UNIVERSIDAD DEL BÍO-BÍO
FACULTAD DE EDUCACIÓN Y HUMANIDADES
Escuela de Pedagogía en Educación Matemática

INTRODUCCIÓN A LOS PROBLEMAS INVERSOS

Memoria para optar al título de Profesor de Educación Media en Educación Matemática

JESSICA ANDREA CARCAMO CARRASCO
ERWIN ALEJANDRO SEPÚLVEDA SEPÚLVEDA

Profesores guías: Dr. Miguel Friz C.
Dr. Jaime H. Ortega P.

Chillán, Chile
2009

0.1. Agradecimientos

Agradecemos a nuestro profesor guía Jaime H. Ortega por la dirección, apoyo y ayuda brindada, además de la oportunidad de realizar esta memoria financiada por su proyecto FONDECYT 1070148.

Agradecemos la ayuda brindada por el profesor Patricio Cumsille, quien sin ninguna obligacion nos ha colaborado en la realización de la presente memoria.

Agradecemos a nuestras familias que nos han apoyado durante todo el período de nuestros estudios.

Agradecemos también el apoyo y la ayuda de nuestro Director de Escuela Miguel Friz.

Índice general

0.2. Resumen

La presente memoria tiene el objetivo de ser una primera aproximación al campo de los problemas inversos, otorgando las herramientas básicas para poder proseguir con el estudio de este tema.

En ella han sido modelados algunos fenómenos físicos simples, vía ecuaciones diferenciales ordinarias, en los cuales se busca recuperar parámetros desconocidos.

Finalmente, en el marco del calculo numérico, desarrollamos algoritmos (script) que nos permiten la obtención de los parámetros deseados utilizando softwares especializados, en este caso MATLAB.

0.3. Introducción

En esta memoria presentaremos una introducción a los llamados problemas inversos. En primer lugar definiremos que son los problemas inversos, así en general podemos decir que son aquellos problemas en los cuales algunos parámetros del modelo son desconocidos y nos interesa determinarlos a partir de ciertos datos.

Por ejemplo; consideremos dos raíces de un polinomio y deseamos encontrar los coeficientes numéricos de dicho polinomio. Como se pudo notar en el ejemplo, no siempre existe una respuesta única, logicamente, pues existen infinitos polinomios con las mismas raíces. Para tener la unicidad es necesario contar con información adicional, por ejemplo el valor del polinomio en un punto.

En 1980, el matemático e ingeniero argentino, Alberto Pedro Calderón, publicó su trabajo titulado "On an inverse boundary value problem", el cual motivó un gran desarrollo en esta área.

El problema propuesto por Calderón fue la factibilidad de estimar la conductividad de un cuerpo conociendo la corriente y el voltaje, en la superficie.

En términos matemáticos esto se escribe en la siguiente forma:

Sea $\gamma(x)$ la conductividad eléctrica de un medio. Así $\gamma(x)$ es estrictamente positiva.

El potencial u en Ω con voltaje f satisface:

$$\begin{aligned} \text{div } (\gamma(x)\nabla u) &= 0 \qquad \text{en } \ \Omega \\ u &= f \qquad \text{sobre } \partial\Omega \end{aligned}$$

Consideramos el operador voltaje-corriente u operador de Steklov-Poincaré :

$$f \longrightarrow \Lambda_\gamma(f) = \gamma\frac{\partial u}{\partial n} \quad \text{sobre} \ \ \partial\Omega.$$

Donde $\gamma\frac{\partial u}{\partial n} =$ corriente.

El problema de Calderón es recuperar γ a partir del operador

$$\Lambda : \gamma \longrightarrow \Lambda_\gamma$$

Es decir, dado un cable del cual conozco la corriente y el voltaje, en la superficie, determinar la conductividad electrica de este.

De esta forma, tenemos que los problemas inversos dan origen a las siguientes preguntas:

- Inyectividad de Λ. Constatar la unicidad de la solución.

  Esto no siempre es tan obvio como pudiera parecer, debido a que en los problemas influyen varios parámetros y variables. Por ejemplo: al intentar determinar un polinomio cuyas raíces sean 2 y 3, el polinomio $p(x) = (x-2)(x-3)$ cumple con esas condiciones y cualquier polinomio de la forma $k(x-2)(x-3), \forall k \in \mathbb{R}$, por lo que nuestra solución no es única.

- Continuidad de Λ y su inversa Λ^{-1}, si existe. Determinar si al váriar Λ ligeramente, su inversa Λ^{-1} también difiere ligeramente.

Este problema también se le denomina de control. Debido a que en la realidad nuestros datos, obtenidos por mediciones u otros, pueden tener errores de aproximación o de calibración de los instrumentos lo que genera valores no exactos, necesitamos saber si esas variaciones perturban ligeramente nuestro sistema o no. Por ejemplo, en los sistemas caóticos una pequeña variación al inicio genera resultados imprevisibles.

- Encontrar el Rango de Λ. Determinar en que casos es valida mi respuesta.

  Como se puede observar de la inyectividad y de la continuidad, no siempre nuestros sistemas se encontrarán bien definidos, por lo que en ocasiones se intentarán acotar las respuestas a un rango de validez. Por ejemplo; el rango en el cual la función es continua.

- Formula para recuperar γ a partir de Λ_γ. Conociendo los datos, poder reconstruir el origen de ellos.

  El ideal es poder reconstruir el origen de ellos, producto de la dificultad en contar con todos los datos necesarios y la inexactitud de los datos obtenidos, este paso en muchas ocasiones se vuelve bastante complejo por lo que se debe recurrir al análisis numérico.

- Obtención de un algoritmo para encontrar una aproximación de γ. Poder determinar en forma numérica la solución de este problema.

  Como mencionábamos, no siempre se puede recuperar análiticamente la solución o no se puede determinar una fórmula para poder determinar el origen de los datos. Es por ello, y gracias a los avances en el desarrollo de equipos computacionales, que se busca un apropiado algoritmo númerico para poder determinar una buena aproximación de la solución del problema dado un numéro finito de mediciones.

En el último tiempo, los problemas inversos han generado gran interés, debido a sus múltiples aplicaciones, entre ellos cabe mencionar:

- Imágenes medicas (técnicas no invasivas): Tomografía, Espectomografía (ultrasonido), Escaners (resonancia magnética)...
- Técnicas no destructivas de evaluación de materiales y piezas de maquinarias, detección de fallas, fisuras, (ciencia de los materiales).
- Problemas de origen industrial: detección de fuentes de contaminación, prospecciones meteorológicas (geofísica).
- Métodos naturales y artificiales de reconocimiento de imágenes.

A modo de ejemplo, en el campo de la Medicina se busca obtener imágenes de aspectos internos del cuerpo en forma no invasiva, para ello medimos la respuesta a la exitación del cuerpo por medio de: ultrasonidos, rayos X, etc. En el caso de la radiografía de proyección, exitamos el cuerpo por medio de radiación de rayos X y medimos la respuesta, debido a que son absorvidos en diferente proporción por distintos tipos de tejidos, tales como los huesos, músculos o grasa, podemos determinar con que nos encontramos.

Otra área de interés, en el uso de los problemas inversos, es la Geofísica: en este caso nos interesa conocer las propiedades del suelo correspondientes a resistividades o conductividades. Mediante la medición, en la superficie, de las tensiones del suelo al ser exitado (utilizando ondas electromágneticas, sísmicas u otras) podemos conocer las propiedades del suelo.

Adicionalmente, modelaremos algunos fenómenos físicos simples, buscando recuperar parámetros desconocidos. Así, desarrollaremos algoritmos numéricos que nos permitan la obtención de los parámetros deseados, utilizando softwares especializados.

Capítulo 1

Marco teórico

1.1. Problemas Inversos

En la presente memoria hablaremos de los problemas inversos, los cuales estan presentes en la modelación matemática.

Primero nos interesaría saber ¿Qué es un modelo matemático?

Un modelo matemático es uno de los tipos de modelos científicos, el que se basa en expresar, utilizando los instrumentos de la teoría matemática, objetos cognitivos tales como: procesos, fenómenos, sistemas, etc. Los inconvenientes que se presentan al modelar son aquellos en los que el modelo se presenta complicado y, puesto que, en la vida real existen muchos factores que influyen en los fenómenos, es imposible considerarlos todos. Igualmente no siempre la solución del modelo da buenos resultados en la vida real. No obstante una de las ventajas más importantes en el uso de modelos matemáticos, es que en forma segura; rápida y sin grandes gastos económicos nos permite estudiar las propiedades del objeto cognitivo en cualquier situación imaginable.

El proceso de modelación matemática de cualquier objeto cognitivo consiste en un plan de trabajo preciso:

- En una primera etapa se escoge o construye el modelo matemático equivalente al objeto cognitivo.
- Luego se escoge o desarrolla el algoritmo de cálculo que permite implementar el modelo en un computador.
- Y por último en una tercera etapa se crean los programas que traducen el modelo y el algoritmo a un lenguaje entendible por el computador, listos para la realización de experimentos numéricos.

En segundo lugar y dado que nuestro objetivo es realizar una introducción a los problemas inversos, mencionaremos lo que afirma el matemático chileno Günther Uhlmann:

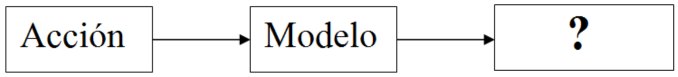
> *"Podemos decir que un problema inverso es en el cual uno conoce la respuesta, pero no conoce cual es la pregunta".*

Para graficarlo mejor, consideremos un fenómeno físico modelado de la siguiente forma:

$$\boxed{\text{Acción}} \longrightarrow \boxed{\text{Modelo}} \longrightarrow \boxed{\text{Respuesta}}$$

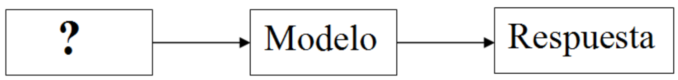
¿Cuál es un problema directo?

Un problema directo es: conociendo la acción y el modelo, encontrar la respuesta.

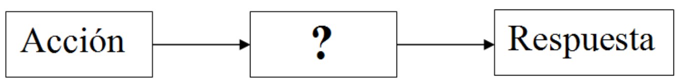


Groetsch [4] establece que de cada problema directo se desprenden dos problemas inversos: el de causalidad y el de identificación del modelo.

El problema inverso de causalidad es: conociendo el modelo y la respuesta, determinar la acción.



El problema inverso de identificación del modelo es: conociendo la acción y la respuesta, determinar el modelo.



Los problemas inversos son clasificados como problemas mal puestos, bajo la definición del matemático francés Hadamard. Cabe notar que a comienzos del siglo XX, Jacques Hadamard enunció por primera vez los conceptos de problema “bien-puesto” o “well-posed” y, analogamente, “mal-puesto” o “ill-posed”. Los tres principios que determinan cuando un problema es bien puesto son:

1. Existencia, el problema planteado debe tener solución.
2. Unicidad, la solución del problema debe ser única.
3. Dependencia continua de los datos, si las variables se modifican ligeramente, la solución también debe diferir ligeramente.

Por lo tanto, "mal-puesto" es cualquier problema que no cumple, al menos uno de los 3 principios.

En los problemas inversos al no tener la información completa del problema dificilmente podemos responder a los 3 principios, por eso son considerados mal puestos.

De esta forma, tenemos que los problemas inversos dan origen a las siguientes preguntas:

- Inyectividad de Λ. Constatar la unicidad de la solución.

  En los problemas de mezcla debiamos constatar que dadas dos mediciones iguales en un mismo tiempo, la concentración de entrada (α) eran iguales.

- Continuidad de Λ y su inversa Λ^{-1}, si existe. Determinar sí al variar Λ ligeramente, su inversa Λ^{-1} también difiere ligeramente.

  En nuestro caso, luego de encontrar la función que modela el problema de mezcla en términos de α, buscamos la inversa de esa función. Adicionalmente, dadas dos mediciones muy cercanas constatamos la cercanía de los datos que dieron origen a dichas mediciones.

- Encontrar el Rango de Λ. Determinar en que casos es valida mi respuesta.

  Pese a lo sencillo que pudiesen parecer los modelos, de igual forma se pierden datos en el tiempo. En alguno de los casos se debio acotar los rangos de validez de nuestras funciones.

- Formula para recuperar γ a partir de Λ_γ. Conociendo los datos, poder reconstruir el origen de ellos.

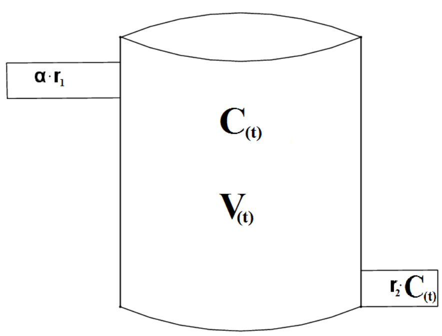
  Conociendo algunas mediciones en tiempos progresivos pero no controlando los espacios de tiempo entre una y otra, adicionalmente contando con algunos datos, encontrar los que faltaban. Se desarrollaron funciones análiticamente y se vio la validez de ellas para poder responder a este punto.

- Obtención de un algoritmo para encontrar una aproximación de γ. Poder determinar en forma númerica la solución de este problema.

  Si bien, los cálculos muchas veces eran sencillos, el realizarlos a mano demoraba bastante tiempo y para muchos datos se volvia complicado, por lo cual se desarrollaron algoritmos numéricos. Adicionalmente, se resolvieron numéricamente algunos problemas que ya habíamos resuelto en forma analítica, con el fin de obtener métodos más sencillos para buscar la respuesta al problema.

Capítulo 2

Problemas de Mezcla



2.1. Introducción

Cuando hablamos de problemas de mezclas consideramos un tanque con algún solvente y una cantidad de soluto, que esta variando con el tiempo. La variación corresponde a porciones de solución (mezcla) que ingresan, estas se llamaran flujo de entrada. Al mismo tiempo, se perderá parte de esta solución, lo que llamaremos flujo de salida.

El objetivo en este tipo de problemas es calcular la concentración o bien la cantidad de soluto en la mezcla a medida que transcurre el tiempo.

En todos los casos, se supone que el tanque está bien mezclado (mediante un batido rápido si es necesario), de manera que puede suponerse que la solución es uniforme.

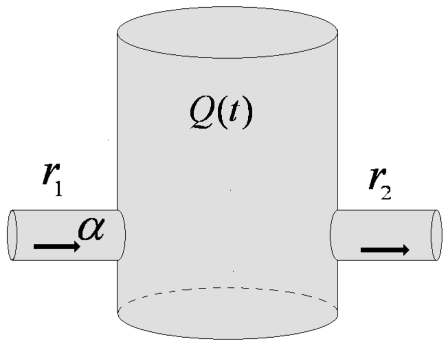
Adicionalmente, es necesario y útil determinar la cantidad de mediciones requeridas para obtener el resultado, debido a la posibilidad de subdeterminar el sistema, lo que nos provocaría no contar con la unicidad ni la existencia de la solución. El sobredeterminar el sistema en algunos casos puede complicar la obtención de la solución, además es trabajo extra innecesario y, por lo general, uno busca optimizar tiempo y recursos.

2.2. Problemas de Mezcla con un Tanque

Supongamos que, tenemos un tanque con solvente al que le esta ingresando una mezcla con una concentración α de soluto a una razón r_1, la cual se mezcla instantanea y uniformemente. Adicionalmente esta mezcla sale del tanque a la razón r_2.

2.2.1. Búsqueda de los modelos

Debemos encontrar las funciones que modelan lo siguiente:



$V_{(t)}$: el volumen del tanque en términos del tiempo.

$Q_{(t)}$: la cantidad de soluto en el tanque en términos del tiempo.

$C_{(t)}$: la concentración de soluto en el tanque en términos del tiempo.

La idea inicial para analizar estos problemas es el principio fundamental de la física de conservación, en nuestro caso, del Volumen ($V_{(t)}$):

$$\begin{pmatrix} \text{Tasa de} \\ \text{cambio de } V \end{pmatrix} = \frac{dV}{dt} = \begin{pmatrix} \text{Flujo de} \\ \text{entrada} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \text{Flujo de} \\ \text{Salida} \end{pmatrix}$$

Donde se debe notar que $\frac{dV}{dt}$, la derivada de $V_{(t)}$, es la tasa de cambio de $V_{(t)}$.

