UNIVERSIDAD DEL BÍO-BÍO

FACULTAD DE EDUCACIÓN Y HUMANIDADES

ESCUELA DE PEDAGOGÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

UNA ARTICULACIÓN DE CONCEPTOS DEL ÁLGEBRA LINEAL EN UN CONTEXTO ABSTRACTO DE GRUPO DE LIE DE MATRICES.

Memoria para optar al Título de Profesor de Educación Media en Educación Matemática

AUTORES:
MARÍA OLGA SOTO OPAZO
FELIPE IGNACIO VALDÉS GONZÁLEZ

Profesora guía :PH.D Sara Pascual Pizarro

CHILLÁN, 2015

Índice

1. Introducción

En este trabajo pretendemos hacer un estudio de ciertos grupos de matrices y analizar sus aspectos algebraicos, geométricos y analíticos. Se trata de grupos y subgrupos de matrices cuadradas invertibles $GL_n(\mathbf{R})$, llamado *grupo lineal general*. Es interesante la relación entre lo abstracto de grupo y lo lineal de sus elementos, ya que las matrices son objetos de linealización que por sí misma posee propiedades lineales. Más aún ellas son una representación, en dimensión finita, de un objeto más general y unificador como es la *transformación lineal* (ver [6] y [7]). En este caso una transformación lineal interesante para nuestro objetivo es la *rotación en el plano euclidiano* en torno a un punto fijo, que por definición involucra los cuadros geométrico y lineal. La descripción de esta transformación lineal hace intervenir un ángulo (de rotación). Desde un punto de vista algebraico este ángulo (medido en radianes) es un número real que al sumarlo produce en las respectivas rotaciones, como transformaciones lineales, una continuación una tras la otra (composición). Esta coherencia de estructura, por un lado la suma en $\mathbf{R}$ y por otro la composición de rotaciones, es lo que se llama *homomorfismo*. Desde un punto de vista geométrico, con el apoyo de una representación gráfica de la rotación, se logra visualizar la armonía entre estas dos estructuras: suma y componer. Por otro lado, la propia idea intuitiva física de rotación es asociada a un movimiento continuo, es decir por ejemplo la rotación en plano euclidiano en torno a un punto fijo en un ángulo de $\pi/3$ radianes comienza "sin detener" hasta terminar los $\pi/3$ radianes de forma *continua* y no de 1 radián en 1 radián (*discreto*). Esta aproximación nos lleva a dar a este ángulo un estatus de *parámetro* en $\mathbf{R}$, que permite hacer un estudio *analítico* de la rotación en función de este parámetro real.

La descripción de la rotación hace intervenir las funciones trigonométricas seno y coseno las cuales son analíticas y cuyas representaciones en serie de potencias (serie de Taylor) inducen una estructura analítica sobre la propia rotación. El término lineal de esta representación en serie en torno al 0 (0 radián), que se llama *linealización* y que geométricamente es la *recta tangente*, aparece con una estructura de espacio vectorial. Este objeto geométrico/vectorial (recta tangente) y el grupo se relacionan muy estrechamente con el apoyo de una generalización de la *exponencial* de variable real a variables matriciales. En esto es importante la estructura topológica de $\mathbf{R}$.

El siguiente diagrama muestra la articulación de los diferentes puntos de vista en torno a este tipo de grupos de Lie de matrices. Los puntos de vista geométrico, lineal y análitico aparecen inducidos en los grupos de matrices, relacionados entre ellos: *geométrico/lineal* por un lado y *lineal/analítico* por otro, siendo el *lineal* que hace el vinculo entre los otros dos. Desde una dimensión más matemática, los dos primeros se insertan en la teoría de la *geometría vectorial* y los dos últimos en la teoría de la *geometría diferencial*. El vínculo local (a nivel de vecindades) entre estas dos teorías es la generalización de la exponencial. Esto forma parte de dos grandes teorías en matemática, por un lado *álgebras de Lie* y por otro *grupos de Lie* (ver [2]). En el presente trabajo solo hemos pretendido entregar una aproximación a estas ideas y nociones utilizando dos grupos de Lie de matrices, siempre dentro del contexto del aprendizaje de la matemática y la articulación de los diferentes conceptos de los diferentes cuadros: geométrico, lineal, analítico.

2. Objetivos

2.1. Objetivos Generales

La principal finalidad que se persigue con la realización de este seminario, es poder entregar a estudiantes de pregrado, que posean conocimientos básico-medio de álgebra abstracta, álgebra lineal, análisis matemático una aproximación a grupos de matrices con estructura diferencial, es decir grupos de Lie de matrices, de una forma simple, tratados desde un punto de vista Ad hoc a los conocimientos adquiridos en los cursos de pregrado y donde articulen los conceptos, sin perder regularidad matemática.

2.2. Objetivos Específicos

1. Conocer los conceptos básicos sobre los cuales se construyen los grupos de Lie de matrices.
2. Articular conceptos unificadores del álgebra lineal utilizando distintos puntos de vista para poner en acción a través de álgebra de matrices.

3. Preliminares

En esta sección se definirán algunos conceptos que se considera necesario el lector maneje antes de comenzar con el estudio de la teoría de Lie.

3.1. Conceptos Algebraicos

Recordemos que una *operación binaria interna* sobre un conjunto G es una función de $G \times G$ sobre G. Un *grupo* es un par ordenado $(G, *)$ formado por un conjunto no vacío G y una operación binaria interna $*$ de G que satisface:

1. *asociatividad*: $(a * b) * c = a * (b * c)$ para todo $a, b, c \in G$
2. *elemento neutro*: existe un elemento $e \in G$ tal que $a * e = a = e * a$ para todo $a \in G$
3. *elemento inverso*: para cada $a \in G$ existe $a' \in G$ que satisface $a * a' = e = a' * a$.

   El elemento a' se llama *inverso* de a y se denota por $a' = a^{-1}$.

Un grupo $(G, *)$ se dice *conmutativo* si $a * b = b * a$ para todo $a, b \in G$.

En general un grupo abstracto lo denotaremos por G y $a * b$ por ab. Si la operación binaria es la suma, $a * b$ se denota por $a + b$ y se dice que G es un grupo *abeliano.*

Un *subgrupo* H de G es un subconjunto no vacio de G que es un grupo con la operación de G.

Un *homomorfismo* de un grupo $(G_1, \cdot)$ sobre un grupo $(G_2, *)$ es una función $\phi : G_1 \to G_2$ tal que

$$\phi(x \cdot y) = \phi(x) * \phi(y) \qquad \text{para todo } x, y \in G_1 \tag{1}$$

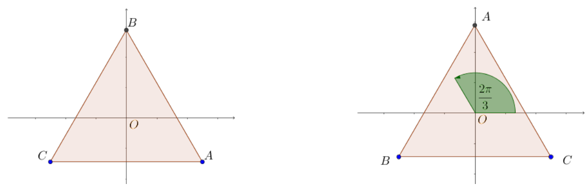
Un *isomorfismo* entre los grupos G_1 y G_2 es un homomorfismo de grupos biyectivo. Un *automorfismo* de un grupo G es un isomorfismo de G sobre si mismo.

Algunos ejemplos de grupos:

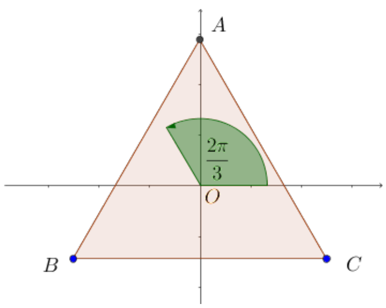
1. *Grupos numéricos.* La suma usual define una estructura de grupo abeliano sobre los conjuntos numéricos de los *números enteros* ($\mathbf{Z}$), *números racionales* ($\mathbf{Q}$), *números reales* ($\mathbf{R}$) y *números complejos* ($\mathbf{C}$).
   De forma análoga la multiplicación o producto usual define una estructura de grupo conmutativo sobre $\mathbf{Q}^\times = \mathbf{Q} - \{0\}$, $\mathbf{R}^\times = \mathbf{R} - \{0\}$ y $\mathbf{C}^\times = \mathbf{C} - \{0\}$. En particular los *números reales positivos* $\mathbf{R}^+$ es un subgrupo de $\mathbf{R} - \{0\}$.
2. *Grupo residual.* Sea $n \in \mathbf{N}$ y $\mathbf{Z}_n$ los restos residuales modulo n. Entonces $(\mathbf{Z}_n, +_n)$ es un grupo con la suma modulo n.
3. *Grupos geométricos.* El conjunto de las *simetrías* del poligono regular de n lados ($n \geq 3$), forman un grupo bajo la composición de funciones. Este grupo se llama *grupo diedrico* de orden n y se denota por D_n. Las simetrías de un polígono regular de n lados se componen de n rotaciones en sentido positivo en ángulos de $\frac{2k\pi}{n}$ radianes, con $k = 1, 2, \ldots, n$ y de n

reflexiones correspondientes a los n ejes de simetría del polígono. En particular, las rotaciones y las reflexiones corresponden a un reordenamiento de los vértices del triángulo, así el triángulo original ΔABC bajo la acción de r_1 está dado por

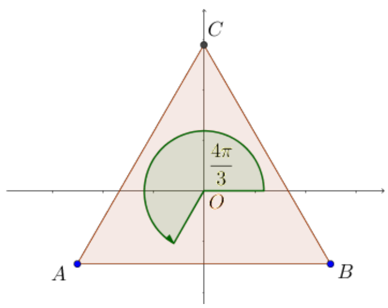
$$(A, B, C) \xrightarrow{r_1} (C, A, B)$$



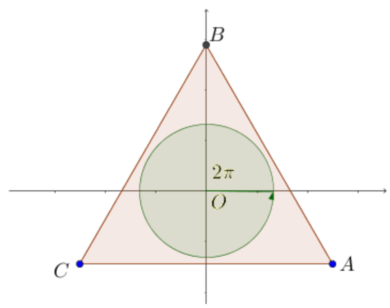
Así todas las simetrias se pueden visualizar como:



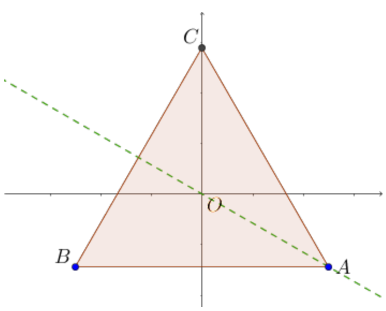
r_1



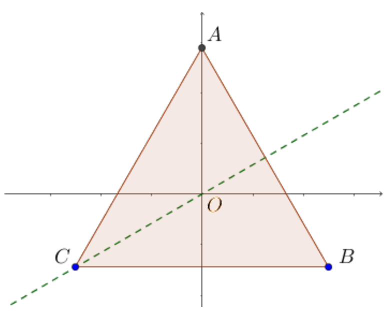
r_2



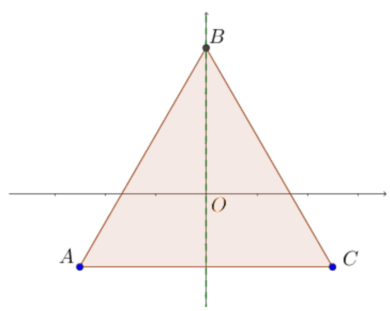
r_3



s_1



s_2



s_3

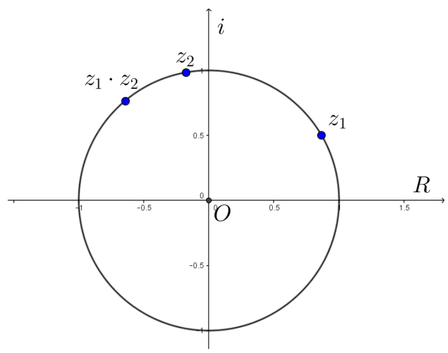
Al realizar sucesivas rotaciones y reflexiones sobre ΔABC podemos construir el siguiente cuadro de grupo

$\circ$	$\mathbf{r_1}$	$\mathbf{r_2}$	$\mathbf{r_3}$	$\mathbf{s_1}$	$\mathbf{s_2}$	$\mathbf{s_3}$
$\mathbf{r_1}$	r_1	r_2	r_3	s_1	s_2	s_3
$\mathbf{r_2}$	r_2	r_3	r_1	s_2	s_3	s_1
$\mathbf{r_3}$	r_3	r_1	r_2	s_3	s_1	s_2
$\mathbf{s_1}$	s_1	s_3	s_2	r_1	r_3	r_2
$\mathbf{s_2}$	s_2	s_1	s_3	r_2	r_1	r_3
$\mathbf{s_3}$	s_3	s_2	s_1	r_3	r_2	r_1

Cuadro 1: cuadro de grupo.

