



UNIVERSIDAD DEL BÍO-BÍO

FACULTAD DE EDUCACIÓN Y HUMANIDADES

ESCUELA DE PEDAGOGÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

# ANÁLISIS DE SISTEMAS DE ECUACIONES NO LINEALES CLÁSICOS Y DIFUSOS

**Autor:** JOSÉ VICTORINO RAMÍREZ MOLINA  
**Profesores Guía:** Dr. Patricio Andrés Cumsille Atala  
Dr. Marko Antonio Rojas Medar

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE PROFESOR DE EDUCACIÓN MEDIA EN  
EDUCACIÓN MATEMÁTICA

CHILLAN, 2010



---

# FORMULARIO DE PRESENTACIÓN DE LA MEMORIA ACTIVIDAD DE TITULACIÓN

## IDENTIFICACIÓN GENERAL DE LA MEMORIA

**Título de la memoria:** Análisis de sistemas de ecuaciones no lineales clásicos y difusos.

**Profesor(es) guía(s):** Dr. Patricio Andrés Cumsille Atala & Dr. Marko Antonio Rojas Medar.

**Unidad académica:** Departamento de Ciencias Básicas.

**Número de alumnos(s) participante(s):** 1

Nombre	Carrera	Firma
José Victorino Ramírez Molina	Pedagogía en Educación Matemática	

---

Nombre y Firma del Profesor Guía.

---

Nombre y Firma del Profesor Guía.

---

# AGRADECIMIENTOS

Este seminario de titulación, si bien ha requerido de gran esfuerzo y bastante dedicación por parte del autor, profesores orientadores y el informante, no hubiese sido posible su finalización sin la cooperación desinteresada de todas y cada una de las personas que a continuación citaré y muchas de las cuales han sido un pilar fundamental en momentos de angustia y desesperación.

Primero y antes que todo, quiero dar gracias a **Dios**, por estar conmigo en cada paso que he dado, por fortalecer mi corazón e iluminar mi mente y por haber puesto en mi camino a aquellas personas que han sido un soporte y compañía durante todo el periodo de estudio.

En segundo lugar, quiero expresar mis agradecimientos a mis directores de tesis, el Dr. Marko Rojas Medar y Patricio Cumsille Atala por el apoyo desinteresado, interés y esmero manifestado durante el periodo de elaboración de este proyecto. Además un reconocimiento especial al Dr. Roberto Carlos Cebrales por su importante aporte y participación en el desarrollo de esta tesis. Debo destacar, por encima de todo, su disponibilidad y paciencia.

También quiero dar las gracias a mi familia por el apoyo incondicional. En especial a mi madre Margarita Molina, que sin ella nada de esto sería posible, a mi padre José Ramírez por su comprensión, y a mis hermanos Juan Carlos, Francis, Rosa, Jeannette y Andrea, los cuales me brindan constantemente la fortaleza para seguir adelante.

Finalmente agradezco el financiamiento parcial otorgado por el proyecto FONDECYT-CONICYT No. 11080222, del gobierno de Chile y el proyecto 104709 01/*FE* de la Universidad del Bío-Bío. Adicionalmente se agradece el apoyo entregado por el Departamento de Ciencias Básicas junto al Grupo de Matemática Aplicada (GMA) de la Universidad del Bío-Bío.

*Sin afán de sorprenderlos y dejarlos atónitos, debo informarles lisa y llanamente que actualmente en el mundo existen máquinas capaces de pensar, aprender y crear. Además, su capacidad para hacer lo anterior aumentará rápidamente hasta que en un futuro previsible la magnitud de problemas que tendrán capacidad de manejar irá a la par con la capacidad de la mente humana para hacer lo mismo.*

*Herbert Simon*

---

## *RESUMEN*

El presente trabajo tiene por objetivo brindar una exposición clara y exhaustiva del método de Newton clásico para la resolución numérica de sistemas de ecuaciones algebraicos no lineales clásicos y en su adaptación a la resolución de sistemas de ecuaciones algebraicos difusos. Para llevar a cabo dicha tarea se presenta una revisión teórica de tales tópicos complementada con diversas ilustraciones, con el objeto de una fácil y didáctica asimilación. Se brinda además simulaciones en Matlab que automatizan la tarea de resolución de dicho problema clásico y difuso. De esta manera, se espera promover, impulsar y desarrollar investigación entorno a la problemática planteada.

