CH) en el tramo BC v/s Tipo y tamaño de malla.

La figura 9 corresponde al gráfico de los contenidos de humedad medios v/s tiempo. En esta se muestran las curvas de secado primero, considerando la variable dependiente como el contenido de humedad (CH) y segundo considerando como variable dependiente, el potencial hídrico ( $\psi$ ). Estas dos curvas son comparadas con los datos experimentales y se observa una leve exactitud para la simulación con variable CH.



**Figura 8.** Curvas de secado v/s Paso de tiempo: Formulación Potencial,  $T=20$  (°C) Malla Log. 30x30. Fuente experimental: Cloutier *et al.* (1992) y Cloutier y Fortín (1993).



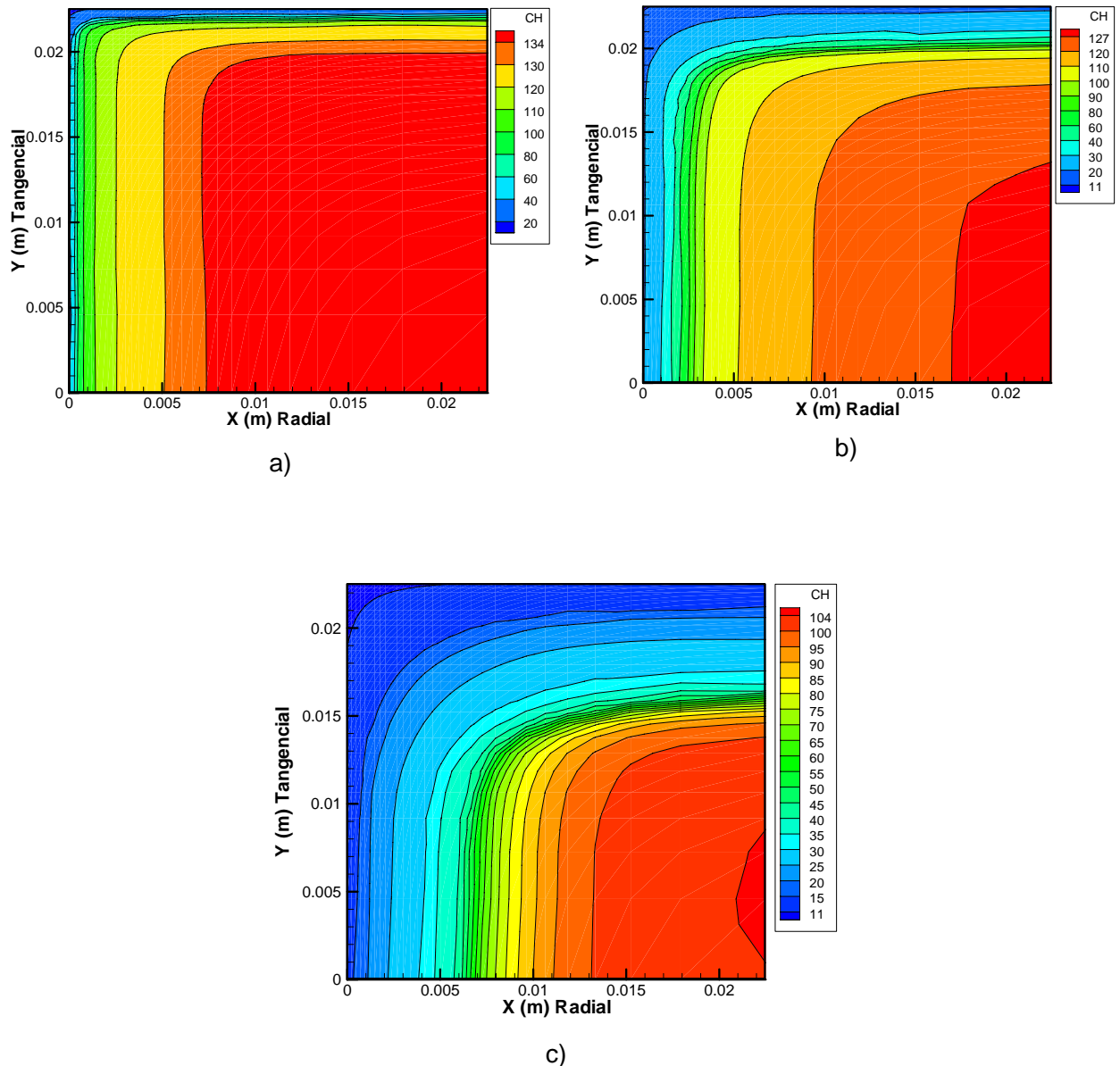
**Figura 9.** Curvas de secado v/s Tipo de formulación:  $dt=0.1$  (h) ; Malla Log 30x30 y  $T=20$  (°C). Fuente experimental: Cloutier *et al.* (1992) y Cloutier y Fortín (1993).

La figura 10, muestra detalles de distribución de humedades simuladas para  $t$  igual 1, 10 y 50 (h) de secado. Estos resultados corroboran el comportamiento y avance del frente de secado en relación a los tramos C-D y D-A en donde se aplicaron condiciones de contorno de convección y simetría (interior) para los otros dos tramos restantes. Hacia los tramos expuestos a convección se observa una mayor concentración de iso-líneas de humedad, lo cual refleja mayores gradientes en el entorno de 70 %. El comportamiento ortotrópico puede observarse en la falta de simetría polar de las iso-líneas de humedad.

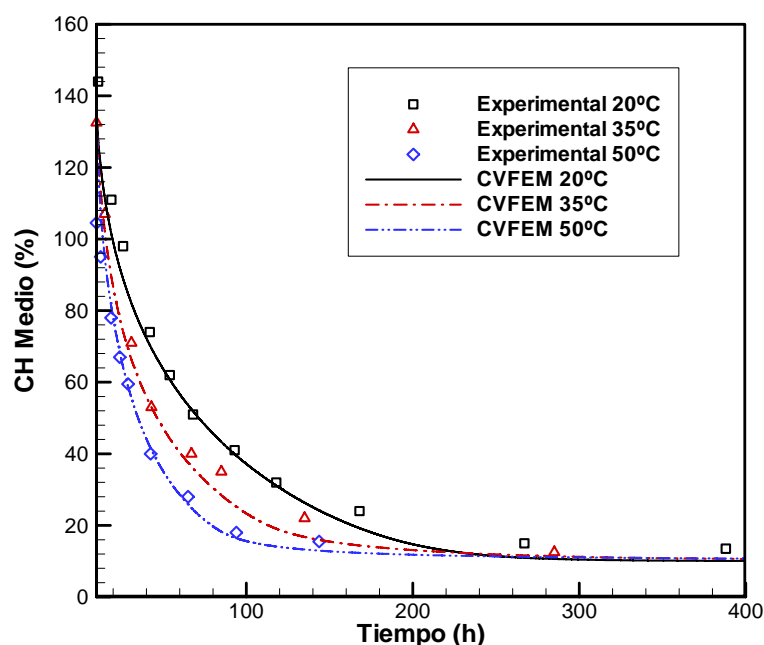
Por último, la figura 11 muestra resultados de curvas de secado obtenidas por la presente modelación, contrastada con resultados experimentales obtenidos por Cloutier *et al.* (1992). Se aprecia una buena concordancia, lo cual refleja la captación de la esencia del fenómeno físico (transporte de humedad) en estudio.

Comparando estos resultados con los obtenidos experimentalmente y numéricamente (Método de Elementos Finitos) por Cloutier *et al.* (1992), se observa similitud tanto en la forma de las curvas de distribución de humedad, como en los valores simulados. Este comportamiento permite inferir que la modelación bidimensional del secado basado en

el concepto de potencial hídrico, como fuerza inductora de la humedad interna, se ha modelado satisfactoriamente a través del presente algoritmo basado en el Método CVFEM, con la ventaja de que este último representa con mayor consistencia los fenómenos de transporte debido a sus características intrínsecas de conservación; sumado a la ventaja de su carácter no estructurado el cual le permite potencialmente abordar topologías complejas.



**Figura 10.** Distribuciones de humedad: a) 1 (h), b) 2 (h) y c) 50 (h).  
(Formulación Humedad;  $dt = 0.1$  (h) ; malla Log. 30x30 ;  $T = 20$  (°C))



**Figura 11.** Curvas de secado v/s Temperatura de secado: Formulación Humedad;  $dt = 0.1$  (h) y Malla Log 30x30. Fuente experimental: Cloutier *et al.* (1992) y Cloutier y Fortín (1993).

Finalmente, se corroboran los resultados de la simulación para el problema de difusión de humedad. En este capítulo se procedió a encontrar la solución numérica para la ecuación de Laplace mediante CVFEM y esta obedece análogamente, al mismo tipo de tratamiento numérico en comparación al problema de difusión de humedad, básicamente, se puede decir que es el mismo problema con otra variable dependiente. La difusión de temperatura en un material, produce dilataciones que se traducen en esfuerzos y/o deformaciones. De la misma manera, la difusión de humedad actúa como fuerza que induce esfuerzos y deformaciones en la madera. La hipótesis mencionada permite, en el próximo capítulo, proceder con la simulación de los esfuerzos de secado.



---

---

# CAPITULO III

---

---

## Simulación de Esfuerzos y Deformaciones

La simulación de los esfuerzos y deformaciones se basa en que estos fenómenos son inducidos por gradientes de humedad al interior de la madera, modelando su transporte según el concepto de potencial hídrico.

La modelación de los esfuerzos y deformaciones en la madera durante el proceso de secado se detallan a continuación:

### MODELO FÍSICO

Se presenta un modelo para el fenómeno físico esfuerzo/deformaciones ocasionado en una pieza de madera sólida, la cual es sometida a un proceso de secado. Se modelan los efectos transitorios no uniformes inducidos por la variación del contenido de humedad ( $M$ ). Esto es: Esfuerzos ( $s_{ij}$ ), deformaciones ( $e_{ij}$ ) y desplazamientos ( $\mathbf{u}=(u, v)$  o  $u_i$  con  $(i=1,2)$ ).

En particular, se estudia una sección transversal bidimensional de madera en el plano radial tangencial, esquematizada en la figura 12, cuyas propiedades son dadas en la tabla 2, según Cloutier *et al.* (1992). En general, se asume un proceso isotérmico para el transporte ortotrópico de humedad durante el proceso de secado y una deformación plana para el problema esfuerzo deformación producto de una deformación libre (contracción) y del fenómeno de sorción mecánica, ocasionados por un gradiente de humedad bajo el punto de saturación de la fibra (PSF).

Las condiciones iniciales y de contorno son: a) Para el problema de transporte de humedad se considera una humedad inicial  $CH=CH_{ini}$  y condiciones de contorno del tipo Neumann de flujo nulo en los ejes de simetría ( $x=L/2$  e  $y=0$ .) y convección en las superficies  $x=0$  e  $y=H/2$ , b) Para el problema tensión deformación se asume un estado inicial no deformado ( $s_{ij}=e_{ij}=u_i=0$ ) y condiciones de contorno del tipo Dirichlet en los ejes de simetría ( $u=0$  en  $x=L/2$  e  $v=0$  en  $y=0$ .) y libre en las superficies  $x=0$  e  $y=H/2$ .

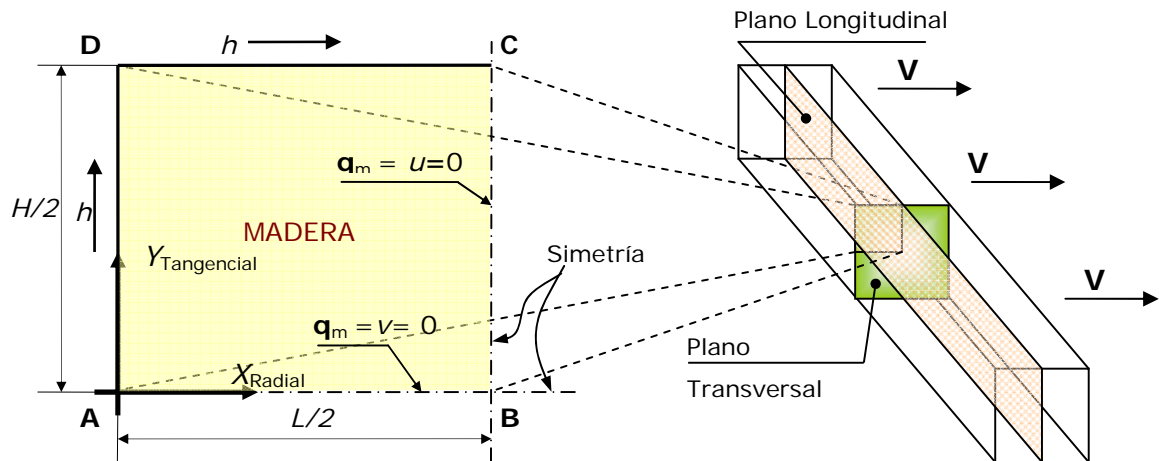


Figura 12. Plano radial/tangencial modelado de la madera.

Tabla 2: Propiedades y variables durante el secado de Madera álamo (*Populus tremuloides*). Fuente: Propiedades físicas, Cloutier *et al.* (1992).

Propiedad	Símbolo	Temperatura de Secado °C		
		20	35	50
Coeficiente convectivo masa ( $\text{kg}^2/\text{m}^2\text{s J}$ )	h	$4.43 \times 10^{-10}$	$5.82 \times 10^{-10}$	$9.36 \times 10^{-10}$
Gravedad específica	G	0.407	0.427	0.419
Modulo de elasticidad (MPa)	E	250		
Coeficiente de contracción (m/m)	$\alpha$	0.1		
Coef. de mecano sorción, creep (1/Pa)	m	$-1.0 \times 10^{-7}$		
Razón de Poisson (m/m)	$\nu$	0.25		
Contenido de humedad inicial (%)	$\text{CH}_{\text{ini}}$	135		
Contenido de humedad de equilibrio (%)	$\text{CH}_{\text{E}}$	10		
Ancho: dirección radial (m)	L	0.045		
Alto: dirección tangencial (m)	H	0.045		

## MODELO MATEMÁTICO

El modelo reológico está inspirado en los trabajos desarrollados por Ferguson (1997 y 1998). Y el creep se muestra en la ecuación (32), donde:  $\sigma$  es el esfuerzo (Pa);  $\varepsilon$  deformación (m/m);  $C$  la concentración (%);  $t$  el tiempo (s) y es descrito como:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{1}{E} \frac{\partial \sigma}{\partial t} + (\alpha + m\sigma) \frac{\partial C}{\partial t} \quad (32)$$

Al integrar (32) resulta la ecuación para la deformación total:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{1}{E} \sigma + \int_t^{t+\Delta t} (\alpha + m\sigma) \frac{\partial C}{\partial t} dt \\ \varepsilon &= \frac{1}{E} \sigma + \alpha \Delta C + m\sigma \Delta C \end{aligned} \quad (33)$$

Lo cual implica que está compuesto por deformaciones del tipo: Elástica ( $\varepsilon_e = \frac{1}{E} \sigma$ ), contracción libre ( $\varepsilon_{fs} = \alpha \Delta C$ ) y sorción mecánica  $\varepsilon_{sm} = m\sigma \Delta C$ .

El modelo matemático para la deformación bidimensional, resultado del equilibrio mecánico aplicado a cada punto en ausencia de fuerza de cuerpo, es descrito por Zienkiewicz y Taylor (2000) como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (34)$$

En términos de gradiente resulta en:

$$\nabla \sigma_i = 0 \quad \text{con } i = 1, 2 \quad (35)$$

Donde:  $\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right)$       Gradiente bidimensional

$\sigma_1 = (\sigma_{xx}, \tau_{xy})$       Esfuerzos normales en la dirección  $x$  (Pa)

$\sigma_2 = (\tau_{yx}, \sigma_{yy})$       Esfuerzos normales en la dirección  $y$  (Pa)

$\tau_{xy} = \tau_{yx}$       Esfuerzos tangenciales en el plano  $xy$ , de igual magnitud debido al estado de equilibrio (Pa)

Producto de la distribución no uniforme de humedades se producen esfuerzos inducidos por la deformación libre y por sorción mecánica. La modelación de dichos esfuerzos puede ser realizada a través de una función implícita de cinco parámetros que define una deformación inicial  $\boldsymbol{\varepsilon}^0 = \boldsymbol{\varepsilon}_{fs} + \boldsymbol{\varepsilon}_{ms}$ : contracción  $\alpha$ , coeficiente de sorción mecánica  $m$ , esfuerzo  $\sigma$ , variación de concentración  $\Delta C$  y para el caso de deformación plana, razón de Poisson  $\nu$ . Esto es:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^0 = \boldsymbol{\beta} \Delta C = \begin{cases} \left\{ \begin{array}{l} (\alpha + m\sigma_{xx}) \\ (\alpha + m\sigma_{yy}) \\ 0 \end{array} \right\} \Delta C & \text{para esfuerzo plano} \\ \left\{ \begin{array}{l} (1+\nu)(\alpha + m\sigma_{xx}) \\ (1+\nu)(\alpha + m\sigma_{yy}) \\ 0 \end{array} \right\} \Delta C & \text{para deformación plana} \end{cases} \quad (36)$$

Siendo así, los esfuerzos son determinados a partir de la siguiente expresión:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^0) + \boldsymbol{\sigma}_0 \quad (37)$$

Donde  $\boldsymbol{\sigma}_0$  representa los valores de los esfuerzos iniciales y  $\mathbf{D}$  es la matriz constitutiva del material dada por la ecuación (38).

$$\mathbf{D} = \begin{cases} \frac{1}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} E & E\nu & 0 \\ E\nu & E & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} & \text{Esfuerzo plano} \\ \frac{1}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} E(1-\nu) & E\nu & 0 \\ E\nu & E(1-\nu) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E(1-2\nu)}{2} \end{bmatrix} & \text{Deformación plana} \end{cases} \quad (38)$$

El mencionado problema puede ser integrado en el tiempo en términos discretos para efectos de implementación del Método de Deformación Inicial, Zienkiewicz y Taylor (2000). Para esto, se considera  $\Delta C$  como la variación de humedad entre el tiempo  $t_n = n^* dt$  y  $t_{n+1} = (n+1)dt$  donde  $dt$  es el intervalo de tiempo considerado. Esto es:

$\Delta C = C_{n+1} - C_n$  y de forma similar  $\Delta \sigma = \sigma_{n+1} - \sigma_n$  y  $\Delta \epsilon^0 = \epsilon_{n+1}^0 - \epsilon_n^0$ . Siendo así, se puede plantear la siguiente expresión que describe los mencionados esfuerzos en el tiempo  $t_{n+1}$  como función totalmente explícita de las variables y/o parámetros en el tiempo  $t_n$ . Esto es:

$$\sigma_{n+1} = \mathbf{D}(\epsilon_{n+1} - \epsilon_{n+1}^0) + \sigma_0 \quad \text{con} \quad \epsilon_{n+1}^0 = \epsilon_n^0 + \beta \Delta C \quad (39)$$

El modelo matemático (ecuaciones (4) y (35)) puede ser presentado en forma genérica por una Ecuación de Difusión Transiente no lineal de segundo orden donde la variable independiente es denominada como  $\phi$  (ver variables y propiedades específicas en la Tabla 2). Esto es:

$$\frac{\partial_{c_\phi} \phi}{\partial t} + \underbrace{\nabla(\vec{J})}_{\text{Flujo}} = S \quad \text{con} \quad \vec{J} = -\Gamma \nabla \phi \quad (40)$$

Donde:  $\phi$  es la variable transportada,  $t$  el tiempo (s),  $c_\phi$  la capacidad,  $\Gamma$  el coeficiente de difusión y  $S = S_0 - S_1 \phi$  el término fuente como función lineal de  $\phi$ .

Considerando un volumen como dominio ( $\forall$ ) conformado por un contorno  $\Omega = \Omega_\phi + \Omega_\sigma$  se tiene las siguientes condiciones iniciales y de contorno:

$$\phi = \begin{cases} \phi_0 \text{ para } t=0 & \text{Valor inicial} \\ \phi_\phi \text{ en } \Omega_\phi & \text{Dirichlet} \\ \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial n} \text{ en } \Omega_\sigma & \text{Neumann} \end{cases} \quad (41)$$

En la tabla 2 se resumen las variables y/o constantes que se emplean en el modelo representado por la ecuación (40)

**Tabla 2:** Variables y Propiedades de (40).

$\phi$	$\phi$	$\Gamma$	Ecuación
$CH$	$c_M$	$k_{xx} \frac{\partial CH}{\partial x} ; k_{yy} \frac{\partial CH}{\partial y}$	Humedad
$u_i$	$0$	$D_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$	Desplazamiento

## MODELO NUMÉRICO

En esta sección se muestra en detalle el modelo numérico aplicado a la ecuación de desplazamientos directamente relacionado con el problema esfuerzo/deformación. Una discusión similar fue realizada en el Capítulo II para el problema de transporte de humedad, ecuación (4). En consecuencia, la integral de (35) en el dominio  $\forall$ , de acuerdo con el Teorema de Green, es igual a la divergencia del flujo en el contorno  $\Omega$ .

Esto es:

$$\int_{\forall} \nabla \sigma_i d\forall = \int_{\Omega} (\sigma_i \cdot \hat{\mathbf{n}}) ds = 0 \quad (42)$$

Donde:  $\sigma_i$  Esfuerzos con  $i=1,2$ : Dirección del esfuerzos en x e y resp.