4. *Grupo de permutaciones.* Para un $n \in \mathbf{N}$, se define una *permutación* de n objetos como una biyección entre estos objetos. El conjunto de todas las permutaciones de n objetos, denotado por $\mathfrak{S}_n$, define un grupo bajo la composición de funciones y se llama *grupo simétrico de n objetos*. Por ejemplo el grupo simétrico $\mathfrak{S}_3$ es isomorfo al grupo diedrico D_3.

5. *El grupo modular.* El conjunto $U(1) = \{z \in \mathbf{C} | \, |z| = 1\}$ provisto del producto de los números complejos es un subgrupo de $\mathbf{C}^{\times}$. Se puede visualizar este grupo como la circunfenrencia en el plano complejo de radio uno.



6. *El grupo toro complejo* $T^n = U(1) \times \cdots \times U(1)$ (n copias).

7. *Grupos Clásicos.* Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo K. El conjunto de todos los automorfismos lineales de V forma un grupo con la composición de funciones. Este grupo se llama *grupo lineal general* y se denota por $GL(K, V)$. En particular si V tiene dimensión finita n entonces $GL(K, V)$ es isomorfo al grupo $GL_n(K)$ de matrices cuadradas invertibles de orden n con coeficientes en K. En particular se distinguen los casos: real, complejo o finito de acuerdo a si $K = \mathbf{R}, K = \mathbf{C}$ o $K = \mathbf{F}_q$ un cuerpo finito, respectivamente.

   Entre algunos subgrupos importantes de $GL_n(\mathbf{R})$ se tiene:

   a) *Grupo lineal especial*: $SL_n(\mathbf{R}) = \{A \in GL_n(\mathbf{R}) \mid \det(A) = 1\}$.

   b) *Grupo ortogonal real*: $O(n, \mathbf{R}) = \{A \in GL_n(\mathbf{R}) \mid AA^t = I\}$

   c) *Grupo ortogonal especial real*: $SO(n, \mathbf{R}) = O_n(\mathbf{R}) \cap SL_n(\mathbf{R})$.

Analogamente para el caso complejo se tiene:

a) *Grupo lineal especial*: $SL_n(\mathbf{C}) = \{A \in GL_n(\mathbf{C}) \mid \det(A) = 1\}$.

b) *Grupo unitario complejo*: $U(n, \mathbf{C}) = \{A \in GL_n(\mathbf{C}) \mid AA^* = I\}$

c) *Grupo unitario especial complejo*: $SU(n, \mathbf{C}) = U_n(\mathbf{C}) \cap SL_n(\mathbf{C})$.

8. *Grupo Afín.* Sea K un cuerpo. Se define el *grupo afín* de dimensión n sobre K al grupo

$$AF_n(K) = \left\{ \begin{pmatrix} A & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| A \in GL_n(K), v \in K^n \right\}$$

4. Grupos de Lie de matrices

En general si V es un espacio vectorial sobre $\mathbf{R}$ de dimensión finita, denotaremos $End(V)$ el álgebra de todos los endomorfismos lineales de V y $GL(V)$ el grupo de automorfismos lineales de V. En el caso particular que V es un espacio vectorial sobre $\mathbf{R}$ de dimensión n entonces V es isomorfo a $\mathbf{R}^n$, $End(V)$ es isomorfo al álgebra $M_n(\mathbf{R})$ de matrices cuadradas $n \times n$ con coeficientes en $\mathbf{R}$ y $GL(V)$ es isomorfo al grupo $GL_n(\mathbf{R})$ de matrices cuadradas invertibles de orden n.

Denotemos por $|| \ ||$ una norma sobre V. Esta norma induce una norma sobre $Mn(R)$, llamada la *norma del supremo*, que tambien denotaremos por $|| \ ||$, definida por

$$\|A\| = \sup \left\{ \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \ \middle| \ x \in \mathbf{R}^n, x \neq 0 \right\} \quad \text{con } A \in M_n(\mathbf{R}) \tag{2}$$

A partir de esta norma se define la *métrica*

$$\rho(A, B) = \|A - B\|$$

De esta forma $(M_n(\mathbf{R}), \rho)$ es un espacio métrico. Esta métrica induce una topología la cual es caracterizada por la base de vecindades abiertas dadas por los subconjuntos:

$$\mathcal{B}_r(A) = \left\{ A' \in M_n(\mathbf{R}) \mid \left\| A' - A \right\| < r \right\} \qquad \text{con } r > 0, \ A \in M_n(\mathbf{R}) \tag{3}$$

El subconjunto $\mathcal{B}_r(A)$ se llama *bola abierta de radio r y centro A*.
Puesto que el determinante $\det : M_n(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}$ es una función continua (ya que es una expresión polinomial de los coeficientes matriciales), se deduce que $GL_n(\mathbf{R})$ es un subconjunto abierto de $M_n(\mathbf{R})$. Luego la norma y métrica de $M_n(\mathbf{R})$ se inducen sobre $GL_n(\mathbf{R})$, haciendo de éste último un espacio métrico y topológico.

Diremos que un grupo es un *grupo de Lie de matrices* si es un subespacio cerrado (topológicamente) de $GL(V)$ para algún V espacio vectorial de dimensión finita sobre $\mathbf{R}$.

Algunos ejemplos de grupos de Lie de matrices son:

1. $GL_n(\mathbf{R})$ es un grupo de Lie de matrices para todo n natural. En especial $\mathbf{R}^\times = GL_1(\mathbf{R})$ es un grupo de Lie de matrices.

2. El grupo aditivo $\mathbf{R}$ es un grupo de Lie de matrices ya que es un subgrupo cerrado de $GL_2(\mathbf{R})$ via el monomorfismo $x \mapsto \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. El grupo multiplicativo de los números reales positivos $\mathbf{R}^+$ es un subgrupo cerrado de $GL_2(\mathbf{R})$ via el monomorfismo $x \mapsto \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Luego es un grupo de Lie de matrices.

4. El grupo especial $SL_n(\mathbf{R})$ es un grupo de Lie de matrices ya que el determinante es una función continua, $SL_n(\mathbf{R}) = \det^{-1}(\{1\})$ y $\{1\}$ es cerrado en $\mathbf{R}$.

5. El grupo ortogonal $O_n(\mathbf{R})$ y especial ortogonal $SO_n(\mathbf{R})$ son también grupos de Lie de matrices, pues para todos las matrices en el grupo se cumple que $AA^t = I$, como el determinante es una funcion continua tenemos que $\det(A)\det(A^t) = \det(I)$, esto implica que $\det(A) = \pm 1$, que son cerrados en R, por tanto $O_n(\mathbf{R})$ es cerrado. Un argumento similar ocurre con $SO_n(\mathbf{R})$.

En especial observemos que en el grupo lineal general $GL_n(\mathbf{R})$ están presentes dos estructuras: una *algebraica*, que está determinada por el producto matricial, y otra *diferenciable* heredada de la estructura diferenciable de $\mathbf{R}^{n^2}$ ya que $GL_n(\mathbf{R})$ es un abierto de $\mathbf{R}^{n^2}$. Estas estructuras son compatibles en el sentido de la siguiente proposición:

Proposición 4.1. *El producto matricial y la inversión en $GL_n(\mathbf{R})$ son funciones diferenciales de clase $\mathcal{C}^\infty$*

$$\begin{aligned} \mu : GL_n(\mathbf{R}) \times GL_n(\mathbf{R}) \to GL_n(\mathbf{R}) \qquad & (A, B) \mapsto AB \\ \iota : GL_n(\mathbf{R}) \to GL_n(\mathbf{R}) \qquad & A \mapsto A^{-1} \end{aligned}$$

Demostración. Es inmedito verificar que los coeficientes del producto matricial $\mu(A, B) = AB$ son expresiones polinomiales de los coeficientes de A y B, luego μ es diferenciable de clase $\mathcal{C}^\infty$.
Por su parte los coeficientes de la inversión $\iota(A) = A^{-1}$ son expresiones racionales de la forma $\dfrac{a'_{ij}}{\det(A)}$ donde a'_{ij} son los cofactores de $A = (a_{ij})$, luego son polinomios en los coeficientes a_{ij}. Del mismo modo $\det(A) \neq 0$ es una expresión polinomial en los coeficientes de A. Entonces los coeficientes de A^{-1} son funciones racionales en los coeficientes a_{ij} de A con denominador diferente de cero, luego diferenciable de clase $\mathcal{C}^\infty$. □

Más generalmente esta compatibilidad entre las estructuras algebraica y diferencial de $GL_n(\mathbf{R})$ es heredada sobre cualquier subgrupo cerrado de $GL_n(\mathbf{R})$. Más explicitamente
Proposición 4.2. *Sea G un subgrupo cerrado de $GL_n(\mathbf{R})$, entonces el producto y la inversión en G son funciones diferenciales de clase $\mathcal{C}^\infty$*

$$\begin{aligned} \mu : G \times G \to G \qquad & (A, B) \mapsto AB \\ \iota : G \to G \qquad & A \mapsto A^{-1} \end{aligned}$$

Demostración. Ver [3]. □

4.1. La función exponencial sobre $End(\mathbf{R}^n)$

Recordemos que en el caso particular $M_1(\mathbf{R}) = \mathbf{R}$ tenemos la existencia de la función exponencial $\exp : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^+$, la cual es analítica con expansión en serie de potencias

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Esta serie converge absolutamente para todo $x \in \mathbf{R}$.
Más generalmente es posible extender esta exponencial sobre $M_n(\mathbf{R})$ dado que la norma del supremo, definida en (2), tiene la propiedad:

$$\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\| \tag{4}$$

Esta propiedad permitir definir la función *exponencial* $\exp : M_n(\mathbf{R}) \to M_n(\mathbf{R})$ por

$$\exp(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} \qquad \text{con } A \in M_n(\mathbf{R}) \tag{5}$$

Como $\|A^n\| \leq \|A\|^n$ entonces la serie (5) converge absolutamente para todo $A \in M_n(\mathbf{R})$ y uniformemente sobre cualquier $\mathcal{B}_r(0)$. Así la exponencial definida en (5) define una función analitica sobre $M_n(\mathbf{R})$.

Algunas propiedades algebraicas de la exponencial son las siguientes:
Proposición 4.3. *Si A y B son dos matrices que conmutan, entonces*

$$\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B) \tag{6}$$

Demostración. Puesto que la serie exponencial (5) converge absolutamente, entonces se tiene

$$\begin{aligned}
\exp(A)\exp(B) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B^n}{n!} \\
&= \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{A^n B^n}{n!m!} \\
&= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \left(\sum_{n+m=l}^{\infty} \frac{l!}{m!n!} A^n B^m \right) \\
&= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \left(\sum_{k=0}^{l} \binom{l}{k} A^k B^{l-k} \right)
\end{aligned}$$

Puesto que A y B conmutan, por el teorema del binomio se tiene $\sum_{k=0}^{l} \binom{l}{k} A^k B^{l-k} = (A+B)^l$. Luego sustituyendo en la relación anterior

$$\begin{aligned} &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!}(A+B)^l \\ &= \exp(A+B) \end{aligned}$$

que es lo que se queria demostrar. □

En particular de (5) se deduce que $\exp(0) = I$ (matriz identidad). Si esto lo articulamos con la relación (6) aplicado a las matrices A y $-A$, que obviamente conmutan, tenemos

$$\begin{aligned} \exp(A)\exp(-A) &= \exp(A + (-A)) = \exp(0) = I \\ \exp(-A)\exp(A) &= \exp((-A) + A) = \exp(0) = I \end{aligned}$$

es decir $\exp(A)$ es invertible con inversa $\exp(-A)$ para toda matriz A. Luego se tiene la siguiente:

Proposición 4.4. *Para todo $A \in M_n(\mathbf{R})$ la exponencial $\exp(A)$ es una matriz invertible de inversa*

$$\exp(A)^{-1} = \exp(-A)$$

Proposición 4.5. 1. *Sea $A = PDP^{-1}$ con P invertible, entonces*

$$\exp(A) = P\exp(D)P^{-1}$$

En particular si $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$ *es diagonal, entonces*

$$\exp(D) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

2. *Para cualquier matriz cuadrada A se tiene*

$$\det(\exp(A)) = \exp(\operatorname{tr}(A)) \tag{7}$$

Demostración.
1. De acuerdo a la definición (5), se tiene

$$\begin{aligned} \exp(A) = \exp(PDP^{-1}) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(PDP^{-1})^n \\ &= I + PDP^{-1} + \frac{1}{2!}(PDP^{-1})^2 + \frac{1}{3!}(PDP^{-1})^3 + \cdots \end{aligned}$$

como $(PDP^{-1})^n = PD^nP^{-1}$ para todo n entero $n \geq 0$, entonces

$$\begin{aligned}
&= I + PDP^{-1} + \frac{1}{2!}PD^2P^{-1} + \frac{1}{3!}PD^3P^{-1} + \cdots \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}PD^nP^{-1} \\
&= P\exp(D)P^{-1}
\end{aligned}$$

La expresión de $\exp(D)$ con D la matriz diagonal se deduce de (5) y de la convergencia absoluta de las series correspondientes.