En nuestro caso, el volumen del tanque varía según la cantidad de solvente que entra menos la que sale del tanque. Es decir, $V'_{(t)} = r_1 - r_2$. Integrando esta expresión en función del tiempo t obtenemos: $V_{(t)} = (r_1 - r_2)t + K$.

Sea V_0 el volumen inicial en el tanque. Evaluando $V_{(t)}$ con $t = 0$ tenemos:

$$\begin{aligned} V_0 = V_{(0)} &= (r_1 - r_2)0 + K \\ V_0 &= K \end{aligned}$$

Así, reemplazando $K = V_0$ en $V_{(t)}$ obtenemos:

$$V_{(t)} = (r_1 - r_2)t + V_0 \tag{2.1}$$

Análogamente al volumen, la cantidad de soluto en el tanque en términos del tiempo ($Q_{(t)}$), varía según la cantidad de soluto que entra menos la que sale del tanque.

Es decir, $Q'_{(t)} = \alpha r_1 - \left(\frac{Q_{(t)}}{V_{(t)}}\right) r_2$, donde α es la concentración del soluto que ingresa al tanque.

De este modo, para encontrar $Q_{(t)}$, debemos resolver la siguiente ecuación diferencial ordinaria: $Q'_{(t)} = \alpha r_1 - Q_{(t)} \left(\frac{r_2}{V_{(t)}}\right)$.

Ordenandola tenemos:

$$Q'_{(t)} + Q_{(t)} \left(\frac{r_2}{V_{(t)}}\right) = \alpha r_1 \tag{2.2}$$

Como podemos observar, esta EDO es homogénea por lo que necesitamos encontrar su factor integrante. Sabemos que el factor integrante de una EDO de la forma $Q'_{(t)} + Q_{(t)} f_{(t)} = C$ esta dado por $exp\left(\int f_{(t)} dt\right)$, en nuestro caso $f_{(t)} = \left(\frac{r_2}{V_{(t)}}\right)$. De este modo, por (2.1);

$$\int \left(\frac{r_2 dt}{V_{(t)}}\right) = \int \left(\frac{r_2 dt}{(r_1 - r_2)t + V_0}\right)$$

con $r_1 \neq r_2$:

$$\int \left(\frac{r_2 dt}{(r_1 - r_2)t + V_0} \right) = \left(\frac{r_2}{r_1 - r_2} \right) \ln |(r_1 - r_2)t + V_0| = \ln |(r_1 - r_2)t + V_0|^{\left(\frac{r_2}{r_1 - r_2}\right)}$$

es decir:

$$exp\left(\int \left(\frac{r_2 dt}{V_{(t)}} \right) \right) = exp\left(\ln |(r_1 - r_2)t + V_0|^{\left(\frac{r_2}{r_1 - r_2}\right)} \right) = |(r_1 - r_2)t + V_0|^{\left(\frac{r_2}{r_1 - r_2}\right)}$$

Sea $r_3 = r_1 - r_2$, multiplicando la EDO (2.2) por nuestro factor integrante obtenemos:

$$\begin{aligned} Q'_{(t)}|r_3t + V_0|^{\left(\frac{r_2}{r_3}\right)} + Q_{(t)}\left(\frac{r_2}{V_{(t)}} \right)|r_3t + V_0|^{\left(\frac{r_2}{r_3}\right)} &= \alpha r_1 |r_3t + V_0|^{\left(\frac{r_2}{r_3}\right)} \\ \left(Q_{(t)}|r_3t + V_0|^{\left(\frac{r_2}{r_3}\right)} \right)' &= \alpha r_1 |r_3t + V_0|^{\left(\frac{r_2}{r_3}\right)} \end{aligned}$$

Integrando y despejando $Q_{(t)}$:

$$Q_{(t)} = \alpha r_3 |r_3t + V_0| + C|r_3t + V_0|^{\left(\frac{-r_2}{r_3}\right)}$$

Sabemos que la concentración de soluto en el tanque, en términos del tiempo ($C_{(t)}$), es igual a la cantidad de soluto en el tanque ($Q_{(t)}$) dividida por el volumen ($V_{(t)}$).

Es decir, $C_{(t)} = \frac{Q_{(t)}}{V_{(t)}}$, por (2.1) $C_{(t)} = \alpha r_3 + C|r_3t + V_0|^{\left(\frac{-r_1}{r_3}\right)}$.

Sea C_0 la concentración inicial de soluto en el tanque, así:

$C_0 = C_{(0)} = \alpha r_3 + C|r_3 0 + V_0|^{\left(\frac{-r_1}{r_3}\right)} = \alpha r_3 + C \cdot V_0^{\left(\frac{-r_1}{r_3}\right)}$

Despejando C; $C = (C_0 - \alpha r_3)V_0^{\left(\frac{r_1}{r_3}\right)}$

Reemplazando C en $C_{(t)}$:

$$C_{(t)} = \alpha r_3 + \left[(C_0 - \alpha r_3)V_0^{\left(\frac{r_1}{r_3}\right)}\right] |r_3 t + V_0|^{\left(\frac{-r_1}{r_3}\right)}$$

$$C_{(t)} = \alpha r_3 + (C_0 - \alpha r_3)\left(\frac{V_0}{|r_3 t + V_0|}\right)^{\left(\frac{r_1}{r_3}\right)} \tag{2.3}$$

Reemplazando C en $Q_{(t)}$:

$$Q_{(t)} = \alpha r_3|r_3 t + V_0| + \left((C_0 - \alpha r_3)V_0^{\left(\frac{r_1}{r_3}\right)}\right) |r_3 t + V_0|^{\left(\frac{-r_2}{r_3}\right)} \tag{2.4}$$

2.2.2. Problema Directo

Tenemos un tanque bien mezclado con capacidad para 1000 gal de agua, contiene 300 gal de agua con una concentración de sal de 0,2 lb/gal. Entra agua al tanque con una concentración de sal de 0,4 lb/gal a una tasa de 2 gal/min. Una válvula abierta permite que el agua salga del tanque a la tasa de 1 gal/min.

Un problema directo es determinar la cantidad y la concentración de sal en el tanque despues de 5 min. y 10 min.

Contamos con los siguientes datos:

α	:	Concentración de la contaminación en el flujo de entrada	=	0,4 lb/gal.
r_1	:	Cantidad de fluido de entrada	=	2 gal/min.
r_2	:	Cantidad de fluido de salida	=	1 gal/min.
V_0	:	Volmen inicial del tanque	=	300 gal.
C_0	:	Concentración de la contaminación inicial en el tanque	=	0,2 lb/gal.

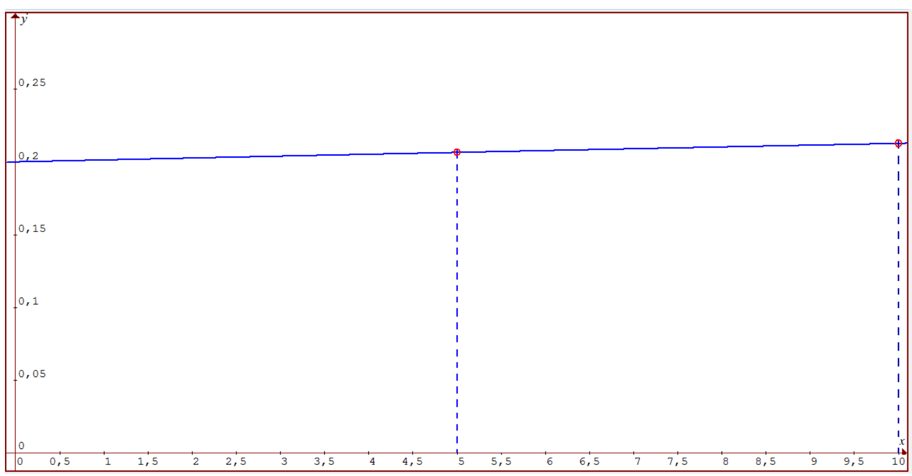
Si consideramos la formulas deducidas, en este caso basta con evaluar en (2.3):

- Para 5 min., $t = 5$

$$\begin{aligned}
C_{(t)} &= \alpha r_3 + (C_0 - \alpha r_3)\left(\frac{V_0}{|r_3 t + V_0|}\right)^{\left(\frac{r_1}{r_3}\right)} \\
C_{(5)} &= 0,4 \cdot (2-1) + (0,2 - 0,4 \cdot (2-1))\left(\frac{300}{|(2-1)\cdot 5 + 300|}\right)^{\left(\frac{2}{(2-1)}\right)} \\
C_{(5)} &= 0,4 + (-0,2)\left(\frac{300}{|305|}\right)^{(2)} \\
C_{(5)} &= 0,2065 \quad \text{lb/gal aprox.}
\end{aligned}$$

- Para 10 min., $t = 10$

$$\begin{aligned}
C_{(t)} &= \alpha r_3 + (C_0 - \alpha r_3)\left(\frac{V_0}{|r_3 t + V_0|}\right)^{\left(\frac{r_1}{r_3}\right)} \\
C_{(10)} &= 0,4 \cdot (2-1) + (0,2 - 0,4 \cdot (2-1))\left(\frac{300}{|(2-1)\cdot 10 + 300|}\right)^{\left(\frac{2}{(2-1)}\right)} \\
C_{(10)} &= 0,4 + (-0,2)\left(\frac{300}{|310|}\right)^{(2)} \\
C_{(10)} &= 0,2127 \quad \text{lb/gal aprox.}
\end{aligned}$$



2.2.3. Problema Inverso

El problema que realmente deseamos resolver es:

Sea C_m un valor dado (una medición), tal que C_m es la concentración de la mezcla en el estanque medida en un instante dado (t_1). ¿Para que valor de α se tiene que: $C_{\alpha(t_1)} = C_m$?

Para ello debemos corroborar 3 cosas:

1. La unicidad de la solución.

2. La dependencia continua de los datos.

3. La existencia de la solución. ¿Cómo encontramos α?

En función del volumen del tanque $(V_{(t)})$, podemos considerar 2 casos:

Caso 1

Con volumen variable como lo hemos trabajado, es decir $r_1 \neq r_2$.

1. Veamos la unicidad de la solución. Es decir:

   ¿Sí $C_{\alpha(t_1)} = C_{\alpha'(t_1)} \Rightarrow \alpha = \alpha'$?

$$
\begin{aligned}
C_{\alpha(t_1)} &= C_{\alpha'(t_1)} \\
\alpha r_3 + (C_0 - \alpha r_3)\left(\frac{|V_0|}{|r_3 t_1 + V_0|}\right)^{\left(\frac{r_1}{r_3}\right)} &= \alpha' r_3 + (C_0 - \alpha' r_3)\left(\frac{|V_0|}{|r_3 t_1 + V_0|}\right)^{\left(\frac{r_1}{r_3}\right)} \\
\alpha r_3 - \alpha r_3\left(\frac{|V_0|}{|r_3 t_1 + V_0|}\right)^{\left(\frac{r_1}{r_3}\right)} &= \alpha' r_3 - \alpha' r_3\left(\frac{|V_0|}{|r_3 t_1 + V_0|}\right)^{\left(\frac{r_1}{r_3}\right)} \\
\alpha r_3\left[1 - \left(\frac{|V_0|}{|r_3 t_1 + V_0|}\right)^{\left(\frac{r_1}{r_3}\right)}\right] &= \alpha' r_3\left[1 - \left(\frac{|V_0|}{|r_3 t_1 + V_0|}\right)^{\left(\frac{r_1}{r_3}\right)}\right] \\
\alpha r_3 &= \alpha' r_3 \\
\alpha &= \alpha'
\end{aligned}
$$

   Así podemos verificar la unicidad de la solución.

2. Ahora veamos la dependencia continua de los datos. Es decir,

   ¿Si $|C_{\alpha(t_1)} - C_{\alpha'(t_1)}| << \epsilon \Rightarrow \exists\, \delta \big/ |\alpha - \alpha'| << \delta$?

$$\left| C_{\alpha(t_1)} - C_{\alpha'(t_1)} \right| \ll \epsilon$$

$$\left| \left[\alpha r_3 + (C_0 - \alpha r_3) \left(\frac{|V_0|}{|r_3 t_1 + V_0|} \right)^{\left(\frac{r_1}{r_3}\right)} \right] - \left[\alpha' r_3 + (C_0 - \alpha' r_3) \left(\frac{|V_0|}{|r_3 t_1 + V_0|} \right)^{\left(\frac{r_1}{r_3}\right)} \right] \right| \ll \epsilon$$

$$\left| \left[\alpha r_3 - \alpha r_3 \left(\frac{|V_0|}{|r_3 t_1 + V_0|} \right)^{\left(\frac{r_1}{r_3}\right)} \right] - \left[\alpha' r_3 - \alpha' r_3 \left(\frac{|V_0|}{|r_3 t_1 + V_0|} \right)^{\left(\frac{r_1}{r_3}\right)} \right] \right| \ll \epsilon$$

$$\left| \alpha r_3 \left[1 - \left(\frac{|V_0|}{|r_3 t_1 + V_0|} \right)^{\left(\frac{r_1}{r_3}\right)} \right] - \alpha' r_3 \left[1 - \left(\frac{|V_0|}{|r_3 t_1 + V_0|} \right)^{\left(\frac{r_1}{r_3}\right)} \right] \right| \ll \epsilon$$

$$\left| (\alpha - \alpha')\, r_3 \left[1 - \left(\frac{|V_0|}{|r_3 t_1 + V_0|} \right)^{\left(\frac{r_1}{r_3}\right)} \right] \right| \ll \epsilon$$

Así con:

$$\delta = \frac{\epsilon}{\left| r_3 \left[1 - \left(\frac{|V_0|}{|r_3 t_1 + V_0|} \right)^{\left(\frac{r_1}{r_3}\right)} \right] \right|} \Rightarrow |(\alpha - \alpha')| \ll \delta$$

3. ¿Cómo encontramos α?

Considerando la ecuación (2.3), nos basta con despejar α:

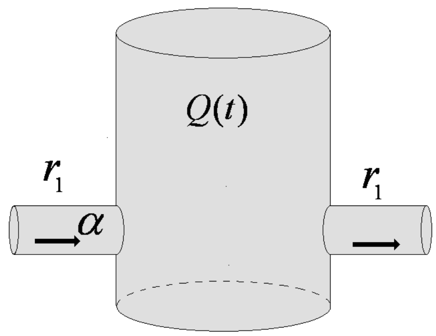
$$\begin{aligned}
C_{(t)} &= \alpha r_3 + (C_0 - \alpha r_3)\left(\frac{V_0}{|r_3 t + V_0|}\right)^{\left(\frac{r_1}{r_3}\right)} \\
C_{(t)} &= \alpha r_3 + C_0\left(\frac{V_0}{|r_3 t + V_0|}\right)^{\left(\frac{r_1}{r_3}\right)} - \alpha r_3\left(\frac{V_0}{|r_3 t + V_0|}\right)^{\left(\frac{r_1}{r_3}\right)} \\
C_{(t)} - C_0\left(\frac{V_0}{|r_3 t + V_0|}\right)^{\left(\frac{r_1}{r_3}\right)} &= \alpha r_3 - \alpha r_3\left(\frac{V_0}{|r_3 t + V_0|}\right)^{\left(\frac{r_1}{r_3}\right)} \\
C_{(t)} - C_0\left(\frac{V_0}{|r_3 t + V_0|}\right)^{\left(\frac{r_1}{r_3}\right)} &= \alpha r_3\left[1 - \left(\frac{V_0}{|r_3 t + V_0|}\right)^{\left(\frac{r_1}{r_3}\right)}\right] \\
\frac{C_{(t)} - C_0\left(\frac{V_0}{|r_3 t + V_0|}\right)^{\left(\frac{r_1}{r_3}\right)}}{r_3\left[1 - \left(\frac{V_0}{|r_3 t + V_0|}\right)^{\left(\frac{r_1}{r_3}\right)}\right]} &= \alpha \qquad (2.5)
\end{aligned}$$

Conociendo C_0, V_0, r_1, r_2, y una medición ($C_{(t_1)}$), entonces obtendremos α.

Cabe mencionar que este problema esta sujeto a las siguientes restricciones:

- Flujo de entrada (r_1) debe ser distinto del flujo de salida (r_2).
- Si $r_1 < r_2$, este modelo sólo será válido mientras el tanque no se vacie. En cuyo caso α será igual a la medición tomada.
- Si $r_1 > r_2$, este modelo sólo será válido mientras el tanque no se llene. En cuyo caso, los flujos de entrada y salida seran iguales, por lo que se debera trabajar con el modelo del "Caso 2".