---

# *ABSTRACT*

This paper aims to provide a clear and comprehensive classical Newton method for the numerical solution of systems of nonlinear algebraic equations in classical and adapt it to solving systems of algebraic equations diffuse. To carry out this task presents a theoretical review of these topics supplemented by various figures, for the purpose of easy and educational assimilation. It also provides simulations in Matlab to automate the resolution of this classic problem and diffuse. Thus, be accomplished to promote, encourage and develop research around the issues raised.

---

# ÍNDICE GENERAL

<b>Introducción</b>		<b>XIII</b>
<b>1. Método de Newton-Raphson. Marco clásico</b>		<b>1</b>
1.1. El Método de Newton-Raphson para ecuaciones no lineales . . . . .		3
1.1.1. Separación de raíces . . . . .		3
1.1.2. Solución gráfica de ecuaciones . . . . .		6
1.1.3. Método de Newton-Raphson . . . . .		8
1.1.4. Método de Newton modificado . . . . .		15
1.2. El Método de Newton-Raphson para sistemas de ecuaciones no lineales . . . . .		16
1.2.1. Método de Newton para un sistema de dos ecuaciones . . . . .		16
1.2.2. Método de Newton para un sistema de $n$ ecuaciones . . . . .		18
1.2.3. Observaciones generales sobre la convergencia del proceso de Newton . . . . .		21
1.2.4. Existencia de las raíces de un sistema y convergencia del proceso de Newton . . . . .		25
1.2.5. Rapidez de convergencia del proceso de Newton . . . . .		29
1.2.6. Unicidad de solución . . . . .		31
1.2.7. Estabilidad de convergencia bajo variaciones de la aproximación inicial . . . . .		33
1.2.8. Método de Newton modificado . . . . .		36
<b>2. Preliminares de conjuntos difusos</b>		<b>39</b>
2.1. Desarrollo intuitivo de la matemática difusa . . . . .		40
2.2. Fundamentos de la matemática difusa . . . . .		42
2.2.1. Conjuntos difusos . . . . .		42
2.2.2. Métrica de Hausdorff . . . . .		47
2.2.3. Función soporte . . . . .		50
2.2.4. El espacio $E^n$ . . . . .		51
2.2.5. El espacio métrico $(E^n, d)$ . . . . .		58
<b>3. Método de Newton-Raphson. Marco Difuso</b>		<b>61</b>
3.1. El Método de Newton-Raphson para ecuaciones no lineales difusas . . . . .		63
3.1.1. Ecuaciones cuadráticas difusas . . . . .		66

**ÍNDICE GENERAL**

---

3.2. Ejemplos numéricos . . . . .	68
3.2.1. Método de Newton para ecuaciones no lineales difusas . . . . .	68
3.2.2. Método de Newton para sistemas de ecuaciones no lineales difusos . . . . .	71
<b>Conclusiones</b>	<b>77</b>
<b>A. Valor absoluto y norma de una matriz</b>	<b>78</b>
<b>B. Aritmética de intervalos difusos</b>	<b>83</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>85</b>