2. Sea A una matriz cuadrada, entonces puede ser reescrita según su forma de jordan por

$$A = PJP^{-1}$$

Por la parte 1 anterior tenemos que

$$\exp(A) = P\exp(J)P^{-1}$$

El determinante de esta expresión está dada por

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \det(P)\det(J)\det(P^{-1}) \qquad \text{ver ([5])} \\
&= \det(J)
\end{aligned}$$

Como J es una matriz de Jordan entonces su exponencial está dada por

$$\exp(J) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & * & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & * & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

y su determinante es

$$\det(\exp(J)) = e^{\lambda_1}e^{\lambda_2}\cdots e^{\lambda_n} = \exp\sum_{i=1}^{n}\lambda_i$$

donde λ_n son son los valores propios de la matriz A, como la suma de los valores propios de una matriz A es igual a su traza (ver [4]), tenemos que

$$\det(\exp(A)) = \det(\exp(J))$$

$$\det(\exp(A)) = \exp\sum_{i=1}^{n}\lambda_i$$

$$\det(\exp(A)) = \exp(tr(A))$$

$\square$

Proposición 4.6. *Si* $A \in M_n(\mathbf{R})$ *es antisimétrica entonces* $\exp(A)$ *es ortogonal.*

Demostración. Por la convergencia absoluta de la exponencial y la linealidad de la transposicion se tiene $(\exp(A))^t = exp(A^t)$. Luego como A es antisimetrica, $A^t = -A$, entonces

$$\begin{aligned}\exp(A)(\exp(A))^t &= \exp(A)\exp(A^t)\\ &= \exp(A)\exp(-A)\\ &= \exp(A-A)\\ &= \exp(0) = I\end{aligned}$$

es decir, $\exp(A)$ es ortogonal. □

Entre algunas propiedades analíticas de la exponencial podemos extraer aquella que dice relación con la inversión. Como una aplicación del teorema de la función inversa es posible establecer la inversión local de la exponencial $\exp : M_n(\mathbf{R}) \to GL_n(\mathbf{R})$. En efecto la exponencial es una función analítica, luego posee diferencial para todo matriz $A \in M_n(\mathbf{R})$. La diferencial de la exponencial en A es una transformación lineal de $M_n(\mathbf{R})$ en $M_n(\mathbf{R})$. En particular si denotamos por $D\exp(0)$ la diferencial de la exponencial en 0 (matriz cero) esta definida por

$$D\exp(0)(B) = \lim_{t\to 0} \frac{\exp(tB) - \exp(0)}{t} \tag{8}$$

Por (5) es inmediato concluir que el valor de este límite es B, es decir

$$D\exp(0)(B) = B,$$

o equivalentemente $D\exp(0)$ es la transformación lineal identidad de $M_n(\mathbf{R})$.

Luego por el teorema de la función inversa la exponencial exp es invertible sobre una vecindad abierta de 0. Más explicitamente se tiene la siguiente:

Proposición 4.7. *Para* $r > 0$ *suficientemente pequeño, la restricción de la exponencial a* $\mathcal{B}_r(0)$ *es una biyección sobre una vecindad abierta de* I *en* $GL_n(\mathbf{R})$*. Más precisamente, se tiene* $\exp(\mathcal{B}_r(0)) \subseteq \mathcal{B}_s(I)$ *con* $s = e^r - 1$

$$\begin{tikzcd} M_n(\mathbf{R}) \arrow[r, "\exp"] & GL_n(\mathbf{R}) \\ \mathcal{B}_r(0) \arrow[u, hook] \arrow[r, "\simeq", "\exp"'] & \mathcal{B}_s(I) \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

Como una aplicación de esta proposición, tenemos

Proposición 4.8. *Consideremos un número real positivo* r *tal que* $r < \ln 2$*. Para* $A \in \mathcal{B}_r(0)$ *la matriz* $S = \exp(\frac{A}{2})$ *es una raiz cuadrada de* $\exp(A)$*, es decir* $S^2 = \exp(A)$*. Aún más,* S *es la única raíz cuadrada de* $\exp(A)$ *contenida en* $\exp(\mathcal{B}_r(0))$*.*

Demostración. La relación $S^2 = \exp(A)$ es inmediata a partir de la proposición 4.3.
Luego solo es necesario probar la unicidad de S. Para ello observemos que por la proposición 4.7 la restricción de la exponencial a $\mathcal{B}_r(0)$ es una biyección sobre $B_s(I)$ con $s = e^r - 1$

$$\exp : \mathcal{B}_r(0) \xrightarrow{\simeq} \mathcal{B}_s(I)$$

En este caso r es tal que $r < \ln 2$, de donde $0 < s < 1$. Luego $\mathcal{B}_s(I) \subseteq \mathcal{B}_1(I)$ de donde $\exp(\mathcal{B}_r(0)) \subseteq \mathcal{B}_1(I)$.
Denotemos por $T = \exp(A)$. Supongamos que R es otra matriz diferente de S contenida en $\exp(\mathcal{B}_r(0))$ tal que $R^2 = T$. Luego como $\exp(\mathcal{B}_r(0)) \subseteq \mathcal{B}_1(I)$, entonces $S, R \in \mathcal{B}_1(I)$, es decir

$$||S - I|| < 1 \quad \text{y} \quad ||R - I|| < 1$$

Sean

$$X = S - I \quad \text{e} \quad Y = R - I$$

o equivalentemente

$$S = I + X \quad \text{y} \quad R = I + Y$$

Como $S \neq R$ entonces $X \neq Y$. Además

$$||X|| < 1 \qquad \text{e} \qquad ||Y|| < 1.$$

Por otro lado del hecho que $S^2 = T = R^2$ se deduce que $(I + X)^2 = (I + Y)^2$. Desarrollando el cuadrado del binomio en ambos lados se tiene que

$$2X + X^2 = 2Y + Y^2$$

o equivalentemente

$$2(X - Y) = Y(Y - X) + (Y - X)X$$

De donde aplicando norma, se obtiene la relación

$$2||X - Y|| \leq ||Y|| ||Y - X|| + ||Y - X|| ||X|| = \big(||Y|| + ||X||\big)||Y - X||$$

es decir

$$2||X - Y|| \leq \big(||Y|| + ||X||\big)||Y - X||$$

Como $X \neq Y$ entonces $||Y - X||$ es un número real diferente de cero y positivo, luego la relación anterior equivale a

$$2 \leq ||Y|| + ||X||$$

Pero por otro lado $||X|| < 1$ e $||Y|| < 1$, de donde

$$||Y|| + ||X|| < 1 + 1 = 2$$

Lo cual es una contradicción. Por lo tanto $R = S$.

$\square$

4.2. Subgrupos Uniparamétricos

Para V un espacio vectorial de dimensión finita diremos que un *subrgupo uniparamétrico* de transformaciones lineales de V es un homomorfismo continuo

$$\Phi : \mathbf{R} \to GL(V)$$

En otras palabras, un subgrupo uniparamétrico es una colección $\{\Phi(t) \,|\, t \in \mathbf{R}\}$ de transformaciones lineales de V que satisface las siguientes condiciones:

1. *Condición de homomorfía*

$$\Phi(t+s) = \Phi(t)\Phi(s) \qquad \text{para todo } t, s \in \mathbf{R}$$

2. *Condición topológica*

$$\Phi(t) \text{ depende continuamente de } t$$

A modo de ejemplo podemos indicar dos subgrupos uniparametricos simples. Por un lado la condición de homomorfia implica $\Phi(0) = I$ (identidad de $GL(V)$). Luego un ejemplo trivial es la *función constante identidad*

$$\Phi_0 : \mathbf{R} \to GL(V) \qquad \text{tal que } \Phi_0(t) = I \text{ para todo } t \in \mathbf{R}$$

Otra ejemplo es la función

$$\Phi : \mathbf{R} \to GL_2(\mathbf{R}) \qquad \text{tal que } \Phi(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En este último ejemplo observemos que

$$\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Además la matriz $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ es nilpotente, es decir $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^n$ es la matriz cero para todo $n \in \mathbf{N}, n \geq 2$. Luego la relación anterior se reescribe como:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{t^2}{2!} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 + \frac{t^3}{3!} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^3 + \cdots + \frac{t^n}{n!} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^n + \cdots \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^n \\
&= \exp(tN)
\end{aligned}$$

con $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Algo similar ocurre con el primero ejemplo ya que por definición (5) $\exp(0) = I$, entonces $\Phi_0(t) = \exp(tN)$ con N la matriz cero.

Estos dos ejemplos son casos particulares de una colección de subgrupos uniparamétricos construidos desde la proposición 4.3. En efecto esta proposición establece inmediatamente que para cualquier matriz $A \in M_n(\mathbf{R})$

$$\exp_A : \mathbf{R} \to GL_n(\mathbf{R}) \qquad \text{tal que } \exp_A(t) = \exp(tA) \tag{9}$$

es un homomorfismo de grupos. Además $\exp_A$ es continua dado que es la compuesta de funciones continuas. En conclusión podemos enunciar la siguiente proposición:

Proposición 4.9. *Para toda matriz $A \in M_n(\mathbf{R})$ la función $\exp_A : \mathbf{R} \to GL_n(\mathbf{R})$ es un subgrupo uniparamétrico de transformaciones lineales de $\mathbf{R}^n$.*

Esta proposición suministra una colección de subgrupos uniparamétricos de transformaciones lineales de $\mathbf{R}^n$, todos de tipo *"exponencial"*. Más generalmente el siguiente teorema establece que todo subgrupo uniparamétrico de transformaciones lineales de $\mathbf{R}^n$ es de tipo exponencial:

Teorema 4.10. *Todo subgrupo uniparamétrico de transformaciones lineales de $\mathbf{R}^n$ es de la forma exponencial $\exp_A$ con $A \in M_n(\mathbf{R})$.*

La matriz A se llama generador infinitesimal del subgrupo uniparamétrico.

Demostración. Consideremos $\Phi : \mathbf{R} \to GL_n(\mathbf{R})$ un subgrupo uniparamétrico. Se debe demostrar la existencia de una matriz A de modo de tener

$$\Phi(t) = \exp(tA) \quad \text{para todo } t \in \mathbf{R}$$

La idea central para la existencia de esta matriz se basa en:

- la construcción por recurrencia de un subconjunto denso en $\mathbf{R}$.

Para esta construcción son necesarias la continuidad y homomorfia de Φ, y las proposiciones 4.7 y 4.8 las cuales darán el punto inicial a la recurrencia en coherencia con el subgrupo uniparamétrico Φ y la función exponencial.

En primer lugar como $\Phi(0) = I$ (matriz identidad), para r positivo tal que $r < \ln 2$, por la continuidad de Φ y la proposición 4.7 es posible encontrar $\epsilon > 0$ tal que

$$\Phi(t) \in \exp(\mathcal{B}_r(0)) \quad \text{para todo } t \in \mathbf{R} \text{ tal que } |t| \leq \epsilon$$

Luego para este r y ϵ, se tiene

$$\Phi(\epsilon) = \exp(A_1) \qquad \text{para alguna matriz } A_1 \in \mathcal{B}_r(0)$$

Definamos la matriz A por

$$A = \frac{1}{\epsilon} A_1$$

Por la homomorfia de los subgrupos uniparamétricos Φ y $\exp_A$, se tiene que $\Phi(\frac{\epsilon}{2})$ y $\exp_A(\frac{\epsilon}{2})$ son ambas raices cuadradas de $\Phi(\epsilon) \in \exp(\mathcal{B}_r(0)$ ya que

$$\Phi(\tfrac{\epsilon}{2})^2 = \Phi(\tfrac{\epsilon}{2} + \tfrac{\epsilon}{2}) = \Phi(\epsilon)$$
$$\exp_A(\tfrac{\epsilon}{2})^2 = \exp(\tfrac{\epsilon}{2}A)^2 = \exp(\tfrac{\epsilon}{2}A + \tfrac{\epsilon}{2}A) = \exp(\epsilon A) = \exp(A_1) = \Phi(\epsilon)$$

Luego por la proposición 4.8 se concluye que

$$\Phi(\tfrac{\epsilon}{2}) = \exp(\tfrac{\epsilon}{2}A)$$

Este es el punto inicial de la recurrencia.
Por el principio de inducción no es difícil establecer que

$$\Phi(2^{-n}\epsilon) = \exp(2^{-n}\epsilon A) \quad \text{para todo } n \in \mathbf{N}$$

Para $n = 2$ tenemos

$$\Phi(\tfrac{\epsilon}{4})^2 = \Phi(\tfrac{\epsilon}{4} + \tfrac{\epsilon}{4}) = \Phi(\tfrac{\epsilon}{2})$$
$$\exp_A(\tfrac{\epsilon}{4})^2 = \exp(\tfrac{\epsilon}{4}A + \tfrac{\epsilon}{4}A) = \exp(\tfrac{\epsilon}{2}A)$$