Caso 2



Con volumen constante en el tanque, es decir $r_1 = r_2$, de (2.1) tenemos:

$$V_{(t)} = (r_1 - r_2)t + V_0 = (r_1 - r_1)t + V_0 = (0)t + V_0 = V_0$$

Debemos resolver la EDO (2.2), ahora considerando $r_1 = r_2$ y $V_{(t)} = V_0$, es decir, $Q'_{(t)} + Q_{(t)}\left(\frac{r_1}{V_0}\right) = \alpha r_1$.

Al igual que en el caso anterior, la EDO es homogenea y su factor integrante es de la forma $exp\left(\int f_{(t)}dt\right)$, en este caso es

$$exp\left(\int\left(\frac{r_1 dt}{V_0}\right)\right) = exp\left(\frac{r_1 t}{V_0}\right)$$

Multiplicando la EDO por su factor integrante:

$$\begin{aligned} Q'_{(t)} \cdot exp\left(\frac{r_1 t}{V_0}\right) + Q_{(t)} \cdot exp\left(\frac{r_1 t}{V_0}\right)\left(\frac{r_1}{V_0}\right) &= \alpha r_1 \cdot exp\left(\frac{r_1 t}{V_0}\right) \\ \left(Q_{(t)} \cdot exp\left(\frac{r_1 t}{V_0}\right)\right)' &= \alpha r_1 \cdot exp\left(\frac{r_1 t}{V_0}\right) \end{aligned}$$

Integrando y despejando $Q_{(t)}$, obtenemos:

$$Q_{(t)} = \alpha V_0 + C \cdot exp\left(\frac{-r_1 t}{V_0}\right)$$

Sabemos que:

$$C_{(t)} = \frac{Q_{(t)}}{V_0} = \alpha + C\left(\frac{\exp\left(\frac{-r_1 t}{V_0}\right)}{V_0}\right) \tag{2.6}$$

Sea C_0 la concentración inicial de soluto en el tanque.

$$\begin{aligned} C_0 = C_{(0)} &= \alpha + C\left(\frac{exp\left(\frac{-r_1 \cdot 0}{V_0}\right)}{V_0}\right) \\ C_0 &= \alpha + \frac{C}{V_0} \\ C_0 - \alpha &= \frac{C}{V_0} \\ (C_0 - \alpha)V_0 &= C \end{aligned}$$

Reemplazando C en (2.6):

$$\begin{aligned} C_{(t)} &= \alpha + [(C_0 - \alpha)V_0]\left(\frac{exp\left(\frac{-r_1 t}{V_0}\right)}{V_0}\right) \\ C_{(t)} &= \alpha + (C_0 - \alpha) exp\left(\frac{-r_1 t}{V_0}\right) \qquad (2.7) \end{aligned}$$

Ahora analicemos:

1. La unicidad de la solución, es decir, ¿Sí $C_{\alpha(t_1)} = C_{\alpha'(t_1)} \Rightarrow \alpha = \alpha'$?

$$\begin{aligned} C_{\alpha(t_1)} &= C_{\alpha'(t_1)} \\ \alpha + [C_0 - \alpha]\, exp\left(\frac{-r_1 t_1}{V_0}\right) &= \alpha' + [C_0 - \alpha']\, exp\left(\frac{-r_1 t_1}{V_0}\right) \\ \alpha + C_0 \cdot exp\left(\frac{-r_1 t_1}{V_0}\right) - \alpha \cdot exp\left(\frac{-r_1 t_1}{V_0}\right) &= \alpha' + C_0 \cdot exp\left(\frac{-r_1 t_1}{V_0}\right) - \alpha' \cdot exp\left(\frac{-r_1 t_1}{V_0}\right) \\ \alpha - \alpha \cdot exp\left(\frac{-r_1 t_1}{V_0}\right) &= \alpha' - \alpha' \cdot exp\left(\frac{-r_1 t_1}{V_0}\right) \\ \alpha\left(1 - exp\left(\frac{-r_1 t_1}{V_0}\right)\right) &= \alpha'\left(1 - exp\left(\frac{-r_1 t_1}{V_0}\right)\right) \\ \alpha &= \alpha' \end{aligned}$$

2. La dependencia continua de los datos, es decir,

¿Sí $|C_{\alpha(t_1)} - C_{\alpha'(t_1)}| << \epsilon \Rightarrow \exists\, \delta \big/ |\alpha - \alpha'| << \delta$?

$$|C_{\alpha(t_1)} - C_{\alpha'(t_1)}| << \epsilon$$

$$\left|\left[\alpha + [C_0 - \alpha]\, exp\left(\frac{-r_1 t_1}{V_0}\right)\right] - \left[\alpha' + [C_0 - \alpha']\, exp\left(\frac{-r_1 t_1}{V_0}\right)\right]\right| << \epsilon$$

$$\left|C_0 \cdot exp\left(\frac{-r_1 t_1}{V_0}\right) + \alpha\left(1 - exp\left(\frac{-r_1 t_1}{V_0}\right)\right)\right.$$

$$\left. -C_0 \cdot exp\left(\frac{-r_1 t_1}{V_0}\right) - \alpha'\left(1 - exp\left(\frac{-r_1 t_1}{V_0}\right)\right)\right| << \epsilon$$

$$\left|\alpha\left(1 - exp\left(\frac{-r_1 t_1}{V_0}\right)\right) - \alpha'\left(1 - exp\left(\frac{-r_1 t_1}{V_0}\right)\right)\right| << \epsilon$$

$$\left|(\alpha - \alpha')\left(1 - exp\left(\frac{-r_1 t_1}{V_0}\right)\right)\right| << \epsilon$$

$$|\alpha - \alpha'| << \frac{\epsilon}{1 - exp\left(\frac{-r_1 t_1}{V_0}\right)}$$

Así con:

$$\delta = \frac{\epsilon}{1 - exp\left(\frac{-r_1 t_1}{V_0}\right)} \Rightarrow |\alpha - \alpha'| << \delta$$

3. ¿Cómo encontramos α?

   Despejemos α en (2.7)

$$\begin{aligned} C_{(t)} &= \alpha + [C_0 - \alpha]\, exp\left(\frac{-r_1 t}{V_0}\right) \\ C_{(t)} &= C_0 \cdot exp\left(\frac{-r_1 t}{V_0}\right) + \alpha\left[1 - exp\left(\frac{-r_1 t}{V_0}\right)\right] \\ C_{(t)} - C_0 \cdot exp\left(\frac{-r_1 t}{V_0}\right) &= \alpha\left[1 - exp\left(\frac{-r_1 t}{V_0}\right)\right] \\ \frac{C_{(t)} - C_0 \cdot exp\left(\frac{-r_1 t}{V_0}\right)}{1 - exp\left(\frac{-r_1 t}{V_0}\right)} &= \alpha \qquad (2.8) \end{aligned}$$

   Conociendo C_0, V_0, r_1 y una medición ($C_{(t_1)}$), obtendremos α.

Otros casos

En el mismo caso anterior, en el cual tenemos un tanque con volumen fijo, y considerando que en la vida real no siempre contamos con todos los datos, se tornan interesantes las siguientes preguntas:

1. Si tuviéramos r y V_0, adicionalmente pudiéramos tomar muestras de la concentración en el tanque. ¿Podemos conocer C_0 y α en forma única?

   Con una medición obtendríamos: $C_{t_1} = \alpha + (C_0 - \alpha) exp\left(\frac{-rt_1}{V_0}\right)$, lo cuál es una ecuación lineal con 2 variables. Sabemos que para poder determinar, en forma única, los valores de las 2 variables en ecuaciones lineales con 2 incognitas necesitamos a lo menos 2 ecuaciones linealmente independientes. Veamos si con 2 mediciones nos basta para poder determinar C_0 y α en forma única.

Sean C_{t_1} y C_{t_2} mediciones de la concentración dentro del tanque en el tiempo t_1 y t_2 respectivamente. Sin pérdida de generalidad, consideremos $t_2 > t_1 > 0$.

Notemos que si $C_{t_1} = C_{t_2}$ entonces el problema es trivial.

$$\begin{aligned} C_{t_1} &= C_{t_2} \\ \alpha + (C_0 - \alpha)e^{\left(\frac{-rt_1}{V_0}\right)} &= \alpha + (C_0 - \alpha)e^{\left(\frac{-rt_2}{V_0}\right)} \\ (C_0 - \alpha)e^{\left(\frac{-rt_1}{V_0}\right)} &= (C_0 - \alpha)e^{\left(\frac{-rt_2}{V_0}\right)} \\ (C_0 - \alpha)e^{\left(\frac{-rt_1}{V_0}\right)} - (C_0 - \alpha)e^{\left(\frac{-rt_2}{V_0}\right)} &= 0 \\ (C_0 - \alpha)\left(e^{\left(\frac{-rt_1}{V_0}\right)} - e^{\left(\frac{-rt_2}{V_0}\right)}\right) &= 0 \end{aligned}$$

Lo que implica que $\left(e^{\left(\frac{-rt_1}{V_0}\right)} - e^{\left(\frac{-rt_2}{V_0}\right)}\right) = 0$ o $(C_0 - \alpha) = 0$.

Si $V_0 = 0$ y $r = 0$, es decir el tanque esta vacío y no le está ingresando nada, por lo que no tendría sentido el ejercicio. Si $V_0 \neq 0$ y $r = 0$, es decir no le está ingresando nada al tanque, por lo que α no existe y bastaría con tomar una muestra del tanque y obtendríamos automáticamente C_0. Si $V_0 = 0$ y $r \neq 0$, es decir en el tanque sólo está corriendo la mezcla que ingresa, por lo que C_0 no existe y bastaría con tomar una muestra del tanque y obtendríamos automáticamente α.

Sabemos que $t_2 > t_1 > 0$ y considerando $\frac{-r}{V_0} \neq 0$. De este modo,

$\left(e^{\left(\frac{-rt_1}{V_0}\right)} - e^{\left(\frac{-rt_2}{V_0}\right)}\right) \neq 0 \Rightarrow (C_0 - \alpha) = 0$, es decir, $C_0 = \alpha$. Reemplazando en (2.7): $C_{t_1} = \alpha + (\alpha - \alpha)e^{\left(\frac{-rt_1}{V_0}\right)} = \alpha + 0 \cdot e^{\left(\frac{-rt_1}{V_0}\right)} = \alpha$

Así tenemos: $C_{t_1} = C_{t_2} = \alpha = C_0$.

Con $C_{t_1} \neq C_{t_2}$:

a) De (2.7) tenemos: $C_{t_1} = \alpha + (C_0 - \alpha)e^{\frac{-rt_1}{V_0}}$

b) De (2.7) tenemos: $C_{t_2} = \alpha + (C_0 - \alpha)e^{\frac{-rt_2}{V_0}}$

c) Despejando α en $(1a)$

$$\begin{aligned}
C_{t_1} &= \alpha - \alpha e^{\frac{-rt_1}{V_0}} + C_0 e^{\frac{-rt_1}{V_0}} \\
C_{t_1} - C_0 e^{\frac{-rt_1}{V_0}} &= \alpha(1 - e^{\frac{-rt_1}{V_0}}) \\
\frac{C_{t_1} - C_0 e^{\frac{-rt_1}{V_0}}}{1 - e^{\frac{-rt_1}{V_0}}} &= \alpha
\end{aligned}$$

d) Despejando α en $(1b)$

$$\begin{aligned}
C_{t_2} &= \alpha - \alpha e^{\frac{-rt_2}{V_0}} + C_0 e^{\frac{-rt_2}{V_0}} \\
C_{t_2} - C_0 e^{\frac{-rt_2}{V_0}} &= \alpha(1 - e^{\frac{-rt_2}{V_0}}) \\
\frac{C_{t_2} - C_0 e^{\frac{-rt_2}{V_0}}}{1 - e^{\frac{-rt_2}{V_0}}} &= \alpha
\end{aligned}$$

e) De $(1c)$ y $(1d)$ obtenemos:

$$
\begin{aligned}
\frac{C_{t_1} - C_0 e^{\frac{-rt_1}{V_0}}}{1 - e^{\frac{-rt_1}{V_0}}} &= \frac{C_{t_2} - C_0 e^{\frac{-rt_2}{V_0}}}{1 - e^{\frac{-rt_2}{V_0}}} \quad \Big/ \cdot \frac{C_{t_1} - C_0 e^{\frac{-rt_1}{V_0}}}{1 - e^{\frac{-rt_2}{V_0}}} \\
\frac{1 - e^{\frac{-rt_2}{V_0}}}{1 - e^{\frac{-rt_1}{V_0}}} &= \frac{C_{t_2} - C_0 e^{\frac{-rt_2}{V_0}}}{C_{t_1} - C_0 e^{\frac{-rt_1}{V_0}}} \quad = \varphi_{(C_0)}
\end{aligned}
$$

Si $\varphi_{(C_0)}$ es invertible $\Rightarrow C_0$ es único y está determinado por

$$
C_0 = \varphi^{-1}\left(\frac{1 - e^{\frac{-rt_2}{V_0}}}{1 - e^{\frac{-rt_1}{V_0}}}\right)
$$

Adicionalmente α también será único.

$f)$ Analicemos $\varphi_{(C_0)}$. Sabemos que una función es invertible si es biyectiva, es decir es sobreyectiva e inyectiva.

Estamos considerando datos para los cuales la función $C_{(t)}$ está bien definida, lo que nos asegura la sobreyectividad de $\varphi_{(C_0)}$.

En cuanto a la inyectividad necesitamos que nuestra función sea monótona creciente o decreciente, es decir, $\varphi'_{(C_0)} > 0$ o $\varphi'_{(C_0)} < 0$ para que $\varphi_{(C_0)}$ sea inyectiva.

$$
\begin{aligned}
\varphi_{(C_0)} &= \frac{C_{t_2} - C_0 e^{\frac{-r}{V_0}t_2}}{C_{t_1} - C_0 e^{\frac{-r}{V_0}t_1}} \\
\varphi'_{(C_0)} &= \frac{-e^{\frac{-r}{V_0}t_2}(C_{t_1} - C_0 e^{\frac{-r}{V_0}t_1}) + e^{\frac{-r}{V_0}t_1}(C_{t_2} - C_0 e^{\frac{-r}{V_0}t_2})}{(C_{t_1} - C_0 e^{\frac{-r}{V_0}t_1})^2} \\
\varphi'_{(C_0)} &= \frac{e^{\frac{-r}{V_0}t_1} C_{t_2} - e^{\frac{-r}{V_0}t_2} C_{t_1}}{(C_{t_1} - C_0 e^{\frac{-r}{V_0}t_1})^2}
\end{aligned}
$$

Sea $t_2 = t_1 + \beta$, con $\beta > 0$

$$\begin{aligned}
\varphi'_{(C_0)} &= \frac{e^{\frac{-r}{V_0}t_1}C_{t_2} - e^{\frac{-r}{V_0}(t_1+\beta)}C_{t_1}}{(C_{t_1} - C_0 e^{\frac{-r}{V_0}t_1})^2} \\
\varphi'_{(C_0)} &= \frac{e^{\frac{-r}{V_0}t_1}(C_{t_2} - e^{\frac{-r}{V_0}\beta}C_{t_1})}{(C_{t_1} - C_0 e^{\frac{-r}{V_0}t_1})^2} \\
\varphi'_{(C_0)} &= \frac{e^{\frac{-r}{V_0}t_1}}{(C_{t_1} - C_o e^{\frac{-r}{V_0}t_1})^2}(C_{t_2} - e^{\frac{-r}{V_0}\beta}C_{t_1}) \\
\varphi'_{(C_0)} &= \frac{e^{\frac{-r}{V_0}t_1}}{(C_{t_1} - C_0 e^{\frac{-r}{V_0}t_1})^2}\left(\frac{1}{e^{\frac{r}{V_0}\beta}}(e^{\frac{r}{V_0}\beta}C_{t_2} - C_{t_1})\right) \\
\varphi'_{(C_0)} &= \frac{e^{\frac{-r}{V_0}t_1}}{e^{\frac{r}{V_0}\beta}(C_{t_1} - C_0 e^{\frac{-r}{V_0}t_1})^2}(e^{\frac{r}{V_0}\beta}C_{t_2} - C_{t_1}) \\
\varphi'_{(C_0)} &= \frac{e^{\frac{-r}{V_0}(t_1+\beta)}}{(C_{t_1} - C_0 e^{\frac{-r}{V_0}t_1})^2}(e^{\frac{r}{V_0}\beta}C_{t_2} - C_{t_1})
\end{aligned}$$

Sabemos que siempre:

$$\frac{e^{\frac{-r}{V_0}(t_1+\beta)}}{(C_{t_1} - C_0 e^{\frac{-r}{V_0}t_1})^2} > 0$$

Veamos que ocurre con $(e^{\frac{r}{V_0}\beta}C_{t_2} - C_{t_1})$

Tenemos 2 casos:

- Si $C_{t_2} > C_{t_1}$

$$\begin{aligned}
C_{t_2} &> C_{t_1} \quad \Big/ \cdot e^{\frac{r}{V_0}\beta} \\
e^{\frac{r}{V_0}\beta}C_{t_2} &> e^{\frac{r}{V_0}\beta}C_{t_1} \qquad (2.9)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
e^{\frac{r}{V_0}\beta} &> 1 \quad \Big/ \cdot C_{t_1} \\
e^{\frac{r}{V_0}\beta} C_{t_1} &> C_{t_1} \qquad (2.10)
\end{aligned}
$$

De (2.9) y (2.10) tenemos:

$$
\begin{aligned}
e^{\frac{r}{V_0}\beta} C_{t_2} &> e^{\frac{r}{V_0}\beta} C_{t_1} > C_{t_1} \\
e^{\frac{r}{V_0}\beta} C_{t_2} &> C_{t_1} \\
e^{\frac{r}{V_0}\beta} C_{t_2} - C_{t_1} &> 0
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $\varphi'_{(C_0)} > 0 \Rightarrow \varphi_{(C_0)}$ es invertible.