$\forall$  Volumen de control

$\Omega$  Contorno de  $\forall$

$\hat{\mathbf{n}}$  Vector unitario normal externo a  $\Omega$

Si se considera el dominio  $\forall$  conformado por  $nl$  Volúmenes Finitos (VF) ( $\forall^l$  con  $(l=1, nl)$ ) de contorno  $\Omega^l$  y de forma similar cada VF es conformado por  $nk$  contribuciones parciales de Elementos Finitos (EF) de contorno  $\Omega_k^l$  con  $(k=1, nk)$ , ver figura 1, se puede escribir:

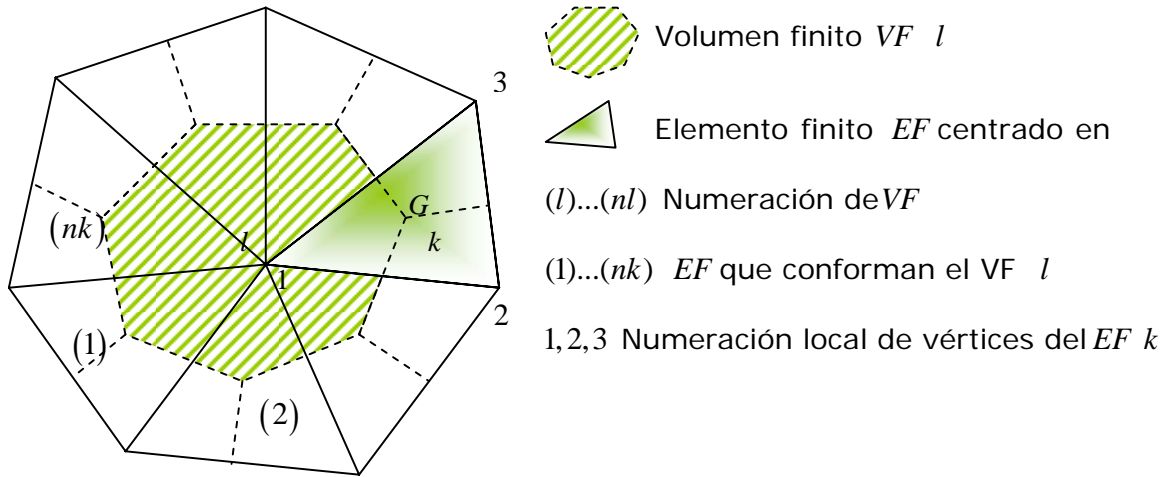
$$\begin{aligned} \forall &= \sum_{l=1}^{nl} \forall^l \quad \text{con} \quad \forall^l = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{nk} \forall_{EF_k}^l \\ \Omega &= \sum_{l=1}^{nl} \Omega^l \quad \text{con} \quad \Omega^l = \sum_{k=1}^{nk} \Omega_k^l \end{aligned} \quad (43)$$

Ahora la ecuación diferencial originalmente planteada para el dominio  $\forall$  también es válida para los subdominios  $\forall^l$  con  $(l=1, nl)$ . Esto último es el fundamento que permite resolver en términos discretos de acuerdo con el Método de Volúmenes Finitos. La ecuación diferencial en cuestión conlleva a plantear dos ecuaciones algebraicas para cada subdominio (esfuerzos en x e y) cuya resolución conjunta (sistema de ecuaciones) permite obtener valores discretos de la variable independiente involucrada (Desplazamientos). Esto es:

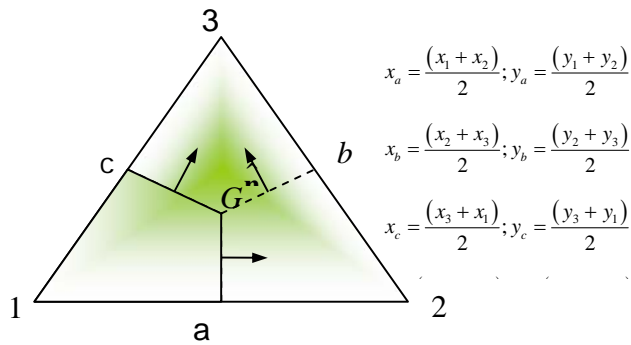
$$\int_{\Omega^l} (\sigma_i \cdot \hat{\mathbf{n}}) ds = 0 \quad \text{con} \quad (l=1, nl) ; (i=1,2) \quad (44)$$

Donde  $\sigma_i$ ,  $\hat{\mathbf{n}}$  y  $\Omega^l$  como definidos en (42) y (43).

Cada  $VF$  está formado por contribuciones parciales de  $nk$   $EF$  (figura 13). Siendo así, las contribuciones parciales difusivas del  $EF$   $k$  a los  $VF$  centrados en los nodos locales 1, 2 y 3 ( $l_1$ ,  $l_2$  y  $l_3$  respectivamente) se pueden escribir como:



**Figura 13.** Volumen Finito  $l$  conformado por  $nk$  Elementos Finitos.



**Figura 14.** Elemento finito triangular  $k$  de nodos. 1,2 y 3 centroide  $G$  y media de los lados  $a$ ,  $b$  y  $c$ , el cual contribuye parcialmente a la formación tres  $VF$  ( $\nabla^1$ ,  $\nabla^2$  y  $\nabla^3$ ).

$$\int_{\Omega_k^1} (\sigma_i \cdot \hat{\mathbf{n}}) ds = \int_{\Omega_a^1} (\sigma_i \cdot \hat{\mathbf{n}}) ds + \int_{\Omega_c^1} (\sigma_i \cdot \hat{\mathbf{n}}) ds \quad (45)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{(c_k^1)_i}$

$$\int_{\Omega_k^2} (\sigma_i \cdot \hat{\mathbf{n}}) ds = \int_{\Omega_a^2} (\sigma_i \cdot \hat{\mathbf{n}}) ds + \int_{\Omega_b^2} (\sigma_i \cdot \hat{\mathbf{n}}) ds \quad (46)$$

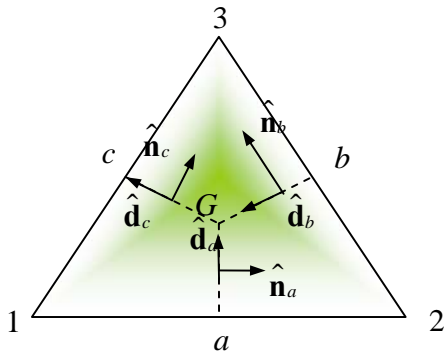
$\underbrace{\hspace{10em}}_{(c_k^2)_i}$



$$\int_{\Omega_k^{\text{I}^3}} (\sigma_i \cdot \hat{\mathbf{n}}) ds = \int_{\Omega_{k_b}^{\text{I}^3}} (\sigma_i \cdot \hat{\mathbf{n}}) ds + \int_{\Omega_{k_c}^{\text{I}^3}} (\sigma_i \cdot \hat{\mathbf{n}}) ds \quad (47)$$

Donde el subíndice  $a$ ,  $b$  y  $c$  representa los segmentos de contorno  $\overline{aG}$ ,  $\overline{bG}$  y  $\overline{cG}$  respectivamente (figura 15). Siendo así, los vectores normales a cada segmento pueden ser definidos como:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{n}}_a &= \mathbf{n}_a / \overline{aG} = (n_{ax}, n_{ay}) / \overline{aG} = (y_G - y_a, x_a - x_G) / \overline{aG} \\ \hat{\mathbf{n}}_b &= \mathbf{n}_b / \overline{bG} = (n_{bx}, n_{by}) / \overline{bG} = (y_G - y_b, x_b - x_G) / \overline{bG} \\ \hat{\mathbf{n}}_c &= \mathbf{n}_c / \overline{cG} = (n_{cx}, n_{cy}) / \overline{cG} = (y_c - y_G, x_G - x_c) / \overline{cG} \end{aligned} \quad (48)$$



$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{d}}_a &= \frac{(\mathbf{x}_G - \mathbf{x}_a)}{\overline{aG}} ; \hat{\mathbf{n}}_a = \hat{\mathbf{d}}_a \times \hat{\mathbf{k}} \\ \hat{\mathbf{d}}_b &= \frac{(\mathbf{x}_G - \mathbf{x}_b)}{\overline{bG}} ; \hat{\mathbf{n}}_b = \hat{\mathbf{d}}_b \times \hat{\mathbf{k}} \\ \hat{\mathbf{d}}_c &= \frac{(\mathbf{x}_c - \mathbf{x}_G)}{\overline{cG}} ; \hat{\mathbf{n}}_c = \hat{\mathbf{d}}_c \times \hat{\mathbf{k}} \end{aligned}$$

**Figura 15.** Definición de normales a los segmentos  $\overline{aG}$ ,  $\overline{bG}$ ,  $\overline{cG}$

Si se considera el valor de  $\sigma_i$  en el punto medio de cada segmento de contorno igual a  $\overline{\sigma}_i$  como predominante en el mencionado segmento e incorporando las definiciones para  $\sigma_i$  y  $\hat{\mathbf{n}}$  dadas en (35) y (48) respectivamente se tiene:

$$\begin{aligned} (C_{k_a}^{I_1})_i &= \overline{\sigma}_{i_a} \cdot \mathbf{n}_a \\ (C_{k_c}^{I_1})_i &= \overline{\sigma}_{i_c} \cdot \mathbf{n}_c \\ (C_{k_b}^{I_2})_i &= \overline{\sigma}_{i_b} \cdot \mathbf{n}_b \\ (C_{k_a}^{I_2})_i &= -(C_{k_a}^{I_1})_i \\ (C_{k_b}^{I_3})_i &= -(C_{k_b}^{I_2})_i \\ (C_{k_c}^{I_3})_i &= -(C_{k_c}^{I_1})_i \end{aligned} \quad (49)$$

Ahora incorporando las definiciones de  $\sigma_i$  dadas en (35) se obtiene:

$$\begin{aligned}
 (C_{k_a}^I)_1 &= \overline{\sigma}_{1_a} \cdot \mathbf{n}_a = \overline{\sigma}_{xx_a} n_{ax} + \overline{\tau}_{xy_a} n_{ay} \\
 (C_{k_a}^I)_2 &= \overline{\sigma}_{2_a} \cdot \mathbf{n}_a = \overline{\tau}_{yx_a} n_{ax} + \overline{\sigma}_{yy_a} n_{ay} \\
 (C_{k_c}^I)_1 &= \overline{\sigma}_{1_c} \cdot \mathbf{n}_c = \overline{\sigma}_{xx_c} n_{cx} + \overline{\tau}_{xy_c} n_{cy} \\
 (C_{k_c}^I)_2 &= \overline{\sigma}_{2_c} \cdot \mathbf{n}_c = \overline{\tau}_{yx_c} n_{cx} + \overline{\sigma}_{yy_c} n_{cy} \\
 (C_{k_b}^{I_2})_1 &= \overline{\sigma}_{1_b} \cdot \mathbf{n}_b = \overline{\sigma}_{xx_b} n_{bx} + \overline{\tau}_{xy_b} n_{by} \\
 (C_{k_b}^{I_2})_2 &= \overline{\sigma}_{2_b} \cdot \mathbf{n}_b = \overline{\tau}_{yx_b} n_{bx} + \overline{\sigma}_{yy_b} n_{by}
 \end{aligned} \tag{50}$$

Por otro lado, redefiniendo las tensiones  $\sigma_i$  en funciones de las deformaciones lineales  $\varepsilon_{ii}$  y angulares  $\gamma_{ij}$  como:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx} &= D_{11}\varepsilon_{xx} + D_{12}\varepsilon_{yy} + \sigma_{xx_0} \quad \text{con} \quad \sigma_{xx_0} = -(D_{11}\varepsilon_{xx_0} + D_{12}\varepsilon_{yy_0}) \\
 \sigma_{yy} &= D_{21}\varepsilon_{xx} + D_{22}\varepsilon_{yy} + \sigma_{yy_0} \quad \text{con} \quad \sigma_{yy_0} = -(D_{21}\varepsilon_{xx_0} + D_{22}\varepsilon_{yy_0}) \\
 \tau_{xy} &= D_{33}\gamma_{xy} + \tau_{xy_0} \quad \text{con} \quad \tau_{xy_0} = -D_{33}\gamma_{xy_0}
 \end{aligned} \tag{51}$$

Donde:

$$D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{21} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{33} \end{bmatrix} \text{ Matriz Elástica}$$

$$\sigma_{xx_0}, \sigma_{yy_0} \text{ y } \tau_{xy_0} \quad \text{Esfuerzos por deformaciones iniciales}$$

La matriz elástica  $D$ , que es la matriz constitutiva de las propiedades elásticas del material adopta su forma de acuerdo a: Si la modelación considera esfuerzo o deformación plana. Esto se describe en la ecuación (38):

Luego, las deformaciones  $\varepsilon_{ii}$  y  $\gamma_{ij}$  son descritas en función del desplazamiento  $\mathbf{u} = (u, v)$

$$\text{como: } \varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} ; \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} ; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \text{ Zienkiewicz y Taylor (2000).}$$

Se tiene:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx} &= D_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + D_{12} \frac{\partial v}{\partial y} + \sigma_{xx_0} \\
 \sigma_{yy} &= D_{21} \frac{\partial u}{\partial x} + D_{22} \frac{\partial v}{\partial y} + \sigma_{yy_0} \\
 \tau_{xy} &= D_{33} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \tau_{xy_0}
 \end{aligned} \tag{52}$$

Incorporando estas definiciones en (50) se obtiene:

$$\begin{aligned}
 (C_{k_a}^I)_1 &= \left( D_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + D_{12} \frac{\partial v}{\partial y} \right)_a n_{ax} + \left( D_{33} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right)_a n_{ay} + (\sigma_{xx_0} n_{ax} + \tau_{xy_0} n_{ay})_a \\
 (C_{k_a}^I)_2 &= \left( D_{33} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right)_a n_{ax} + \left( D_{21} \frac{\partial u}{\partial x} + D_{22} \frac{\partial v}{\partial y} \right)_a n_{ay} + (\tau_{xy_0} n_{ax} + \sigma_{yy_0} n_{ay})_a \\
 (C_{k_c}^I)_1 &= \left( D_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + D_{12} \frac{\partial v}{\partial y} \right)_c n_{cx} + \left( D_{33} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right)_c n_{cy} + (\sigma_{xx_0} n_{cx} + \tau_{xy_0} n_{cy})_c \\
 (C_{k_c}^I)_2 &= \left( D_{33} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right)_c n_{cx} + \left( D_{21} \frac{\partial u}{\partial x} + D_{22} \frac{\partial v}{\partial y} \right)_c n_{cy} + (\tau_{xy_0} n_{cx} + \sigma_{yy_0} n_{cy})_c \\
 (C_{k_b}^I)_1 &= \left( D_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + D_{12} \frac{\partial v}{\partial y} \right)_b n_{bx} + \left( D_{33} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right)_b n_{by} + (\sigma_{xx_0} n_{bx} + \tau_{xy_0} n_{by})_b \\
 (C_{k_b}^I)_2 &= \left( D_{33} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right)_b n_{bx} + \left( D_{21} \frac{\partial u}{\partial x} + D_{22} \frac{\partial v}{\partial y} \right)_b n_{by} + (\tau_{xy_0} n_{bx} + \sigma_{yy_0} n_{by})_b
 \end{aligned} \tag{53}$$

Para la integración anterior se define una variación lineal  $\mathbf{u}$  al interior del EF, es decir:

$$\mathbf{u}(x, y) = \mathbf{A}x + \mathbf{B}y + \mathbf{C} \tag{54}$$

Donde  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  son los vectores de componentes constantes iguales a  $(A_u, A_v)$ ;  $(B_u, B_v)$ ;  $(C_u, C_v)$  respectivamente. Dichas constantes son definidas en función de los valores nodales  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$  y  $\mathbf{u}_3$ , lo cual plantea el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u}_1(x_1, y_1) &= \mathbf{A}x_1 + \mathbf{B}y_1 + \mathbf{C} \\
 \mathbf{u}_2(x_2, y_2) &= \mathbf{A}x_2 + \mathbf{B}y_2 + \mathbf{C} \\
 \mathbf{u}_3(x_3, y_3) &= \mathbf{A}x_3 + \mathbf{B}y_3 + \mathbf{C}
 \end{aligned} \tag{55}$$

Resolviendo el sistema (55) se tiene:

$$\mathbf{A} = \frac{y_2 - y_3}{D} \mathbf{u}_1 + \frac{y_3 - y_1}{D} \mathbf{u}_2 + \frac{y_1 - y_2}{D} \mathbf{u}_3 \tag{56}$$

$$\mathbf{B} = \frac{x_3 - x_2}{D} \mathbf{u}_1 + \frac{x_1 - x_3}{D} \mathbf{u}_2 + \frac{x_2 - x_1}{D} \mathbf{u}_3 \tag{57}$$

$$\mathbf{C} = \frac{x_2 y_3 - x_3 y_2}{D} \mathbf{u}_1 + \frac{x_3 y_1 - x_1 y_3}{D} \mathbf{u}_2 + \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{D} \mathbf{u}_3 \tag{58}$$

$$D = (x_1 - x_2)(y_2 - y_3) - (x_2 - x_3)(y_1 - y_2) \tag{59}$$

De acuerdo con (54) las derivadas parciales de los desplazamientos requeridos en (53)

son iguales a:  $\frac{\partial u}{\partial x} = A_u$ ;  $\frac{\partial u}{\partial y} = B_u$ ;  $\frac{\partial v}{\partial x} = A_v$ ;  $\frac{\partial v}{\partial y} = B_v$

Incorporando estas definiciones en (53) se tiene que:

$$\begin{aligned}
 (C_{k_a}^I)_1 &= (D_{11}A_u + D_{12}B_v)_a n_{ax} + (D_{33}(B_u + A_v))_a n_{ay} + (\sigma_{xx_0} n_{ax} + \tau_{xy_0} n_{ay})_a \\
 (C_{k_a}^I)_2 &= (D_{33}(B_u + A_v))_a n_{ax} + (D_{21}A_u + D_{22}B_v)_a n_{ay} + (\tau_{xy_0} n_{ax} + \sigma_{yy_0} n_{ay})_a \\
 (C_{k_c}^I)_1 &= (D_{11}A_u + D_{12}B_v)_c n_{cx} + (D_{33}(B_u + A_v))_c n_{cy} + (\sigma_{xx_0} n_{cx} + \tau_{xy_0} n_{cy})_c \\
 (C_{k_c}^I)_2 &= (D_{33}(B_u + A_v))_c n_{cx} + (D_{21}A_u + D_{22}B_v)_c n_{cy} + (\tau_{xy_0} n_{cx} + \sigma_{yy_0} n_{cy})_c \\
 (C_{k_b}^I)_1 &= (D_{11}A_u + D_{12}B_v)_b n_{bx} + (D_{33}(B_u + A_v))_b n_{by} + (\sigma_{xx_0} n_{bx} + \tau_{xy_0} n_{by})_b \\
 (C_{k_b}^I)_2 &= (D_{33}(B_u + A_v))_b n_{bx} + (D_{21}A_u + D_{22}B_v)_b n_{by} + (\tau_{xy_0} n_{bx} + \sigma_{yy_0} n_{by})_b
 \end{aligned} \tag{60}$$

Según las definiciones dadas para **A**, **B** y **C** en (54) las componentes  $A_u$ ,  $A_v$ ,  $B_u$  y  $B_v$  son iguales a:

$$\begin{aligned}
 A_u &= \frac{y_2 - y_3}{D} u_1 + \frac{y_3 - y_1}{D} u_2 + \frac{y_1 - y_2}{D} u_3 \\
 A_v &= \frac{y_2 - y_3}{D} v_1 + \frac{y_3 - y_1}{D} v_2 + \frac{y_1 - y_2}{D} v_3 \\
 B_u &= \frac{x_3 - x_2}{D} u_1 + \frac{x_1 - x_3}{D} u_2 + \frac{x_2 - x_1}{D} u_3 \\
 B_v &= \frac{x_3 - x_2}{D} v_1 + \frac{x_1 - x_3}{D} v_2 + \frac{x_2 - x_1}{D} v_3
 \end{aligned} \tag{61}$$

Introduciendo estas definiciones (61) en (60), las contribución  $(C_{k_a}^I)_1$  y  $(C_{k_a}^I)_2$  pueden ser expresadas en función de los valores nodales de desplazamiento. Esto es:

$$\begin{aligned}
 (C_{k_a}^I)_1 &= u_1 \underbrace{\left( D_{11} n_{ax} \frac{y_2 - y_3}{D} + D_{33} n_{ay} \frac{x_3 - x_2}{D} \right)}_{(a_{u1}^I)_1} + u_2 \underbrace{\left( D_{11} n_{ax} \frac{y_3 - y_1}{D} + D_{33} n_{ay} \frac{x_1 - x_3}{D} \right)}_{(a_{u2}^I)_1} \\
 &+ u_3 \underbrace{\left( D_{11} n_{ax} \frac{y_1 - y_2}{D} + D_{33} n_{ay} \frac{x_2 - x_1}{D} \right)}_{(a_{u3}^I)_1} + v_1 \underbrace{\left( D_{12} n_{ax} \frac{x_3 - x_2}{D} + D_{33} n_{ay} \frac{y_2 - y_3}{D} \right)}_{(a_{v1}^I)_1} \\
 &+ v_2 \underbrace{\left( D_{12} n_{ax} \frac{x_1 - x_3}{D} + D_{33} n_{ay} \frac{y_3 - y_1}{D} \right)}_{(a_{v2}^I)_1} + v_3 \underbrace{\left( D_{12} n_{ax} \frac{x_2 - x_1}{D} + D_{33} n_{ay} \frac{y_1 - y_2}{D} \right)}_{(a_{v3}^I)_1} \\
 &+ \underbrace{(\sigma_{xx_0} n_{ax} + \tau_{xy_0} n_{ay})}_{(a^I)_1}
 \end{aligned} \tag{62}$$

$$\begin{aligned}
 (C_{k_a}^l)_2 &= \underbrace{\left( \frac{x_3 - x_2}{D} D_{33} n_{ax} + \frac{y_2 - y_3}{D} D_{21} n_{ay} \right)}_{(a_{u1}^l)_2} u_1 + \underbrace{\left( \frac{x_1 - x_3}{D} D_{33} n_{ax} + \frac{y_3 - y_1}{D} D_{21} n_{ay} \right)}_{(a_{u2}^l)_2} u_2 \\
 &+ \underbrace{\left( \frac{x_2 - x_1}{D} D_{33} n_{ax} + \frac{y_1 - y_2}{D} D_{21} n_{ay} \right)}_{(a_{u3}^l)_2} u_3 + \underbrace{\left( \frac{y_2 - y_3}{D} D_{33} n_{ax} + \frac{x_3 - x_2}{D} D_{22} n_{ay} \right)}_{(a_{v1}^l)_2} v_1 \\
 &+ \underbrace{\left( \frac{y_3 - y_1}{D} D_{33} n_{ax} + \frac{x_1 - x_3}{D} D_{22} n_{ay} \right)}_{(a_{v2}^l)_2} v_2 + \underbrace{\left( \frac{y_1 - y_2}{D} D_{33} n_{ax} + \frac{x_2 - x_1}{D} D_{22} n_{ay} \right)}_{(a_{v3}^l)_2} v_3 \\
 &+ \underbrace{\left( \tau_{xy_0} n_{ax} + \sigma_{yy_0} n_{ay} \right)}_{(a^l)_2}
 \end{aligned} \tag{63}$$

Expresiones análogas a las contribuciones del segmento  $\overline{aG}$  iguales a  $(C_{k_a}^l)_i$  ( $i=1,2$ ), dadas por las ecuaciones (62) y (63), de los segmentos  $\overline{bG}$  y  $\overline{cG}$  iguales a  $(C_{k_b}^l)_i$  y  $(C_{k_c}^l)_i$  pueden ser obtenidas simplemente intercambiando el vector normal  $\mathbf{n}_a$  por  $\mathbf{n}_b$  ó  $\mathbf{n}_c$  según corresponda.