Por el resultado anterior y por la proposicón 4.8 $\Phi(\frac{\epsilon}{4}) = \exp(\frac{\epsilon}{4}A)$.
En general suponemos que es cierto para $n = k$, debemos demostrar que se cumple para $n = k+1$

$$\Phi(\tfrac{\epsilon}{2^{k+1}})^2 = \Phi(\tfrac{\epsilon}{2^k}\tfrac{1}{2} + \tfrac{\epsilon}{2^k}\tfrac{1}{2}) = \Phi(\tfrac{\epsilon}{2^k})$$
$$\exp(\tfrac{\epsilon}{2^{k+1}}A)^2 = \exp(\tfrac{\epsilon}{2^k}\tfrac{1}{2}A + \tfrac{\epsilon}{2^k}\tfrac{1}{2}A) = \exp(\tfrac{\epsilon}{2^k}A)$$

lo que cierto para $n = k$
Considerando ahora los números reales de la forma $m2^{-n}\epsilon$ con m un entero, es inmediato concluir que

$$\Phi(m2^{-n}\epsilon) = \exp(m2^{-n}\epsilon A)$$

Luego por la densidad en $\mathbf{R}$ de los números reales $m2^{-n}\epsilon$ (lema 4.11) y la continuidad de Φ se obtiene

$$\Phi(t) = \exp(tA) \qquad \text{para todo } t \in \mathbf{R}$$

□

Lema 4.11. *Para un número real positivo ϵ, el subconjunto $\left\{m2^{-n}\epsilon \,\middle|\, m \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{N}\right\}$ es denso en $\mathbf{R}$.*

Demostración. Si el conjunto anterior es denso, entonces siempre existirá un numero $\frac{m''}{2^{n''}}\epsilon$ tal que

$$\frac{m}{2^n}\epsilon < \frac{m''}{2^{n''}}\epsilon < \frac{m'}{2^{n'}}\epsilon$$

donde

$$\frac{m}{2^n}\epsilon < \frac{m'}{2^{n'}}\epsilon$$

de esta desigualdad podemos concluir que

$$2^{n'}m\epsilon < 2^n m'\epsilon \tag{10}$$

denotemos a $\frac{m''}{2^{n''}}$ por $\frac{(2^{n'}m+2^n m')\epsilon}{2^n 2^{n'}2}$, en general esta expresión pertence al conjunto para todo $m \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{N}$. debemos probar que se cumple

$$\frac{(2^{n'}m + 2^n m')\epsilon}{2^n 2^{n'}2} < \frac{m'}{2^{n'}}\epsilon \tag{11}$$

$$\frac{m}{2^n}\epsilon < \frac{(2^{n'}m + 2^n m')\epsilon}{2^n 2^{n'}2} \tag{12}$$

Supongamos que no es cierto para (11), entonces

$$\begin{aligned}
\frac{(2^{n'}m + 2^n m')\epsilon}{2^n 2^{n'}2} &> \frac{m'}{2^{n'}}\epsilon \\
\frac{2^{n'}(m + \frac{2^n m'}{2^{n'}})}{2^n 2^{n'}2}\epsilon &> \frac{m'}{2^{n'}} \\
\frac{(m + \frac{2^n m'}{2^{n'}})}{2^n 2}\epsilon n &> \frac{m'}{2^{n'}} \\
2^{n'}m\epsilon + 2^n m'\epsilon &> 2^n 2m'\epsilon \\
2^{n'}m\epsilon &> 2^n m'
\end{aligned}$$

Esto es una contradiccion pues la expresion (10) no lo permite, para la expresión (12) el proceso es análogo. De esta forma podemos concluir que el conjunto $\{m2^{-n}\epsilon \mid m \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{N}\}$ es denso en $\mathbf{R}$ □

4.3. Algebra de Lie de un Grupo de Lie de matrices

Para un grupo de Lie de matrices G se define el subconjunto de $M_n(\mathbf{R})$, llamado *álgebra de Lie de* G:

$$\mathfrak{g} = \{A \in M_n(\mathbf{R}) \mid \exp(tA) \in G \quad \text{para todo } t \in \mathbf{R}\} \tag{13}$$

El teorema 4.12 establece la estructura algebraica de $\mathfrak{g}$ para lo cual es preciso antes establecer, en general, el concepto de álgebra de Lie

Un *álgebra de Lie* es un espacio vectorial $\mathfrak{g}$ provisto de un producto, llamado *conmutador o corchete de Lie*

$$[\ ,\ ] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$$

que satisface:

1. *bilinealidad*: para todo $u, v, w \in \mathfrak{g}$, $a, b \in \mathbf{R}$ se tiene

$$[au + bv, w] = a[u, w] + b[v, w]$$
$$[u, av + bw] = a[u, v] + b[u, w]$$

2. *antisimétria*: para todo $u, v \in \mathfrak{g}$ se tiene

$$[u, v] = -[v, u]$$

3. *identidad de Jacobi*: para todo $u, v, w \in \mathfrak{g}$ se tiene

$$[u, [v, w]] + [v, [w, u]] + [w, [u, v]] = 0$$

Algunos ejemplos de algebras de Lie son:

1. El espacio vectorial $M_n(K)$ de matrices cuadradas $n \times n$ con coeficientes en un cuerpo K es un álgebra de Lie con el conmutador usual $[X, Y] = XY - YX$. Esta álgebra se denota por $\mathfrak{g}l_n(K)$ y se llama *álgebra de Lie general*.

2. La álgebra de Lie $\mathfrak{g}l_n(K)$ induce una estructura álgebra de Lie sobre los siguientes subespacios vectoriales:

$$\mathfrak{s}l_n(K) = \{A \in \mathfrak{g}l_n(K) \mid \text{traza}(A) = 0\}$$
$$\mathfrak{o}_n(\mathbf{R}) = \{A \in \mathfrak{g}l_n(\mathbf{R}) \mid A + A^t = 0\}$$
$$\mathfrak{s}o_n(\mathbf{R}) = \{A \in \mathfrak{o}_n(\mathbf{R}) \mid \text{traza}(A) = 0\}$$
$$\mathfrak{u}_n(\mathbf{C}) = \{A \in \mathfrak{g}l_n(\mathbf{C}) \mid A + A^* = 0\}$$
$$\mathfrak{s}u_n(\mathbf{C}) = \{A \in \mathfrak{u}_n(\mathbf{C}) \mid \text{traza}(A) = 0\}$$

3. Todo espacio vectorial V sobre un cuerpo K provisto del corchete nulo $[v, v'] = 0$ para todo $v, v' \in V$ es un álgebra de Lie.

4. El espacio vectorial euclidiano canónico $\mathbf{R}^3$ provisto del corchete de Lie $[v, v'] = v \times v'$ (producto vectorial en $\mathbf{R}^3$) es un álgebra de Lie.

El siguiente teorema establece la estructura de álgebra de Lie de un grupo de Lie de matrices. La demostración de este teorema no se encuentra al alcance de este estudio y por ello reenviaremos a los lectores interesados a consultar [3] o las referencias especializadas.

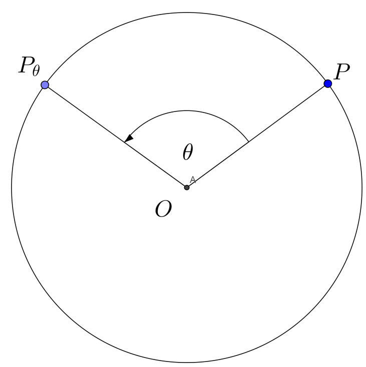
Teorema 4.12. *El álgebra de Lie de un grupo de Lie de matrices es un álgebra de Lie.*

Demostración. Ver [3]. □

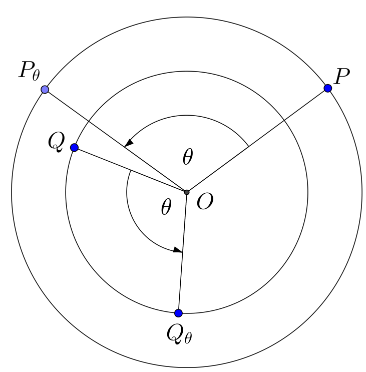
5. Rotaciones en el plano

Consideremos en el plano afín $\mathbf{R}^2$ una circunferencia con centro en el punto O y un punto P sobre la circunferencia. Para un número real fijo θ consideremos el sector circular de ángulo central θ. Esto produce un único punto P_θ sobre la circunferencia de acuerdo a la orientación geomérica respecto del radio OP: positiva si $\theta > 0$ o negativa si $\theta < 0$. Por definición se asigna $P_\theta = P$ si $\theta = 0$. De esta manera a cada punto P de $\mathbf{R}^2$ se asocia el punto P_θ con la propiedad que ambos pertenecen a la misma circunferencia. La construcción anterior define una correspondencia del plano afín $\mathbf{R}^2$ sobre si mismo que llamaremos *rotación en torno al punto O en el ángulo θ*. Más explicitamente si denotamos esta rotación por R_θ entonces

$$\begin{aligned} R_\theta : \mathbf{R}^2 &\to \mathbf{R}^2 \\ P &\mapsto P_\theta \end{aligned}$$

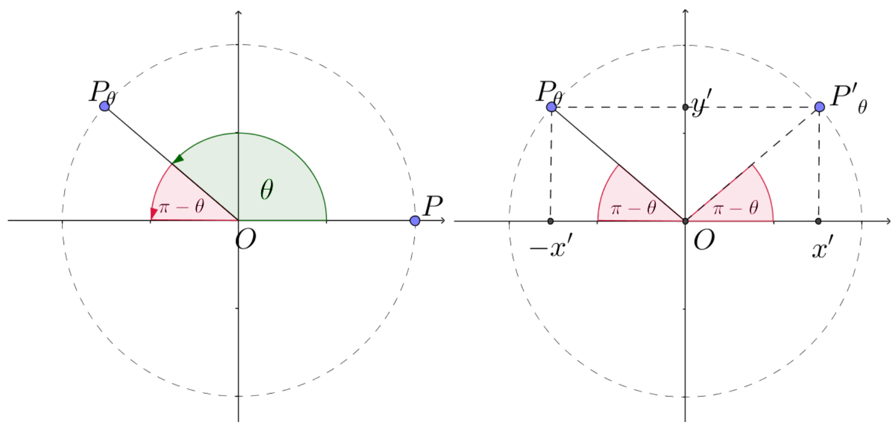


Más aún para dos puntos distintos P y Q, y sus correspondientes imagenes P_θ y Q_θ, la semejanza de los triángulos ΔPOQ y $\Delta P_\theta O Q_\theta$ permite concluir la congruencia de los segmentos $\overline{PQ}$ y $\overline{P_\theta Q_\theta}$, es decir la rotación R_θ es una transformación isométrica del plano afín $\mathbf{R}^2$.



Si suministramos a $\mathbf{R}^2$ de un sistema de coordenadas cartesianas con origen el punto O, entonces por trigonometría y semejanza de triángulos es posible describir las coordenadas cartesianas de la rotación en un ángulo θ en torno al origen de coordenadas O. Podemos considerar los siguientes casos particulares para luego llegar al caso general.

En primer lugar consideraremos el punto $P = (x, 0)$ y lo rotaremos en sentido positivo en un ángulo θ entre $\frac{\pi}{2}$ y π con respecto al centro O, como se muestra en la figura (1a).

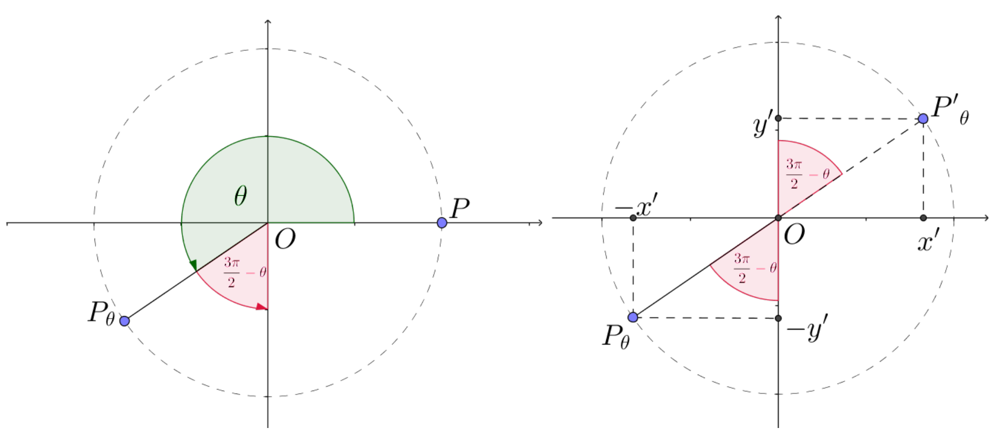


1a 1b

Ahora bien al realizar una reflexión de P_θ con respecto al eje y, obtenemos el punto P'_θ, luego los triángulos que se muestran en la figura son congruentes, de donde obtenemos la siguiente relación:

$$
\begin{aligned}
\sin(\pi - \theta) &= \frac{y'}{r} & \qquad \cos(\pi - \theta) &= \frac{x'}{r} \\
r\sin(\theta) &= |y'| & r\cos(\theta) &= |x'|
\end{aligned}
$$

Donde r es la distancia desde el origen al punto P_θ.
Ahora realizando una rotación en sentido positivo al punto $P = (x, 0)$ en un ángulo θ entre π y $\frac{3\pi}{2}$ con respecto al centro O, obtenemos el punto P_θ como se muestra en la figura.