- Si $C_{t_2} < C_{t_1}$

  Esto implica que la concentración de entrada (α) es menor que la concentración inicial C_0, provocando que a partir de algún instante t_x todas las mediciones que tomemos serán aproximadamente α.

  Por lo tanto, $\varphi_{(C_0)}$ no será invertible.

2. El mismo problema anterior, pero ahora conocemos α y V_0. ¿Cómo podemos conocer C_0 y r en forma única?

$$\begin{aligned}
\text{Notemos que si } C_{t_1} &= C_{t_2} \text{ entonces el problema no tiene solución.}\\
C_{t_1} &= C_{t_2}\\
\alpha + (C_0 - \alpha)e^{\frac{-r}{V_0}t_1} &= \alpha + (C_0 - \alpha)e^{\frac{-r}{V_0}t_2}\\
(C_0 - \alpha)e^{\frac{-r}{V_0}t_1} &= (C_0 - \alpha)e^{\frac{-r}{V_0}t_2}\\
(C_0 - \alpha)(e^{\frac{-r}{V_0}t_1} - e^{\frac{-r}{V_0}t_2}) &= 0\\
(e^{\frac{-r}{V_0}t_1} - e^{\frac{-r}{V_0}t_2}) &\neq 0 \qquad \text{Por } t_2 > t_1 > 0\\
\Rightarrow \quad (C_0 - \alpha) &= 0\\
C_0 &= \alpha
\end{aligned}$$

Reemplazando en $(1a)$

$$\begin{aligned}
C_{t_1} &= \alpha + (\alpha - \alpha)e^{\frac{-r}{V_0}t_1}\\
C_{t_1} &= \alpha + (0)e^{\frac{-r}{V_0}t_1}\\
C_{t_1} &= \alpha
\end{aligned}$$

Así tenemos:

$$C_{t_1} = C_{t_2} = C_0 = \alpha$$

Pero $\frac{r}{V_0}$ no se puede determinar debido a que (2.3) se transforma en:

$$C_t = \alpha$$

Si tuvieramos C_{t_1} y C_{t_2}, con $t_2 > t_1 > 0 \Rightarrow$

a) De (2.3) tenemos:

$$C_{t_1} = \alpha + (C_0 - \alpha)e^{\frac{-r}{V_0}t_1}$$

b) De (2.3) tenemos:

$$C_{t_2} = \alpha + (C_0 - \alpha)e^{\frac{-r}{V_0}t_2}$$

c) Despejando $\frac{r}{V_0}$ en $(2a)$

$$\begin{aligned} C_{t_1} - \alpha &= (C_0 - \alpha)e^{\frac{-r}{V_0}t_1} \\ \frac{C_{t_1} - \alpha}{C_o - \alpha} &= e^{\frac{-r}{V_0}t_1} \quad \Big/ \ln \\ \ln\left|\frac{C_{t_1} - \alpha}{C_0 - \alpha}\right| &= \frac{-r}{V_0}t_1 \quad \Big/ \cdot \frac{-1}{t_1} \\ \frac{-1}{t_1}\ln\left|\frac{C_{t_1} - \alpha}{C_0 - \alpha}\right| &= \frac{r}{V_0} \end{aligned}$$

d) Despejando $\frac{r}{V_0}$ en $(2b)$

$$\begin{aligned} C_{t_2} - \alpha &= (C_0 - \alpha)e^{\frac{-r}{V_0}t_2} \\ \frac{C_{t_2} - \alpha}{C_0 - \alpha} &= e^{\frac{-r}{V_0}t_2} \quad \Big/ \ln \\ \ln\left|\frac{C_{t_2} - \alpha}{C_0 - \alpha}\right| &= \frac{-r}{V_0}t_2 \quad \Big/ \cdot \frac{-1}{t_2} \\ \frac{-1}{t_2}\ln\left|\frac{C_{t_2} - \alpha}{C_0 - \alpha}\right| &= \frac{r}{V_0} \end{aligned}$$

$e)$ De $(2c)$ y $(2d)$ obtenemos:

$$\begin{aligned}
\frac{-1}{t_1}\ln\left|\frac{C_{t_1}-\alpha}{C_0-\alpha}\right| &= \frac{-1}{t_2}\ln\left|\frac{C_{t_2}-\alpha}{C_0-\alpha}\right| \quad \Big/ \cdot -1\\
\frac{1}{t_1}\ln\left|\frac{C_{t_1}-\alpha}{C_0-\alpha}\right| &= \frac{1}{t_2}\ln\left|\frac{C_{t_2}-\alpha}{C_0-\alpha}\right|\\
\frac{1}{t_1}(\ln|C_{t_1}-\alpha|-\ln|C_0-\alpha|) &= \frac{1}{t_2}(\ln|C_{t_2}-\alpha|-\ln|C_0-\alpha|)\\
\frac{1}{t_1}\ln|C_{t_1}-\alpha|-\frac{1}{t_1}\ln|C_0-\alpha| &= \frac{1}{t_2}\ln|C_{t_2}-\alpha|-\frac{1}{t_2}\ln|C_0-\alpha|\\
\frac{1}{t_1}\ln|C_{t_1}-\alpha|-\frac{1}{t_2}\ln|C_{t_2}-\alpha| &= \frac{1}{t_1}\ln|C_0-\alpha|-\frac{1}{t_2}\ln|C_0-\alpha|\\
\ln\left(\frac{|C_{t_1}-\alpha|^{\frac{1}{t_1}}}{|C_{t_2}-\alpha|^{\frac{1}{t_2}}}\right) &= \ln|C_0-\alpha|^{(\frac{1}{t_1}-\frac{1}{t_2})} \quad \Big/ e^*\\
\left(\frac{|C_{t_1}-\alpha|^{\frac{1}{t_1}}}{|C_{t_2}-\alpha|^{\frac{1}{t_2}}}\right) &= |C_0-\alpha|^{(\frac{1}{t_1}-\frac{1}{t_2})} \quad = \varphi_{(C_0)}
\end{aligned}$$

Si $\varphi_{(C_0)}$ es invertible $\Rightarrow C_0$ es único y está determinado por

$$C_0 = \varphi^{-1}\left(\frac{|C_{t_1}-\alpha|^{\frac{1}{t_1}}}{|C_{t_2}-\alpha|^{\frac{1}{t_2}}}\right)$$

Adicionalmente r también sera único.

$f)$ Analicemos $\varphi_{(C_0)}$

Al igual que en el caso anterior, nos basta que $\varphi'_{(C_0)} > 0$ o $\varphi'_{(C_0)} < 0$

para que φ sea invertible.

$$\begin{aligned}\varphi_{(C_0)} &= |C_0-\alpha|^{(\frac{1}{t_1}-\frac{1}{t_2})}\\ \varphi'_{(C_0)} &= \left(\frac{1}{t_1}-\frac{1}{t_2}\right)|C_0-\alpha|^{(\frac{1}{t_1}-\frac{1}{t_2}-1)}\end{aligned}$$

Sabemos que:

$$\begin{aligned}t_2 &> t_1\\ \frac{1}{t_1} &> \frac{1}{t_2}\\ \frac{1}{t_1}-\frac{1}{t_2} &> 0\end{aligned}$$

Veamos que ocurre con $|C_0-\alpha|^{(\frac{1}{t_1}-\frac{1}{t_2}-1)}$

Tenemos 2 casos:

- Por el problema planteado, si $C_{t_1} > C_{t_2} \Rightarrow C_0 > \alpha$

  $C_0 > \alpha \Rightarrow C_0 - \alpha > 0$

  Por lo tanto $\varphi'_{(C_0)} > 0 \Rightarrow \varphi_{(C_0)}$ es invertible.

- Por el problema planteado, si $C_{t_1} < C_{t_2} \Rightarrow C_0 < \alpha$

  $C_0 < \alpha \Rightarrow C_0 - \alpha < 0$

  Por lo tanto $\varphi'_{(C_0)} < 0 \Rightarrow \varphi_{(C_0)}$ es invertible.

Así en ambos casos C_0 es determinado unicamente por $C_0 = \varphi'\left(\frac{|C_{t_1}-\alpha|^{\frac{1}{t_1}}}{|C_{t_2}-\alpha|^{\frac{1}{t_2}}}\right)$.

Además $\frac{r}{V_0}$, es ahora determinado unicamente por $C_{t_1} = \alpha + (C_0-\alpha)e^{\frac{-r}{V_0}t_1}$. Adicionalmente conocemos V_0, por lo tanto encontramos en forma única r.

2.2.4. Ejemplos

1. **Problema de mezcla con volumen variable.**

   Tenemos un tanque bien mezclado con capacidad para 1000 gal de agua, contiene 300 gal de agua con una concentración de sal de 0,2 lb/gal. Entra agua al tanque a una tasa de 2 gal/min. Una válvula abierta permite que el agua salga del tanque a la tasa de 1 gal/min.

   Adicionalmente, sabemos que $C_5 = 0,2065$ lb/gal. aprox.

   El problema es hallar el valor de la concentración de entrada (α).

   Contamos con los siguientes datos:

r_1	:	Cantidad de fluido de entrada	=	2 gal/min.
r_2	:	Cantidad de fluido de salida	=	1 gal/min.
V_0	:	Volmen inicial del tanque	=	300 gal.
C_0	:	Concentración inicial en el tanque	=	0,2 lb/gal.
C_5	:	Concentración en el tanque pasados 5 min.	=	0,2065 lb/gal.

   Si consideramos la formulas deducidas, en este caso basta con evaluar en (2.5):

$$\alpha = \frac{C_{(t)} - C_0\left(\frac{V_0}{|r_3 t + V_0|}\right)^{\left(\frac{r_1}{r_3}\right)}}{r_3\left[1 - \left(\frac{V_0}{|r_3 t + V_0|}\right)^{\left(\frac{r_1}{r_3}\right)}\right]}$$

$$\alpha = \frac{0,2065 - 0,2\left(\frac{300}{|(2-1)\cdot 5 + 300|}\right)^{\left(\frac{2}{(2-1)}\right)}}{(2-1)\left[1 - \left(\frac{300}{|(2-1)\cdot 5 + 300|}\right)^{\left(\frac{2}{(2-1)}\right)}\right]} = 0,4 \quad \text{lb/gal aprox.}$$

2. **Problema de mezcla con volumen fijo.**

Un tanque bien mezclado contiene 300 gal de agua con una concentración de sal de 0,2 lb/gal. Entra agua al tanque a una tasa de 2 gal/min. Una válvula abierta permite que el agua salga del tanque a la misma tasa. Adicionalmente, sabemos que $C_5 = 0,2066$ lb/gal. aprox.

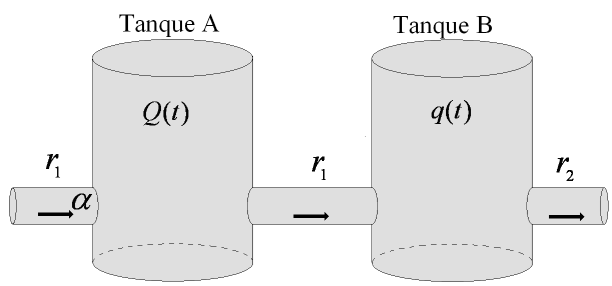
El problema es hallar el valor de la concentración de entrada (α). Contamos con los siguientes datos:

r	:	Cantidad de fluido de entrada y salida	=	2 gal/min.
V_0	:	Volmen inicial del tanque	=	300 gal.
C_0	:	Concentración inicial en el tanque	=	0,2 lb/gal.
C_5	:	Concentración en el tanque, pasados 5 min.	=	0,2066 lb/gal.

Si consideramos la formulas deducidas, en este caso basta con evaluar en (2.8):

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{C_{(t)} - C_0 e^{\left(\frac{-r_1 t}{V_0}\right)}}{1 - e^{\left(\frac{-r_1 t}{V_0}\right)}} \\ \alpha &= \frac{0,2066 - 0,2 e^{\left(\frac{-2\cdot 5}{300}\right)}}{1 - e^{\left(\frac{-2\cdot 5}{300}\right)}} = 0,4 \quad \text{lb/gal aprox.} \end{aligned}$$

2.3. Problemas de Mezcla con 2 Tanques



Tenemos 2 tanques de igual capacidad, conectados entre si por una valvula. Al primer tanque le ingresa una cantidad α de soluto a una razón r_1, mezclandose instanea y uniformemente. Esta solución sale del primer tanque e ingresa al segundo tanque a la misma razón r_1, mezclandose instanea y uniformemente. Esta nueva solución sale del segundo tanque a una razón r_2, con $r_1 \neq r_2$.

2.3.1. Búsqueda de los Modelos

Primer tanque con volumen constante y segundo tanque con volumen variable.

Debemos encontrar las funciones que modelan lo siguiente:

$V_{(t)}$: el volumen del primer tanque en términos del tiempo.

$Q_{(t)}$: la cantidad de soluto en el primer tanque en términos del tiempo.

$C_{(t)}$: la concentración de soluto en el primer tanque en términos del tiempo.

$v_{(t)}$: el volumen del segundo tanque en términos del tiempo.

$q_{(t)}$: la cantidad de soluto en el segundo tanque en términos del tiempo.

$c_{(t)}$: la concentración de soluto en el segundo tanque en términos del tiempo.

Sean:

V_0 : el volumen inicial del primer tanque.

C_0 : la concentración inicial de soluto en el primer tanque.

V_0' : el volumen inicial del segundo tanque.

C_0' : la concentración inicial de soluto en el segundo tanque.