Luego, recuperando las definiciones dadas en (45)-(47), considerando las equivalencias mostradas por (49) e incorporando los desarrollos de (62) y (63) se pueden escribir las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 (C_k^l)_i &= u_1 \left( (a_{u1}^l)_i + (c_{u1}^l)_i \right) + u_2 \left( (a_{u2}^l)_i + (c_{u2}^l)_i \right) + u_3 \left( (a_{u3}^l)_i + (c_{u3}^l)_i \right) \\
 &+ v_1 \left( (a_{v1}^l)_i + (c_{v1}^l)_i \right) + v_2 \left( (a_{v2}^l)_i + (c_{v2}^l)_i \right) + v_3 \left( (a_{v3}^l)_i + (c_{v3}^l)_i \right) + \left( (a^l)_i + (c^l)_i \right)
 \end{aligned} \tag{64}$$

$$\begin{aligned}
 (C_k^{l2})_i &= u_1 \left( (b_{u1}^{l2})_i - (a_{u1}^l)_i \right) + u_2 \left( (b_{u2}^{l2})_i - (a_{u2}^l)_i \right) + u_3 \left( (b_{u3}^{l2})_i - (a_{u3}^l)_i \right) \\
 &+ v_1 \left( (b_{v1}^{l2})_i - (a_{v1}^l)_i \right) + v_2 \left( (b_{v2}^{l2})_i - (a_{v2}^l)_i \right) + v_3 \left( (b_{v3}^{l2})_i - (a_{v3}^l)_i \right) + \left( (b^{l2})_i - (a^l)_i \right)
 \end{aligned} \tag{65}$$

$$\begin{aligned}
 (C_k^{l3})_i &= -u_1 \left( (b_{u1}^{l2})_i + (c_{u1}^l)_i \right) - u_2 \left( (b_{u2}^{l2})_i + (c_{u2}^l)_i \right) - u_3 \left( (b_{u3}^{l2})_i + (c_{u3}^l)_i \right) \\
 &- v_1 \left( (b_{v1}^{l2})_i + (c_{v1}^l)_i \right) - v_2 \left( (b_{v2}^{l2})_i + (c_{v2}^l)_i \right) - v_3 \left( (b_{v3}^{l2})_i + (c_{v3}^l)_i \right) - \left( (b^{l2})_i + (c^l)_i \right)
 \end{aligned} \tag{66}$$

Siendo de esta forma, para  $k=1$ ,  $nk$  EF que conforman un VF  $\forall^l$  con  $l=1, n_l$  se puede escribir el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^{nk} (C_k^l)_1 &= 0 \\ \sum_{k=1}^{nk} (C_k^l)_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ con } l=1, nl \quad (67)$$

Sistema acoplado  $2 \times nl$  ecuaciones algebraicas para valores de desplazamientos nodales  $\mathbf{u} = (u, v)$  del tipo:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^{nl} a_{i,j}^u u_j &= b_j^u \\ \sum_{j=1}^{nl} a_{i,j}^v v_j &= b_j^v \end{aligned} \right\} \text{ con } i=1, nl \quad (68)$$

De esta forma, para cada valor  $l$  se obtendrá una ecuación algebraica formulada para el valor medio de desplazamiento  $\mathbf{u}$  en cada subdominio  $\forall^l$ , configurando un sistema lineal de  $2nl \times 2nl$  ecuaciones de la forma  $[\mathbf{A}]\{\mathbf{u}\} = \{\mathbf{S}\}$ , el cual no puede ser resuelto por métodos iterativos debido que la matriz de coeficientes no presenta una estructura dominante en su diagonal principal. Se requiere, en este caso un mayor recurso computacional para utilizar un método de solución directa. En este trabajo, el sistema de ecuaciones lineales (68) es resuelto a través del método directo de Eliminación Gauss, según Lapidus y Pinder (1982).

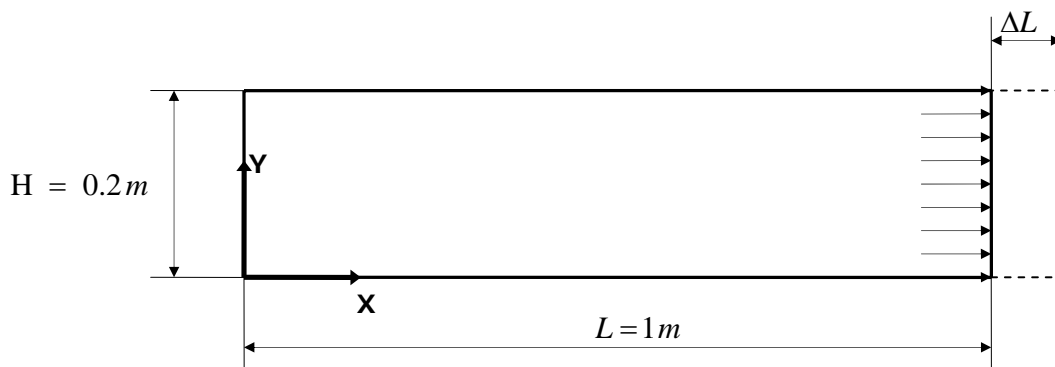
## RESULTADOS Y DISCUSIONES

Con el objetivo de validar el código computacional desarrollado a partir de las ecuaciones descritas anteriormente, se plantean los siguientes problemas.

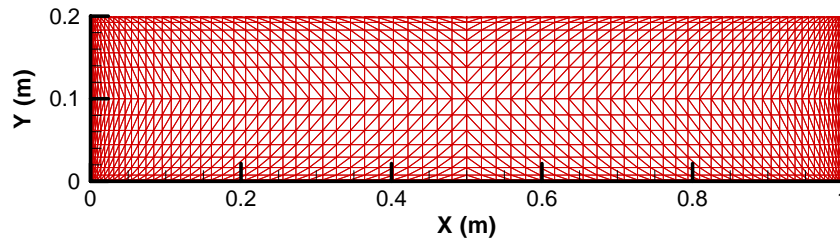
**Placa plana de acero sometida a tracción.** Se considera la simulación del problema esfuerzo/deformación de una placa plana de acero al carbono A36, cuyas propiedades son dadas en la tabla 3. Sus características geométricas ( $H=0.2$  [m] y  $L=1.0$  [m]), físicas (D: Matriz elástica constitutiva) y condiciones de contorno (Dirichlet: Valor impuesto de desplazamiento  $\Delta L=0.001$  [m] en  $x = L$ ) son esquematizados en la figura 16.

**Tabla 3:** Propiedades del Acero ASTM A-36 (Estructural).

Material	ASTM A-36 (Estructural)
Módulo de Elasticidad Longitudinal (E)	210 MPa
Módulo de Elasticidad Transversal (G)	84 MPa
Resistencia a la Tensión	400-500 MPa
Resistencia a la Fluencia	250 MPa
Razón de Poisson	0.33



**Figura 16.** Cavidad bidimensional con condición de Dirichlet.



**Figura 17.** Malla uniforme con refinamiento cosenooidal de 81x17 nodos.

El problema es resuelto a través del software comercial ALGOR y se compara con los resultados entregados por el programa que se implementó en CVFEM. Los resultados se muestran en forma gráfica bidimensional para los desplazamientos, deformaciones y esfuerzos del problema. Estos son presentados en las figuras 18-27. De la misma forma las Tablas 4 y 5 contienen un resumen comparativo de valores característicos de los mismos.

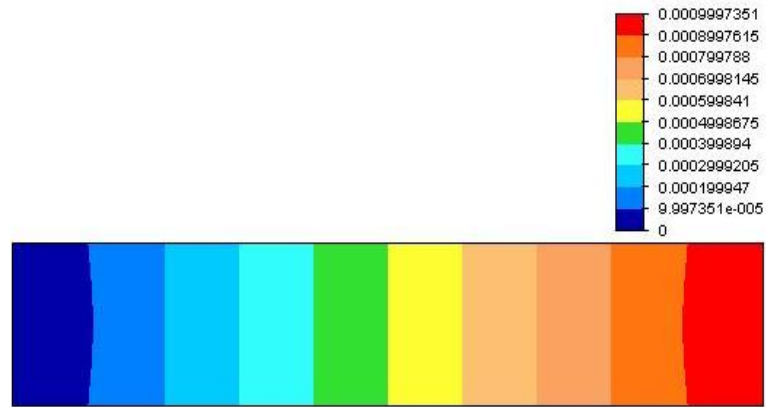


Figura 18. Desplazamientos en dirección  $x$  usando ALGOR

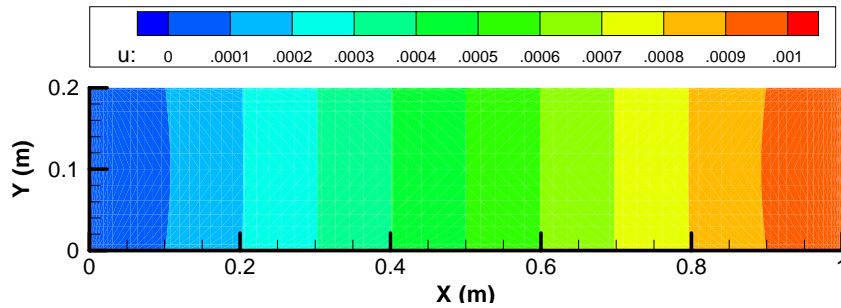


Figura 19. Desplazamientos en dirección  $x$  con CVMFEM. Malla 81x17 nodos

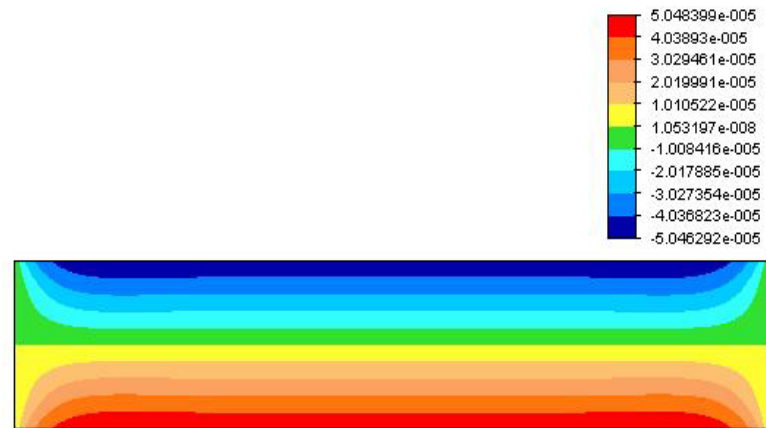


Figura 20. Desplazamientos en dirección  $y$  a través de ALGOR

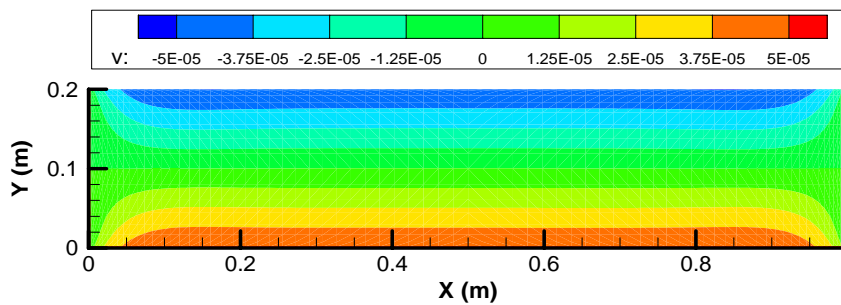


Figura 21. Desplazamientos dirección  $y$  con CVMFEM. Malla 81x17 nodos



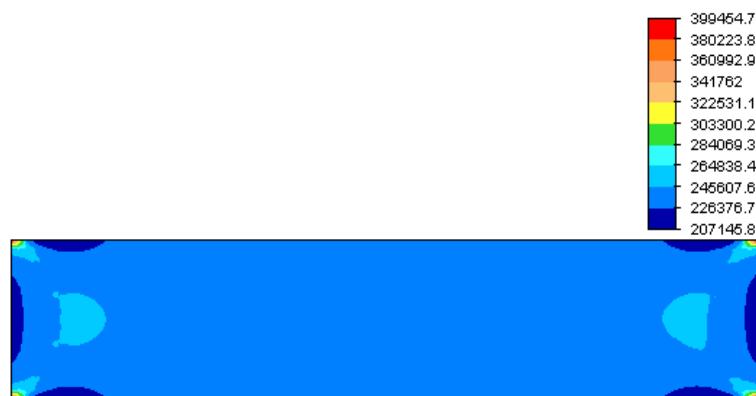


Figura 22. Esfuerzos normales en dirección  $x$  ( $\sigma_{xx}$ ) a través de ALGOR

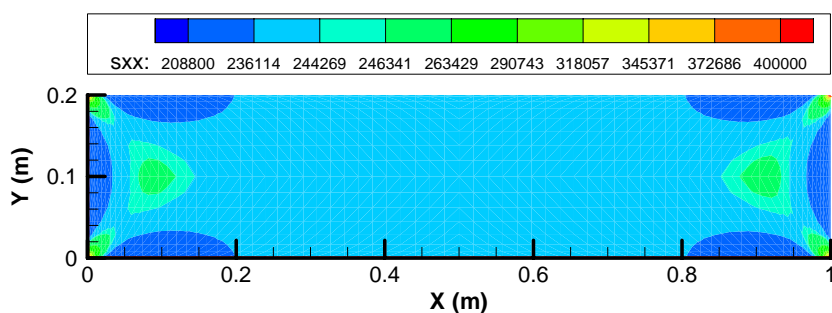


Figura 23. Esfuerzos normales en dirección  $x$  ( $\sigma_{xx}$ ) con CVFEM. Malla 81x17 nodos



Figura 24. Esfuerzos normales en dirección  $y$  ( $\sigma_{yy}$ ) a través de ALGOR

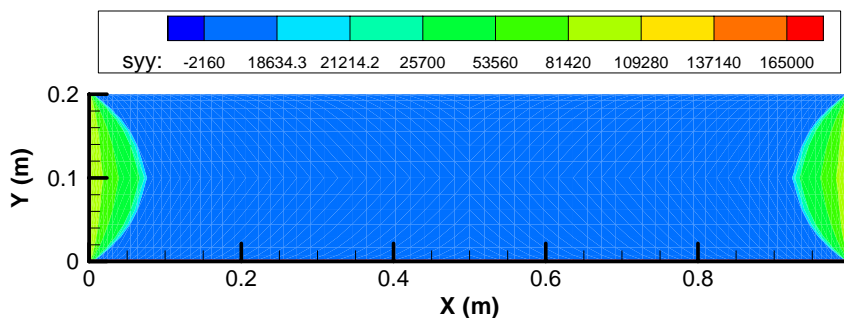


Figura 25. Esfuerzos normales en dirección  $y$  ( $\sigma_{yy}$ ) con CVFEM. Malla 81x17 nodos

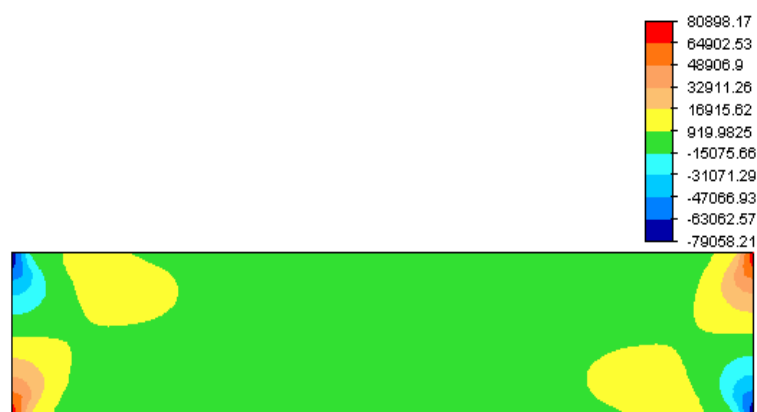


Figura 26. Esfuerzos tangenciales en plano  $xy$  ( $\tau_{xy}$ ) a través de ALGOR

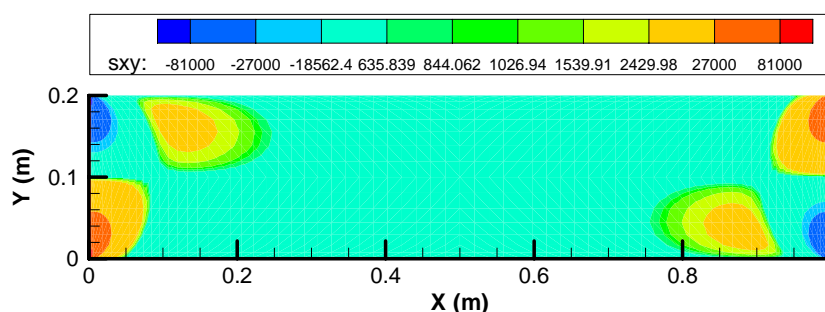


Figura 27. Esfuerzos tangenciales en plano  $xy$  ( $\tau_{xy}$ ) con CVFEM. Malla 81x17 nodos

Tabla 4. Cuadro comparativo de valores característicos de la simulación (Desplazamientos)

DESPLAZAMIENTO	ALGOR [m]	CVFEM [m]	DESVIACIÓN [%]
$u_{min}$	0	0	0
$u_{max}$	$9.997 \times 10^{-04}$	$1.000 \times 10^{-03}$	0.03
$v_{min}$	$-5.046 \times 10^{-05}$	$-5.146 \times 10^{-05}$	1.98
$v_{max}$	$5.048 \times 10^{-05}$	$5.114 \times 10^{-05}$	1.30

Tabla 5. Cuadro comparativo de valores característicos de la simulación (Esfuerzos normales promedios en  $y=H/2$ . Malla de 121x25 nodos).

ESFUERZO	ALGOR [Pa]	CVFEM [Pa]	DESVIACIÓN [%]
$\sigma_{xx}$	$2,40 \times 10^05$	$2,40 \times 10^05$	0
$\sigma_{yy}$	$9,82 \times 10^03$	$9,58 \times 10^03$	2.44

Como es observado en las tablas 4 y 5 de resultados comparativos, la diferencia porcentual para el caso de los desplazamientos y esfuerzos normales en la dirección “y” (vertical), aunque es pequeña, esta se debe a al tipo de malla utilizada (elementos cuadrados) y al método numérico (FEM) utilizado por el software ALGOR para resolución del problema. Es deseable para este caso, conocer una solución analítica que pueda compararse con los dos métodos (FEM y CVFEM).

En las figuras 28-37 se grafica la convergencia de las mallas usadas. Se muestran cortes en secciones  $x=L/2$ ;  $y=H/2$  para desplazamientos esfuerzos tanto verticales como horizontales. Para estas gráficas, en forma conjunta, se observa convergencia para mallas de 80x16 nodos con distribución cosenoidal.

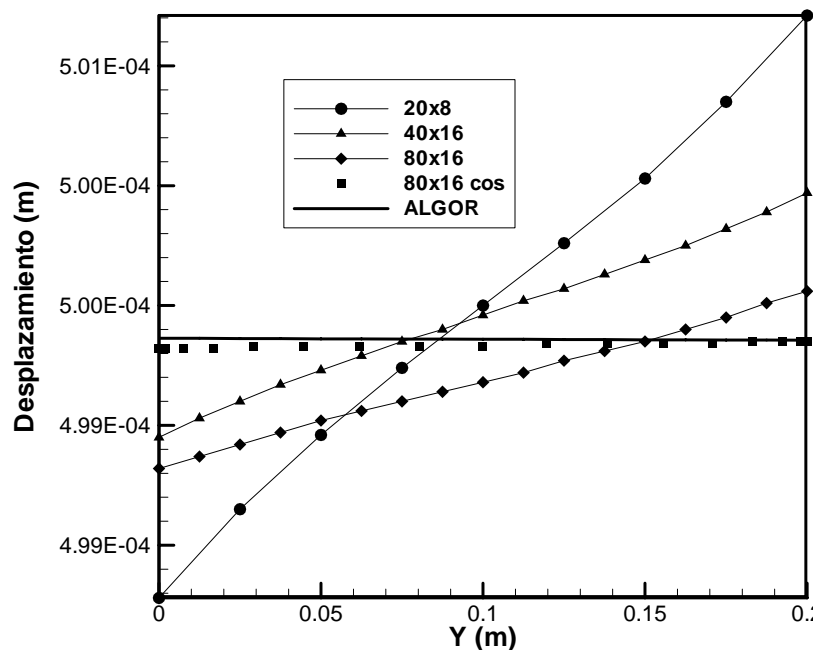


Figura 28. Desplazamientos  $u$  en  $x=L/2$ .

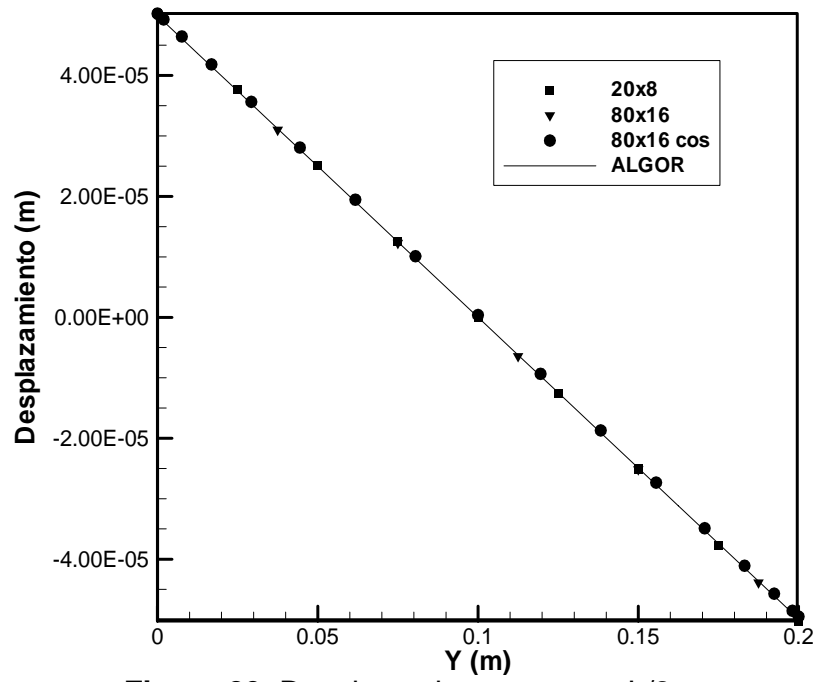


Figura 29. Desplazamientos v en  $x=L/2$ .