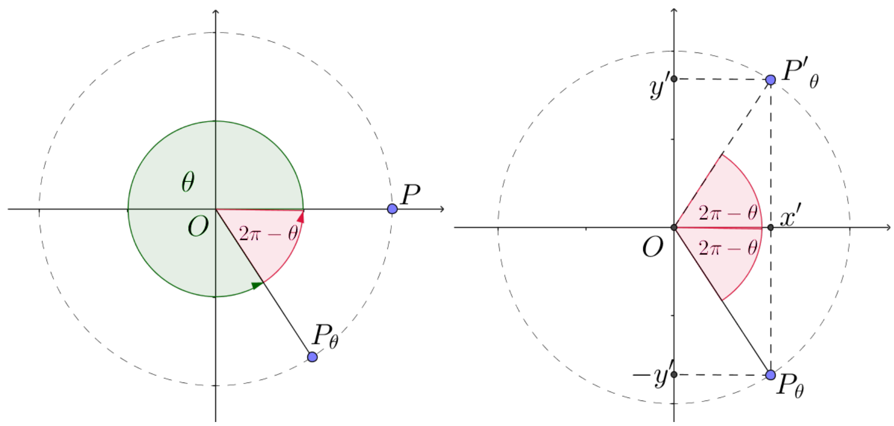


2a 2b

Ahora bien al realizar la reflexión de P_θ con respecto al eje x y luego el punto obtenido reflejarlo con respecto al eje y obtenemos el punto P'_θ, al igual que en el caso anterior los triángulos que se muestran en la figura son congruentes, de donde obtenemos la siguiente relación:

$$\begin{aligned} \sin(3\pi/2-\theta) &= \tfrac{y'}{r} & \qquad \cos(3\pi/2-\theta) &= \tfrac{x'}{r} \\ r\sin(\theta) &= |y'| & r\cos(\theta) &= |x'| \end{aligned}$$

Realizando el mismo ejercicio anterior pero ahora rotando a P en un ángulo θ entre $\frac{3\pi}{2}$ y 2π, obtenemos el punto P_θ que se muestra en la figura.

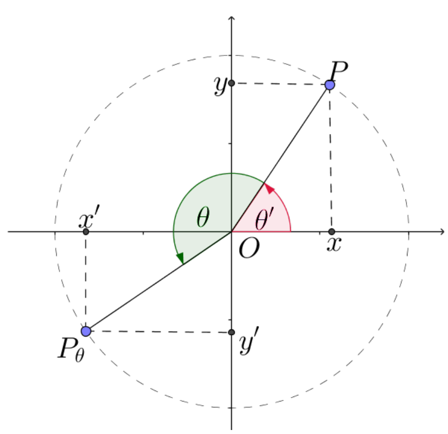


3a 3b

Ahora reflejando el punto P_θ con respecto al eje x, obtenemos el punto P'_θ. Los triángulos que se muestran en la figura son congruentes, a partir de lo cual obtenemos la relación:

$$\begin{aligned} \sin(2\pi-\theta) &= \tfrac{y'}{r} & \qquad \cos(2\pi-\theta) &= \tfrac{x'}{r} \\ r\sin(\theta) &= |y'| & r\cos(\theta) &= |x'| \end{aligned}$$

Ahora para un punto P arbitrario, tenemos:



$$\begin{array}{rcl} x & = & r\cos(\theta') \\ y & = & r\sin(\theta') \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} x' & = & r\cos(\theta+\theta') \\ x' & = & r(\cos(\theta)\cos(\theta')-\sin(\theta)\sin(\theta')) \\ x' & = & r(\cos(\theta)\frac{x}{r}-\sin(\theta)\frac{y}{r}) \\ x' & = & x\cos(\theta)-y\sin(\theta) \end{array}$$

Del mismo modo obtenemos: $y' = x\sin(\theta)+y\cos(\theta)$,es decir, en cualquier situación las coordenadas cartesianas de P_θ son

$$(x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta) \tag{14}$$

Desde un punto de vista vectorial si consideramos $\mathbf{R}^2$ con su estructura canónica de espacio vectorial normado (espacio euclideano) con base ortonormal canónica $\{\vec{i},\vec{j}\}$, cada vector v se representa en la forma

$$v = x\vec{i} + y\vec{j}$$

La norma (euclidiana) es

$$||v|| = \sqrt{x^2+y^2}$$

La relación con la estructura afín de $\mathbf{R}^2$ viene dada por: fijemos un punto O en el plano afín, que en nuestro caso será el origen de coordenadas cartesianas $O = (0,0)$. A cada punto P del plano afín le asociamos el vector del espacio vectorial $\mathbf{R}^2$, que denotaremos $\overrightarrow{P}$, por

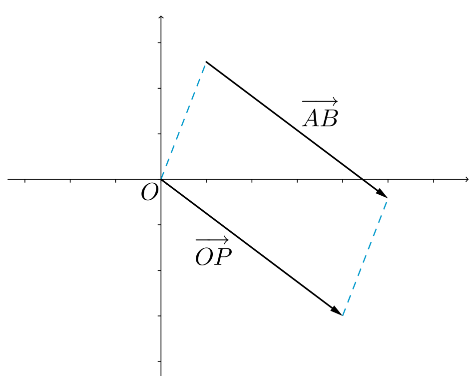
$$\overrightarrow{P} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

con x e y las coordenadas cartesianas del punto P. Más generalmente a dos puntos distintos A y B asociamos el vector

$$\overrightarrow{AB} = (c-a)\vec{i} + (d-b)\vec{j}$$

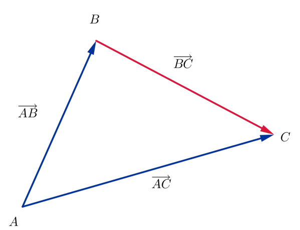
con (a,b) y (c,d) las coordenadas cartesianas de A y B respectivamente.
De lo anterior se deduce, en particular, la igualdad de los vectores $\overrightarrow{P}$ y $\overrightarrow{OP}$.

En el contexto geométrico diremos que los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{OP}$ son iguales (o equivalentes) si ellos conforman los lados opuestos de un paralelogramo en el plano afín.

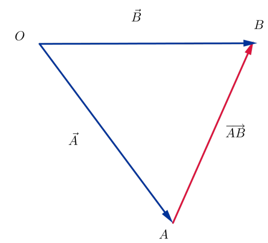


De esta manera, por la Ley de Chasles, la suma de estos vectores se corresponde con la estructura vectorial de $\mathbf{R}^2$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{AC} \qquad \text{(Ley de Chasles)} \\ \overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{B} - \overrightarrow{A} \end{aligned}$$



$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$



$\vec{AB} = \vec{B} - \vec{A}$

Entonces, la rotación R_θ se expresa como

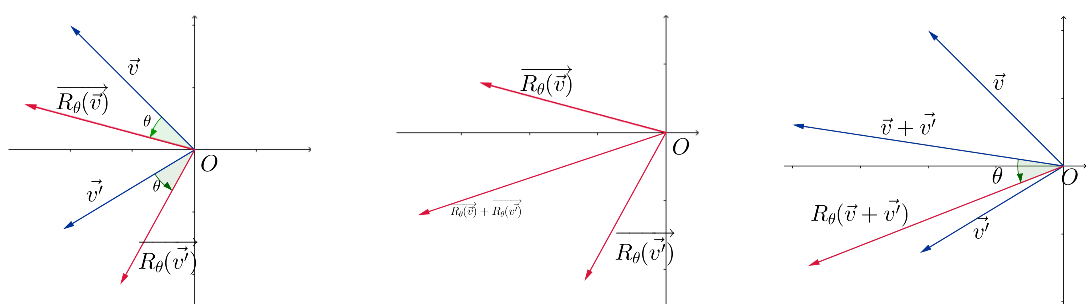
$$R_\theta(v) = (x\cos\theta - y\sin\theta)\vec{i} + (x\sin\theta + y\cos\theta)\vec{j} \qquad \text{con } v = x\vec{i} + y\vec{j} \tag{15}$$

La estructura vectorial de las *combinaciones lineales*, que sirven de base para el concepto de subespacio vectorial generado, hace que esta representación vectorial de la rotación se establezcan las relaciones lineales

$$R_\theta(v + v') = R_\theta(v) + R_\theta(v') \tag{16}$$

$$R_\theta(\lambda v) = \lambda R_\theta(v) \tag{17}$$

Podemos visualizar la primera de estas igualdades en las siguientes figuras:



Es decir, la rotación es una *transformación lineal* del espacio vectorial $\mathbf{R}^2$ sobre si mismo. Otra manera de representar un vector v es a través de una matriz columna. Para ello debemos fijar una base de $\mathbf{R}^2$, en nuestro caso la base canónica $\{\vec{i}, \vec{j}\}$. Respecto de esta base representaremos entonces el vector $v = x\vec{i} + y\vec{j}$ por la matriz

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Sin riesgo de confusión y haciendo abuso de notación, denotaremos por v tanto el vector expresado como combinación lineal de la base canónica como su representación matricial.
Con esta nueva representación la rotación R_θ esta expresada por:

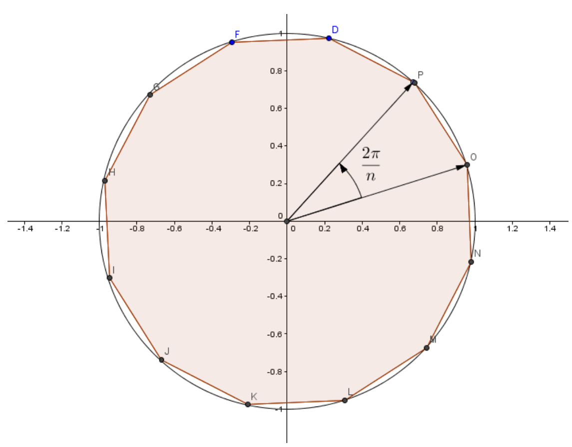
$$R_\theta(v) = \begin{pmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ x\sin\theta + y\cos\theta \end{pmatrix} \qquad \text{con } v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Haciendo uso de la estructura multiplicativa de las matrices, el lado derecho de la relación anterior produce una expresión multiplicativa de la rotación R_θ

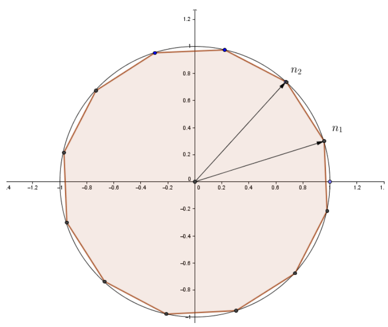
$$R_\theta(v) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \text{con } v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{18}$$

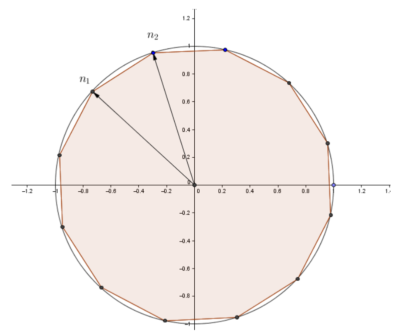
En este contexto, se constata que la rotación representa algebraicamente la *multiplicación (a la izquierda) por la matriz* $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. Esta matriz se llama *matriz de rotación*.
Con esta representación matricial de la rotación, las relaciones lineales (16) y (17) son casos particulares de las propiedades de la estructura algebraica de las matrices.

Un aspecto interesante a explorar geométricamente sobre la rotación se refiere a la *invariancia* de figuras geométricas. Por definición de rotación la circunferencia centrada en O permanece invariante a la rotación en torno a O en cualquier ángulo. Otro caso vinculado a la circunferencia es el poligono regular de n lados ($n \in \mathbf{N}, n \geq 3$) cuyo ángulo central entre dos vértices consecutivos es $\dfrac{2\pi}{n}$.