Por lo visto anteriormente, tenemos los siguientes modelos:

$$V_{(t)} = V_0 \tag{2.11}$$

$$C_{(t)} = \alpha + (C_0 - \alpha)e^{\left(\frac{-r_1 t}{V_0}\right)} \tag{2.12}$$

$$Q_{(t)} = \alpha V_0 + (C_0 - \alpha)V_0 e^{\left(\frac{-r_1 t}{V_0}\right)} \tag{2.13}$$

El volumen en el segundo tanque ($v_{(t)}$) varia según la cantidad de solvente que entra menos la que sale. Es decir,

$$\begin{aligned} v'_{(t)} &= r_1 - r_2 \qquad \Big/ \int dt \\ v_{(t)} &= (r_1 - r_2)t + k \end{aligned}$$

Sabiendo que V_0' es el volumen inicial en el segundo tanque:

$$\begin{aligned} V_0' &= (r_1 - r_2)0 + k \\ V_0' &= k \end{aligned}$$

Así, con $r_3 = (r_1 - r_2)$, tenemos:

$$v_{(t)} = r_3 t + V_0'$$

La cantidad de soluto en el segundo tanque ($q_{(t)}$) varia según la cantidad de soluto que entra menos la que sale. Es decir,

$$\begin{aligned} q'_{(t)} &= r_1 Q_{(t)} - r_2 q_{(t)} \\ q'_{(t)} + r_2 q_{(t)} &= r_1 Q_{(t)} \end{aligned}$$

Sustituyendo $Q_{(t)}$

$$\begin{aligned} q'_{(t)} + r_2 q_{(t)} &= r_1 \left[\alpha V_0 + (C_0 - \alpha) V_0 \cdot exp\left(\frac{-r_1 t}{V_0}\right)\right] \\ q'_{(t)} + r_2 q_{(t)} &= \alpha r_1 V_0 + (C_0 - \alpha) r_1 V_0 \cdot exp\left(\frac{-r_1 t}{V_0}\right) \end{aligned}$$

Para resolver esta EDO debemos encontrar el factor integrante. En este caso esta dado por:

$$exp\left(\int r_2\right) = exp\,(r_2 t)$$

Multiplicando la EDO por el factor integrante, obtenemos:

$$\begin{aligned} q'_{(t)} \cdot exp\,(r_2 t) + r_2 q_{(t)} \cdot exp\,(r_2 t) &= \alpha r_1 V_0 \cdot exp\,(r_2 t) + (C_0 - \alpha) r_1 V_0 \cdot exp\,(r_2 t) \cdot exp\left(\frac{-r_1 t}{V_0}\right) \\ \big(q_{(t)} \cdot exp\,(r_2 t)\big)' &= \alpha r_1 V_0 \cdot exp\,(r_2 t) + (C_0 - \alpha) r_1 V_0 \cdot exp\left(\frac{(-r_1 + r_2 V_0) t}{V_0}\right) \end{aligned}$$

Integrando,

$$\begin{aligned} q_{(t)} \cdot exp\,(r_2 t) &= \frac{r_1 \alpha V_0 \cdot exp\,(r_2 t)}{r_2} + \frac{r_1 V_0^2 (C_0 - \alpha) exp\left(\frac{(-r_1 + r_2 V_0)t}{V_0}\right)}{(-r_1 + r_2 V_0)} + k \\ q_{(t)} &= \frac{r_1 \alpha V_0}{r_2} + \frac{r_1 V_0^2 (C_0 - \alpha) exp\left(\frac{-r_1 t}{V_0}\right)}{(-r_1 + r_2 V_0)} + k \cdot exp\,(-r_2 t) \end{aligned}$$

Sabemos que la concentración de soluto en el segundo tanque ($c_{(t)}$) es igual a la cantidad de soluto ($q_{(t)}$) divida por el volumen del tanque ($v_{(t)}$). Es decir:

$$\begin{aligned} c_{(t)} = \frac{q_{(t)}}{v_{(t)}} &= \frac{r_1 \alpha V_0}{r_2 v_{(t)}} + \frac{r_1 V_0^2 (C_0 - \alpha) exp\left(\frac{-r_1 t}{V_0}\right)}{(-r_1 + r_2 V_0) v_{(t)}} + \frac{k \cdot exp\,(-r_2 t)}{v_{(t)}} \\ c_{(t)} &= \frac{r_1 \alpha V_0}{r_2 (r_3 t + V_0')} + \frac{r_1 V_0^2 (C_0 - \alpha) exp\left(\frac{-r_1 t}{V_0}\right)}{(-r_1 + r_2 V_0)(r_3 t + V_0')} + \frac{k \cdot exp\,(-r_2 t)}{r_3 t + V_0'} \end{aligned}$$

Considerando la concentración incial en el segundo tanque (C_0').

$$\begin{aligned} C_0' &= \frac{r_1 \alpha V_0}{r_2 (r_3 \cdot 0 + V_0')} + \frac{r_1 V_0^2 (C_0 - \alpha) exp\left(\frac{-r_1 \cdot 0}{V_0}\right)}{(-r_1 + r_2 V_0)(r_3 \cdot 0 + V_0')} + \frac{k \cdot exp\,(-r_2 \cdot 0)}{r_3 \cdot 0 + V_0'} \\ C_0' &= \frac{r_1 \alpha V_0}{r_2 V_0'} + \frac{r_1 V_0^2 (C_0 - \alpha)}{(-r_1 + r_2 V_0) V_0'} + \frac{k}{V_0'} \\ C_0' &= \frac{r_1 V_0}{V_0'} \left[\frac{\alpha}{r_2} + \frac{V_0 (C_0 - \alpha)}{(-r_1 + r_2 V_0)} \right] + \frac{k}{V_0'} \\ -\frac{k}{V_0'} &= \frac{r_1 V_0}{V_0'} \left[\frac{\alpha}{r_2} + \frac{V_0 (C_0 - \alpha)}{(-r_1 + r_2 V_0)} \right] - C_0' \\ \frac{k}{V_0'} &= -\frac{r_1 V_0}{V_0'} \left[\frac{\alpha}{r_2} + \frac{V_0 (C_0 - \alpha)}{(-r_1 + r_2 V_0)} \right] + C_0' \\ \frac{k}{V_0'} &= C_0' - \frac{r_1 V_0}{V_0'} \left[\frac{\alpha}{r_2} + \frac{V_0 (C_0 - \alpha)}{(-r_1 + r_2 V_0)} \right] \\ k &= C_0' V_0' - r_1 V_0 \left[\frac{\alpha}{r_2} + \frac{V_0 (C_0 - \alpha)}{(-r_1 + r_2 V_0)} \right] \end{aligned}$$

Sustituyendo en $c_{(t)}$:

$$c_{(t)}=\frac{r_1\alpha V_0}{r_2(r_3t+V_0')}+\frac{r_1V_0^2(C_0-\alpha)exp\left(\frac{-r_1t}{V_0}\right)}{(-r_1+r_2V_0)(r_3t+V_0')}+\frac{\left(C_0'V_0'-r_1V_0\left[\frac{\alpha}{r_2}+\frac{V_0(C_0-\alpha)}{(-r_1+r_2V_0)}\right]\right)exp(-r_2t)}{r_3t+V_0'}$$

Sustituyendo en $q_{(t)}$:

$$q_{(t)}=\frac{r_1\alpha V_0}{r_2}+\frac{r_1V_0^2(C_0-\alpha)exp\left(\frac{-r_1t}{V_0}\right)}{(-r_1+r_2V_0)}+\left(C_0'V_0'-r_1V_0\left[\frac{\alpha}{r_2}+\frac{V_0(C_0-\alpha)}{(-r_1+r_2V_0)}\right]\right)exp(-r_2t)$$

Ahora analicemos:

1. La unicidad de la solución, es decir, ¿Si $C_{\alpha(t_1)}=C_{\alpha'(t_1)}\Rightarrow\alpha=\alpha'$?

$$C_{\alpha(t_1)}=C_{\alpha'(t_1)}$$

$$\Rightarrow\frac{r_1\alpha V_0}{r_2(r_3t_1+V_0')}+\frac{r_1V_0^2(C_0-\alpha)exp\left(\frac{-r_1t_1}{V_0}\right)}{(-r_1+r_2V_0)(r_3t_1+V_0')}$$
$$+\frac{\left(C_0'V_0'-r_1V_0\left[\frac{\alpha}{r_2}+\frac{V_0(C_0-\alpha)}{(-r_1+r_2V_0)}\right]\right)exp(-r_2t_1)}{r_3t_1+V_0'}$$
$$=\frac{r_1\alpha' V_0}{r_2(r_3t_1+V_0')}+\frac{r_1V_0^2(C_0-\alpha')exp\left(\frac{-r_1t_1}{V_0}\right)}{(-r_1+r_2V_0)(r_3t_1+V_0')}$$
$$+\frac{\left(C_0'V_0'-r_1V_0\left[\frac{\alpha'}{r_2}+\frac{V_0(C_0-\alpha')}{(-r_1+r_2V_0)}\right]\right)exp(-r_2t_1)}{r_3t_1+V_0'}$$

$$\Rightarrow\frac{r_1\alpha V_0}{r_2}+\frac{r_1V_0^2(C_0-\alpha)exp\left(\frac{-r_1t_1}{V_0}\right)}{(-r_1+r_2V_0)}$$

$$+\left(C_0'V_0'-r_1V_0\left[\frac{\alpha}{r_2}+\frac{V_0(C_0-\alpha)}{(-r_1+r_2V_0)}\right]\right)exp(-r_2t_1)$$

$$= \frac{r_1\alpha' V_0}{r_2} + \frac{r_1 V_0^2 (C_0 - \alpha') exp(\left(\frac{-r_1 t_1}{V_0}\right)}{(-r_1 + r_2 V_0)}$$

$$+ \left(C_0' V_0' - r_1 V_0 \left[\frac{\alpha'}{r_2} + \frac{V_0(C_0 - \alpha')}{(-r_1 + r_2 V_0)}\right]\right) exp(-r_2 t_1)$$

$$\Rightarrow \frac{r_1 \alpha V_0}{r_2} + \frac{r_1 V_0^2 (C_0 - \alpha) exp\left(\frac{-r_1 t_1}{V_0}\right)}{(-r_1 + r_2 V_0)}$$

$$+ C_0' V_0' e^{-r_2 t_1} - r_1 V_0 \cdot exp(-r_2 t_1) \left[\frac{\alpha}{r_2} + \frac{V_0(C_0 - \alpha)}{(-r_1 + r_2 V_0)}\right]$$

$$= \frac{r_1\alpha' V_0}{r_2} + \frac{r_1 V_0^2 (C_0 - \alpha') exp\left(\frac{-r_1 t_1}{V_0}\right)}{(-r_1 + r_2 V_0)}$$

$$+ C_0' V_0' e^{-r_2 t_1} - r_1 V_0 \cdot exp(-r_2 t_1) \left[\frac{\alpha'}{r_2} + \frac{V_0(C_0 - \alpha')}{(-r_1 + r_2 V_0)}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{r_1 \alpha V_0}{r_2} + \frac{r_1 V_0^2 (C_0 - \alpha) exp\left(\frac{-r_1 t_1}{V_0}\right)}{(-r_1 + r_2 V_0)}$$

$$- r_1 V_0 \cdot exp(-r_2 t_1) \left[\frac{\alpha}{r_2} + \frac{V_0(C_0 - \alpha)}{(-r_1 + r_2 V_0)}\right]$$

$$= \frac{r_1\alpha' V_0}{r_2} + \frac{r_1 V_0^2 (C_0 - \alpha') exp\left(\frac{-r_1 t_1}{V_0}\right)}{(-r_1 + r_2 V_0)}$$

$$- r_1 V_0 \cdot exp(-r_2 t_1) \left[\frac{\alpha'}{r_2} + \frac{V_0(C_0 - \alpha')}{(-r_1 + r_2 V_0)}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{r_1\alpha V_0}{r_2} + \frac{r_1 V_0^2 C_0 \cdot exp\left(\frac{-r_1 t_1}{V_0}\right)}{(-r_1 + r_2 V_0)} - \frac{\alpha r_1 V_0^2 \cdot exp\left(\frac{-r_1 t_1}{V_0}\right)}{(-r_1 + r_2 V_0)}$$

$$-r_1 V_0 \cdot exp(-r_2 t_1)\left[\frac{\alpha}{r_2} + \frac{C_0 V_0}{(-r_1 + r_2 V_0)} - \frac{\alpha V_0}{(-r_1 + r_2 V_0)}\right]$$

$$= \frac{r_1\alpha' V_0}{r_2} + \frac{r_1 V_0^2 C_0 \cdot exp\left(\frac{-r_1 t_1}{V_0}\right)}{(-r_1 + r_2 V_0)} - \frac{\alpha' r_1 V_0^2 \cdot exp\left(\frac{-r_1 t_1}{V_0}\right)}{(-r_1 + r_2 V_0)}$$

$$-r_1 V_0 \cdot exp(-r_2 t_1)\left[\frac{\alpha'}{r_2} + \frac{C_0 V_0}{(-r_1 + r_2 V_0)} - \frac{\alpha' V_0}{(-r_1 + r_2 V_0)}\right]$$

$$\Rightarrow r_1 V_0 \left[\frac{\alpha}{r_2} - \frac{\alpha V_0 \cdot exp\left(\frac{-r_1 t_1}{V_0}\right)}{(-r_1 + r_2 V_0)} - \frac{\alpha \cdot exp(-r_2 t_1)}{r_2} - \frac{C_0 V_0 \cdot exp(-r_2 t_1)}{(-r_1 + r_2 V_0)} + \frac{\alpha V_0 \cdot exp(-r_2 t_1)}{(-r_1 + r_2 V_0)}\right]$$

$$= r_1 V_0 \left[\frac{\alpha'}{r_2} - \frac{\alpha' V_0 \cdot exp\left(\frac{-r_1 t_1}{V_0}\right)}{(-r_1 + r_2 V_0)} - \frac{\alpha' \cdot exp(-r_2 t_1)}{r_2} - \frac{C_0 V_0 \cdot exp(-r_2 t_1)}{(-r_1 + r_2 V_0)} + \frac{\alpha' V_0 \cdot exp(-r_2 t_1)}{(-r_1 + r_2 V_0)}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha\,(1 - exp(-r_2 t_1))}{r_2} - \frac{\alpha V_0 \left(exp\left(\frac{-r_1 t_1}{V_0}\right) - exp(-r_2 t_1)\right)}{(-r_1 + r_2 V_0)} - \frac{C_0 V_0 \cdot exp(-r_2 t_1)}{(-r_1 + r_2 V_0)}$$

$$= \frac{\alpha'\,(1 - exp(-r_2 t_1))}{r_2} - \frac{\alpha' V_0 \left(exp\left(\frac{-r_1 t_1}{V_0}\right) - exp(-r_2 t_1)\right)}{(-r_1 + r_2 V_0)} - \frac{C_0 V_0 \cdot exp{-r_2 t_1}}{(-r_1 + r_2 V_0)}$$

$$\alpha\left[\frac{(1-exp(-r_2t_1))}{r_2}-\frac{V_0\left(exp\left(\frac{-r_1t_1}{V_0}\right)-exp(-r_2t_1)\right)}{(-r_1+r_2V_0)}\right]$$

$$=\alpha'\left[\frac{(1-exp(-r_2t_1))}{r_2}-\frac{V_0\left(exp\left(\frac{-r_1t_1}{V_0}\right)-exp(-r_2t_1)\right)}{(-r_1+r_2V_0)}\right]$$

$$\alpha=\alpha'$$

Por lo tanto, sí $C_{\alpha(t_1)} = C_{\alpha'(t_1)} \Rightarrow \alpha = \alpha'$, con $t_1 \neq 0$.