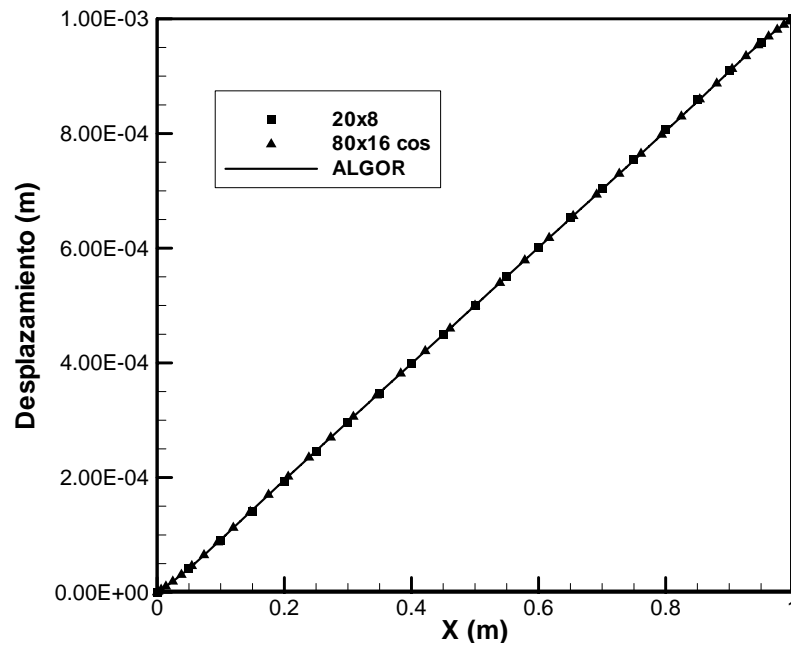


Figura 30. Desplazamientos u en  $y=H/2$ .

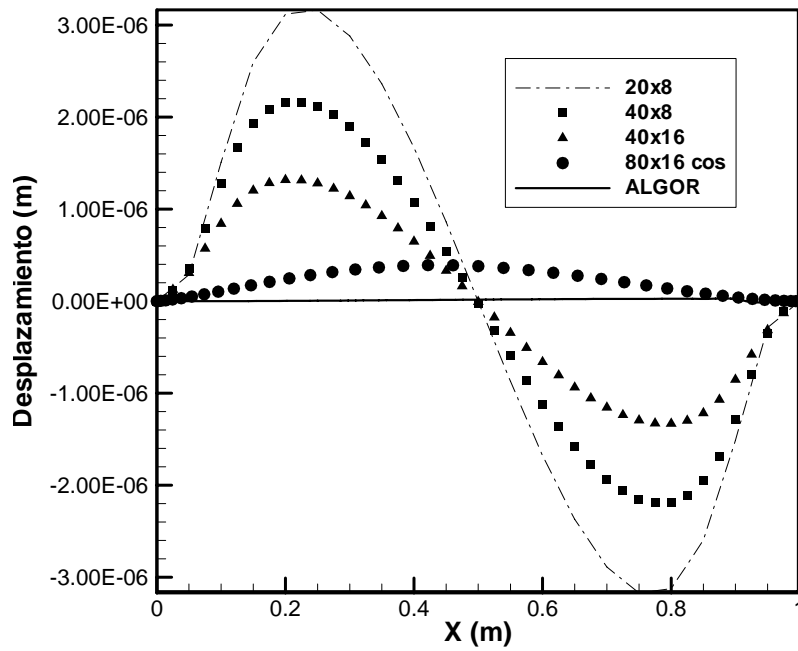


Figura 31. Desplazamientos  $v$  en  $y=H/2$ .

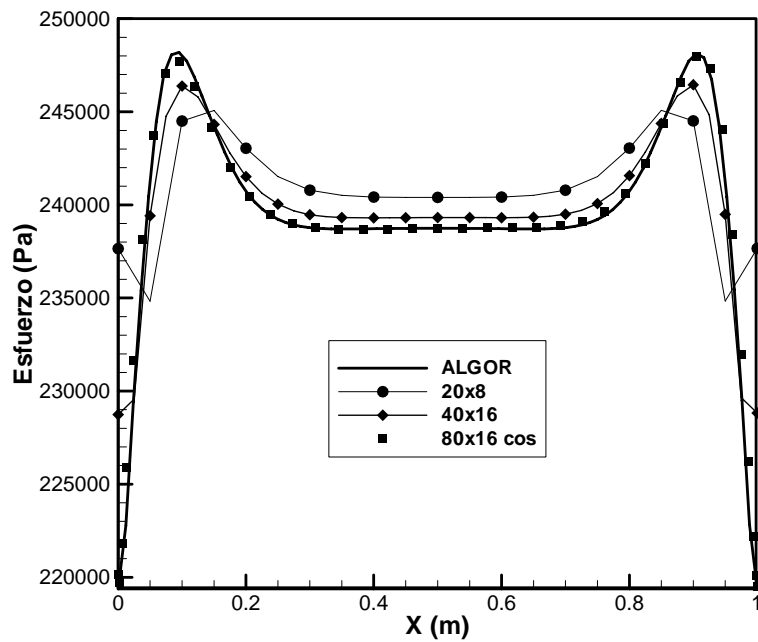


Figura 32. Esfuerzos normales  $\sigma_{xx}$  en  $y=H/2$ .

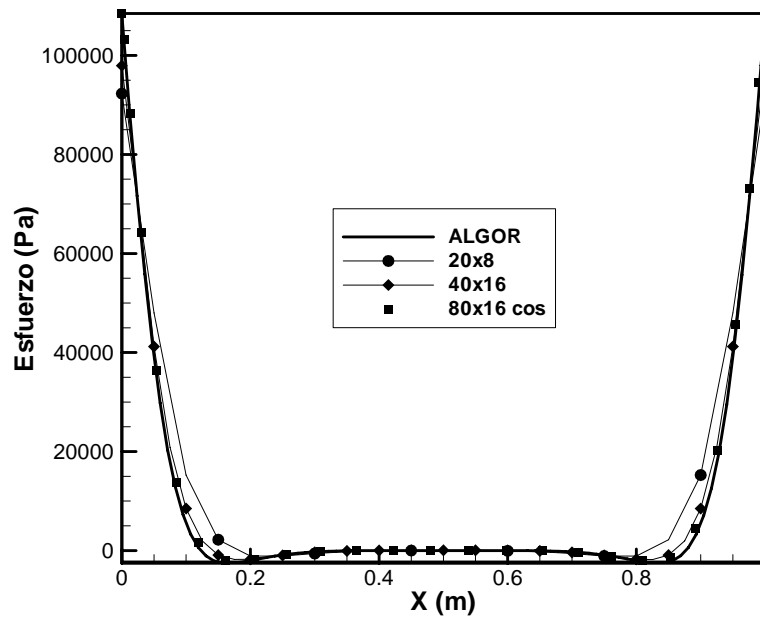


Figura 33. Esfuerzos normales  $\sigma_{yy}$  en  $y=H/2$ .

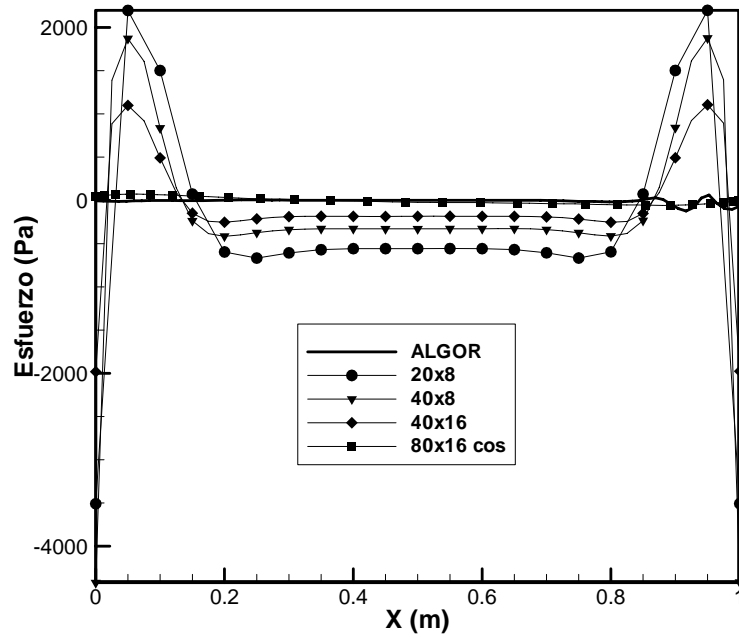


Figura 34. Esfuerzos tangenciales  $\tau_{yy}$  en  $y=H/2$ .

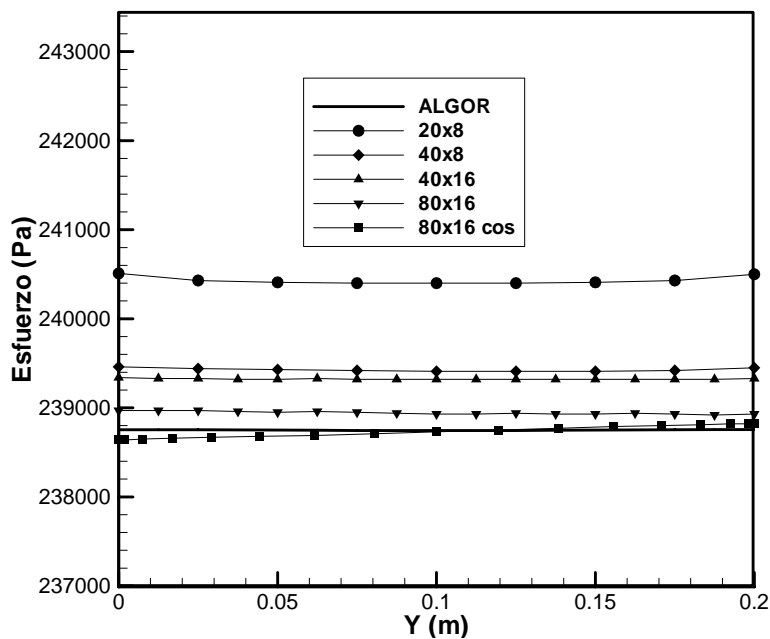


Figura 35. Esfuerzos normales  $\sigma_{xx}$  en  $x=L/2$ .

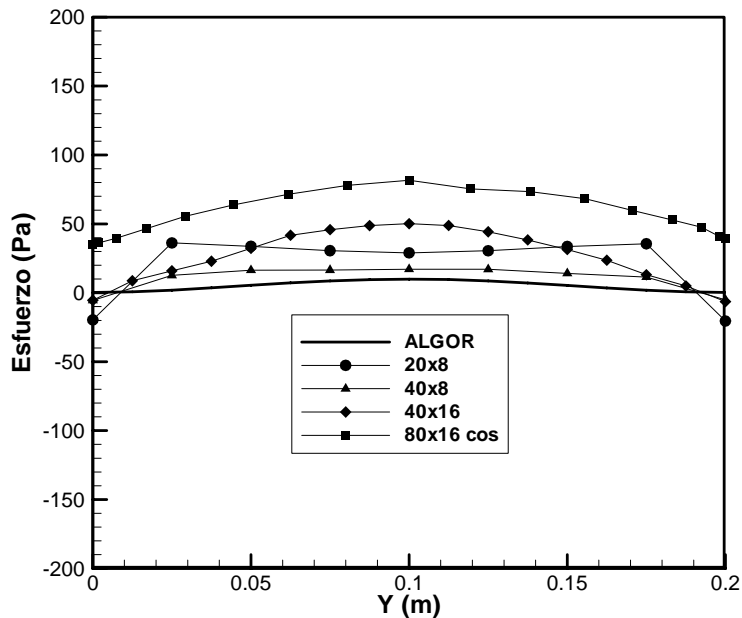


Figura 36. Esfuerzos normales  $\sigma_{yy}$  en  $x=L/2$ .

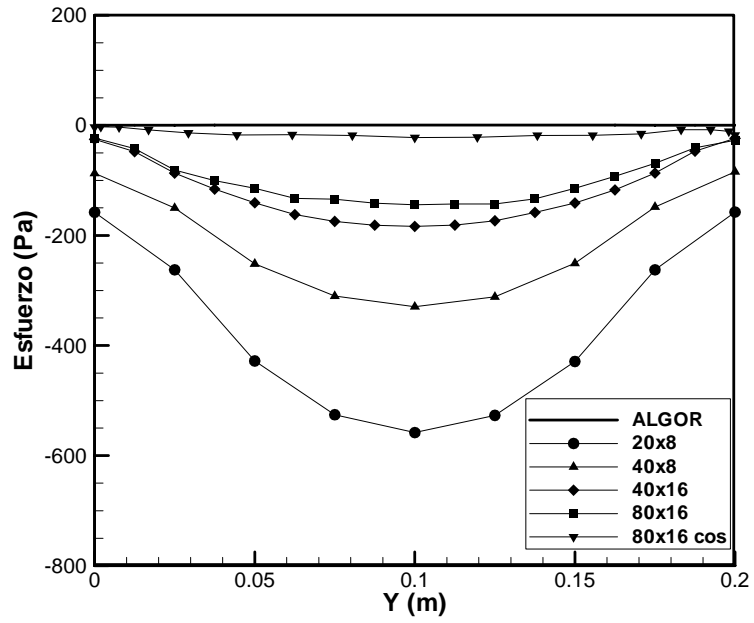
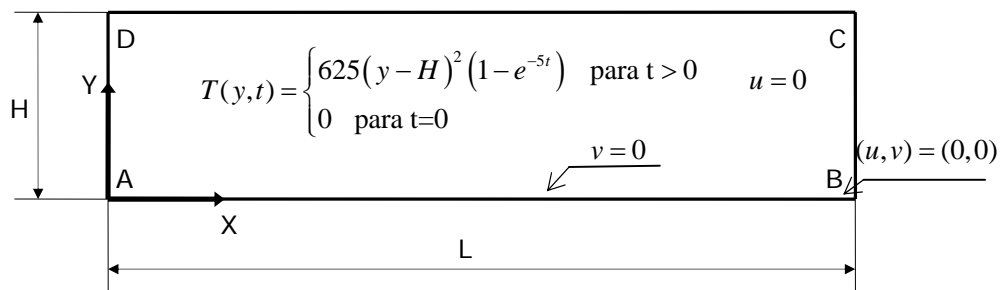


Figura 37. Esfuerzos tangenciales  $\tau_{xx}$  en  $x=L/2$ .



**Difusión de calor y esfuerzos térmicos en placa de acero.** Se considera la simulación transiente del esfuerzo plano de una placa bidimensional que experimenta un calentamiento transiente no uniforme, esquematizada en la figura 38, cuyas propiedades son dadas en la tabla 6. Para dicha placa sus magnitudes son: largo  $L=0.6$  [m] y altura  $H=0.2$  [m]. Se considera para efectos de condiciones de contorno con desplazamiento restringido en el sentido  $y$ , en el tramo AD ( $v=0$  en  $y=0$ ), restringido en el sentido  $x$  en el tramo BC ( $u=0$  en  $x=L$ ) y libre en los tramos CD y DA. Naturalmente que el punto B está restringido en  $x$  e  $y$  ( $(u,v)=(0,0)$  en B).



**Figura 38.** Placa Bidimensional con variación transiente no uniforme de temperatura.  
Para  $u$  restricción horizontal y  $v$  restricción vertical.

**Tabla 6:** Propiedades de la placa de acero.

Módulo de Elasticidad	50 MPa
Coefficiente de Expansión $\alpha$	0.01 [1/°C]
Coefficiente de Creep $m$	$5 \cdot 10^{-9}$ [1/Pa]
Razón de Poisson $\nu$	0.25

La distribución transiente no uniforme de temperatura es dada forma exponencial por la siguiente ecuación:

$$T(y,t) = \begin{cases} 625(y-H)^2(1-e^{-5t}) & \text{para } t > 0 \\ 0 & \text{para } t=0 \end{cases} \quad (69)$$

Producto de la distribución no uniforme de temperaturas se producen esfuerzos inducidos por la dilatación y también debidos a estos mismos sostenidos en el tiempo (creep). La modelación de dichos esfuerzos puede ser realizada a través de una función implícita de cinco parámetros que define una deformación inicial  $\varepsilon_0$ : La dilatación térmica  $\alpha$ , el coeficiente de Creep  $m$ , el propio esfuerzo  $\sigma$ , la variación de temperatura  $\Delta T$  y para el caso de deformación plana la razón de Poisson  $\nu$ .

Al mencionado problema se le conoce solución analítica, Boley y Weiner (1960), citado por Turner (1996) y numéricamente puede ser abordado a través del método de deformación inicial, Zienkiewicz y Taylor (2000). Para esto se considera  $\Delta T$  como la variación de temperatura entre tiempo  $t_n = ndt$  y  $t_{n+1} = (n+1)dt$  donde  $dt$  es el intervalo de tiempo considerado. Esto es:  $\Delta T = T_{n+1} - T_n$ .

Las figuras 39-43, muestran mapeamientos del estado de deformación y tensiones para  $t=1$  (h) (Estado permanente) En dichos mapeamientos se puede observar la consistencia en cuanto a la imposición de condiciones de contorno (Desplazamiento dados en figuras 39 y 40). Los efectos de las restricciones a la deformación libre sumados al fenómeno del creep en cuanto a su consistencia cualitativa, pueden ser apreciados en las figuras 41 a 43.

El análisis de convergencia y consistencia en relación al tamaño de la malla, contrastado con la solución analítica, es mostrado en la figura 44. Se aprecia que resultados transitorios convergentes pueden ser logrados con mallas uniformes de  $52 \times 20$ . De la misma forma la figura 45, muestra resultados de distribución de tensiones normales en el sentido  $x$  ( $\sigma_{xx}$ ) para  $t=1$  (h) en el tramo BC, contrastado con resultados analíticos. Se aprecia una muy buena concordancia, mismo con mallas gruesas, lo cual refleja una asertiva modelación del problema esfuerzo/deformación en estudio.

Por último, las figuras 46 y 47 muestran los análisis de consistencia en cuanto al paso del tiempo versus solución convergente, en el punto B y también en el tramo BC, respectivamente. Se aprecia una buena convergencia para pasos de tiempo de 0.001 (h).

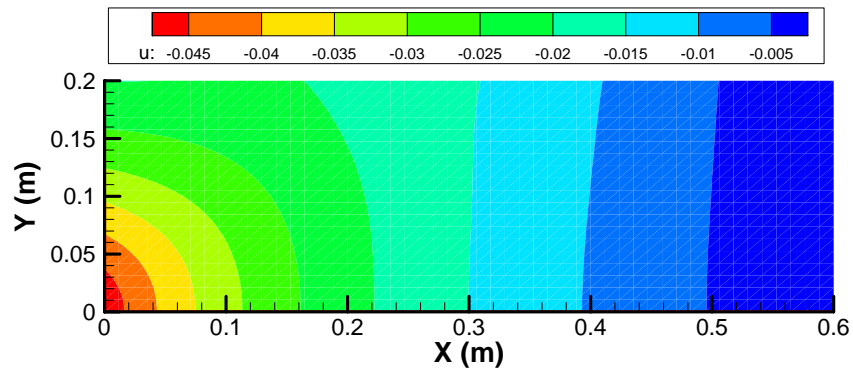


Figura 39. Desplazamientos  $u$  con CVFEM. Malla 50x20 nodos,  $t = 1$  (h).

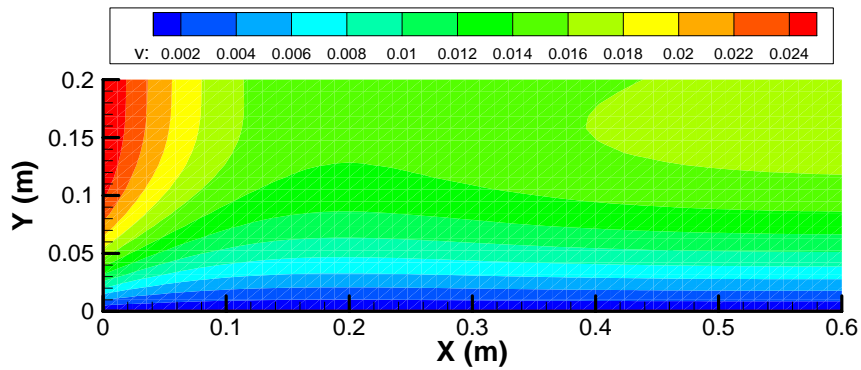


Figura 40. Desplazamientos  $v$  con CVFEM. Malla 50x20 nodos,  $t = 1$  (h).

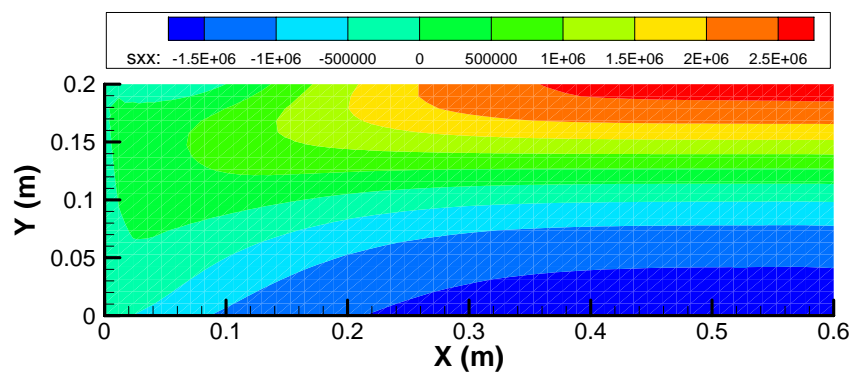


Figura 41. Esfuerzos normales  $\sigma_{xx}$  con CVFEM. Malla 50x20 nodos,  $t = 1$  (h).