Situándo este poligono en el sistema cartesiano de $\mathbf{R}^2$ centrado en el origen de coordenadas O, no es dificil establecer que dado las propiedades simétricas del polígono regular de n lados y las propiedades ortogonales de la rotación, la figura permanece invariante al realizar una rotación con respecto al centro O en un ángulo de $\dfrac{2\pi k}{n}$ radianes, con k un número entero. Si bien es cierto que por definición una rotación de ángulo diferente de cero, el único punto que deja fijo es su centro, la aplicación de la rotación $R_{\frac{2\pi}{n}}$ produce transformación en los puntos que conforman el poligono regular, pero como figura geométrica permanece invariante; en forma y posición. Esto hace que la rotación sea un *movimiento rigido* del poligono regular de n lados. En esta situación particular, las propiedades simétricas del poligono y ortogonales de la rotación permiten establecer completamente la acción de la rotación $R_{\frac{2\pi}{n}}$ sobre el poligono regular sólo por su acción sobre los vértices; como una *permutación cíclica*.





Lo mismo sucede para las rotaciones de ángulo $\dfrac{2\pi k}{n}$ $(k \in \mathbf{Z}, k \neq 0)$. Sin embargo no es difícil verificar que la acción de la rotación $R_{\frac{2\pi k}{n}}$ se deduce por la acción ciclíca (composición) de $R_{\frac{2\pi}{n}}$. Esto indica que el conjunto de todas rotaciones que dejan invariante al poligono regular de n lados es generado por la rotación $R_{\frac{2\pi}{n}}$.

5.1. La rotación y una estructura algebrica sobre S^1

Un aspecto interesante de la invariancia desde el punto de vista algebraico se refiere a la circunferencia unitaria S^1. Analíticamente S^1 se describe como

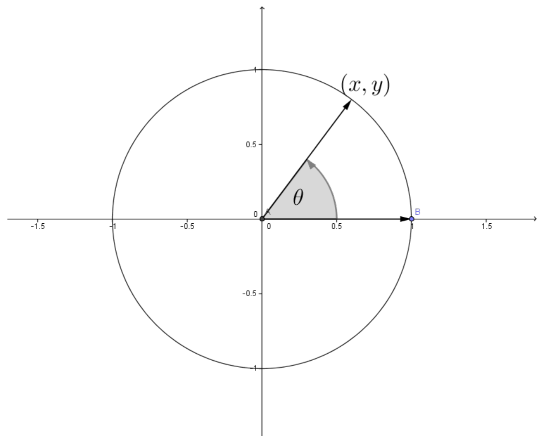
$$S^1 = \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \;\middle|\; x^2 + y^2 = 1\right\}$$

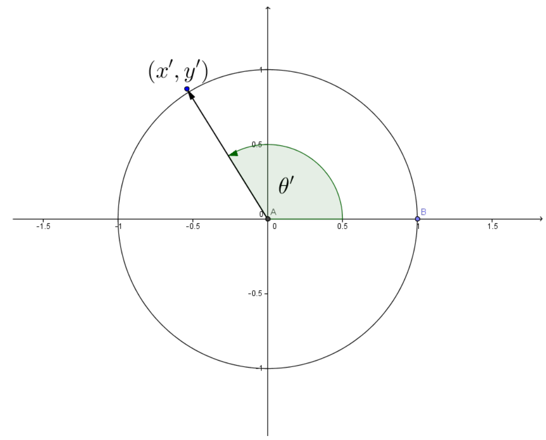
Desde el punto de vista geométrico en el plano afín $\mathbf{R}^2$ la rotación en un ángulo θ del punto A de coordenadas $(1, 0)$ corresponde al punto $P = R_\theta(A)$ de coordenadas (ver (14)):

$$x = \cos\theta \qquad\qquad y = \sin\theta \tag{19}$$

Analogamente, la rotación en un ángulo θ' del punto A de coordenadas $(1, 0)$ corresponde al punto $P' = R_{\theta'}(A)$ de coordenadas:

$$x' = \cos\theta' \qquad\qquad y' = \sin\theta' \tag{20}$$

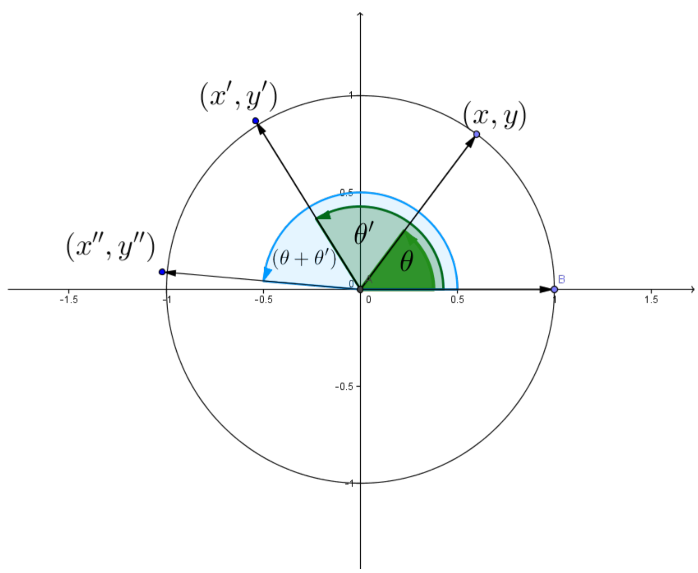




Pero si ahora utilizamos este ángulo θ' para realizar la rotación del punto P en el ángulo θ', obtenemos un tercer punto $P'' = R_{\theta'}(P)$ cuyas coordenadas cartesianas son (ver (14)):

$$x'' = x\cos\theta' - y\sin\theta' \qquad\qquad y'' = x\sin\theta' + y\cos\theta' \tag{21}$$

Si sustituimos en (21) las coordenadas de P', dadas en (20), se obtienen las coordenadas de P''



expresadas en términos de las coordenadas de P y P' como

$$x'' = xx' - yy' \qquad\qquad y'' = xy' + yx' \tag{22}$$

Estas relaciones definen un *producto o multiplicación* entre los puntos de S^1. Si denotamos por $\odot$ este producto, las relaciones en (22) se reescriben en la forma

$$(x, y) \odot (x', y') = (xx' - yy', xy' + yx') \tag{23}$$

Con este producto no es difícil verificar la siguiente estructura algebraica de S^1:

Proposición 5.1. *S^1 es un grupo conmutativo con el producto $\odot$ definido en* (23)

Demostración. Es inmediato verificar todos los axiomas de grupo en S^1, la clausura, la asociatividad y la conmutatividad del producto $\odot$, existe ademas un elemento neutro $e_1 = (0, 1)$, asi como un elemento inverso $P^{-1} = (x, -y)$.Por lo tanto llamaremos a $(S^1, \odot)$ grupo conmutativo. $\square$

En particular si denotamos por e_1 y e_2 los puntos de S^1 de coordenadas $(1, 0)$ y $(0, 1)$ respectivamente, obtenemos las relaciones

$$e_1 \odot e_1 = e_1 \qquad\qquad e_2 \odot e_2 = -e_1 \tag{24}$$

Puesto que, de acuerdo a la demostración de la proposicón (5.1), e_1 es el neutro del grupo multiplicatico S^1, la segunda relación en (24) establece que:

Proposición 5.2. *El elemento e_2 perteneciente a S^1 es raiz del polinomio $X^2 + 1$.*

Por otro lado ene l contexto vectorial la operacion $\odot$, de acuerdo a la transposicion afin/vectorial estudiados al inicio de esta sección, se expresa por

$$\vec{P} \odot \vec{P'} = (xx' - yy')\vec{i} + (xy' + yx')\vec{j}$$

donde $\vec{P} = x\vec{i} + y\vec{j}$ y $\vec{P'} = x\vec{i} + y\vec{j}$, Como P y P son puntos pertenecientes a S^1, entonces, $||P \odot P'|| = 1$.
Ademas se sabe que todo elemento del grupo S^1 puede obtenerse por la rotación del punto fijo A de coordenadas $(1, 0)$, utilizando la matriz de rotación y la correspondencia dada en (19), esta matriz se convierte en

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$$

Podemos definir una correspondencia Ξ para los elementos del grupo $(S^1, \odot)$

$$\Xi : (x, y) \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \tag{25}$$

Al trasladar la operación $\odot$ a esta nueva correspondencia tenemos que,

$$(x, y) \odot (x', y') = (xx' - yy', yx' + xy')$$

la que en su forma matricial esta dada por

$$\begin{pmatrix} xx' - yy' & -(yx' + xy') \\ yx' + xy' & xx' - yy' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' & -y' \\ y' & x' \end{pmatrix}$$

Por tanto el producto $\odot$ es trasladado según Ξ la multiplicación usual de matrices cuadradas.

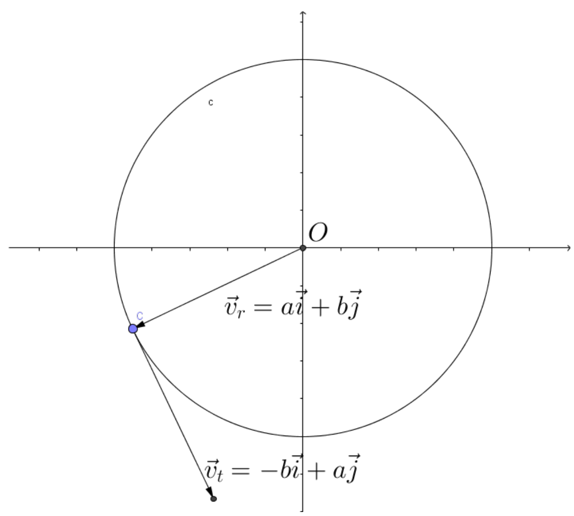
5.2. La rotación y espacio tangente a S^1

Por la geometría euclidiana elemental por cada punto de S^1 pasa una única *recta tangente* en dicho punto. La descripción geométrica y analítica (ecuación) de esta recta son conocidas y obedece a la propiedad principal *"la recta tangente a una circunferencia es perpendicular al radio que pasa por el punto de tangencia"*. Esta propiedad geométrica y el punto de tangencia caracterizan de manera única a la recta tangente. En el contexto vectorial esta propiedad geométrica se traduce en la dirección de la recta tangente, es decir el *vector director*. Más explicitamente, si las coordenadas cartesianas del punto de tangencia son (a,b) entonces el radio vector en este punto es

$$v_r = a\vec{i} + b\vec{j},$$

luego el vector director en sentido positivo de la recta tangente es

$$v_t = -b\vec{i} + a\vec{j} \tag{26}$$

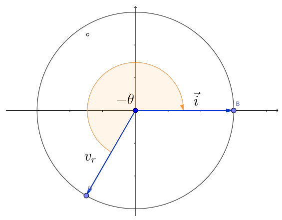


Si denotamos por θ el ángulo central que genera el radio vector del punto de tangencia (a,b) y el vector canónico $\vec{i}$, entonces

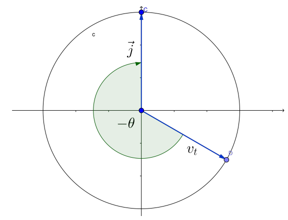
$$a = \cos\theta \qquad\qquad b = \sin\theta \qquad\qquad \text{(coordenadas polares)}$$

Entonces la rotación en el ángulo θ en sentido negativo de los vectores directores v_r y v_t son respectivamente

$$R_{-\theta}(v_r) = \vec{i} \qquad \text{y} \qquad R_{-\theta}(v_t) = \vec{j} \tag{27}$$



$R_{-\theta}(v_r) = \vec{i}$



$R_{-\theta}(v_t) = \vec{j}$

tal cual lo muestra el siguiente calculo matricial (utilizando la representación matricial):

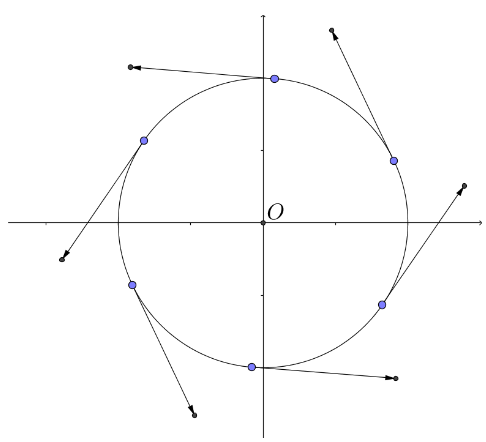
$$R_{-\theta}(v_r) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{con } v_r = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$R_{-\theta}(v_t) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{con } v_t = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$$

Las relaciones (27) se reescriben en forma equivalente como (utilizando la rotación en el ángulo θ en sentido positivo):

$$R_\theta(\vec{i}) = v_r \qquad \text{y} \qquad R_\theta(\vec{j}) = v_t \tag{28}$$

Las dos relaciones de (28) establecen una descripción geométrica diferente de la recta tangente a S^1 en cualquier punto a partir de una recta tangente *"especial"* y con el apoyo de la rotación como herramienta generadora de las rectas tangentes o equivalentemente de los vectores tangentes, llamado *campo de vectores*.