2. La dependencia continua de los datos, es decir,

¿Sí $|C_{\alpha(t_1)} - C_{\alpha'(t_1)}| << \epsilon \Rightarrow \exists\, \delta \big/ |\alpha-\alpha'| << \delta$?

$$\left|C_{\alpha(t_1)} - C_{\alpha'(t_1)}\right| << \epsilon$$

$$\Rightarrow \left|\left\{\frac{r_1\alpha V_0}{r_2(r_3t_1+V_0')}+\frac{r_1V_0^2(C_0-\alpha)e^{\left(\frac{-r_1t_1}{V_0}\right)}}{(-r_1+r_2V_0)(r_3t_1+V_0')}\right.\right.$$

$$\left.+\frac{\left(C_0'V_0'-r_1V_0\left[\frac{\alpha}{r_2}+\frac{V_0(C_0-\alpha)}{(-r_1+r_2V_0)}\right]\right)e^{-r_2t_1}}{r_3t_1+V_0'}\right\}$$

$$-\left\{\frac{r_1\alpha' V_0}{r_2(r_3t_1+V_0')}+\frac{r_1V_0^2(C_0-\alpha')e^{\left(\frac{-r_1t_1}{V_0}\right)}}{(-r_1+r_2V_0)(r_3t_1+V_0')}\right.$$

$$+\frac{\left(C_0'V_0' - r_1V_0\left[\frac{\alpha'}{r_2} + \frac{V_0(C_0-\alpha')}{(-r_1+r_2V_0)}\right]\right)e^{-r_2t_1}}{r_3t_1+V_0'}\Bigg\}\Bigg| << \epsilon$$

$$\Rightarrow \Bigg|\Bigg\{\frac{r_1\alpha V_0}{r_2} + \frac{r_1V_0^2(C_0-\alpha)e^{\left(\frac{-r_1t_1}{V_0}\right)}}{(-r_1+r_2V_0)}$$

$$+\left(C_0'V_0' - r_1V_0\left[\frac{\alpha}{r_2} + \frac{V_0(C_0-\alpha)}{(-r_1+r_2V_0)}\right]\right)e^{-r_2t_1}\Bigg\}$$

$$-\Bigg\{\frac{r_1\alpha' V_0}{r_2} + \frac{r_1V_0^2(C_0-\alpha')e^{\left(\frac{-r_1t_1}{V_0}\right)}}{(-r_1+r_2V_0)}$$

$$+\left(C_0'V_0' - r_1V_0\left[\frac{\alpha'}{r_2} + \frac{V_0(C_0-\alpha')}{(-r_1+r_2V_0)}\right]\right)e^{-r_2t_1}\Bigg\}\Bigg| << \epsilon$$

$$\Rightarrow \Bigg|\Bigg\{\frac{r_1\alpha V_0}{r_2} + \frac{r_1V_0^2(C_0-\alpha)e^{\left(\frac{-r_1t_1}{V_0}\right)}}{(-r_1+r_2V_0)} + C_0'V_0'e^{-r_2t_1}$$

$$-r_1V_0e^{-r_2t_1}\left[\frac{\alpha}{r_2} + \frac{V_0(C_0-\alpha)}{(-r_1+r_2V_0)}\right]\Bigg\}$$

$$-\Bigg\{\frac{r_1\alpha' V_0}{r_2} + \frac{r_1V_0^2(C_0-\alpha')e^{\left(\frac{-r_1t_1}{V_0}\right)}}{(-r_1+r_2V_0)} + C_0'V_0'e^{-r_2t_1}$$

$$-r_1V_0e^{-r_2t_1}\left[\frac{\alpha'}{r_2} + \frac{V_0(C_0-\alpha')}{(-r_1+r_2V_0)}\right]\Bigg\}\Bigg| << \epsilon$$

$$\Rightarrow \Bigg|\Bigg\{\frac{r_1\alpha V_0}{r_2} + \frac{r_1V_0^2(C_0-\alpha)e^{\left(\frac{-r_1t_1}{V_0}\right)}}{(-r_1+r_2V_0)}$$

$$-r_1V_0e^{-r_2t_1}\left[\frac{\alpha}{r_2} + \frac{V_0(C_0-\alpha)}{(-r_1+r_2V_0)}\right]\Bigg\}$$

$$-\left\{\frac{r_1\alpha' V_0}{r_2}+\frac{r_1V_0^2(C_0-\alpha')e^{\left(\frac{-r_1t_1}{V_0}\right)}}{(-r_1+r_2V_0)}\right.$$

$$\left.-r_1V_0e^{-r_2t_1}\left[\frac{\alpha'}{r_2}+\frac{V_0(C_0-\alpha')}{(-r_1+r_2V_0)}\right]\right\}\Bigg| << \epsilon$$

$$\Rightarrow\left|\left\{\frac{r_1\alpha V_0}{r_2}+\frac{r_1V_0^2C_0e^{\left(\frac{-r_1t_1}{V_0}\right)}}{(-r_1+r_2V_0)}-\frac{\alpha r_1V_0^2e^{\left(\frac{-r_1t_1}{V_0}\right)}}{(-r_1+r_2V_0)}\right.\right.$$

$$\left.-r_1V_0e^{-r_2t_1}\left[\frac{\alpha}{r_2}+\frac{C_0V_0}{(-r_1+r_2V_0)}-\frac{\alpha V_0}{(-r_1+r_2V_0)}\right]\right\}$$

$$-\left\{\frac{r_1\alpha' V_0}{r_2}+\frac{r_1V_0^2C_0e^{\left(\frac{-r_1t_1}{V_0}\right)}}{(-r_1+r_2V_0)}-\frac{\alpha' r_1V_0^2e^{\left(\frac{-r_1t_1}{V_0}\right)}}{(-r_1+r_2V_0)}\right.$$

$$\left.-r_1V_0e^{-r_2t_1}\left[\frac{\alpha'}{r_2}+\frac{C_0V_0}{(-r_1+r_2V_0)}-\frac{\alpha' V_0}{(-r_1+r_2V_0)}\right]\right\}\Bigg| << \epsilon$$

$$\Rightarrow\left|r_1V_0\left[\frac{\alpha}{r_2}-\frac{\alpha V_0e^{\left(\frac{-r_1t_1}{V_0}\right)}}{(-r_1+r_2V_0)}-\frac{\alpha e^{-r_2t_1}}{r_2}-\frac{C_0V_0e^{-r_2t_1}}{(-r_1+r_2V_0)}+\frac{\alpha V_0e^{-r_2t_1}}{(-r_1+r_2V_0)}\right]-\right.$$

$$\left.r_1V_0\left[\frac{\alpha'}{r_2}-\frac{\alpha' V_0e^{\left(\frac{-r_1t_1}{V_0}\right)}}{(-r_1+r_2V_0)}-\frac{\alpha' e^{-r_2t_1}}{r_2}-\frac{C_0V_0e^{-r_2t_1}}{(-r_1+r_2V_0)}+\frac{\alpha' V_0e^{-r_2t_1}}{(-r_1+r_2V_0)}\right]\right| << \epsilon$$

$$\Rightarrow\left|\left\{\frac{\alpha\left(1-e^{-r_2t_1}\right)}{r_2}-\frac{\alpha V_0\left(e^{\left(\frac{-r_1t_1}{V_0}\right)}-e^{-r_2t_1}\right)}{(-r_1+r_2V_0)}-\frac{C_0V_0e^{-r_2t_1}}{(-r_1+r_2V_0)}\right\}-\right.$$

$$\left.\left\{\frac{\alpha'\left(1-e^{-r_2t_1}\right)}{r_2}-\frac{\alpha' V_0\left(e^{\left(\frac{-r_1t_1}{V_0}\right)}-e^{-r_2t_1}\right)}{(-r_1+r_2V_0)}-\frac{C_0V_0e^{-r_2t_1}}{(-r_1+r_2V_0)}\right\}\right| << \epsilon$$

$$\Rightarrow\left|\alpha\left[\frac{\left(1-e^{-r_2t_1}\right)}{r_2}-\frac{V_0\left(e^{\left(\frac{-r_1t_1}{V_0}\right)}-e^{-r_2t_1}\right)}{(-r_1+r_2V_0)}\right]\right.$$

$$\left.-\alpha'\left[\frac{\left(1-e^{-r_2t_1}\right)}{r_2}-\frac{V_0\left(e^{\left(\frac{-r_1t_1}{V_0}\right)}-e^{-r_2t_1}\right)}{(-r_1+r_2V_0)}\right]\right| << \epsilon$$

$$\left|[\alpha-\alpha']\left[\frac{\left(1-e^{-r_2t_1}\right)}{r_2}-\frac{V_0\left(e^{\left(\frac{-r_1t_1}{V_0}\right)}-e^{-r_2t_1}\right)}{(-r_1+r_2V_0)}\right]\right| << \epsilon$$

$$|\alpha-\alpha'| << \frac{\epsilon}{\left|\frac{\left(1-e^{-r_2t_1}\right)}{r_2}-\frac{V_0\left(e^{\left(\frac{-r_1t_1}{V_0}\right)}-e^{-r_2t_1}\right)}{(-r_1+r_2V_0)}\right|}$$

Así con:

$$\delta=\frac{\epsilon}{\left|\frac{\left(1-e^{-r_2t_1}\right)}{r_2}-\frac{V_0\left(e^{\left(\frac{-r_1t_1}{V_0}\right)}-e^{-r_2t_1}\right)}{(-r_1+r_2V_0)}\right|}\Rightarrow|\alpha-\alpha'| << \delta$$

3. ¿Cómo encontramos α?

Despejemos α en $c_{(t)}$:

$$c_{(t)} = \frac{r_1\alpha V_0}{r_2(r_3t+V_0')} + \frac{r_1V_0^2(C_0-\alpha)exp\left(\frac{-r_1t}{V_0}\right)}{(-r_1+r_2V_0)(r_3t+V_0')}$$

$$+\frac{\left(C_0'V_0' - r_1V_0\left[\frac{\alpha}{r_2}+\frac{V_0(C_0-\alpha)}{(-r_1+r_2V_0)}\right]\right)exp(-r_2t)}{r_3t+V_0'}$$

$$\Rightarrow c_{(t)}(r_3t+V_0') = \frac{r_1\alpha V_0}{r_2} + \frac{r_1V_0^2(C_0-\alpha)exp\left(\frac{-r_1t}{V_0}\right)}{(-r_1+r_2V_0)}$$

$$+\left(C_0'V_0' - r_1V_0\left[\frac{\alpha}{r_2}+\frac{V_0(C_0-\alpha)}{(-r_1+r_2V_0)}\right]\right)exp(-r_2t)$$

$$\Rightarrow c_{(t)}(r_3t+V_0') = \frac{r_1\alpha V_0}{r_2} + \frac{r_1V_0^2(C_0-\alpha)exp\left(\frac{-r_1t}{V_0}\right)}{(-r_1+r_2V_0)}$$

$$+C_0'V_0'\cdot exp(-r_2t) - r_1V_0\left[\frac{\alpha}{r_2}+\frac{V_0(C_0-\alpha)}{(-r_1+r_2V_0)}\right]exp(-r_2t)$$

$$\Rightarrow c_{(t)}(r_3t+V_0') - C_0'V_0'\cdot exp(-r_2t) =$$

$$\frac{r_1\alpha V_0}{r_2} + \frac{r_1V_0^2(C_0-\alpha)exp\left(\frac{-r_1t}{V_0}\right)}{(-r_1+r_2V_0)} - r_1V_0\left[\frac{\alpha}{r_2}+\frac{V_0(C_0-\alpha)}{(-r_1+r_2V_0)}\right]exp(-r_2t)$$

$$\Rightarrow c_{(t)}(r_3t + V_0') - C_0'V_0' \cdot exp(-r_2t) =$$

$$r_1V_0\left\{\frac{\alpha}{r_2} + \frac{V_0(C_0-\alpha)exp\left(\frac{-r_1t}{V_0}\right)}{(-r_1+r_2V_0)} - \left[\frac{\alpha}{r_2} + \frac{V_0(C_0-\alpha)}{(-r_1+r_2V_0)}\right]exp(-r_2t)\right\}$$

$$\Rightarrow \frac{c_{(t)}(r_3t + V_0') - C_0'V_0' \cdot exp(-r_2t)}{r_1V_0} =$$

$$\frac{\alpha}{r_2} + \frac{V_0(C_0-\alpha)exp\left(\frac{-r_1t}{V_0}\right)}{(-r_1+r_2V_0)} - \left[\frac{\alpha}{r_2} + \frac{V_0(C_0-\alpha)}{(-r_1+r_2V_0)}\right]exp(-r_2t)$$

$$\Rightarrow \frac{c_{(t)}(r_3t + V_0') - C_0'V_0' \cdot exp(-r_2t)}{r_1V_0} =$$

$$\frac{\alpha}{r_2} + \frac{V_0C_0 \cdot exp\left(\frac{-r_1t}{V_0}\right) - \alpha V_0 \cdot exp\left(\frac{-r_1t}{V_0}\right)}{(-r_1+r_2V_0)}$$

$$-\frac{\alpha \cdot exp(-r_2t)}{r_2} - \frac{V_0C_0 \cdot exp(-r_2t) - V_0\alpha \cdot exp(-r_2t)}{(-r_1+r_2V_0)}$$

$$\Rightarrow \frac{c_{(t)}(r_3t + V_0') - C_0'V_0' \cdot exp(-r_2t)}{r_1V_0} = \frac{\alpha - \alpha \cdot exp(-r_2t)}{r_2}$$

$$+\frac{V_0C_0 \cdot exp\left(\frac{-r_1t}{V_0}\right) - V_0C_0 \cdot exp(-r_2t) - \alpha V_0 \cdot exp\left(\frac{-r_1t}{V_0}\right) + V_0\alpha \cdot exp(-r_2t)}{(-r_1+r_2V_0)}$$

$$\Rightarrow \frac{c_{(t)}(r_3t + V_0') - C_0'V_0' \cdot exp(-r_2t)}{r_1V_0} = \frac{\alpha(1 - exp(-r_2t))}{r_2}$$

$$+\frac{V_0C_0(exp\left(\frac{-r_1t}{V_0}\right) - exp(-r_2t))}{(-r_1 + r_2V_0)} - \frac{\alpha V_0(exp\left(\frac{-r_1t}{V_0}\right) - exp(-r_2t))}{(-r_1 + r_2V_0)}$$

$$\Rightarrow \frac{c_{(t)}(r_3t + V_0') - C_0'V_0' \cdot exp(-r_2t)}{r_1V_0} - \frac{V_0C_0(exp\left(\frac{-r_1t}{V_0}\right) - exp(-r_2t))}{(-r_1 + r_2V_0)} =$$

$$\frac{\alpha(1 - exp(-r_2t))}{r_2} - \frac{\alpha V_0(exp\left(\frac{-r_1t}{V_0}\right) - exp(-r_2t))}{(-r_1 + r_2V_0)}$$

$$\Rightarrow \frac{c_{(t)}(r_3t + V_0') - C_0'V_0' \cdot exp(-r_2t)}{r_1V_0} - \frac{V_0C_0(exp\left(\frac{-r_1t}{V_0}\right) - exp(-r_2t))}{(-r_1 + r_2V_0)} =$$

$$\alpha\left[\frac{(1 - exp(-r_2t))}{r_2} - \frac{V_0(exp\left(\frac{-r_1t}{V_0}\right) - exp(-r_2t))}{(-r_1 + r_2V_0)}\right]$$

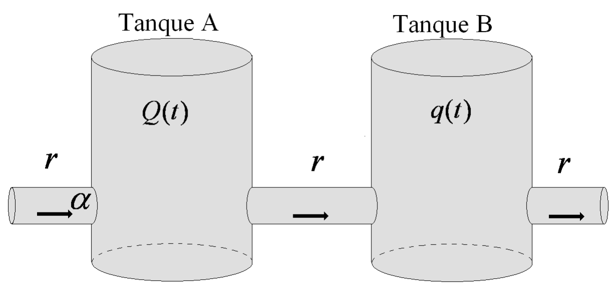
$$\frac{\frac{c_{(t)}(r_3t+V_0')-C_0'V_0'\cdot exp(-r_2t)}{r_1V_0} - \frac{V_0C_0(exp\left(\frac{-r_1t}{V_0}\right)-exp(-r_2t))}{(-r_1+r_2V_0)}}{\frac{(1-exp(-r_2t))}{r_2} - \frac{V_0(e\left(\frac{-r_1t}{V_0}\right)-exp(-r_2t))}{(-r_1+r_2V_0)}} = \alpha$$

$$\frac{\frac{\left(c_{(t)}(r_3t+V_0')-C_0'V_0'\cdot exp(-r_2t)\right)(-r_1+r_2V_0)-r_1V_0^2C_0\left(e\left(\frac{-r_1t}{V_0}\right)-exp(-r_2t)\right)}{r_1V_0(-r_1+r_2V_0)}}{\frac{(1-exp(-r_2t))(-r_1+r_2V_0)-r_2V_0\left(e\left(\frac{-r_1t}{V_0}\right)-exp(-r_2t)\right)}{r_2(-r_1+r_2V_0)}} = \alpha$$

$$\frac{r_2\left[\left(c_{(t)}(r_3t+V_0')-C_0'V_0'\cdot exp(-r_2t)\right)(-r_1+r_2V_0)-r_1V_0^2C_0\left(exp\left(\frac{-r_1t}{V_0}\right)-exp(-r_2t)\right)\right]}{r_1V_0\left[(1-exp(-r_2t))(-r_1+r_2V_0)-r_2V_0\left(exp\left(\frac{-r_1t}{V_0}\right)-exp(-r_2t)\right)\right]}=\alpha$$

Conociendo C_0, C_0', V_0, V_0', r_1, r_2, y una medición $(c_{(t_1)})$, entonces obtendremos α.

Primer y segundo tanque con volumen constante.



Supongamos, se tienen dos tanque conectados por una tubería. Inicialmente ambos tanques se encuentran completamente llenos con solvente. Al tanque A le esta ingresando una mezcla con una concentración α de soluto a una razón r, luego la solucion bien mezclada en el tanque A fluye por la tubería hacia el tanque B en la misma razón r,y la solucion bien mezclada sale del tanque B en la misma razón r.

Sean:

- α: Concentración de la contaminación en el flujo de entrada del tanque A.