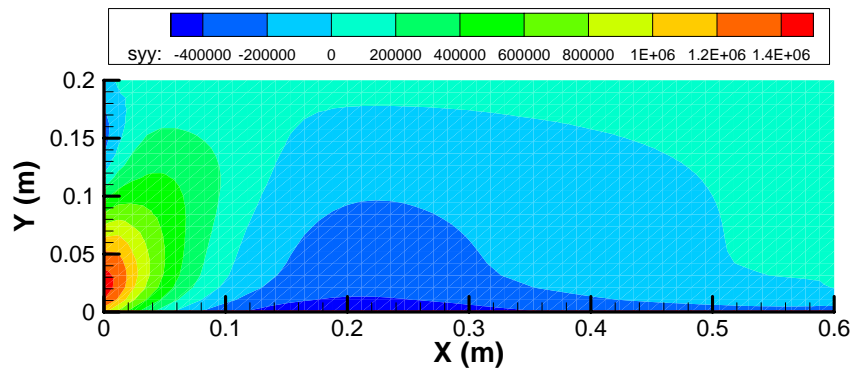


Figura 42. Esfuerzos normales  $\sigma_{yy}$  con CVFEM. Malla 50x20 nodos,  $t = 1$  (h).

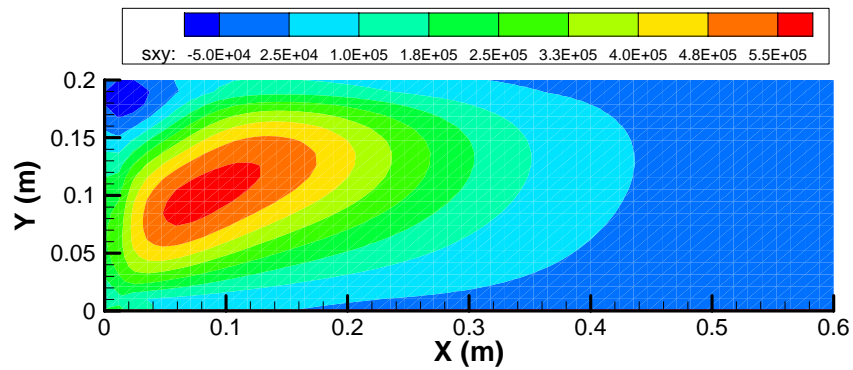


Figura 43. Esfuerzos tangenciales  $\tau_{xy}$  con CVFEM. Malla 50x20 nodos,  $t = 1$  (h).

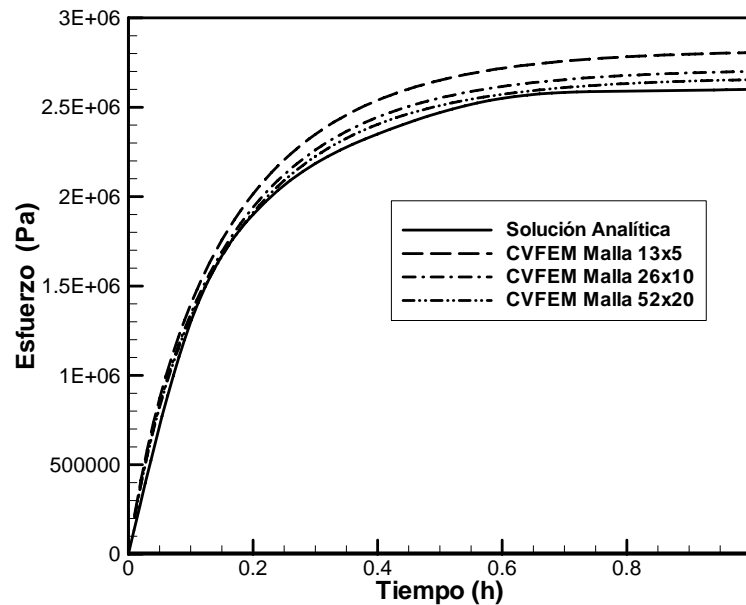


Figura 44. Esfuerzos normales  $\sigma_{xx}$  en el punto B v/s Tamaño de malla y  $dt=0.01$  h.

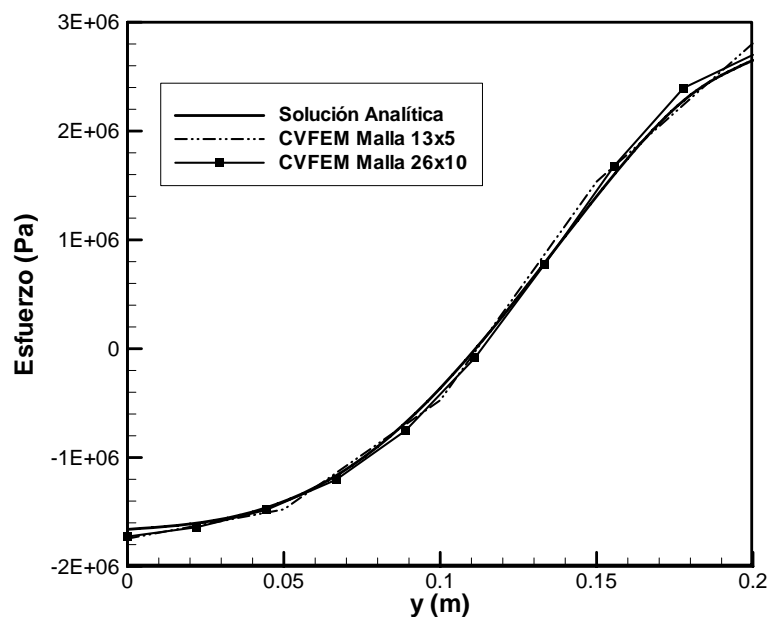


Figura 45. Esfuerzos normales  $\sigma_{xx}$  en el tramo BC v/s Tamaño de malla y  $dt=0.01$  h,  $t = 1$  (h)

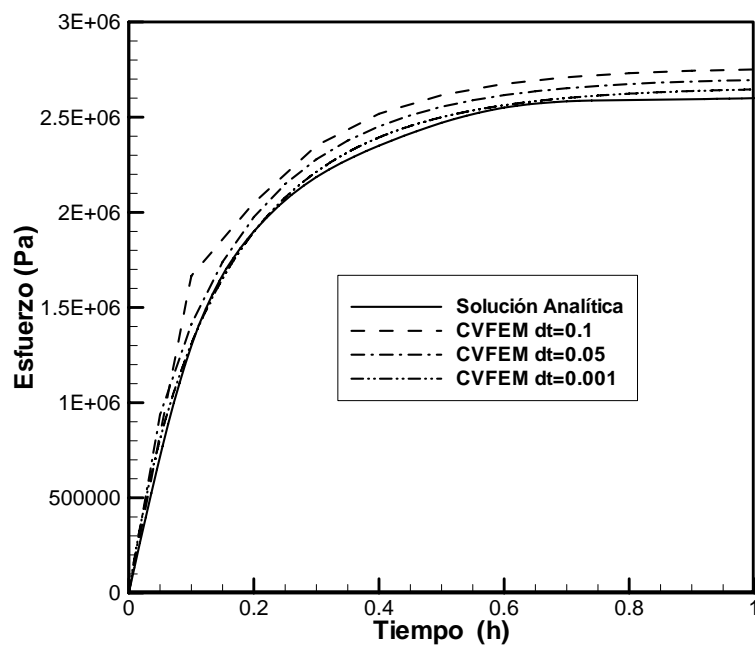
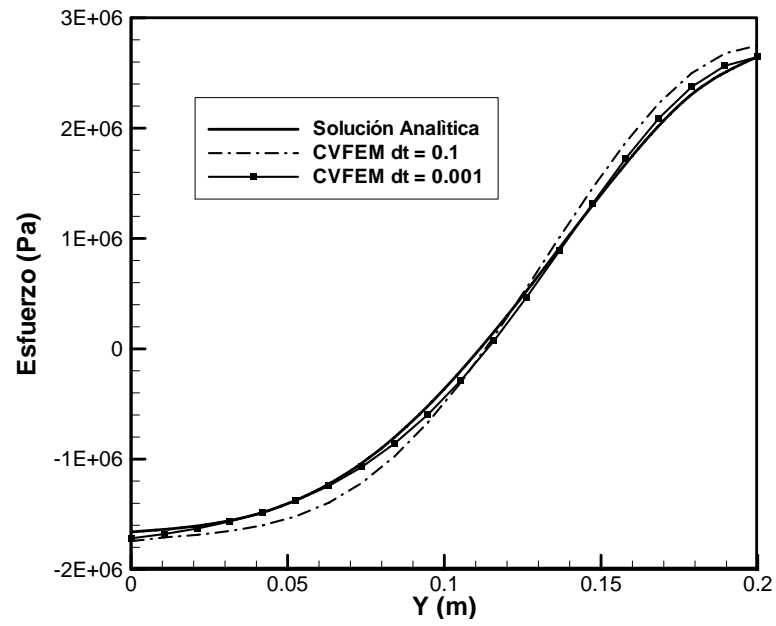
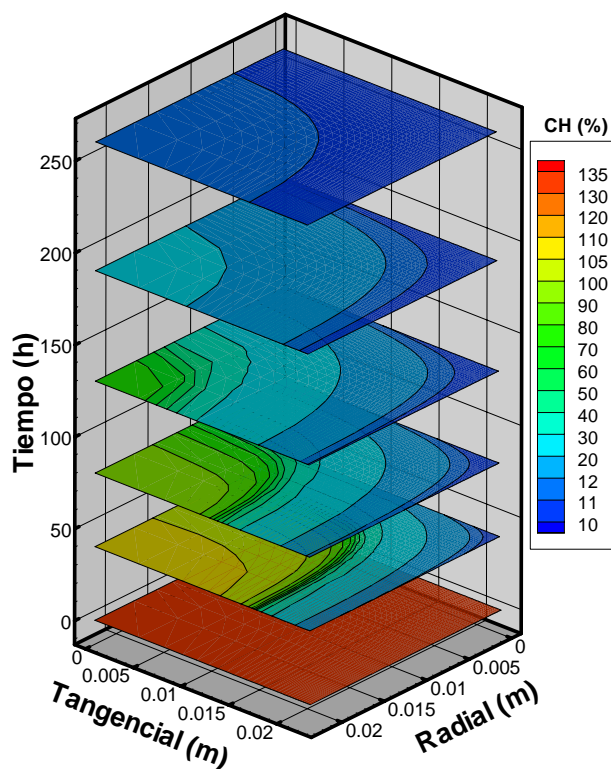


Figura 46. Esfuerzos normales  $\sigma_{xx}$  en el punto B v/s paso de tiempo. Malla  $52 \times 20$  nodos.



**Figura 47.** Esfuerzos normales  $\sigma_{xx}$  en el tramo BC v/s paso de tiempo. Malla 52x20 nodos,  $t = 1$  (h)

**Transporte de humedad y esfuerzos de secado en madera de álamo:** Se aplica el código computacional para simular los desplazamientos, deformaciones y esfuerzos en un trozo de madera de álamo (*Populus tremuloides*) durante el proceso de secado. Se considera la simulación transiente no uniforme del transporte de humedad al interior de la madera, la cual induce esfuerzos y deformaciones simulados según modelo matemático presentado en el capítulo II. En cada tiempo de integración se determina la distribución de humedades, lo cual permite posteriormente calcular las deformaciones libres ( $\epsilon^0$ ) que inducen desplazamientos y esfuerzos. Calculados estos últimos en forma desacoplada de acuerdo al método de deformación inicial Zienkiewicz y Taylor (2000). La figura 48 muestra distribuciones temporales de humedad al interior de la madera para un secado a 20 °C. En ésta se observa la deformación o contracción de la malla. Los resultados de isoconcentraciones y su comportamiento son descritos en el capítulo II para el modelo de transporte de humedad en la madera de álamo. Las figura 49 y 50 muestran los resultados para el mismo tipo de distribución temporal de humedad pero aplicado a los secados a 35 y 50 °C, respectivamente. Observando esto, se comprueba un correcto desempeño del modelo difusivo para los secados más rápidos.



**Figura 48.** Contenido de humedad (%) transitorio, secado 20°C. Malla Log 30x30.

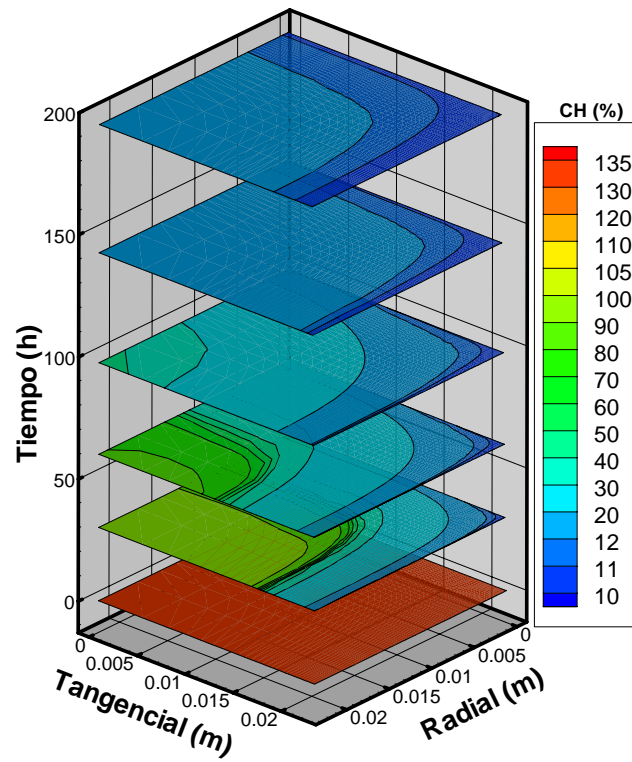


Figura 49. Contenido de humedad (%) transitorio, secado 35°C. Malla Log 30x30.

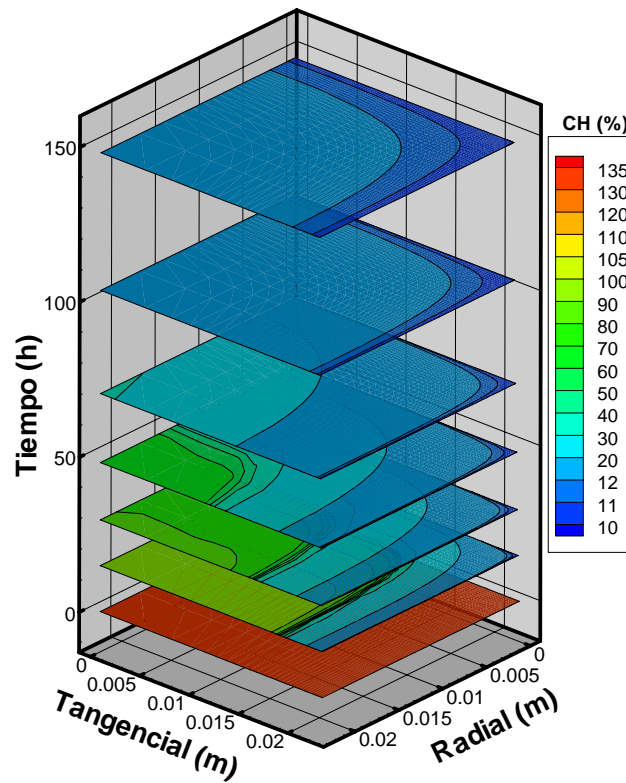


Figura 50. Contenido de humedad (%) transitorio, secado 50°C. Malla Log 30x30.



El estado de desplazamientos en el eje radial se muestra en las figuras 51, 52 y 53 para secados a 20, 35 y 50 °C respectivamente. De igual forma, los desplazamientos en el eje tangencial se muestran en figuras 54, 55 y 56 para secados a 20, 35 y 50 °C respectivamente. El desempeño del modelo es corroborado observando el comportamiento difusivo de los desplazamientos desde la superficie hacia el centro de la madera, lo que es característico para un problema de este tipo. También, se puede observar la adecuada implementación de las condiciones de contorno restringidas en un grado de libertad. Se destaca en secado a 50 °C que se desarrollan menores desplazamientos máximos en relación a los secados a 20 y 35 °C.

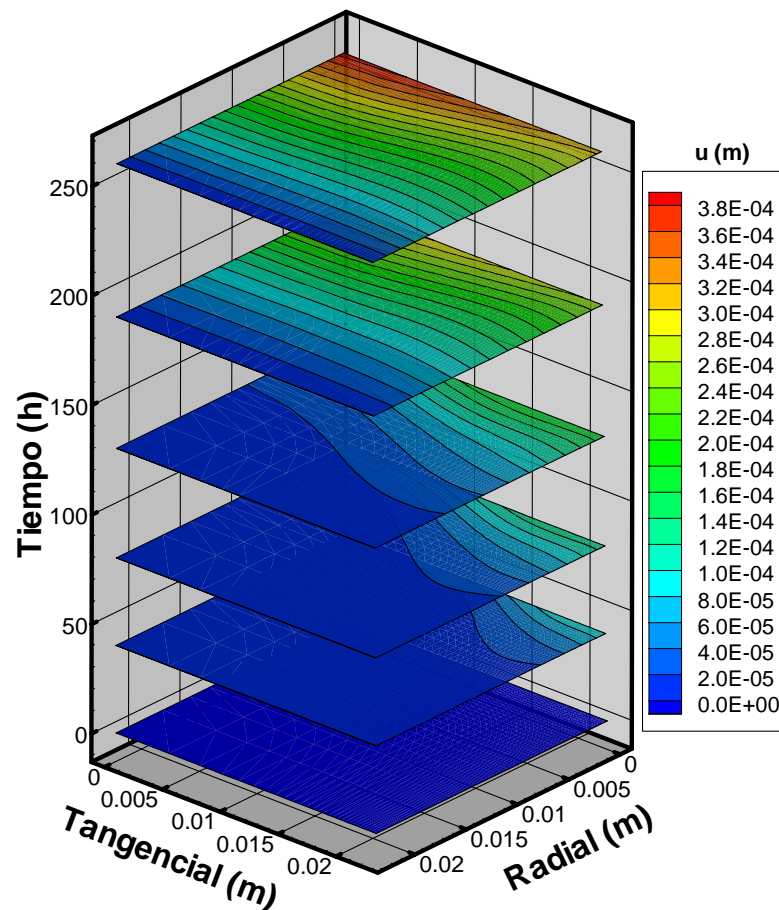


Figura 49. Desplazamiento  $u$  (m) transitorio, secado 20°C. Malla Log 30x30.

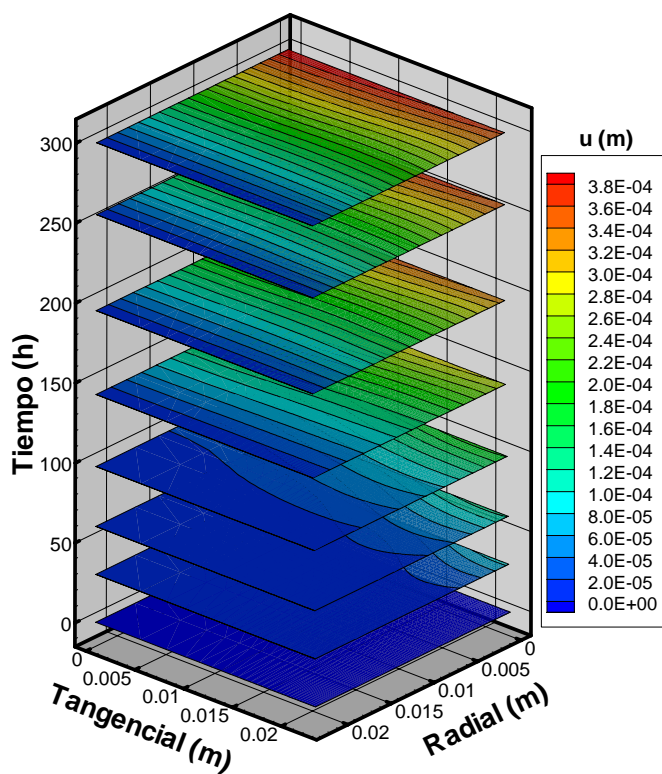


Figura 50. Desplazamiento  $u$  (m) transitorio, secado 35°C. Malla Log 30x30.

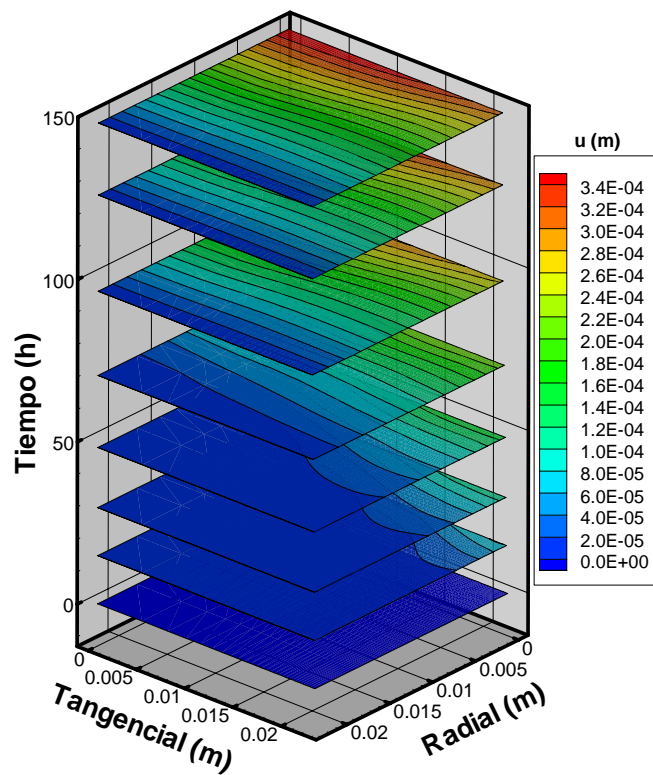


Figura 51. Desplazamiento  $u$  (m) transitorio, secado 50°C. Malla Log 30x30.