Esta descripción queda establecida en el siguiente teorema:

Teorema 5.3. *La recta tangente a S^1 en el punto de coordenadas cartesianas (a, b) y vector director $v_t = -b\vec{i} + a\vec{j}$ está completa y únicamente determinada por la rotación en torno a O en el ángulo θ de la recta tangente a S^1 en el punto de coordenadas $(1, 0)$ y vector director $\vec{j}$.*

El siguiente ejemplo ilustrará la utilidad del teorema anterior

Ejemplo
Escribiremos la ecuación vectorial de la recta tangente a S^1 en el punto $(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$, como sabemos esta recta tiene como vector director a $v_t = \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j}$, luego para cualquier punto $P = (x, y)$ en la recta, se tiene que:

$$\overrightarrow{OP} = -\frac{1}{2}\vec{i} - \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j} + \lambda(\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j}) \tag{29}$$

Por el teorema anterior deberíamos obtener dicha recta al rotar, en sentido positivo, la recta tangente a la identidad con respecto al centro O en un ángulo $\theta = \frac{4\pi}{3}$ radianes, este ángulo es el comprendido entre el vector $\vec{i}$ y el vector $-\frac{1}{2}\vec{i} - \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}$, por lo que esta rotación es equivalente a realizar el siguiente producto:

$$(\vec{i} + \lambda\vec{j}) \odot (-\frac{1}{2}\vec{i} - \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}) = -\frac{1}{2}\vec{i} - \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j} + \lambda(-\frac{1}{2}\vec{j} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i})$$

Que es precisamente la recta obtenida anteriormente.

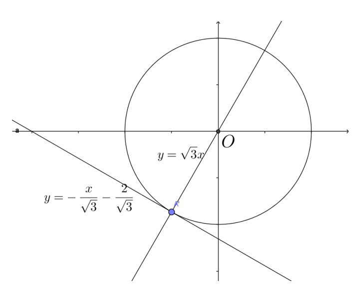
A continuación escribiremos la recta obtenida en su forma general y utilizaremos la geometría euclidiana para comprobar que dicha recta es precisamente la recta tangente a S^1 en el punto $(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$. A partir de la ecuación vectorial obtenemos las siguientes igualdades:

$$1)\ \lambda = \frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}$$
$$2)\ \lambda = -2y - \sqrt{3}$$

Igualando 1 y 2 obtenemos la siguiente ecuación de la recta:

$$y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x - \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Si esta recta es tangente a S^1 en punto $(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$, entonces debe ser perpendicular a la recta $y = \sqrt{3}x$, recta que pasa por el origen y el punto $(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$. Como la multiplicación de las pendientes de estas dos rectas es igual a -1, entonces son perpendiculares y en consecuencia la recta $y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x - \frac{2}{\sqrt{3}}$ es tangente a S^1 en el punto $(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$.



5.3. Una recta tangente a S^1 "especial"

En esta sección describiremos que la recta tangente a S^1 en el punto de coordenadas $(1,0)$ y vector director $\vec{j}$ es más que un elemento geométrico. Demostraremos que posee una estructura de subespacio vectorial de dimensión 1 vinculada a la estructura algebraica de grupo de S^1.
Consideremos el conjunto de todos los puntos de la recta T tangente a S^1 en el punto $(1,0)$

$$T = \{(1,y)|y \in \mathbf{R}\}$$

y una operación binaria $\oplus$ definida como:

$$(1,y) \oplus (1,y') = (1, y+y')$$

Por la estructura de grupo de $(\mathbf{R},+)$, es fácil comprobar que el par $(T,\oplus)$ es un grupo abeliano. El elemento neutro del grupo está dado por el par $(1,0)$. Para todo $(1,y)$ en T, existe el elemento inverso $(1,-y)$ tamboén en T.Es claro que la asociatividad se mantiene, así como la conmutatividad. Por tanto el par $(T,\oplus)$ es un grupo abeliano.
Dado un $\lambda \in \mathbf{R}$ y un punto $(1,y) \in T$, definimos la operación $\otimes$

$$\lambda \otimes (1,y) = (1,\lambda y)$$

En donde la yuxtaposición de λ e y, representa la multiplicación de números en $\mathbf{R}$.
Las operaciones $\oplus$ y $\otimes$ definen una estructura de espacio vectorial sobre T. Es inmediato verificar que se cumplen los axiomas de espacio vectorial, el elemento neutro multiplicativo dado por $(1,1)$, la distruibuitividad de $\otimes$ sobre $\oplus$ asi como la conmutatividad de ambas operaciones.
Ademas cualquier elemento de T es la multiplicación de un escalar por el punto $(1,1)$, en efecto

$$(1,y) = y \otimes (1,1)$$

En otras palabras T es un espacio vectorial de dimensión 1 con base $\{(1,1)\}$.
Los elementos en T, pueden ser vistos como matrices, gracias a la biyección dada en (25)

$$\lambda \otimes (1,1) = (1,\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & -\lambda \\ \lambda & 1 \end{pmatrix} = \lambda \otimes \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Podemos administrar a las matrices en T de una operación interna $T \times T \to T$, denominada corchete, definida como $[A,B] = AB - BA$, el conmutador definido en la sección 4.3. Al aplicar este corchete a T, tenemos que $[A,B] = 0$ para todo $A, B \in T$, como el conmutador corresponde a un *corchete de Lie*, el espacio vectorial T define un *álgebra de Lie abeliana*, ademas de esto, podemos concluir que las matrices en T, poseen la propiedad de ser antisimetricas, es decir $A^t = -A$

$$\begin{pmatrix} 1 & -\lambda \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ -\lambda & 1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & -\lambda \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}$$

podemos así identificar al álgebra del espacio vectorial T, con el álgebra $\mathfrak{so}_n(\mathbf{R})$ definida en la sección 4.3.

5.4. Una mirada analítica

De la subsección 5.1 se deduce que todos los puntos de S^1 se obtienen por medio de rotaciones sucesivas de un punto fijo (ver 19). En nuestro caso si este punto fijo es A, de coordenadas cartesianas $(1,0)$, entonces los puntos de S^1 se representan por

$$R_\theta(A) = (\cos\theta, \sin\theta) \qquad\qquad \text{con } \theta \in \mathbf{R}$$

De acuerdo a la articulación "punto/vector", el punto $R_\theta(A)$ se corresponde en el espacio vectorial $\mathbf{R}^2$ con el vector

$$\cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}$$

expresado en términos de la base canónica $\{\vec{i}, \vec{j}\}$. Se trata de un vector posición que depende parametricamente de θ. En términos analíticos se describe por la función vectorial

$$w : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2 \qquad \text{tal que } w(\theta) = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j} \tag{30}$$

Puesto que las proyecciones canonicas de w, $\cos(\theta)$ y $\sin(\theta)$, son analíticas, los correspondientes desarrollos en serie de Taylor producen que w sea analítica

$$w(\theta) = \left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\theta^{2n}}{(2n)!}\right)\vec{i} + \left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\theta^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)\vec{j}$$

Por la estructura multiplicativa de S^1 es fácil verificar

$$\vec{j}^{\,2n} = (-1)^n\,\vec{i} \qquad \text{y} \qquad \vec{j}^{\,2n+1} = (-1)^n\,\vec{j} \qquad\qquad \text{para todo } n \text{ entero, } n \geq 0$$

Por otro lado ya que las series que siguen convergen uniformemente en el espacio normado $\mathbf{R}^2$ (provisto de la norma euclidiana) y utilizando las relaciones algebraicas anteriores, la expansión en serie de w se reescribe como

$$\begin{aligned}
w(\theta) &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\theta^{2n}\,\vec{i}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\theta^{2n+1}\vec{j}}{(2n+1)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\theta^{2n}\,\vec{j}^{\,2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\theta^{2n+1}\vec{j}^{\,2n+1}}{(2n+1)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\theta\,\vec{j}\,\right)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\theta\,\vec{j}\,\right)^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\theta\,\vec{j}\,\right)^{n}}{n!}
\end{aligned} \tag{31}$$

La expansión (31) de w en serie de potencias es de tipo exponencial. Más explicitamente se tienen las siguientes propiedades.

Proposición 5.4. *En el espacio normado* $\mathbf{R}^2$ *se tienen las siguientes relaciones*

a) $w(0) = \vec{i}$

b) $w(\theta_1) \odot w(\theta_2) = w(\theta_1 + \theta_2)$

c) $w(-\theta) = w(\theta)^{-1}$

d) $\frac{dw(\theta)}{d\theta} = \vec{j}w(\theta)$

Demostración.
a) Al evaluar la serie con $\theta = 0$, todos aquellos términos de la suma que posean algún elemento θ^n con $n \geq 1$ se convierten en ceros, excepto el primer término que por definición es $\vec{i}$, esto ocurre cuando $n = 0$. De esta forma, queda claro que $w(0) = \vec{i}$.

b) Consideremos las series $w(\theta_1)$ y $w(\theta_2)$, al multiplicar estas dos expresiones y reordenado según las potencias de $\vec{j}$ obtenemos:

$$w(\theta_1)\odot w(\theta_2) = \vec{i}+\theta_1\vec{j}+\theta_2\vec{j}+\frac{(\theta_1)^2\vec{j}^2}{2}+\theta_1\theta_2\vec{j}^2+\frac{(\theta_2)^2\vec{j}^2}{2}+\frac{(\theta_1)^3\vec{j}^3}{6}+\frac{(\theta_1)^2\theta_2\vec{j}^3}{2}+\frac{\theta_1(\theta_2)^2\vec{j}^3}{2}+\frac{(\theta_2)^3\vec{j}^3}{6}+\cdots$$

Factorizando por $\frac{\vec{j}^n}{n!}$, las sumas de θ_1 y θ_2 se corresponden con el binomio de grado n.

$$w(\theta_1)\odot w(\theta_2) = \vec{i}+(\theta_1+\theta_2)\vec{j}+((\theta_1)^2+2\theta_1\theta_2+(\theta_2)^2)\frac{\vec{j}^2}{2!}+((\theta_1)^3+3\theta_1(\theta_2)^2+3(\theta_1)^2\theta_2+(\theta_2)^3)\frac{\vec{j}^3}{3!}+\cdots$$

Por tanto, la serie queda espresada por

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\vec{j}^n}{n!}(\theta+\theta')^n = w(\theta+\theta')$$

c) Para el grupo S^1 , está dado por el elemento inverso $(\cos(\theta)\vec{i}+\sin(\theta)\vec{j})^{-1} = \cos(\theta)\vec{i}+(-\sin(\theta)\vec{j}$, expandiendo este vector según la serie $w(\theta)$, obtenemos :

$$\begin{aligned}
w(\theta)^{-1} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\theta\vec{j}^{2n}}{2n!} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\theta\vec{j})^{2n+1}}{2n+1!}\\
&= (\theta\vec{j})^0 - (\theta\vec{j})^1 + \frac{(\theta\vec{j})^2}{2!} - \frac{(\theta\vec{j})^3}{3!} + \frac{(\theta\vec{j})^4}{4!} - \cdots\\
&= (-\theta\vec{j})^0 + (-\theta\vec{j})^1 + \frac{(-\theta\vec{j})^2}{2!} + \frac{(-\theta\vec{j})^3}{3!} + \frac{(-\theta\vec{j})^4}{4!} + \cdots + \frac{(-\theta\vec{j})^n}{n!}\\
w(\theta)^{-1} &= w(-\theta)
\end{aligned}$$

d) Debido a la convergencia de la serie $w(\theta)$ la derivada de la serie esta dada por la suma de las derivadas de cada término, en general para $w(\theta)$ y dado que $\frac{\vec{j}^n}{n!}$ es constante, tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{d(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\theta\vec{j})^n}{n!})}{d\theta} &= \vec{i}\vec{j} + \frac{2\theta\vec{j}^2}{2!} + \frac{3\theta^2\vec{j}^3}{3!} + \frac{4\theta^3\vec{j}^4}{4!} + \cdots \\ &= \vec{j}(\vec{i} + \theta\vec{j} + \frac{\theta^2\vec{j}^2}{2!} + \frac{\theta^3\vec{j}^3}{3!} + \cdots)\end{aligned}$$

Es claro que la serie que esta a la derecha de $\vec{j}$ es de la forma $w(\theta)$ por tanto $\frac{dw(\theta)}{d\theta} = \vec{j}w(\theta)$
Por la unicidad de la exponencial como solución de un problema de valor inicial, definimos la exponencial de $\theta\vec{j}$, con $\theta \in \mathbf{R}$, por

$$\exp(\theta\vec{j}) = w(\theta) \tag{32}$$

□

5.5. S^1 es un grupo de Lie de matrices

Proposición 5.5. *El grupo $S^1 = \{(x, y) \in \mathbf{R} | x^2 + y^2 = 1\}$ es un grupo de matrices.*