---

## ÍNDICE DE FIGURAS

1.1. Condiciones que garantizan la existencia y unicidad de un cero para $f(x)$ . . . . .	4
1.2. Consideraciones en torno al valor numérico de $ f(\bar{x}) $ . . . . .	7
1.3. Ilustración gráfica de las aplicaciones $y = \log(x)$ , $y = \frac{1}{x}$ . . . . .	8
1.4. Ilustración gráfica de las funciones $y = 2x - 7.8$ , $y = 1.75x - 0.75$ e $y = x^3$ . . . . .	8
1.5. Construcción geométrica de $x_1$ y $x_2$ en el método de Newton. . . . .	9
1.6. Gráfica de la diferencia entre dos aproximaciones sucesivas $x_{n-1}$ y $x_n$ . . . . .	13
1.7. Gráfico de $y = f(x)$ entre los puntos $x_0$ y $x_1$ . . . . .	14
1.8. Condiciones que garantizan un cero para $f(x)$ . . . . .	15
1.9. Construcción geométrica de $x_1, x_2$ y $x_3$ por el método de Newton modificado. . . . .	16
1.10. Ilustración de las condiciones iniciales $x^{(0)}$ , $x'^{(0)}$ en la $\mathcal{H}$ -vecindad. . . . .	35
2.1. Función de pertenencia trapezoidal. . . . .	41
3.1. Gráfico de la solución numérica y analítica (suponiendo $x \geq 0$ ) . . . . .	68
3.2. Gráfico de la solución numérica y analítica (suponiendo $x \geq 0$ ) . . . . .	70
3.3. Gráfico de la solución numérica y analítica (suponiendo $x \geq 0$ ) . . . . .	71
3.4. Gráfico de la solución numérica y analítica para $X$ (suponiendo $X, Y$ positivos) . . . . .	72
3.5. Gráfico de la solución numérica y analítica para $Y$ (suponiendo $X, Y$ positivos) . . . . .	72
3.6. Gráfico de la solución numérica y analítica para $X$ (suponiendo $X, Y$ negativos) . . . . .	73
3.7. Gráfico de la solución numérica y analítica para $Y$ (suponiendo $X, Y$ negativos) . . . . .	74
3.8. Gráfico de la solución numérica para $X$ (suponiendo $X, Y$ positivos) . . . . .	75
3.9. Gráfico de la solución numérica para $Y$ (suponiendo $X, Y$ positivos) . . . . .	76



---

# INTRODUCCIÓN

En este trabajo se estudia la resolución numérica de ecuaciones y sistemas de ecuaciones no lineales difusos. Más precisamente, en este trabajo describimos, analizamos y simulamos métodos numéricos, tales como el método de Newton, que permitan aproximar de forma eficiente las soluciones a dichos problemas. Una de las características principales de este tipo de problemas es que las técnicas analíticas estándares de soluciones, tales como el método de J.J. Buckley y Y. Qu [8]-[10], no son adecuadas para resolverlos. El interés de esta publicación se centra en estudiar los resultados conocidos para los métodos numéricos clásicos y adaptarlos a los problemas difusos.

En esta investigación se quiere determinar la solución numérica de la ecuación no lineal difusa  $F(x) = 0$ , donde  $x$  es una variable difusa,  $0$  denota la función característica del singleton cero y  $F$  una aplicación difusa

$$\begin{aligned} F : \mathcal{F}(\mathbb{R}^n) &\rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}^n) \\ x &\mapsto F(x) \end{aligned}$$

donde  $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$  denota el espacio difuso en  $\mathbb{R}^n$ . Cabe señalar que la ecuación no lineal difusa  $F(x) = 0$  también puede representar un sistema no lineal difuso, considerándolo como una ecuación vectorial. Por lo tanto, cada vez que se escriba  $F(x) = 0$  consideraremos que este es un sistema no lineal difuso, a menos que se diga que sólo se trata de una ecuación no lineal.

Este problema tiene variadas aplicaciones que son de gran interés, y que surgen con bastante frecuencia en las matemáticas, ingeniería, ciencias sociales y las ciencias naturales. Bajo la mirada de la lógica difusa nuestra ecuación no lineal difusa  $F(x) = 0$  debe ser resuelta para modelar ciertos fenómenos presentes en las diversas ciencias. Dicha tarea en general no puede ser efectuada de manera exacta, es decir en un número finito de pasos. Para resolver este problema se podría pensar en adaptar los métodos numéricos clásicos a los problemas difusos, y tratar de extender los resultados conocidos a los mismos.

De aquí se formulan las siguientes interrogantes:

- Dada una ecuación no lineal difusa  $F(x) = 0$ , ¿Bajo que condiciones posee solución?
- ¿Es posible adaptar los métodos numéricos clásicos, tales como Newton o cuasi Newton, para la resolución numérica de  $F(x) = 0$ ?
- Si es afirmativa la respuesta precedente, ¿Cuál será el orden de convergencia de estos métodos?

Para poder abordar y dar solución a nuestra ecuación no lineal difusa, comenzaremos estudiando el método de Newton en ecuaciones no lineales clásicas  $F(x) = 0$ , donde  $x, 0$  denotan elementos de

$\mathbb{R}^n$  y  $F$  es una aplicación

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto F(x) \end{aligned}$$

El objetivo de este estudio es básicamente promover, impulsar y desarrollar investigación en torno a la resolución numérica de sistemas no lineales clásicos y difusos, aportando métodos matemáticos a las diversas ciencias.