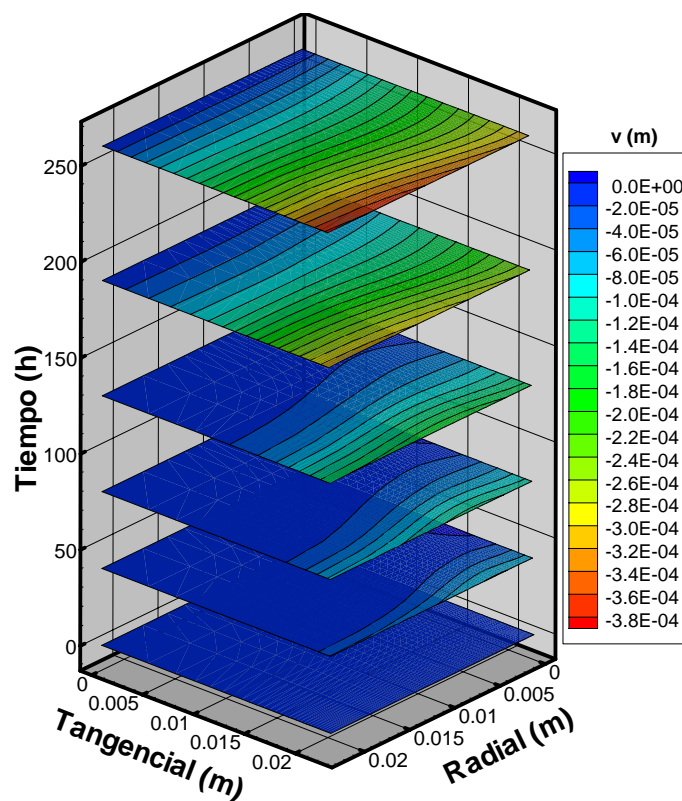


Figura 52. Desplazamiento  $v$  (m) transitorio, secado 20°C. Malla Log 30x30.

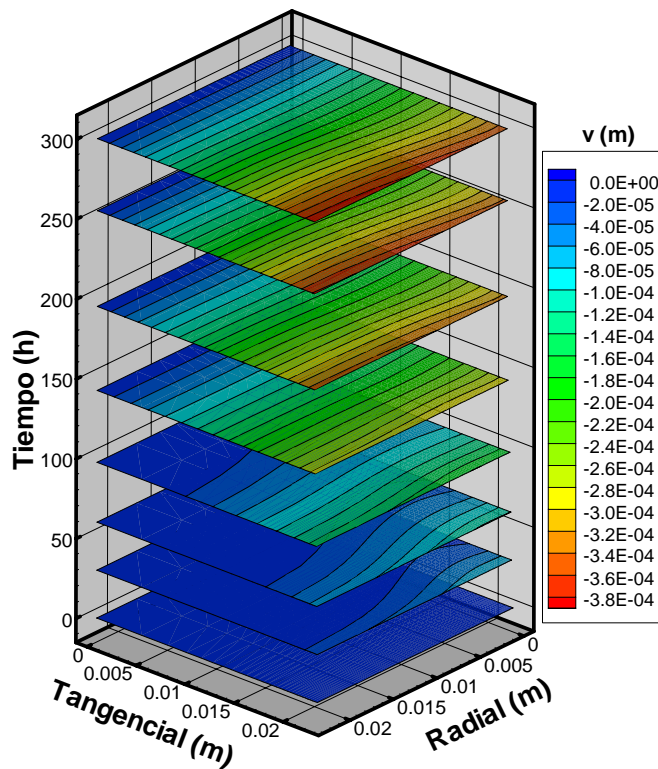
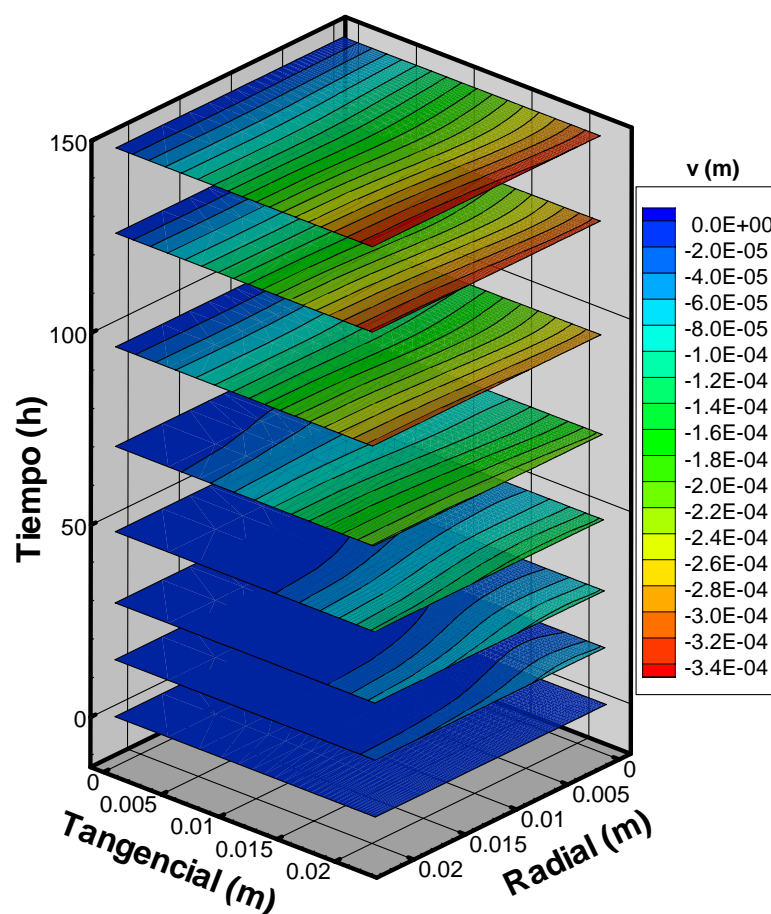


Figura 53. Desplazamiento  $v$  (m) transitorio, secado 35°C. Malla Log 30x30.



**Figura 54.** Desplazamiento  $v$ (m) transitorio, secado 50°C. Malla Log 30x30.

En las figuras 55 y 56 (secado a 20 °C para 400 h); 57 y 58 (secado a 35 °C para 300 h); 59 y 60 (secado a 50 °C para 150 h) se muestran los desempeños del modelo para el problema esfuerzo-deformación. En específico, en estas figuras se observan los esfuerzos normales residuales para los ejes radial y tangencial cuando se alcanza el estado permanente. En estas presentaciones espaciales se observan en detalle, cómo se concentran los esfuerzos principales. En estos casos, los esfuerzos residuales en tensión se concentran hacia el centro de la madera (intersección de las simetrías) y los esfuerzos residuales en compresión se concentran hacia las superficies de la madera.



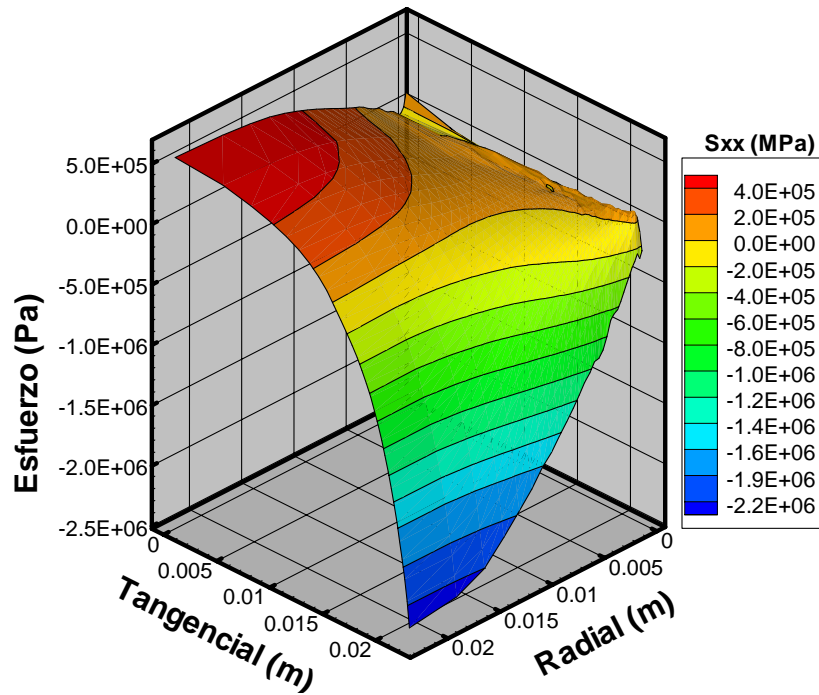


Figura 55. Esfuerzos residuales  $\sigma_{xx}$ , secado  $20^\circ\text{C}$ ,  $t=400$  h. Malla Log 30x30.

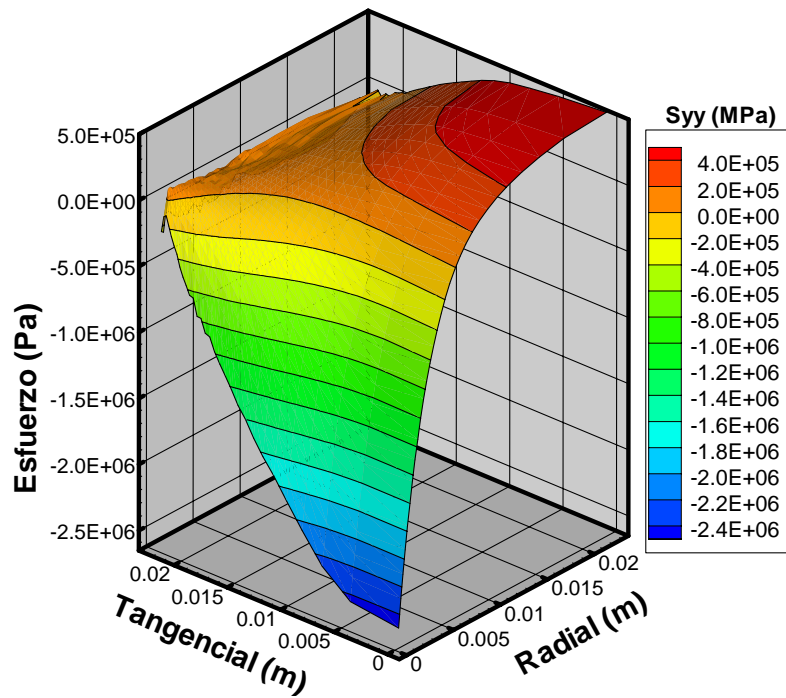


Figura 56. Esfuerzos residuales  $\sigma_{yy}$ , secado  $20^\circ\text{C}$ ,  $t=400$  h. Malla Log 30x30.

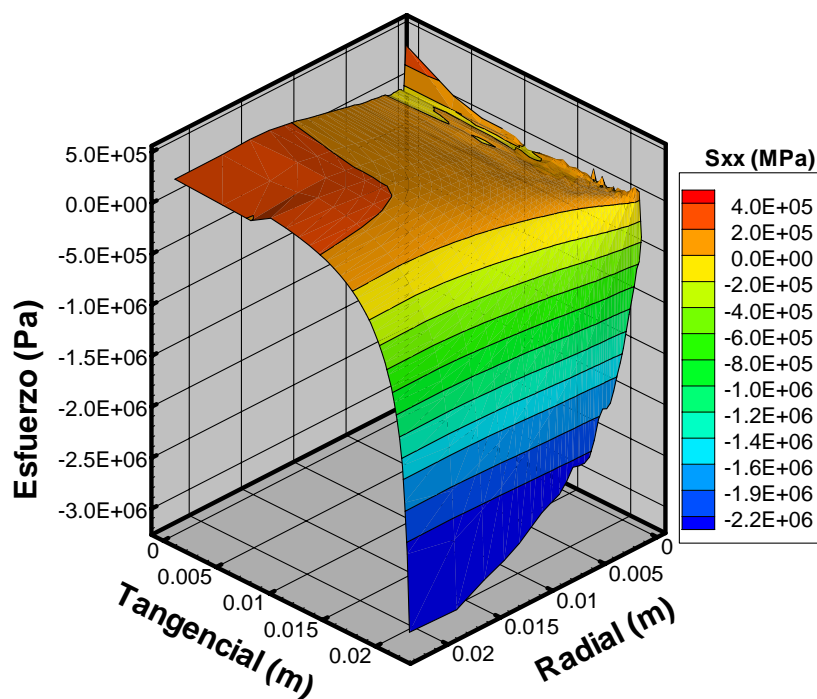


Figura 57. Esfuerzos residuales  $\sigma_{xx}$ , secado  $35^\circ\text{C}$ ,  $t=300$  h. Malla Log 30x30.

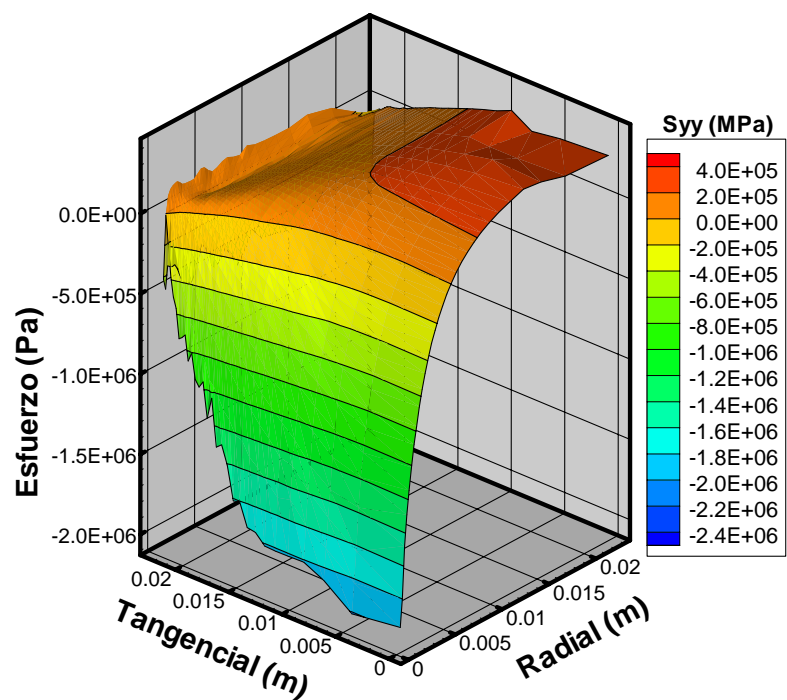


Figura 58. Esfuerzos residuales  $\sigma_{yy}$ , secado  $35^\circ\text{C}$ ,  $t=300$  h. Malla Log 30x30.

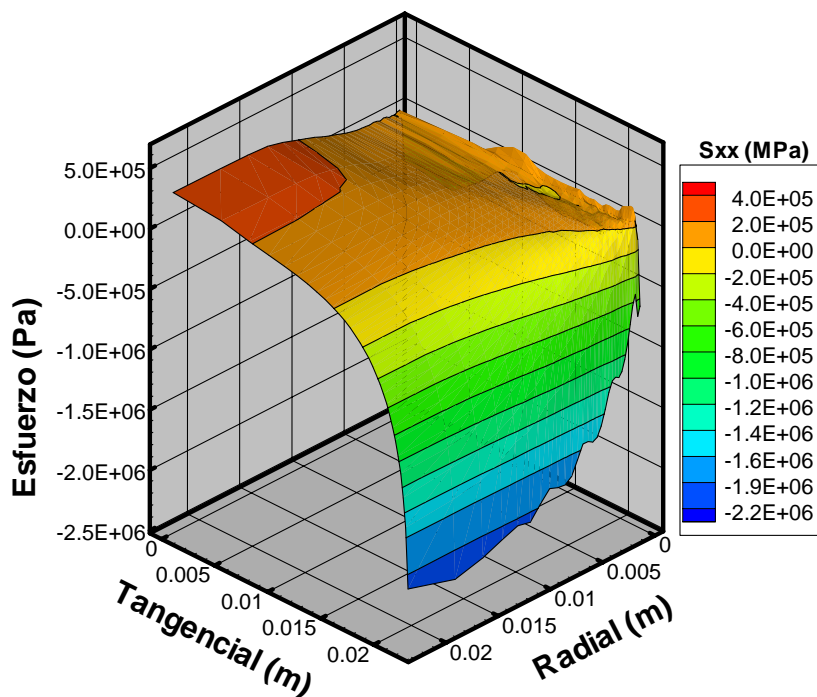


Figura 59. Esfuerzos residuales  $\sigma_{xx}$ , secado  $50^\circ\text{C}$ ,  $t=150$  h. Malla Log 30x30.

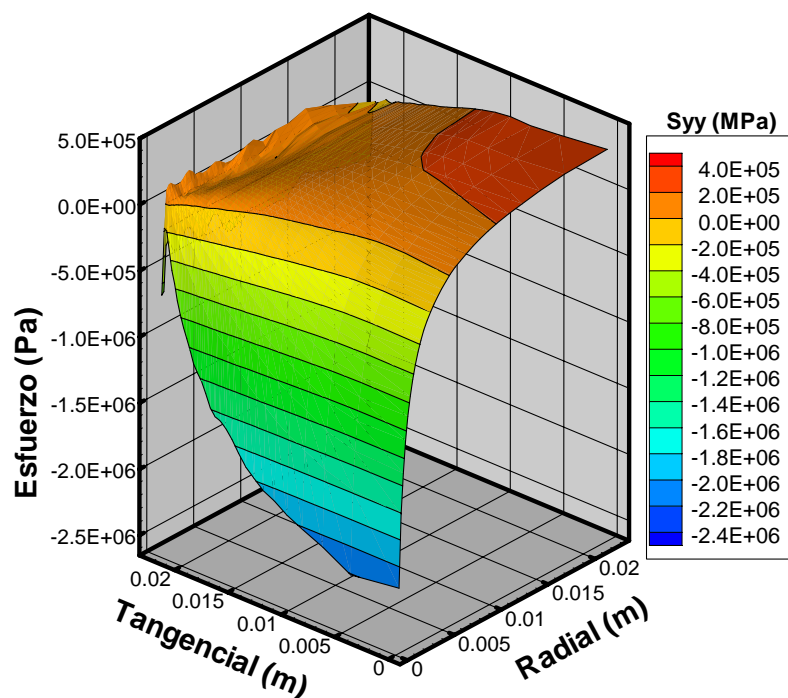


Figura 60. Esfuerzos residuales  $\sigma_{yy}$ , secado  $50^\circ\text{C}$ ,  $t=150$  h. Malla Log 30x30.

Las figuras 61, 62 y 63 muestran el desempeño del modelo para los esfuerzos tangenciales. Estas figuras muestran los resultados para secados a diferentes temperaturas (20°, 35° y 50°C, respectivamente), para las cuales, se observa un comportamiento convergente en la concentración de los esfuerzos tangenciales residuales, en los tres casos se concentran en un punto, que medido desde el centro, se encuentra desplazado hacia las superficies de la madera.

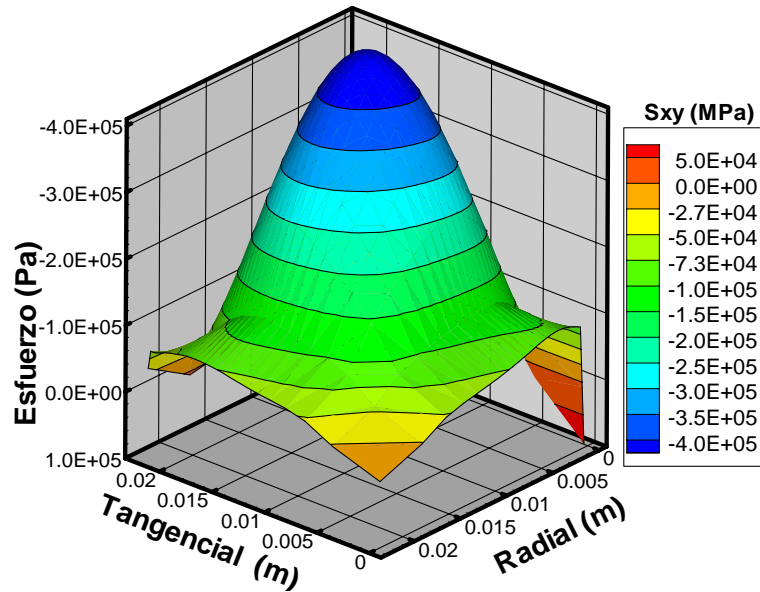


Figura 61. Esfuerzos residuales  $\tau_{xy}$ , secado 20°C,  $t=400$  h. Malla Log 30x30.