- r: Cantidad de fluido de entrada y salida de ambos tanques.
- V_0: Volumen inicial del tanque A.
- V_0': Volumen inicial del tanque B.
- C_0: Concentración inicial de contaminación en el tanque A.
- C_0': Concentración inicial de contaminación en el tanque B.
- $Q_{(t)}$: Cantidad de contaminante en el tanque A en un tiempo t.
- $q_{(t)}$: Cantidad de contaminante en el tanque B en un tiempo t.
- $C_{(t)}$: Concentración del contaminante en el tanque A en el tiempo t.
- $c_{(t)}$: Concentración del contaminante en el tanque B en el tiempo t.

Si localizamos la mirada en el tanque A, tenemos que es un tanque con volumen constante, pues el flujo de estrada es igual al flujo de salida, entonces se tiene que; $Q_{(t)}$ esta dada por:

$$Q_{(t)} = \alpha V_0 + V_0(C_0 - \alpha)exp\left(\frac{-rt}{V_0}\right) \tag{2.14}$$

y $C_{(t)}$ esta dada por:

$$C_{(t)} = \left(\frac{Q_{(t)}}{V_0}\right) = \alpha + (C_0 - \alpha)exp\left(\frac{-rt}{V_0}\right) \tag{2.15}$$

Por otra parte, en el tanque B también presenta un volumen constante al ser iguales el flujo de entrada y salida, y la Cantidad de contaminante o soluto en el tanque B en términos del tiempo t se puede deducir de la variacion entre la cantidad de soluto que entra menos la cantidad de soluto que sale del tanque:

Luego al reemplazar, $\dfrac{Q_{(t)}}{V_0} = C_{(t)}$ se tiene:

$$q'_{(t)} = r\left(\alpha + (C_0-\alpha)exp\left(\frac{-rt}{V_0}\right)\right) - r\left(\frac{q_{(t)}}{V'_0}\right)$$

$$q'_{(t)} + r\left(\frac{q_{(t)}}{V'_0}\right) = r\left(\alpha + (C_0-\alpha)exp\left(\frac{-rt}{V_0}\right)\right)$$

Ahora para resover la EDO,multiplicamos por el factor integrante que resulta ser $\mu = exp\left(\frac{rt}{V'_0}\right)$.

$$\begin{aligned} q'_{(t)}\cdot exp\left(\frac{rt}{V'_0}\right) + r\left(\frac{q_{(t)}}{V'_0}\right)exp\left(\frac{rt}{V'_0}\right) &= r\left(\alpha + (C_0-\alpha)exp\left(\frac{-rt}{V_0}\right)\right)exp\left(\frac{rt}{V'_0}\right) \\ \left(q_{(t)}\cdot exp\left(\frac{rt}{V'_0}\right)\right)' &= r\alpha\cdot exp\left(\frac{rt}{V'_0}\right) + r\left(C_0-\alpha\right)exp\left(\frac{-rt}{V_0}+\frac{rt}{V'_0}\right) \end{aligned}$$

$$\left(q_{(t)}\cdot exp\left(\frac{rt}{V'_0}\right)\right)' = r\alpha\cdot exp\left(\frac{rt}{V'_0}\right) + r\left(C_0-\alpha\right)exp\left(\frac{-rtV'_0+rtV_0}{V_0V'_0}\right)$$

Integrando

$$\begin{aligned} q_{(t)}\cdot exp\left(\frac{rt}{V'_0}\right) &= r\alpha\frac{V'_0}{r}\cdot exp\left(\frac{rt}{V'_0}\right) + r\left(C_0-\alpha\right)\frac{V_0V'_0}{-rV'_0+rV_0}\cdot exp\left(\frac{-rtV'_0+rtV_0}{V_0V'_0}\right) + k \\ q_{(t)}\cdot exp\left(\frac{rt}{V'_0}\right) &= \alpha V'_0\cdot exp\left(\frac{rt}{V'_0}\right) + \left(C_0-\alpha\right)\frac{V_0V'_0}{V_0-V'_0}\cdot exp\left(\frac{-rtV'_0+rtV_0}{V_0V'_0}\right) + k \\ q_{(t)} &= \alpha V'_0 + \left(C_0-\alpha\right)\frac{V_0V'_0}{V_0-V'_0}\cdot exp\left(\frac{-rtV'_0+rtV_0}{V_0V'_0}\right)exp\left(\frac{-rt}{V'_0}\right) + K\cdot exp\left(\frac{-rt}{V'_0}\right) \\ q_{(t)} &= \alpha V'_0 + \left(C_0-\alpha\right)\frac{V_0V'_0}{V_0-V'_0}\cdot exp\left(\frac{-rt}{V_0}\right) + K\cdot exp\left(\frac{-rt}{V'_0}\right) \end{aligned}$$

La concentración del contaminante en el tanque B en el tiempo t esta dada por $c_{(t)} = \left(\frac{q_{(t)}}{V_0'}\right)$

$$c_{(t)} = \alpha + (C_0 - \alpha)\frac{V_0}{V_0 - V_0'} \cdot exp\left(\frac{-rt}{V_0}\right) + \frac{K \cdot exp\left(\frac{-rt}{V_0'}\right)}{V_0'}$$

Luego de la concentración inicial de contaminación en el tanque B se obtiene K:

$$C_0' = \alpha + (C_0 - \alpha)\frac{V_0}{V_0 - V_0'} + \frac{K}{V_0'}$$
$$\Rightarrow k = \left(C_0' - \alpha - (C_0 - \alpha)\frac{V_0}{V_0 - V_0'}\right)V_0'$$

Al reemplazar K en $q_{(t)}$ se obtiene:

$$q_{(t)} = \alpha V_0' + (C_0 - \alpha)\frac{V_0 V_0'}{V_0 - V_0'} \cdot exp\left(\frac{-rt}{V_0}\right)$$
$$+ \left(C_0' - \alpha - (C_0 - \alpha)\frac{V_0}{V_0 - V_0'}\right)V_0' \cdot exp\left(\frac{-rt}{V_0'}\right)$$

$$q_{(t)} = \alpha V_0' + (C_0 - \alpha)\frac{V_0 V_0'}{V_0 - V_0'} \cdot exp\left(\frac{-rt}{V_0}\right) + C_0' V_0' \cdot exp\left(\frac{-rt}{V_0'}\right)$$
$$-\alpha V_0' \cdot exp\left(\frac{-rt}{V_0'}\right) - (C_0 - \alpha)\frac{V_0 V_0'}{V_0 - V_0'} \cdot exp\left(\frac{-rt}{V_0'}\right)$$

$$q_{(t)} = \alpha V_0' + C_0' V_0' \cdot exp\left(\frac{-rt}{V_0'}\right) - \alpha V_0' \cdot exp\left(\frac{-rt}{V_0'}\right)$$

Entonces la concentración del contaminante en el tanque B en el tiempo t esta dada por:

$$c_{(t)} = \alpha + C_0' e^{\frac{-rt}{V_0'}} - \alpha e^{\frac{-rt}{V_0'}}$$

Si contamos al menos con una medición de concentración de contaminante en el tanque B, en un tiempo t_1, tenemos:

$$\begin{aligned} c_{(t_1)} &= \alpha + C_0' \cdot exp\left(\frac{-rt_1}{V_0'}\right) - \alpha \cdot exp\left(\frac{-rt_1}{V_0'}\right) \\ c_{(t_1)} &= \alpha\left(1 - exp\left(\frac{-rt_1}{V_0'}\right)\right) + C_0' \cdot exp\left(\frac{-rt_1}{V_0'}\right) \end{aligned}$$

luego la concentración de contaminante en el flujo de entrada del tanque A esta dada por:

$$\alpha = \frac{c_{(t_1)} - C_0' e^{\frac{-rt_1}{V_0'}}}{1 - e^{\frac{-rt_1}{V_0'}}} \tag{2.16}$$

Por lo tanto, necesitamos al menos una medición de contaminante en el tanque B para poder establecer la concentración de contaminante del flujo de entrada del tanque A.

Capítulo 3

Cálculo Numérico

3.1. Introducción

Recordando la motivación de esta memoria, los problemas inversos originados a partir del trabajo de Calderón, podemos considerar lo siguiente:

- Inyectividad de Λ. Constatar la unicidad de la solución.

- Continuidad de Λ y su inversa Λ^{-1}, si existe. Determinar si al variar Λ ligeramente, su inversa Λ^{-1} también difiere ligeramente.

- Encontrar el Rango de Λ. Determinar en que casos es válida mi respuesta.

- Fórmula para recuperar γ a partir de Λ_γ. Conociendo los datos, poder reconstruir el origen de ellos.

- Obtención de un algoritmo para encontrar una aproximación de γ. Poder determinar en forma númerica la solución de este problema.

En el capítulo (2), con respecto a nuestros problemas de mezclas, demostramos la inyectividad y continuidad de $C_{\alpha(t)}$ y su inversa. Adicionalmente, encontramos su rango y una formula para recuperar α a partir de $C_{\alpha(t)}$.

En el presente capítulo desarrollaremos algoritmos para poder obtener en forma númerica la solución de los problemas planteados. Adicionalmente, implementaremos scripts en MATLAB, para obtener la solución.

Si bien, basandonos en las formulas obtenidas y contando con los datos, es relativamente sencillo obtener el resultado, esto no siempre ocurre de la misma forma. Por ejemplo, en el problema directo es sencillo obtener la concentración con $t = 5$ y $t = 10$, pero si se nos solicitara las mediciones con t entre 0 y 100, estos cálculos se vuelven engorrosos. Es allí donde estos algoritmos facilitarán nuestra labor, considerando los equipos con los que se cuenta hoy en día. También nos ayudará a realizar un analisis más profundo de los datos obtenidos, al contar con más datos que comparar y poder graficar la secuencia de ellos.

3.2. Cálculo Numérico

* **Definición:** El Análisis numérico es una rama de las matemáticas cuyos límites no son del todo precisos. De una forma rigurosa, se puede definir como la disciplina ocupada de describir, analizar y crear algoritmos numéricos que nos permitan resolver problemas matemáticos, en los

que estén involucradas cantidades numéricas, con una precisión determinada.

En el contexto del cálculo numérico, un algoritmo es un procedimiento que nos puede llevar a una solución aproximada de un problema mediante un número finito de pasos que pueden ejecutarse de manera lógica. En algunos casos, se les da el nombre de métodos constructivos a estos algoritmos numéricos.

El análisis numérico cobra especial importancia con la llegada de los ordenadores. Los ordenadores son útiles para cálculos matemáticos extremadamente complejos, pero en última instancia operan con números binarios y operaciones matemáticas simples.

Desde este punto de vista, el análisis numérico proporcionará todo el andamiaje necesario para llevar a cabo todos aquellos procedimientos matemáticos susceptibles de expresarse algorítmicamente, basándose en algoritmos que permitan su simulación o cálculo en procesos más sencillos empleando números.

* **Aplicaciones:** En general, estos métodos se aplican cuando se necesita un valor numérico como solución a un problema matemático, y los procedimientos "exactos" o "analíticos" (manipulaciones algebraicas, teoría de ecuaciones diferenciales, métodos de integración, etc.) son incapaces de dar una respuesta. Debido a ello, son procedimientos de uso frecuente por físicos e ingenieros, y cuyo desarrollo se ha visto favorecido por la necesidad de éstos de obtener soluciones, aunque la precisión

no sea completa. Debe recordarse que la física experimental, por ejemplo, nunca arroja valores exactos sino intervalos que engloban la gran mayoría de resultados experimentales obtenidos, ya que no es habitual que dos medidas del mismo fenómeno arrojen valores exactamente iguales.

Otro motivo que ha propiciado el auge del análisis numérico ha sido el desarrollo de los ordenadores. El aumento brutal de la potencia de cálculo ha convertido en posibles y en eficientes a algoritmos poco dados a su realización a mano.

* **Clasificación de los problemas:**

Existe una clasificación de los problemas, atendiendo a su naturaleza o motivación para el empleo del cálculo numérico:

1) Problemas de tal complejidad que no poseen solución analítica.

2) Problemas en los cuales existe una solución analítica, pero ésta, por complejidad u otros motivos, no puede explotarse de forma sencilla en la práctica.

3) Problemas para los cuales existen métodos sencillos pero que, para elementos que se emplean en la práctica, requieren una cantidad de cálculos excesiva; mayor que la necesaria para un método numérico.

Este ultimo punto es la motivación de incluir el cálculo numérico en la presente memoria.

3.3. Algoritmos

En esta sección presentaremos algoritmos numéricos con los cuales se pueden resolver los problemas planteados en el capítulo (2).

Estos algoritmos nos permitirán resolver problemas similares a los planteados pero con diferencias en el valor de los datos.

Para ello trabajaremos en base al software "MATLAB", en particular con la versión 7.5.0.342 (R2007b).

3.3.1. Problema Directo

1. Recordemos la sección (2.2.2) Problema Directo. En ella se planteaba el siguiente ejercicio:

   Tenemos un tanque bien mezclado con capacidad para 1000 gal de agua, contiene 300 gal de agua con una concentración de sal de 0,2 lb/gal. Entra agua al tanque con una concentración de sal de 0,4 lb/gal a una tasa de 2 gal/min. Una válvula abierta permite que el agua salga del tanque a la tasa de 1 gal/min.

   Un problema directo es determinar la cantidad y la concentración de sal en el tanque después de 5 min. y 10 min.

   Contamos con los siguientes datos o parámetros:

a	:	Concentración en el flujo de entrada	=	0,4 lb/gal.
$r1$	:	Cantidad de fluido de entrada	=	2 gal/min.
$r2$	:	Cantidad de fluido de salida	=	1 gal/min.
$v0$	:	Volumen inicial del tanque	=	300 gal.
$c0$	:	Concentración inicial en el tanque	=	0,2 lb/gal.

Si consideramos las fórmulas deducidas, en este caso basta con evaluar en (2.3):

$$C_{(t)} = \alpha r_3 + (C_0 - \alpha r_3)\left(\frac{V_0}{|r_3 t + V_0|}\right)^{\left(\frac{r_1}{r_3}\right)}$$

Para 2 valores es sencillo y relativamente rápido evaluar esta función, pero si se nos solicitan mas valores, por muy pequeños que estos sean, se vuelve un trabajo tedioso.

Para ello introduciremos esta función en matlab y luego bastará asignar el rango o el valor en el cual queremos que sea resuelto.

Para comenzar crearemos el archivo "g.m", el cual contendrá nuestra ecuación:

```
function y = g(t, alfa, C0, V0, r1, r2)
y = alfa * (r1 - r2) + (C0 - alfa * (r1 - r2))
*((V0./((r1 - r2) * t + V0)) ^ (r1/r2));
end
```

En segundo lugar, crearemos el archivo "evaluacion.m", el cual contendrá los datos que necesitamos para resolver la ecuación:

```
t=5; %Tiempo
alfa = 0.4; %concentracion de entrada
C0=0.2; %concentracion inicial
V0=300; %volumen inicial del tanque
r1=2; %razon de entrada
r2=1; %razon de salida
y=g(t,alfa,C0,V0,r1,r2); %funcion
y %salida
```

Basta correr "evaluación" en MATLAB para obtener el resultado. Adicionalmente, modificando los datos ingresados en este archivo podemos encontrar mas valores.

```
>> evaluacion
y =
    0,2065
```

3.3.2. Problema Inverso

1. **Problema de mezcla con volumen variable.**

   Tenemos un tanque bien mezclado con capacidad para 1000 gal de agua, contiene 300 gal de agua con una concentración de sal de 0,2 lb/gal. Entra agua al tanque a una tasa de 2 gal/min. Una válvula abierta permite que el agua salga del tanque a la tasa de 1 gal/min.

   Adicionalmente, sabemos que $C_5 = 0,2065$ lb/gal. aprox.

El problema es hallar el valor de la concentración de entrada (α).

Contamos con los siguientes datos:

r_1	:	Cantidad de fluido de entrada	=	2 gal/min.
r_2	:	Cantidad de fluido de salida	=	1 gal/min.
V_0	:	Volumen inicial del tanque	=	300 gal.
C_0	:	Concentración inicial en el tanque	=	0,2 lb/gal.
C_5	:	Concentración en el tanque pasados 5 min.	=	0,2065 lb/gal.