Esta tesis está organizada como sigue:

**Capítulo 1** Se realiza un estudio acabado del método de Newton clásico, tanto escalar como vectorial.

**Capítulo 2** Se analizarán los conceptos elementales de la teoría difusa, para de esta forma abordar el trabajo de esta tesis.

**Capítulo 3** Se realizarán experiencias numéricas, empleando el método de Newton en el contexto difuso.

Finalmente se presentan las conclusiones obtenidas a partir del estudio desarrollado y además se adjunta las referencias bibliográficas utilizadas y consultadas durante el desarrollo de la presente memoria; así como el Anexo A correspondiente a valor absoluto y norma matricial y el Anexo B referido a la aritmética de intervalos difusos.



---



---

## CAPÍTULO 1

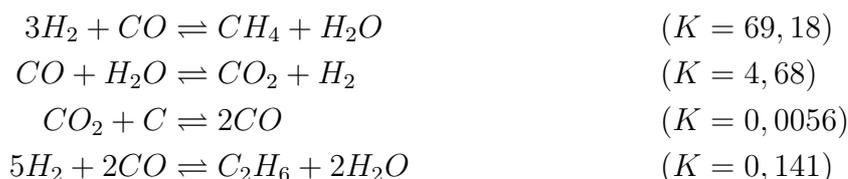
---

# MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON. MARCO CLÁSICO

### Introducción

AL momento de aplicar las matemáticas en situaciones concretas de la ingeniería, ciencias sociales o en la ciencias exactas y naturales, surge la necesidad de tener que resolver ecuaciones o sistemas de ecuaciones no lineales, los cuales muchas veces no pueden ser resueltos analíticamente o de manera exacta. Es por ello el interés de estudiar y analizar métodos numéricos que permitan dar solución a este problema. Ilustración de dicha situación se ve reflejado en el siguiente problema propio de la química:

*Una mezcla de un mol de CO y 3 moles de H<sub>2</sub> se deja reaccionar a 500°C y 1 atmósfera de presión hasta alcanzar su equilibrio químico y se desea estimar la composición de la mezcla de equilibrio. Las reacciones significativas (y las constantes de equilibrio) para este sistema son:*



*Puesto que todos los componentes de las reacciones anteriores, salvo el C, aparecen en fase gaseosa, las relaciones de equilibrio, asumiendo que los gases se comportan como gases perfectos, se pueden*

expresar mediante:

$$\frac{y_{CH_4} \cdot y_{H_2O}}{y_{H_2}^3 \cdot y_{CO}} = 69,18 \quad (1.1)$$

$$\frac{y_{CO_2} \cdot y_{H_2}}{y_{CO} \cdot y_{H_2O}} = 4,68 \quad (1.2)$$

$$\frac{y_{CO}^2}{y_{CO_2}} = 0,0056 \quad (1.3)$$

$$\frac{y_{C_2H_6} \cdot y_{H_2O}^2}{y_{H_2}^5 \cdot y_{CO}^2} = 0,141 \quad (1.4)$$

donde  $y_\alpha$  es la fracción molar de la especie " $\alpha$ ". Usando las coordenadas de reacción  $x_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) de cada una de las cuatro reacciones anteriores y denotando por especie 1 al  $H_2$ ; por especie 2 al  $CO$ , por especie 3 al  $CH_4$ , por especie 4 al  $H_2O$ , por especie 5 al  $CO_2$  y por especie 6 al  $C_2H_6$ , las fracciones molares de cada especie  $y_i$  ( $i=1,2,3,4,5,6$ ) satisfacen el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{aligned} y_1 &= (3 - 3x_1 + x_2 - 5x_4)/D \\ y_2 &= (1 - x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4)/D \\ y_3 &= x_1/D \\ y_4 &= (x_1 - x_2 + 2x_4)/D \\ y_5 &= (x_2 - x_3)/D \\ y_6 &= x_4/D \end{aligned}$$

donde  $D = (4 - 2x_1 + x_3 - 4x_4)$  representa el número total de moles presentes en el equilibrio. Reemplazando estas expresiones en las ecuaciones (1.1), (1.2), (1.3) y (1.4) se obtiene finalmente el sistema de cuatro ecuaciones no lineales:

$$\begin{aligned} \frac{x_1(x_1 - x_2 + 2x_4)D^2}{(3 - 3x_1 + x_2 - 5x_4)^3(1 - x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4)} &= 69,18 \\ \frac{(x_2 - x_3)(3 - 3x_1 + x_2 - 5x_4)}{(1 - x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4)(x_1 - x_2 + 2x_4)} &= 4,68 \\ \frac{(1 - x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4)^2}{(x_2 - x_3)D} &= 0,0056 \\ \frac{x_4(x_1 - x_2 + 2x_4)^2D^4}{(3 - 3x_1 + x_2 - 5x_4)^5(1 - x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4)^2} &= 0,141 \end{aligned}$$

La resolución del sistema de ecuaciones no lineales anterior nos conduce a los valores de las coordenadas de reacción  $y$ , a partir de ellas, a la determinación de las fracciones molares de cada especie. Una solución de este sistema, con sentido químico, es:

$$x_1 = 0,6816, \quad x_2 = 1,5896 \cdot 10^{-2}, \quad x_3 = -0,1287, \quad x_4 = 1,4096 \cdot 10^{-5}$$

o bien

$$\begin{aligned} y_1 &= 0,3871, \quad y_2 = 0,0018, \quad y_3 = 0,2718, \\ y_4 &= 0,2654, \quad y_5 = 0,0577, \quad y_6 = 5,6203 \cdot 10^{-6}. \end{aligned}$$

La cuestión esencial es ¿cómo se han calculado estas soluciones?

Este tipo de sistemas no lineales tiene peculiaridades que los diferencian notablemente de los sistemas lineales. Así por ejemplo, los sistemas lineales de  $n$  ecuaciones con  $n$  incógnitas en los que la matriz del sistema es invertible sólo admiten una solución. A diferencia de este caso, los sistemas no lineales, aunque tengan el mismo número de incógnitas que de ecuaciones, desde un punto de vista matemático, pueden admitir una, ninguna o varias soluciones. El elegir entre ellas las que sirven a la aplicación concreta que motivó el sistema de ecuaciones debe hacerse en función de los criterios físicos, químicos y técnicos que regulen el problema en cuestión (por ejemplo, aunque matemáticamente puedan tener sentido, químicamente serían inadmisibles fracciones molares negativas o superiores a 1 de una especie química).

Una segunda diferencia es la debida al hecho de que un sistema lineal que admita solución única puede ser resuelto de forma exacta mediante un número finito de operaciones (recuérdense los métodos directos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales: Gauss, LU, Choleski, Crout, QR, entre otros). En el caso de los sistemas no lineales, en general, la solución no podrá ser encontrada mediante un número finito de operaciones.

El objetivo de este capítulo es estudiar el método de Newton-Raphson, tanto escalar como vectorial, llevando a cabo un análisis de la convergencia del proceso iterativo, existencia de las raíces, rapidez de convergencia, unicidad de la solución, estabilidad de convergencia del proceso en cuestión y finalmente se discutirá entorno al método de Newton modificado.

## 1.1. El Método de Newton-Raphson para ecuaciones no lineales

### 1.1.1. Separación de raíces

Si una ecuación algebraica es relativamente complicada, no resulta posible por lo general hallar raíces exactas. Lo que es más, en algunos casos las ecuaciones tienen coeficientes conocidos sólo de forma *aproximada*. En consecuencia, carece de sentido el tratar de hallar las raíces exactas de la ecuación. Por consiguiente, adquieren particular importancia los métodos que aproximen las raíces de una ecuación así como la estimación de su grado de exactitud.

Supongamos que se tiene una ecuación

$$f(x) = 0 \quad (1.5)$$

donde la función  $f(x)$  está definida y es continua en un cierto intervalo finito  $[a, b]$ . En ciertos casos se necesitará la existencia y continuidad de la primera derivada  $f'(x)$  e incluso de la segunda derivada  $f''(x)$ , lo cual se indicará cuando sea necesario.

A todo valor  $x^*$  para el cual la función  $f(x)$  se anula, es decir, tal que

$$f(x^*) = 0$$

se le denomina *raíz de la ecuación* (1.5) o *cero* de la función  $f(x)$ .