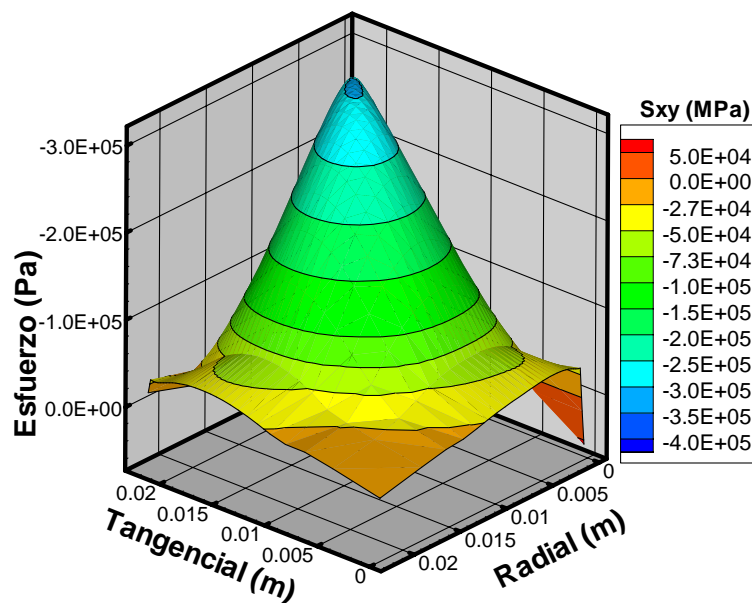
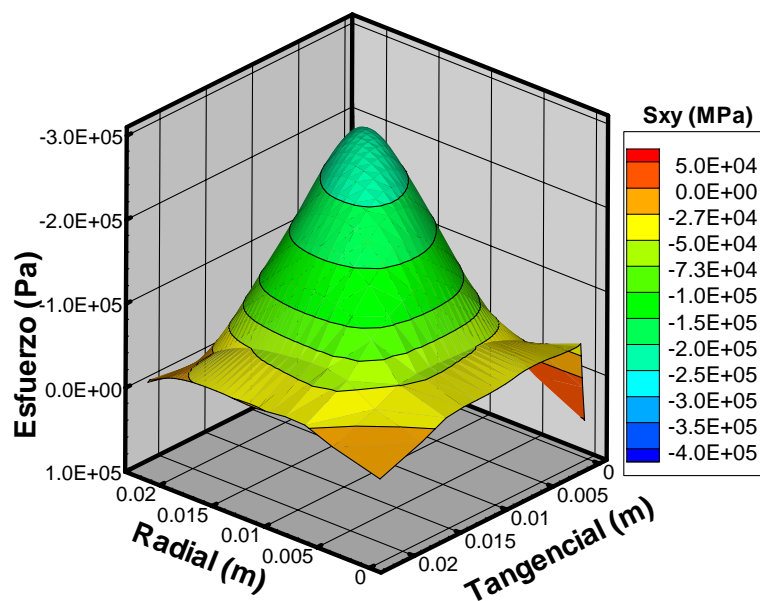


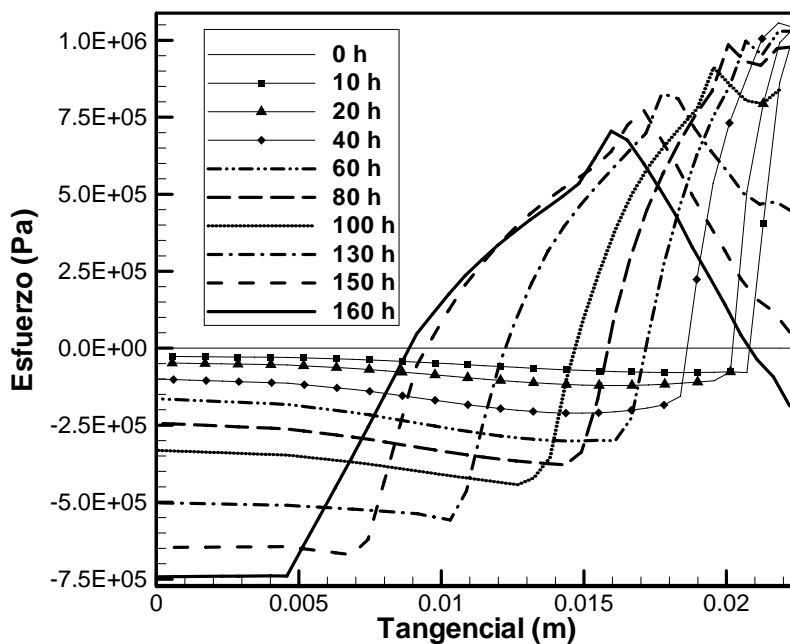
Figura 62. Esfuerzos residuales  $\tau_{xy}$ , secado 35°C,  $t=300$  h. Malla Log 30x30.



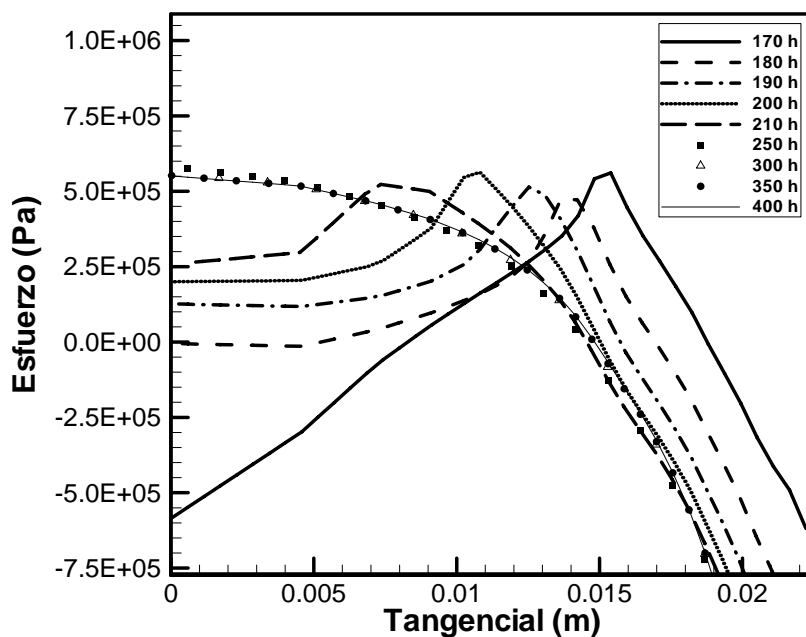


**Figura 63.** Esfuerzos residuales  $\tau_{xy}$ , secado 50°C,  $t=150$  h. Malla Log 30x30.

Las figuras 64, 65 y 66, muestran la evolución en estado transitorio de los esfuerzos normales en el tramo BC (modelo físico figura 12) de la sección transversal de madera. Al inicio del secado, se destaca un nivel máximo de esfuerzo en punto donde convergen las condiciones de contorno de convección correspondiente a la superficie de la madera. Conjuntamente, se observa que existe un nivel mínimo de compresión al interior de la madera en la etapa inicial del secado. Paulatinamente, conforme avanza el frente de secado, se incrementan levemente los esfuerzos en las inmediaciones de la superficie (hasta  $t=10$  h para secado a 20 °C, figura 64a) y cambios mayores, se aprecian marcadamente hacia la zona de compresión para el centro de la madera. Posterior a  $t=10$  h, se relajan los esfuerzos en el entorno de la superficie y se aceleran hacia el centro. Para  $t=160$  h. se alcanza el máximo de compresión en el centro de la madera, a partir del cual comienzan a decaer los esfuerzos de compresión y finalmente el secado deja donde es estado de esfuerzos residuales para  $t=400$  h. se transforman en estado de tensión como lo sugiere la figura 64b. El comportamiento es observado similarmente para los secados a 35 y 50 °C en las figuras 65 y 66.



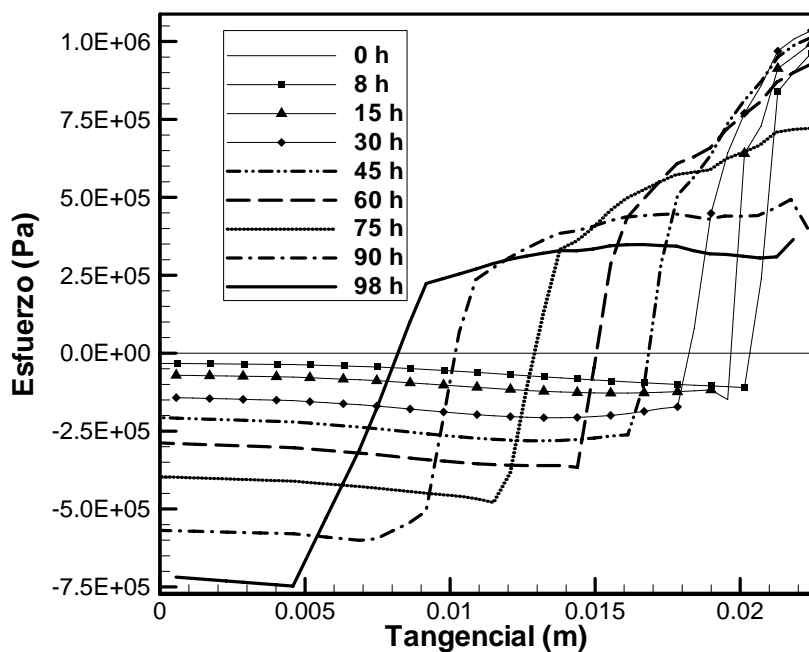
a) Esfuerzo normal transitorio. Etapa 1.



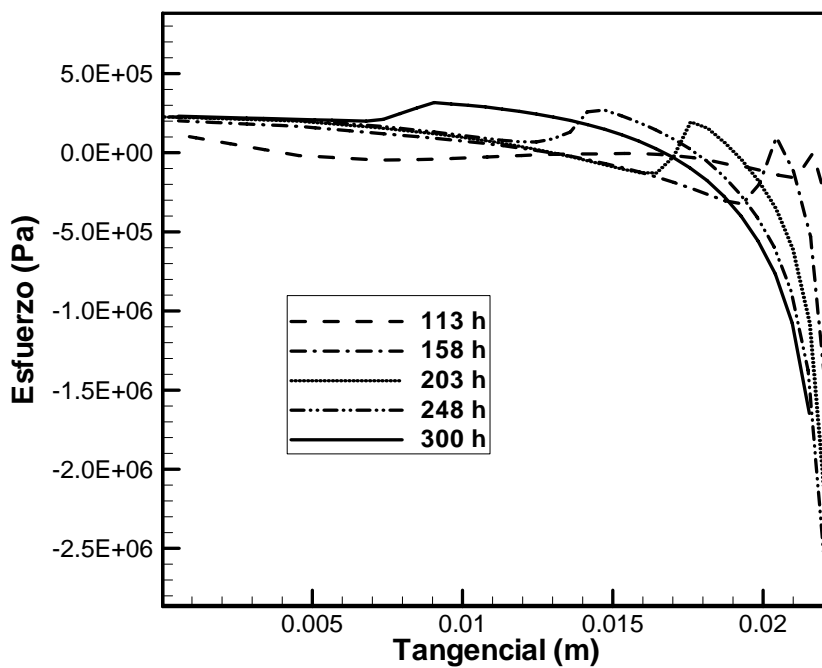
b) Esfuerzo normal transitorio. Etapa 2.

Figura 64. a) y b) Esfuerzo normal transitorio  $\sigma_{xx}$  en el tramo BC, secado 20°C: Malla

Log 30x30.

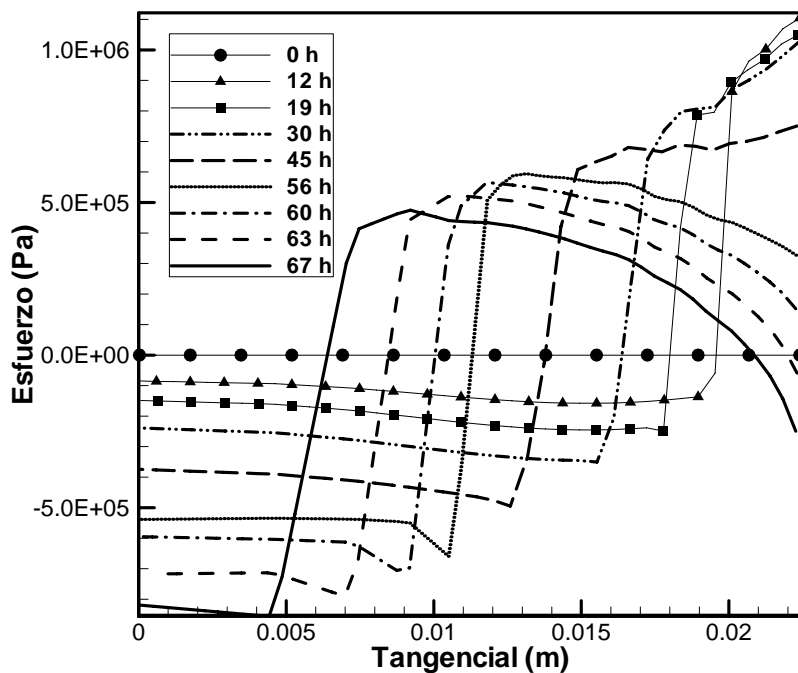


a) Esfuerzo normal transitorio. Etapa 1.

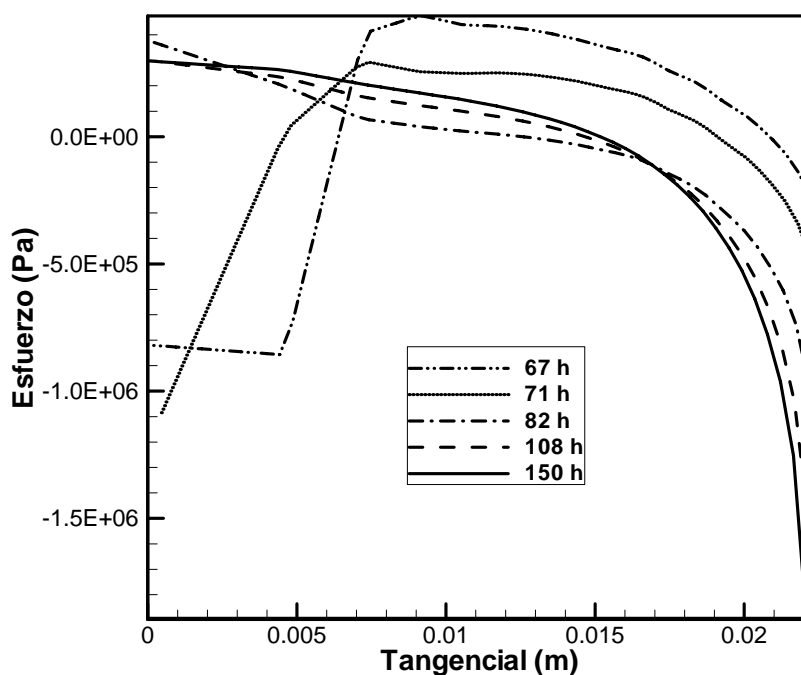


b) Esfuerzo normal transitorio. Etapa 2.

**Figura 65.** a) y b) Esfuerzo normal transitorio  $\sigma_{xx}$  en el tramo BC, secado 35°C: Malla Log 30x30.



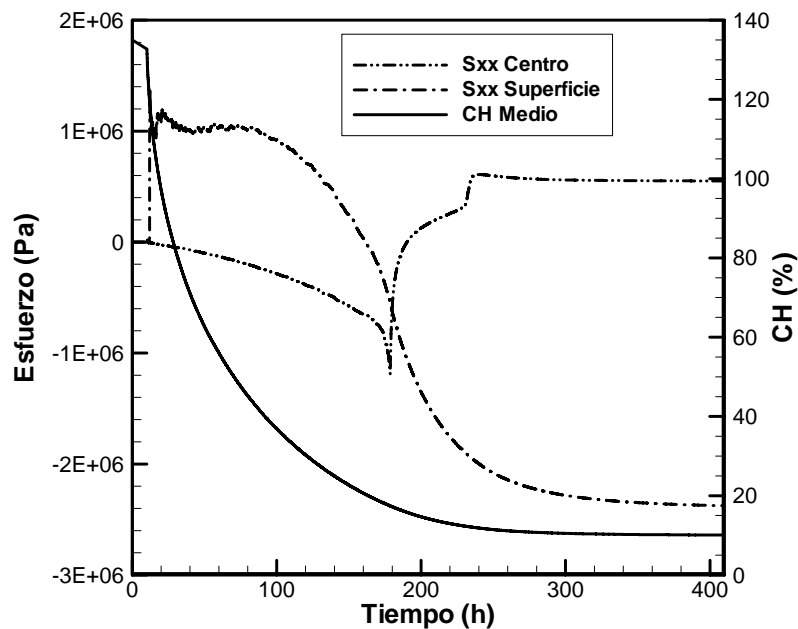
a) Esfuerzo normal transitorio. Etapa 1.



b) Esfuerzo normal transitorio. Etapa 2.

**Figura 66.** a) y b) Esfuerzo normal transitorio  $\sigma_{xx}$  en el tramo BC, secado 50°C: Malla Log 30x30.

Las figuras 67, 68 y 69 (secados a 20, 35 y 50 °C, respectivamente), muestran las evoluciones transitorias de los esfuerzos de secado en el centro y en la superficie del dominio de cálculo, comparadas o correlacionadas con el contenido de humedad de madera. En ella se puede apreciar la dinámica de la variación de las intensidades de los esfuerzos principales. Básicamente, al inicio del secado en la superficie y en el centro se observa una marcada tensión y leve compresión respectivamente. Esto contrasta con el estado residual de esfuerzos, es decir, al final del proceso de secado se invierten los signos de los esfuerzos normales. Esto último, es una de las características cualitativas relevantes del problema físico simulado.



**Figura 67.** Esfuerzos normales  $\sigma_{xx}$  y CH transitorios, secado 20°C: Malla Log 30x30.

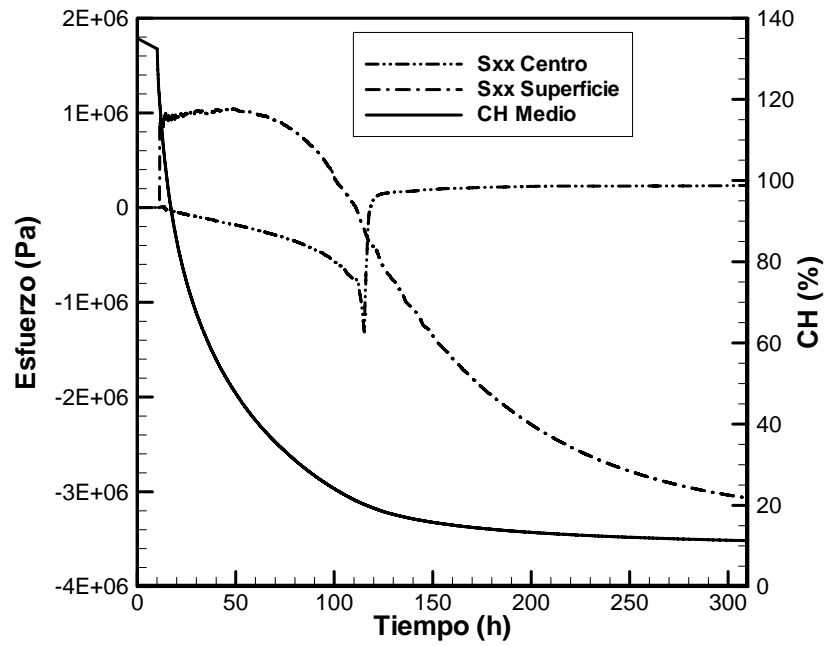


Figura 68. Esfuerzos normales  $\sigma_{xx}$  y CH transitorios, secado 35°C: Malla Log 30x30.

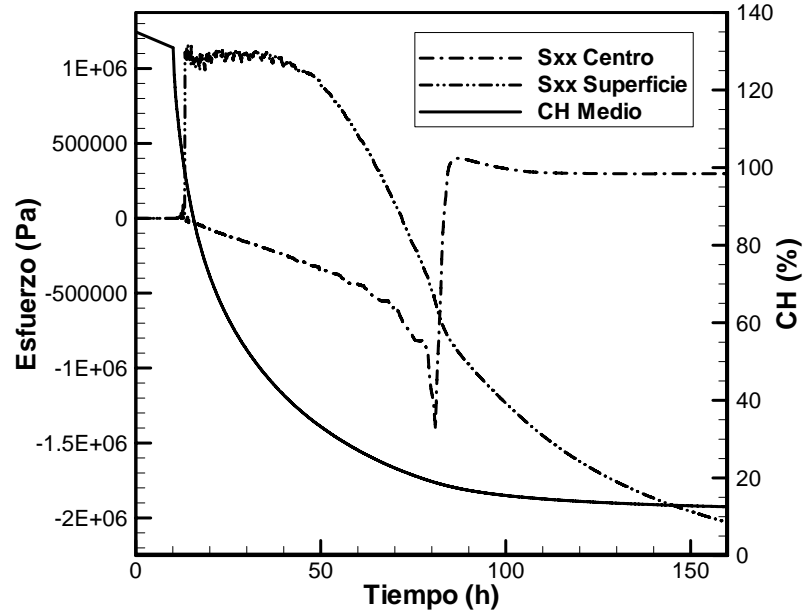


Figura 69. Esfuerzo normales  $\sigma_{xx}$  y CH transitorios, secado 50°C: Malla Log 30x30.

---

---

# **CAPITULO IV**

---

---

## Conclusiones<sup>6</sup>

En el presente trabajo se ha mostrado que es efectivo *Simular procesos de difusión transiente usando CVFEM*, en particular, aplicado al secado convencional de madera modelado de acuerdo a un enfoque de Luikov y apoyado en la existencia de un potencial hídrico total. Este fue validado eficazmente para casos de difusión bidimensional ortotrópica de humedad en el plano radial/tangencial de madera de álamo usando CVFEM. El desarrollo permitió *Simular difusión de humedad que induce esfuerzos y deformaciones al interior de la madera*.

La predicción de distribuciones transitorias de humedad considerando la ortotropía del material permite observar regiones de marcados gradientes de concentración que pueden auxiliar un mejor análisis de las cualidades y consecuencias de un determinado secado.

Por otro lado, los resultados del análisis de consistencia en relación al tamaño y forma de la malla, así como el paso de tiempo simulados, son prueba de un comportamiento consistente del algoritmo de cálculo desarrollado.

En adición, no se observaron dificultades ni variaciones significativas en la curva de secado al utilizar como variable dependiente el contenido de humedad o potencial hídrico.

Se ha desarrollado un algoritmo que permite *Simular procesos de esfuerzos y deformación transiente usando CVFEM que incluyan deformación libre y creep*, validado a través de comparaciones con resultados analíticos de un problema de difusión transitoria no uniforme de calor en una placa de acero. Los resultados muestran una eficaz modelación en términos cualitativos y cuantitativos óptimos de este problema, además de la validación previa del problema elástico (placa sometida a tracción) que ha sido resumido en los contenidos dados.

La efectiva modelación de la difusión de humedad al interior de la madera, permitió *Simular los esfuerzos y deformación en la madera durante el secado que consideren contracción y sorción mecánica*. Lo anterior lo demuestran los comportamientos

---

<sup>6</sup> Las frases destacadas en cursiva resaltan literalmente los objetivos de la presente tesis.



característicos mostrados en las figuras 54 y 55 (secado a 20°C), 62 y 63 (secado a 35°C) , 70 y 71 (secado a 50°C), que son reportados en la literatura especializada, y logrados a través de algoritmos previamente validados con situaciones asintóticas que contienen lo fundamental de fenómeno en estudio. Esto es: Al comienzo del secado las regiones son sometidas indistintamente a tensión y compresión durante el proceso transiente, y finalmente se tienen como resultado, esfuerzos residuales caracterizados por compresión en la superficie de secado y tensión en el centro de la madera.

Además, aceptándose, el análisis numérico realizado en la validación con la placa plana sometida a tracción y la placa plana sometida a esfuerzos térmicos, los valores cuantitativos simulados deberían ser similares a los físicos. Naturalmente, es deseable contar con datos experimentales para corroborar los resultados de esfuerzos y deformaciones en la madera de *álamo*, lo cual no es abordado en el presente trabajo.

En síntesis, se ha dado respuesta satisfactoria al objetivo general de *Simular los esfuerzos y deformaciones bidimensionalmente en la madera durante el proceso de secado, usando CVFEM*, expresado en la correlación de resultados experimentales y numéricos presentados en gráficas y apéndice.