Demostración. Basta definir un homomorfismo inyectivo con un subgrupo de $GL_2(\mathbf{R})$. Para ello consideremos la función

$$\Phi : S^1 \to GL_2(\mathbf{R}) \qquad \text{tal que } (x, y) \mapsto \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$$

Ahora debemos demostrar que Φ es un homomorfismo inyectivo. En efecto es inmediato que es inyectivo.
Por otro lado se tiene

$$\begin{aligned}\Phi((x, y) \odot (x', y')) &= \Phi((xx' - yy', xy' + x'y)) \\ &= \begin{pmatrix} xx' - yy' & -(xy' + x'y) \\ xy' + x'y & xx' - yy' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' & -y' \\ y' & x' \end{pmatrix} \\ &= \Phi(x, y) \cdot \Phi(x', y')\end{aligned}$$

Como la imagen de Φ es

$$Im(\Phi) = \left\{ \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \,\Big|\, x^2 + y^2 = 1 \right\}$$

Entonces $S^1 \simeq Im(\Phi)$. Luego para concluir la demostración de la proposición basta con demostrar que $Im(\Phi)$ es un subgrupo cerrado (topológicamente) de $GL_2(\mathbf{R})$. En efecto, debido a que la funcion determinante es continua, es decir, aplica abiertos sobre abiertos y cerrados a cerrados, definida desde $GL_n(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}$ tenemos que para toda matriz M en $Im(\Phi)$, $\det(M) = \{1\}$ que es cerrado, por lo tanto $Im(\Phi)$ es cerrado. □

Proposición 5.6. *S^1 es isomorfo al grupo ortogonal especial $SO_2(\mathbf{R})$*

Por la descripción geométrica de los elementos de $SO_2(\mathbf{R})$, un elemento cualquiera se representa matricialmente como

$$\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

Podemos escribir ahora estas funciones en su forma de serie de Taylor

$$\begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n!} t^{2n} & -(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} t^{2n+1}) \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} t^{2n+1} & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n!} t^{2n} \end{pmatrix}$$

es decir

$$\begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{4!}t^4 - \frac{1}{6!}t^6 + \cdots & -t + \frac{1}{3!}t^3 - \frac{1}{5!}t^5 + \frac{1}{7!}t^7 - \cdots \\ t - \frac{1}{3!}t^3 + \frac{1}{5!}t^5 - \frac{1}{7!}t^7 + \cdots & 1 - \frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{4!}t^4 - \frac{1}{6!}t^6 + \cdots \end{pmatrix}$$

Como las series convergen absolutamente, entonces lo anterior equivale a

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} t^0 + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{2!} t^2 + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{3!} t^3 + \cdots$$

Ahora bien, si consideramos la matriz del término lineal $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y realizamos sus potencias sucesivas

$$A^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$A^1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$
$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 \qquad \text{y asi sucesivamente ...}$$

A partir de lo anterior no es dificil deducir la recurrencia

$$A^{4n} = I_2, \qquad A^{4n+1} = A, \qquad A^{4n+2} = -I_2, \qquad A^{4n+3} = -A \qquad \text{para todo } n \text{ entero } n \geq 0$$

Luego la serie anterior se reescribe en la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} t^0 + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 \frac{1}{2!} t^2 + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^3 \frac{1}{3!} t^3 + \cdots$$

es decir

$$\sum_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \frac{1}{n!} t^n = \exp(tA)$$

Esta última relación establece que todo elemento de $SO_2(\mathbf{R})$ es el mismo subgrupo uniparametrico de generador infinitesimal $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Proposición 5.7. *El álgebra de Lie del grupo de Lie de matrices $SO_2(\mathbf{R})$ es una subálgebra de $\mathfrak{gl}_2(\mathbf{R})$ generada por el generador infinitesimal $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Luego es abeliana de corchete de Lie nulo y dimensión* 1.

6. El caso de $SL_2(\mathbf{R})$

En esta sección, analizaremos uno de los principales resultados de la teoría de Lie, esto es, el vínculo que existe entre un grupo de Lie y su algebra de Lie asociada a través de la función exponencial definida en la sección (4.1). Trabajaremos sobre el álgebra de Lie $\mathfrak{sl}_2(\mathbf{R})$, e intentaremos vincularla con el grupo de Lie $SL_2(\mathbf{R})$.

Definimos el grupo de Lie $SL_2(\mathbf{R})$. Como las matrices cuyo determinante es 1, el algebra de Lie asociada a este grupo esta dada por aquellas matrices con *traza* cero (subsección 4.3). Recordemos que un algebra de Lie está definida por la colección de generadores infinitesimales de los subgrupos uniparametricos (ver [3]). De esta forma las bases de $\mathfrak{sl}_2(\mathbf{R})$, como espacio vectorial deberían ser los generadores infinitesimales del grupo $SL_2(\mathbf{R})$.

Las matrices 2×2 de traza nula están dadas por la base

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Es claro que estas matrices son base de $\mathfrak{sl}_2(\mathbf{R})$, pues toda matriz de traza nula esta determinada como convinacion lineal de estas bases, a saber

$$\alpha X + \beta Y + \gamma H = \begin{pmatrix} \gamma & \alpha \\ \beta & -\gamma \end{pmatrix} \qquad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$$

Cuya traza es cero para todo $\gamma \in \mathbf{R}$.

Estas matrices deben ser, como ya se ha dicho anteriormente correponde a los generadores infitesimales de de los subgrupos uniparametricos del grupo $SL_2(\mathbf{R})$, esto es

$$\exp(t\mathfrak{B}) \in SL_2(\mathbf{R}). \qquad \text{con } t \text{ en } \mathbf{R} \text{ y } \mathfrak{B} = \{X, Y, H\}$$

El caso de la matriz X, que es nilpotente para las potencias ≥ 2 tenemos

$$\begin{aligned} \exp(tX) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Cuyo determinante es 1 para todo t real. De forma similar para la matriz Y, ya que también es nilpotente para $n \geq 2$, tenemos

$$\begin{aligned} \exp(tY) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Para la matriz H, utilizamos el hecho de que es una matriz diagonal, y por la proposición 4.4 tenemos que

$$\begin{aligned} \exp(tH) &= \exp \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & -t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

como $e^t \cdot e^{-t} = 1$ esta matriz pertenece al grupo $SL_2(\mathbf{R})$. Tenemos una forma genérica para los subgrupos uniparametricos de los generadores X, Y, H sin embargo, existen matrices en $SL_2(\mathbf{R})$ que no corresponden directamente a ningún $\exp(tX), \exp(tY), \exp(tH)$. Consideremos el ejemplo de la matriz triangular superior dada por

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}$$

Con $b \neq 0$ y $a > 0$ (si b fuese cero, entonces esta matriz sería de la forma $\exp(tH)$, siempre y cuando $a > 0$, el caso para $a < 0$ será estudiado mas adelante) *a priori* esta matriz no corresponde a ningún subgrupo uniparametrico anterior, aunque claramente pertenece a $SL_2(\mathbf{R})$ sin embargo esta matriz puede ser separa como el producto de dos matrices, que si corresponden a subgrupos uniparametricos, a saber

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{b}{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \exp(tH) \exp(\tfrac{b}{a} X) \end{aligned}$$

De esta forma, hemos abarcado un nuevo tipo de matriz en $SL_2(\mathbf{R})$ que a simple vista no pertenecía a ningún subgrupo uniparamétrico, sin embargo, aún persiste el problema de que las bases de $\mathfrak{sl}_2(\mathbf{R})$ al parecer, no abarcan todas las matrices de determinante uno.

Para una matriz cualquiera $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, tal que $ad - bc = 1$ con $a > 0$ puede ser separada mediante el siguiente producto

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{c}{a} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{c}{a} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{b}{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &= \exp(\tfrac{c}{a} Y) \cdot \exp(tH) \cdot \exp(\tfrac{b}{a} X) \end{aligned}$$

Con este ejemplo hemos expandido las matrices generadas por subgrupos uniparametricos de $SL_2(\mathbf{R})$. Sin embargo, aún persiste el caso de una matriz diagonal en el que sus elementos son negativos, es decir

$$\begin{pmatrix} -a & 0 \\ 0 & -\frac{1}{a} \end{pmatrix} \tag{33}$$

Nuestro propósito ahora es encontrar algún producto de subgrupos uniparamétrico que se corresponda con la matriz anterior. Para ellos consideremos los escalares y, x, t, z en $\mathbf{R}$ con la única condición de ser distintos de cero.
En general, consideremos los productos dados por (*No realizaremos productos de dos generadores infinitesimales iguales, ya que* $\exp(\alpha Y)\exp(\beta Y) = \exp((\alpha+\beta)Y)$)

$$\exp(yY)\exp(xX) = \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & xy+1 \end{pmatrix}$$

Es claro que para este producto, es imposible llegar a la matriz (33), sin embargo al multiplicar por otra matriz correspondiente a $\exp(tY)$ tenemos

$$\exp(yY)\exp(xX)\exp(tY) = \begin{pmatrix} tx+1 & x \\ t(xy+1)+y & xy+1 \end{pmatrix}$$

En este caso, para que la expresión tenga sentido tenemos que el parámetro $x = 0$, sin embargo con esto tenemos que la matriz resultante está dada por $\exp(yY)I\exp(tY)$ lo que es diferente a (33). Así, agregaremos un nuevo elemento de la forma $\exp(zX)$ al producto anterior, resultando la expresión

$$\exp(yY)\exp(xX)\exp(tY)\exp(zX) = \begin{pmatrix} tx+1 & z(tx+1)+x \\ t(xy+1)+y & z(t(xy+1+y)+xy+1 \end{pmatrix}$$

Un cálculo simple, permite establecer ciertas relaciones entre los parámetros anteriores:

$$x = \frac{-a-1}{t}$$
$$z = -\frac{1}{t} - \frac{1}{ta}$$
$$y = -\frac{t}{a}$$

Como t es un parámetro independiente, y por motivos de comodidad lo reemplazaremos por 1, de esta forma las ecuaciones anteriores se expresan como

$$x = -a-1$$
$$z = -\frac{1}{a} - 1$$
$$y = \frac{1}{a}$$

Así para todo valor de $a \neq 0$ tenemos que

$$\begin{pmatrix} -a & 0 \\ 0 & -\frac{1}{a} \end{pmatrix} = \exp(\tfrac{1}{a}Y)\exp((-a-1)X)\exp(Y)\exp((-\tfrac{1}{a}-1)X)$$

A pesar de que hemos encontrado la mayor parte de las matrices en $SL_2(\mathbf{R})$ mediante los grupos uniparamétricos, sus productos, existe un caso que aún no se ha revisado, correspondiente a las matrices de la forma

$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ -\frac{1}{a} & 0 \end{pmatrix}$$

En este caso basta considerar tres matrices de la forma $\exp(aX)\exp(-\frac{1}{a}Y)\exp(aX)$ cuya multiplicación es exactamente la matriz anterior. A través de este sencillo ejemplo, con el álgebra de Lie $\mathfrak{sl}_2(\mathbf{R})$, se ha evidenciado la relación fundamental que existe entre un grupo de Lie y su respectiva álgebra de Lie. En el ejemplo de la sección 5, la circunferencia unitaria representa un grupo de Lie, cuyo generador infinitesimal está dado por el vector $\vec{j}$ (o la matriz $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$), a su vez la recta tangente a la identidad, tiene como vector director a $\vec{j}$, demostramos que esta recta tangente, mediante rotaciones-mas precisamente traslaciones, en su sentido algebraico- permiten describir todas las rectas tangentes al grupo S^1, la recta tangente además posee estructura de espacio vectorial, es así como se cumple el teorema, en donde la base del espacio vectorial tangente a la identidad corresponde a los generadores infinitesimales del grupo. [3]

Referencias

[1] DUMMIT D. y FOOTE M. (2004) *Abstract algebra*, John Wiley & sons inc. , United States of America

[2] FULTON W. y HARRIS J.. (1991) *Representation Teory, a first course*, Springler-Verlag, United States of America

[3] HOWE R. (1983) *A very basic lie theory*, Yale University, New Haven. United States of America

[4] MALTSEV A. (1970) *Fundamentos del álgebra lineal*, sigloveintinuo editores, México.

[5] MOSTOW G. y SAMPSON J., (1972) *Álgebra Lineal*, centro regional de ayuda tecnica, México.

[6] PASCUAL S. (2013). *Una secuencia didáctica para un concepto unificador en un curso de álgebra lineal de un programa de formación a la ingeniería.* Thèse de Doctorat. Université de Montréal, Montréal. Canada. Texto integral en http://hdl.handle.net/1866/9726

[7] PASCUAL S. (2015). *La transformation linéaire comme un concept unificateur: une stratégie d'ensegneiment et son effet sur la productivité des éstudiants.* Préprint. À apparaitre.

[8] SPIVAK M. (2003) *Calculus, cálculo infinitesimal*, Editorial Reverté, S.A., Barcelona-Bogotá-Buenos Aires- Caracas-México.