Si consideramos las fórmulas deducidas, en este caso basta con evaluar en (2.5):

$$\alpha = \frac{C_{(t)} - C_0 \left(\frac{V_0}{|r_3 t + V_0|}\right)^{\left(\frac{r_1}{r_3}\right)}}{r_3 \left[1 - \left(\frac{V_0}{|r_3 t + V_0|}\right)^{\left(\frac{r_1}{r_3}\right)}\right]}$$

Al igual que en el ejercicio anterior definiremos nuestra ecuación en el archivo "conc.m":

```
function alfa = conc(t, C, C0, V0, r1, r2)
alfa = (C - C0 * (V0/((r1 - r2) * t + V0)) ∧ (r1/(r1 - r2)))/(r1 - r2)*
(1 - (V0/((r1 - r2) * t + V0)) ∧ (r1/(r1 - r2)));
end
```

A continuación crearemos el archivo "evaluacion.m":

```
t = 5; %tiempo
alfa = 0,5; %concentracion de entrada
C0 = 0,2; %concentracion inicial
V0 = 300; %volumen inicial
r1 = 2; %razon de entrada
r2 = 1; %razon de salida
C = 0,2065; %concentracion en el tanque pasados 5 min.
alfa = conc(t, C, C0, V0, r1, r2);
alfa %salida
```

Basta correr “evaluacion” en MATLAB para obtener el resultado.

2. **Problema de mezcla con volumen fijo.**

Un tanque bien mezclado contiene 300 gal de agua con una concentración de sal de 0,2 lb/gal. Entra agua al tanque a una tasa de 2 gal/min. Una válvula abierta permite que el agua salga del tanque a la misma tasa. Adicionalmente, sabemos que $C_5 = 0,2066$ lb/gal. aprox.

El problema es hallar el valor de la concentración de entrada (α). Contamos con los siguientes datos:

$r1$	:	Cantidad de fluido de entrada y salida	=	2 gal/min.
V_0	:	Volumen inicial del tanque	=	300 gal.
C_0	:	Concentración inicial en el tanque	=	0,2 lb/gal.
C_5	:	Concentración en el tanque, pasados 5 min.	=	0,2066 lb/gal.

Si consideramos la fórmulas deducidas, en este caso basta con evaluar en (2.8):

$$\alpha = \frac{C_{(t)} - C_0 e^{\left(\frac{-r_1 t}{V_0}\right)}}{1 - e^{\left(\frac{-r_1 t}{V_0}\right)}}$$

Al igual que en el ejercicio anterior definirimos nuestra ecuación en el archivo "conc.m":

```
function alfa = conc(t, C, C0, V0, r1)
alfa = (C - C0 * exp(-r1 * t/V0))/(1 - exp(-r1 * t/V0));
end
```

A continuación crearemos el archivo "evaluacion.m":

$t = 5;$ %tiempo

$C0 = 0{,}2;$ %concentracion inicial

$V0 = 300;$ %volumen inicial

$r1 = 2;$ %razon de entrada y salida

$C = 0{,}2066;$ %concentracion en el tanque pasados 5 min.

$alfa = conc(t, C, C0, V0, r1);$

$alfa$ %salida

Basta correr "evaluacion" en MATLAB para obtener el resultado.

3.3.3. Otros Problemas

Tenemos un tanque con volumen fijo, y considerando que en la vida real no siempre contamos con todos los datos, se tornan interesantes las siguientes preguntas:

1. Si conocemos r_1 y V_0. ¿Podemos conocer C_0 y α en forma única? Considerando que adicionalmente podemos tomar varias mediciones, pero no podemos asegurarnos de alguna relación en el tiempo, salvo que son progresivas, es decir, $t_1 < t_2$.

   Sabemos que $C_{(t)} = \alpha + (C_0 - \alpha)e^{\left(\frac{-r_1 t}{V_0}\right)}$; así con 2 mediciones obtendríamos el siguiente sistema lineal:

   $$\left.\begin{array}{l} C_{(t_1)} = \alpha + (C_0 - \alpha)e^{\left(\frac{-r_1 t_1}{V_0}\right)} \\ C_{(t_2)} = \alpha + (C_0 - \alpha)e^{\left(\frac{-r_1 t_2}{V_0}\right)} \end{array}\right|$$

   Que es equivalente a:

$$\begin{array}{l|}
\alpha\left(1-e^{\left(\frac{-r_1t_1}{V_0}\right)}\right)+C_0\cdot e^{\left(\frac{-r_1t_1}{V_0}\right)}=C_{(t_1)}\\
\alpha\left(1-e^{\left(\frac{-r_1t_2}{V_0}\right)}\right)+C_0\cdot e^{\left(\frac{-r_1t_2}{V_0}\right)}=C_{(t_2)}\\ \hline
\end{array}$$

Claramente este sistema se puede resolver considerando el sistema matricial $A\overrightarrow{x}=B$. Donde:

$$A=\begin{pmatrix} 1-e^{\left(\frac{-r_1t_1}{V_0}\right)} & e^{\left(\frac{-r_1t_1}{V_0}\right)} \\ 1-e^{\left(\frac{-r_1t_2}{V_0}\right)} & e^{\left(\frac{-r_1t_2}{V_0}\right)} \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{x}=\begin{pmatrix} \alpha \\ C_0 \end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix} C_{(t_1)} \\ C_{(t_1)} \end{pmatrix}$$

Para resolver en Matlab, debemos crear el siguiente archivo ïnver.m”

$r1 = 1;$ % razon de entrada y salida

$t1 = 0{,}25;$ % tiempo de la primera medicion

$t2 = 0{,}5;$ % tiempo de la segunda medicion

$c1 = 0{,}1099;$ % primera medicion

$c2 = 0{,}1195;$ % segunda medicion

$V0 = 10;$ % volumen del tanque

$A = [1 - exp(-r * t1/V0) exp(-r * t1/V0); 1 - exp(-r * t2/V0) exp(-r * t2/V0)];$

$B = [c1; c2];$

$X = A \backslash B;$ % $\overrightarrow{x}$

$alfa = X(1);$

$C0 = X(2);$

$X;$

Al hacerlo correr en Matlab obtendremos el resultado de nuestra matriz $\overrightarrow{x}$:

>> inver

$X =$

0,4987

0,1001

Comentario: con más mediciones sólo sobredetermino el sistema. Matlab lo resuelve por el método de mínimos cuadrados, pero es innecesario.

2. El mismo problema anterior, pero ahora conocemos α y V_0. ¿Cómo podemos conocer C_0 y r en forma única?

   Para encontrar las raíces de una función $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, uno de los métodos utilizados es el de Newton:

$$x^{(1)} = x^{(0)} - \frac{f(x^{(0)})}{f'(x^{(0)})}$$

   Así iterativamente se definiría:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}$$

   Cuando deseamos encontrar las raíces de una función $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$, entonces se cambia $\frac{1}{f'}$por $[J_f]^{-1}$.

   De este modo:

$$\overrightarrow{x}^{(k+1)} = \overrightarrow{x}^{(k)} - [J_f(\overrightarrow{x}^{(k)})]^{-1} * f(\overrightarrow{x}^{(k)})$$

   Sea $\delta^k = \overrightarrow{x}^{(k+1)} - \overrightarrow{x}^{(k)}$:

$$[J_f(\overrightarrow{x}^{(k)})] * \delta^k = -f(\overrightarrow{x}^{(k)})$$

   En nuestro problema tenemos:

$$\begin{aligned} C_{(t)} &= \alpha + (C_0 - \alpha)e^{\left(\frac{-rt}{V_0}\right)} \\ h(r, C_0) = h\begin{pmatrix} r \\ C_0 \end{pmatrix} &= (C_0 - \alpha)e^{\left(\frac{-rt}{V_0}\right)} - (C_{(t)} - \alpha) \end{aligned}$$

Donde $\alpha, V_0, t, C_{(t)}$ son parámetros.

Así: $h = h\left(r, C_0, (\alpha, V_0, t, C_{(t)})\right)$.

Podemos definir:

$$\begin{aligned} h_1 &= h\left(r, C_0, (\alpha, V_0, t_1, C_{(t_1)})\right) \\ \Rightarrow h_1 &= h_1\left(r, C_0, (\alpha, V_0, t_1, C_{(t_1)})\right) \end{aligned}$$

Análogamente:

$$\begin{aligned} h_2 &= h\left(r, C_0, (\alpha, V_0, t_2, C_{(t_2)})\right) \\ \Rightarrow h_2 &= h_2\left(r, C_0, (\alpha, V_0, t_2, C_{(t_2)})\right) \end{aligned}$$

De esta forma tenemos:

$$H = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$$

Por lo tanto,

$$J_H\left(r, C_0, (\alpha, V_0, t_1, t_2, C_{(t_1)}, C_{(t_2)})\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial r} & \frac{\partial h_1}{\partial C_0} \\ \frac{\partial h_2}{\partial r} & \frac{\partial h_2}{\partial C_0} \end{pmatrix}$$

Es decir,

$$J_H = \begin{pmatrix} -\frac{t_1}{V_0}(C_0 - \alpha)e^{\frac{-rt_1}{V_0}} & e^{\frac{-rt_1}{V_0}} \\ -\frac{t_2}{V_0}(C_0 - \alpha)e^{\frac{-rt_2}{V_0}} & e^{\frac{-rt_2}{V_0}} \end{pmatrix}$$

Para poder resolver este problema con la ayuda de MATLAB, debemos crear un archivo “h.m” que contendrá la función:

function $y = h(x)$

$r = x(1);$

$C0 = x(2);$

$alfa = 0{,}5;$

$V0 = 10;$

$t = [0; 0{,}25]; \%[t_1; t_2]$

$C = [0{,}100000000000000; \quad 0{,}109876035188667]; \%[C_{t_1}; C_{t_2}]$

$y = (C0 - alfa) * exp(-r * t/V0) - (C - alfa);$

Adicionalmente, crearemos el archivo “Jh.m” que contendrá el Jacobiano de la función:

function $y = Jh(x)$

$r = x(1);$

$C0 = x(2);$

$alfa = 0{,}5;$

$V0 = 10;$

$t = [0; 0{,}25]; \%[t_1; t_2]$

$y = [-(C0 - alfa) * (t/V0). * exp(-r * t/V0) exp(-r * t/V0)];$

También debemos crear el archivo “newton.m” que contendrá la definición del método utilizado para resolver el problema:

function $[iter, x] = newton(x0, f, Jf, tol, nmax)$

$iter = 0;$

$x = x0;$

$err = tol + 1;$

while (err > tol) && (iter <= nmax)

$J = feval(Jf, x);$

$F = feval(f, x);$

$delta = -J\backslash F;$

$x = x + delta;$

$err = norm(delta);$ $iter = iter + 1;$

end

Finalmente creamos el archivo "evaluacion.m":

clear all

$tol = eps;$

$nmax = 10000;$

$x0 = [0; 0];$

$[iter, x] = newton(x0,' h',' Jh', tol, nmax);$

$r = x(1)$

$C0 = x(2)$

Para resolver este problema, nos basta ingresar los datos en "h.m" y "Jh.m", para luego hacer correr "evaluacion" en MATLAB y obténdremos los resultados:

$>> evaluacion$

$r \quad =$

1,0000

$C0 \quad =$

0,1000

3.3.4. Aplicaciones

Bien, hasta el momento hemos resuelto problemas de mezcla analíticamente y gracias al cálculo numérico, pero aún no hemos visto una aplicación concreta de todas estas fórmulas.

Consideremos una oficina que no cuenta con oxigenación en forma natural, por lo que recurre a una máquina que introduce aire oxigenizado y un extractor de aire. Para evitar problemas con la presión, ambas máquinas funcionan a la misma velocidad manteniendo un volumen y presión constante de aire en la oficina. Adicionalmente, estas máquinas están dispuestas de tal forma que el aire que ingresa se mezcla uniformemente en forma instantánea.

Por medio de instrumentos en el interior de la oficina podemos conocer la concentración actual en la oficina.

Debido al costo del funcionamiento de estas máquinas, la idea es optimizar el tiempo que deben operar para obtener una concentración adecuada de oxígeno.

Conociendo el volumen de la oficina ($600m^3$); la concentración ideal de oxígeno ($21\,\%$); la concentración de entrada del oxígeno ($50\,\%$) y el flujo constante de aire ($10m^3$) por minuto, el problema planteado es: determinar el tiempo de funcionamiento de las máquinas para obtener la concentración ideal de oxígeno, a partir de una medición de la concentración actual de oxígeno.

Sabemos que $C_{(t)} = \alpha + (C_0 - \alpha)e^{\left(\frac{-r_1 t}{V_0}\right)}$, contamos con: $\alpha = 0,5$; $r_1 = 10$; $V_0 = 600$.

Adicionalmente contamos con una medición del aire, por ejemplo $C_0 = 0,1$. Nos basta con sustituir, asumiendo que nuestro ideal debe ser $C_{(t)} = 0,21$.

$$\begin{aligned}
0,21 &= 0,5 + (0,1 - 0,5)e^{\left(\frac{-10 \cdot t}{600}\right)} \\
\frac{0,29}{0,4} &= e^{\left(\frac{-t}{60}\right)} \\
\ln(0,725) &= \frac{-t}{60} \\
t &\approx 60 \cdot (0,3216) \approx 19,296 \approx 20
\end{aligned}$$

En el problema anterior, determinar el flujo de aire necesario si se quiere alcanzar la concentración ideal de oxígeno en 15 minutos.

Al igual que en el problema anterior, basta con sustituir:

$$\begin{aligned}
0,21 &= 0,5 + (0,1 - 0,5)e^{\left(\frac{-r_1 \cdot 15}{600}\right)} \\
\frac{0,29}{0,4} &= e^{\left(\frac{-r_1}{40}\right)} \\
\ln(0,725) &= \frac{-r_1}{40} \\
r_1 &\approx 40 \cdot (0,3216) \approx 12,864 \approx 13
\end{aligned}$$

Como pudieron notar, estos problemas aún son directos. Consideremos los mismos datos del problema anterior, ¿Cómo puedo estar seguro que la compañía que administra el aire con la concentración de oxígeno al 50 %, realmente me entrega esa calidad de aire?

Más especifico aún, ¿cómo puedo determinar la real concentración de oxígeno en el flujo de aire?

En este punto utilizaremos uno de los scripts que teniamos para MATLAB. Utilizando el archivo "conc.m":

function $alfa = conc(t, C, C0, V0, r1)$

$alfa = (C - C0 * exp(-r1 * t/V0))/(1 - exp(-r1 * t/V0));$

end

Antes de modificar el archivo "evaluacion.m"; necesitamos contar con los siguientes datos: Volumen, una medición inicial, una segunda medición en un tiempo conocido; la razón de entrada y salida. Con esos datos modificamos nuestro archivo "evaluacion.m":

$t = 20;$ %tiempo entre las 2 mediciones en minutos

$C0 = 0{,}1;$ %medicion inicial

$V0 = 600;$ %volumen inicial en m^3

$r1 = 10;$ %razon de entrada y salida, en m^3

$C = 0{,}20;$ %segunda medicion

$alfa = conc(t, C, C0, V0, r1);$ %salida

Al correr "evaluacion" en MATLAB, obtendremos:

$>>$ *evaluacion*

$$
\begin{aligned}
alfa &= \\
&0{,}4528
\end{aligned}
$$

Lo que nos muestra claramente que la concentración sería inferior a la del 50 %.

Bibliografía

[1] BOYCE, W. y DI PRIMA, R. 2005. Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems. USA, Wiley, John & Sons.

[2] CAMPBELL, S. y HABERMAN, R. 1998. Introducción a las ecuaciones Diferenciales con problemas de valor de frontera. Mexico, McGraw-Hill. 738p.

[3] CONCA, C.[2007]. Detectando Cuerpos Extraños Inmersos en un Torrente. [diapositivas] Santiago. Presentación de PorwerPoint; texto en español. 22d.

[4] GROETSCH, C. 1999. Inverse Problems: Activities for Undergraduates. Washington, The Mathematical Association of America. 222p.

[5] KIRSCH, A. 1996. An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems. New York, Springer Verlag. 282p. (Applied mathematical sciences; 120)

[6] MARTI, F. Hadamard no estaba equivocado entonces [pdf] <http://www.cinvestav.mx/Portals/0/Publicaciones %20y %20Noticias/

Revistas/Avance %20y %20perspectiva/julsep04/7 %20hadamard.pdf> [Consulta: 5 de Febrero 2009]

[7] UHLMANN, G. 1999. Developments in inverse problems since Calderon's foundational paper, chapter 19. En: M. Christ, C. Kenig and C. Sadosky. Harmonic analysis and partial differential equations. Estados Unidos, University of Chicago Press. pp. 295-345.

[8] ENCICLOPEDIA libre y políglota [en línea] <http://es.wikipedia.org/wiki/An %C3 %A1lisis_num %C3 %A9rico>[Consulta: 15 noviembre 2009]