# Bibliografía

## Referencias

1. **BALIGA, B.R.; PATANKAR, S.V. 1980.** A new finite element formulation for convection diffusion problems. *Numerical Heat Transfer* 3:393-409.
2. **BOLEY, B. A.; WEINER, J. H, 1960.** *Theory of Thermal Stresses*, John Wiley and Sons, Inc., New York.
3. **CHENG, W.; MOROOKA, T.; WU, Q.; LIU, Y. 2007.** Characterization of tangential shrinkage stresses of wood during drying under superheated steam above 100 °C. *Forest Prod. J.* 57(11):39-43.
4. **CHEN, G.; KEEY R.B; WALKER, J.F.C. 1997.** The drying stress and check development on high-temperature kiln seasoning of sapwood *Pinus radiata* boards. *Holz als Roh-und Werkstoff.* 55: 59-64.
5. **CLOUTIER, A.; FORTIN, Y. 1994.** Wood drying modelling based on the water potential concept: Effect of the hysteresis in the M- $\psi$  relationship. *Drying Technology* 12(8) 1793-1814.
6. **CLOUTIER, A.; FORTIN, Y. 1993.** A model of moisture movement in wood based on water potential and the determination of the effective water conductivity. *Wood Sci. Technol.* 27: 95-114.
7. **CLOUTIER, A.; FORTIN, Y. DHATT, G. 1992.** A wood drying finite element model based on the water potential concept. *Drying Technology* 10(5) 1151-1181.
8. **DAHLBLOM, O., ORMARSSON, S., PETERSSON, H. 1996.** Prediction of deformations in Wood during drying by an extended two-dimensional formulation. 5<sup>th</sup> IUFRO International wood drying conference. 69-76.
9. **DEFO, M.; CLOUTIER, A.; FORTIN, Y. 2000.** Modeling vacuum-contact drying of wood: The water potential approach. *Drying Technology.* 18(8) 1737-1778.

10. **DEFO, M.; FORTIN, Y.; CLOUTIER, A. 1999a.** Experimental determination of the effective water conductivity of sugar maple sapwood and white spruce heartwood under vacuum. *Wood Fiber Sci.* 31(4) : 343-359.
11. **DEFO, M.; FORTIN, Y.; CLOUTIER, A. 1999b.** Moisture content – water potential relationship of sugar maple and white spruce wood from green to dry conditions. *Wood Fiber Sci.* 31(1):62-70.
12. **DONGHUA, J.I.A.; MUHAMMAD, T. 2007.** Modeling of moisture diffusion in microwave drying of hardwood. *Drying Technology* 25: 449-454.
13. **ERIKSSON, J.; ORMARSSON, - S.; PETERSSON, H. 2004.** An experimental study of shape stability in glued boards. *Holz Roh Werkst.* 62:225–232.
14. **ERIKSSON, J.; ORMARSSON, - S.; PETERSSON, H. 2005.** An experimental study of shape stability in glued boards. *Holz als Roh-und Werksooff.* 63:423–429.
15. **FERGUSON, W.J. 1997.** A control volume finite element numerical solution of creep problems. *Int. J. Num. Meth. Eng.* 40(18):3463-3475
16. **FERGUSON, W.J. 1997.** A numerical prediction of the effect of airflow and wet bulb temperature on the stress development during convective wood drying. In mathematical modeling and numerical techniques in drying technology. Ed. By I. TURNER, A.S. MUJUMDAR.259-277 pp.
17. **FERGUSON, W. J. 1998.** The control volume finite element numerical solution technique applied to Creep in softwoods. *Int. J. Solid Structures* 35(13):1325-1338.
18. **GATICA, Y. 2006.** Transporte bidimensional de calor y masa, acoplado con ambiente de secado. Tesis de Magister en Ciencia y Tecnología de la Madera, Concepción, Universidad del Bio Bio, Facultad de Ingeniería.
19. **GUI, Y.Q.; JONES, E.W.; TAYLOR F.W.; ISSA, C.A. 1994.** An applications of finite element analysis to wood drying. *Wood Fiber Sci,* 26(2): 281-293.
20. **HERNÁNDEZ, R.; QUINTO, P. 2005.** Secado en medios porosos: Una revisión a las teorías Actualmente en uso. *Científica* 9(2): 63-71.

21. **INCROPERA, F. P., DEWITT, D.P. 1999.** Fundamentos de transferencia de calor. Pearson Educación, S.A. México.
22. **KANG, W.; LEE, N. 2002.** Mathematical modeling to predict drying deformation and stress due to the differential shrinkage within a tree disk. *Wood Sci. Technol.* 36:463-476.
23. **KANG, W.; LEE, N.; JUNG, H. 2004.** Simple analytical methods to predict one-an two-dimensional drying stresses and deformations in lumber. *Wood Sci. Technol.* 38 417-428.
24. **KEEY, R.; LANGRISH, T.; WALKER, J. 2000.** Kiln-drying of lumber. Springer-verlag, Berlin, pp. 65-115, 175-181.
25. **KEUNECKE, D.S.H; NIEMZ, P. 2008.** Three-dimensional elastic behaviour of common yew and Norway spruce. *Wood Science and Technology*, vol 42, Num 8, pp 633-647.
26. **LAPIDUS, L.; PINDER, G.F. 1982.** *Numerical solution of partial differential equations in science and engineering.* John Wiley & Sons, Inc., New York, NY. 677 pp.
27. **LEWIS, R. W.; MORGAN, K.; THOMAS, H. R. 1979.** Drying induced stresses in porous bodies – An elastoviscoplastic model. *Computer Methods in Applied Mechanics an Engineering*, 20: 291-301.
28. **LIU, J. Y.; CHENG, S. 1989.** Solution of Luikov equations of heat and mass transfer in capillary porous bodies. *Int. J. Heat and Mass Transfer* 34(7):1745-1754.
29. **LIN, J.; CLOUTIER A. 1996.** Finite element modelling of the viscoelastic behaviour of Wood during drying. 5<sup>th</sup> IUFRO International wood drying conference. 117-122.
30. **LUIKOV, A.V. 1966.** *Heat and mass transfer in capillary porous bodies.* Pergamon Press.
31. **MCMILLEN, J. 1963.** Stresses in wood during drying. Res. Rap. 1652 USDA Forest Service. Forest Products Lab. Madison, WI.

- 
32. **MARTENSSON, A., STEVENSSON, S. 1996.** Application of a material model describing drying stresses in Wood. 5<sup>th</sup> IUFRO International wood drying conference. 93-102.
  33. **MAUGET, B.; PERRÉ, P. 1996.** Numerical simulation of drying stress using a large displacement. 5<sup>th</sup> IUFRO International wood drying conference. 59-68
  34. **MORGAN, K.; THOMAS, H.R.; LEWIS, R.W. 1982.** Numerical modeling of stress reversal in timber drying. *Wood Science*, 15 (2): 139-149.
  35. **ORMARSSON, S.; DAHLBLOM, O.; PETERSSON, H.; 1998.** A numerical study of the shape stability of sawn timber subjected to moisture variation. Part 1: Theory. *Wood Science and Technology*, vol 32, pp 325-334.
  36. **ORMARSSON, S.; DAHLBLOM, O.; PETERSSON, H.; 1999.** A numerical study of the shape stability of sawn timber subjected to moisture variation. Part 2: Simulation of drying board. *Wood Science and Technology*, vol 33, pp 407-423.
  37. **ORMARSSON, S.; DAHLBLOM, O.; PETERSSON, H.; 2000.** A numerical study of the shape stability of sawn timber subjected to moisture variation. Part 3: Influence of annual ring orientation. *Wood Science and Technology*, vol 34, pp 207-219.
  38. **ORMARSSON, S.; COWN, D.; DAHLBLOM, O.; 2003.** Finite element simulations de moisture related distortion in laminated timber products of norway spruce and radiata pine. 8<sup>th</sup> IUFRO International wood drying conference. 27-33.
  39. **PANG, S. 2000.** Modelling of stress development during drying and relief during steaming in Pinus radiata lumber. *Drying Technology* 18(8):1677-1696.
  40. **PANG, S. 2002.** Investigation of effects of wood variability and rheological properties on lumber drying: application of mathematical models. *Chemical Eng. J.* 86:103-110.
  41. **PANG, S. 2007.** Mathematical modeling of kiln drying of softwood timber: Model development, validation and practical application. *Drying Technology* 25:421-431.
  42. **PATANKAR, S.V. 1980.** *Numerical heat transfer and fluid flow*, Hemisphere Publishing Corporation, Washington, DC.
-

- 
43. **PERRÉ, P.; MOSER, M.; MARTIN, M. 1993.** Advances in transport phenomena during convective drying with superheated steam and moist air. *International Journal of Heat and Mass Transfer* 36(11):2725-2746.
44. **PERRÉ, P.; DEGIOVANNI, A. 1990.** Simulation par volumes finis des transferts couplés en milieux poreux anisotropes: séchage du bois à basse et à haute température. *International Journal of Heat and Mass Transfer* 33(11):2463-2478.
45. **RANTA-MAUNUS, A. 1975.** The Viscoelasticity of Wood at varying moisture content. *Wood Sci. Technol.* 9:189-205.
46. **RANTA-MAUNUS, A. 1989.** Analysis de drying stresses in timber. *Paperi ja Puu \_ Paper and Timber.* 10:1120-1123.
47. **RÉMOND, R.; PASARD J.; PERRÉ, 2006.** The effect of temperature and moisture content on the mechanical behaviour of wood: a comprehensive model applied to drying and bending. *European Journal of Mechanics A/Solid* 26. 558-575.
48. **RÉMOND, R.; PERRÉ, 2008.** Drying strategies capable of reducing the stress level of a stack of boards as defined by a comprehensive dual scale model. *Maderas, Ciencia y Tecnología* 10(1): 3-18.
49. **SALINAS, C.; ANANIAS, R.; ALVEAR, M. 2004.** Simulación del secado convencional de la madera. *Maderas Ciencia y Tecnología* 6(1): 3-18.
50. **SIAU, J.F. 1984.** Transport Processes in Wood. Springer-Verlag. Berlin Heidelberg. 245 pp.
51. **SIAU, J.F. 1995.** Wood: Influence of moisture on physical properties. Virginia Tech. Blacksburg. USA.
52. **STEVENSSON, S.; MARTENSSON, A. 1999.** Simulation of drying stresses in wood Part I: Comparison between one and two dimensional models. *Holz Roh Werkst.* 57:129-136.
53. **STEVENSSON, S.; MARTENSSON, A. 2002.** Simulation of drying stresses in wood Part III Convective air drying of sawn timber. *Holz Roh Werkst.* 60:72-80.
-

- 
54. **THUVANDER, F., KIFETEW, G.; BERGLUND, L.A. 2002.** Modeling of cell wall drying stresses in wood. *Wood Sci. Technol.* 36:241-254.
  55. **THOMPSON, J.F.; WARSI, Z.U.A.; MASTIN, C.W. 1985.** *Numerical grid generation*, Elsevier Science. Publishing.
  56. **TREMBLAY, C., CLOUTIER A.; FORTIN, Y. 2000.** Determination of the effective water conductivity of red pine sapwood. *Wood Sci. Technol.* 34(2): 109-124.
  57. **TREMBLAY, C.; CLOUTIER A.; FORTIN, Y. 2000.** Experimental determination of the convective heat and mass transfer coefficients for wood drying. *Wood Sci. Technol.* 34(3) 253-276.
  58. **TREMBLAY, C., CLOUTIER, A.; GRANDJEAN, B. 1999.** Experimental determination of the ratio of vapour diffusion to the total water movement in wood during drying. *Wood Fiber Sci.* 31(3):235-248.
  59. **TURNER, I.; MUJUMDAR, A.S. 1997.** *Mathematical modeling and numerical techniques in drying technology*, Marcel Dekker Inc., N. York, ISBN 0-8247-9818-X.
  60. **TURNER, I.W. 1996.** A two dimensional orthotropic model for simulating wood drying process, *Applied Mathematical Modeling*, 20: 60-81.
  61. **TURNER, I, PERRÉ, P. 1997.** A synopsis of the strategies and efficient resolution techniques used for modelling and numerically simulating the drying process. En: *Mathematical modeling and numerical techniques in drying technology*. New York. Marcel Dekker, pp:1-82.
  62. **TURNER, I.W.; FERGUSON, W. 1995a.** An unstructured mesh cell-centered control volume method for simulating heat and mass transfer in porous media: Application to softwood drying, part I. The isotropic model. *Appl. Math. Modeling* 19: 654-667.
  63. **TURNER, I.W.; FERGUSON, W. 1995b.** An unstructured mesh cell-centered control volume method for simulating heat and mass transfer in porous media: Application to softwood drying, part II. The anisotropic model. *Appl. Math. Modeling* 19: 669-674.
  64. **WHITAKER, S. 1977.** Simultaneous heat, mass, and momentum transfer in porous media: A theory of drying. *Advances in Heat Transfer* 13: 119- 203
-

- 
65. **WU, Q.; MILOTA, M. R. 1994.** Effect of creep and mechano-sorptive effect on stress development during drying. *Drying Technology*. 12: 2057 – 2085.
  66. **WU, Q.; MILOTA, M. R. 1995.** Rheological Behavior of Douglas-Fir Perpendicular to The Grain at Elevated Temperatures. *Wood and Fiber Science*. 27(3): 285-295.
  67. **YOUNG, R. 1957.** The perpendicular to grain mechanical properties of red oak as related to temperature, moisture content and time. USDA, FPL-2079, Madison, USA.
  68. **ZIENKIEWICZ, O.C.; TAYLOR, R.L. 2000.** *The Finite Element Method*, Fifth edition, published by Butterworth-Heinemann. Vol. 2. Solid Mechanics. 365 pp.



# Nomenclatura

## Mayúsculas

- A*    *Coefficiente de aproximación lineal.*
- B*    *Coefficiente de aproximación lineal.*
- C*    *Coefficiente de aproximación lineal.*
- CH*    *Contenido de humedad (100 kg<sub>agua</sub> / kg<sub>madera-seca</sub>)*
- D*    *Determinante del EF*
- G<sub>m</sub>*    *Gravedad específica (kg<sub>madera-seca</sub> m<sup>3</sup><sub>agua</sub> / m<sup>3</sup><sub>madera-húmeda</sub> kg<sub>agua</sub>)*
- H*    *Altura (m)*
- J*    *Flujo difusivo (kg<sup>2</sup><sub>agua</sub> / m<sub>madera-húmeda</sub> s J)*
- L*    *Largo (m)*
- S<sub>φ</sub>*    *Fuente generadora de φ*
- T*    *Temperatura (K)*
- T<sub>0</sub>*    *Temperatura de referencia (K)*
- X*    *Eje Ortogonal*
- Y*    *Eje Ortogonal*

## Minúsculas

- a*    *Subíndice nodo segmento elemento finito*
- b*    *Subíndice nodo segmento elemento finito*
- c*    *Subíndice nodo segmento elemento finito*

$c_\phi$  Capacidad

$$c_\psi = \frac{G_m \rho_m}{100} \frac{\partial M}{\partial \psi} \text{ Capacidad de difusión de masa } (kg^2_{\text{agua}} / J m^3_{\text{madera-húmeda}})$$

$$c_H = \frac{G_m \rho_m}{100} \text{ Capacidad de difusión de humedad } (kg_{\text{madera-seca}} / m^3_{\text{madera-húmeda}})$$

$d$  Distancia (m)

$g$  Aceleración de gravedad ( $m/s^2$ )

$h$  Coeficiente convectivo ( $kg^2/m^2 s J$ )

$k$  Conductividad ( $W/m K$ )

$k_{xx}$  y  $k_{yy}$  Difusividades ortogonales  $x, y$  ( $kg^2_{\text{agua}} / m_{\text{madera-húmeda}} s J$ )

$k'_{xx} = k_{xx} \frac{\partial \psi}{\partial M}$  y  $k'_{yy} = k_{yy} \frac{\partial \psi}{\partial M}$  Difusividades modificadas ( $kg_{\text{madera-seca}} / m_{\text{madera-húmeda}} s$ )

$l$  Largo (m)

$m$  Coeficiente de Mecánica de Sorción ( $1/Pa$ )

$\hat{n}$  Vector normal.

$\mathbf{q}_m$  Flujo de humedad ( $kg_{\text{agua}}/m^2_{\text{madera-húmeda}} s$ )

$\mathbf{q}_\phi$  Flujo de  $\phi$

$t$  Tiempo (s)

$u$  Desplazamiento horizontal (m)

$v$  Desplazamiento vertical (m)

$x$  Coordenada  $x$

$y$  Coordenada  $y$

## Letras griegas

$\alpha$	<i>Coeficiente de deformación libre (%)</i> .
$\Omega$	<i>Contorno (m)</i>
$\varepsilon$	<i>Deformación (m / m)</i>
$\Delta$	<i>Operador de diferencia</i>
$\partial$	<i>Operador de derivación</i>
$\int$	<i>Operador de integración</i>
$\Sigma$	<i>Operador de sumatoria</i>
$f$	<i>Operador de función</i>
$\rho$	<i>Densidad (kg / m<sup>3</sup>)</i>
$\sigma$	<i>Esfuerzo normal (Pa)</i>
$\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$	<i>Operador Nabla (1 / m<sub>madera-húmeda</sub>)</i>
$\tau$	<i>Esfuerzo Tangencial (Pa)</i>
$\phi$	<i>Variable dependiente</i>
$\forall$	<i>Volumen</i>
$\psi$	<i>Potencial hídrico (J / kg<sub>agua</sub>)</i>

*Apéndice A*

---

---

---

# **APÉNDICES**

---

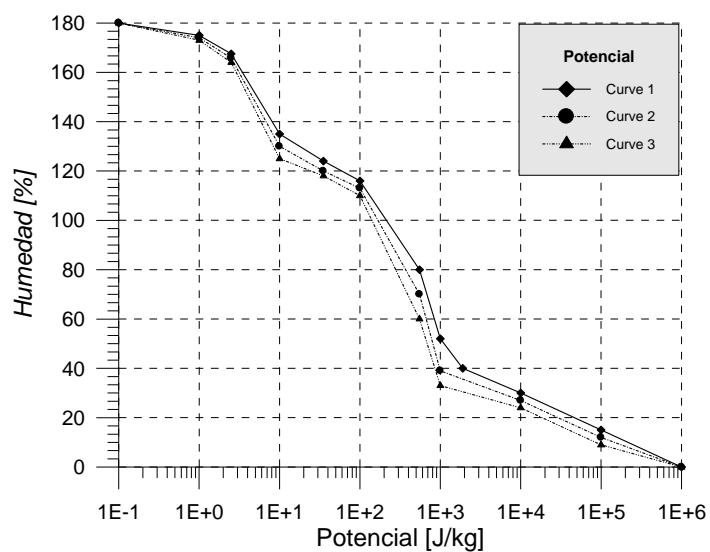
---

**A. DATOS EXPERIMENTALES**

Datos experimentales de potencial y conductividad a 20, 35 y 50 (°C), Cloutier *et al.* (1992) y Cloutier y Fortín (1993).

**Tabla A1:** Propiedades y variables de secado de madera de *álamo* (*Populus tremuloides*)

Temperatura de secado (°C)	20	35	50
Coef. Convectivo (kg <sup>2</sup> /m <sup>2</sup> s J)	4.43x10 <sup>-10</sup>	5.82x10 <sup>-10</sup>	9.36x10 <sup>-10</sup>
Gravedad Especifica	0.407	0.427	0.419
M inicial (%)	135		
M de equilibrio (%)	10		



**Figura A1.** Potencial hídrico.

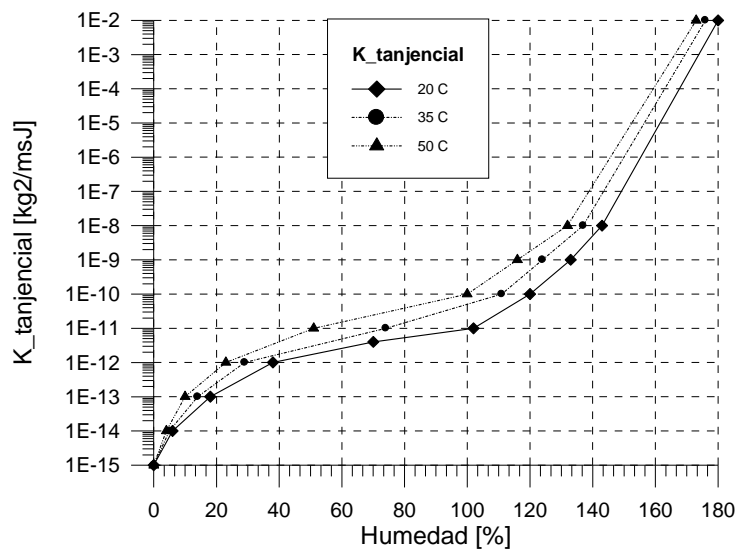


Figura A2. Coeficientes de conductividad tangencial de humedad.

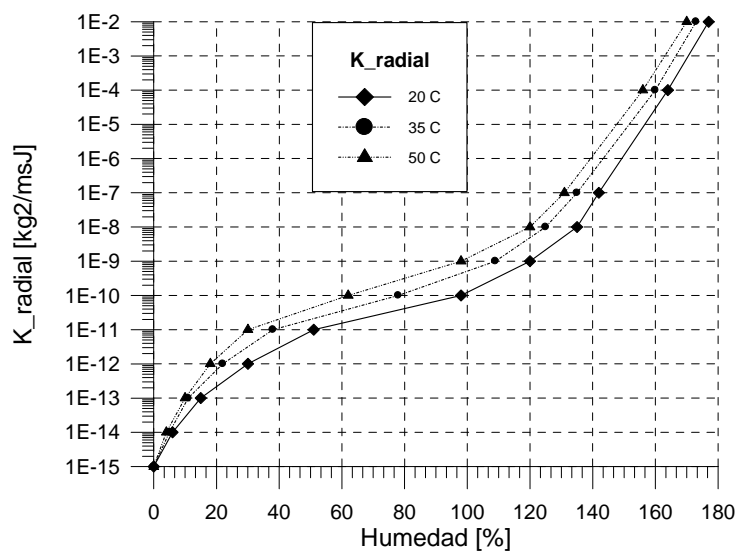


Figura A3. Coeficientes de conductividad radial de humedad.