El cálculo aproximado de las raíces reales de (1.5) se efectúa por lo general en dos etapas:

**Separación de raíces**, es decir, establecer los intervalos más pequeños posibles  $[\alpha, \beta]$  que contengan una y solamente una raíz de la ecuación (1.5),

Mejorar los valores de las raíces aproximadas, es decir, manipularlos hasta que presenten el grado de exactitud especificado.

Para la separación de raíces resulta muy útil el siguiente teorema.

**Teorema 1.1.1 (Teorema del valor intermedio de Bolzano)** . Si una función continua  $f(x)$  asume valores de signo opuesto en los extremos de un intervalo  $[\alpha, \beta]$ , es decir,  $f(\alpha)f(\beta) < 0$ , entonces el intervalo tendrá al menos una raíz de la ecuación  $f(x) = 0$ ; en otras palabras, existirá al menos un número  $x^* \in (\alpha, \beta)$  de modo que  $f(x^*) = 0$  (véase figura 1.1a).

La raíz  $x^*$  será única si la derivada  $f'(x)$  existe y conserva el signo dentro del intervalo  $(\alpha, \beta)$ ; es decir, si  $f'(x) > 0$  (o bien  $f'(x) < 0$ ) para cada  $\alpha < x < \beta$  (ver figura 1.1b).

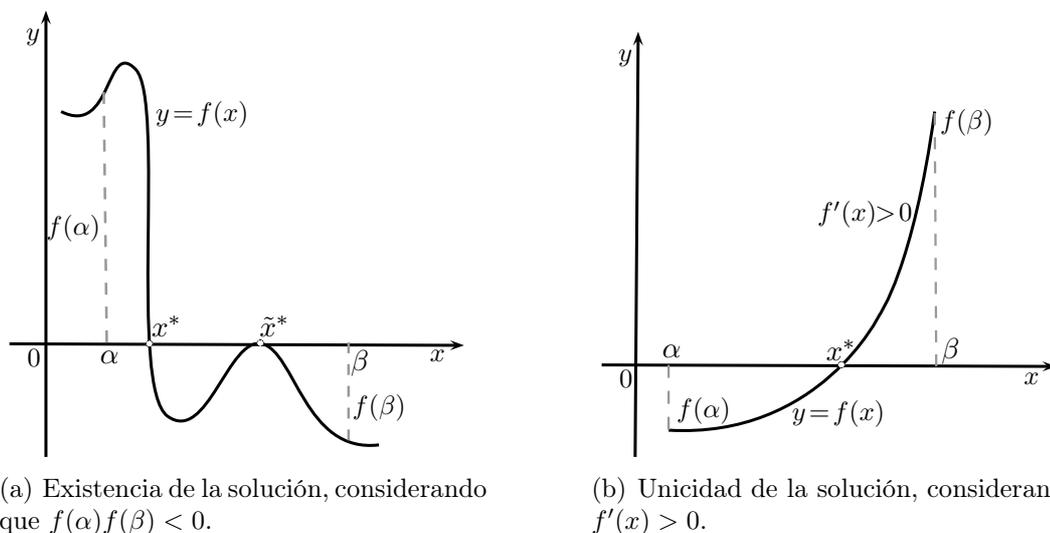


Figura 1.1: Condiciones que garantizan la existencia y unicidad de un cero para  $f(x)$ .

El proceso de separación de raíces comienza estableciendo los signos de una función continua  $f(x)$  en los puntos extremos  $x = a$  y  $x = b$  de su dominio de existencia.

A continuación se determinan los signos de la función  $f(x)$  para un número intermedio de puntos  $x = \alpha_1, \alpha_2, \dots$ , cuya elección depende de las características de la función  $f(x)$ . Si se cumple que  $f(\alpha_k)f(\alpha_{k+1}) < 0$ , entonces, en virtud del Teorema 1.1.1, existe una raíz de la ecuación  $f(x) = 0$  en el intervalo  $(\alpha_k, \alpha_{k+1})$ . Debemos asegurarnos que esta raíz es única. En la práctica suele ser suficiente, en el caso de separación de raíces, efectuar el **proceso de bisección**, dividiendo aproximadamente el intervalo dado  $(\alpha, \beta)$  en dos, cuatro, ocho, etc., partes iguales (hasta un cierto intervalo) y determinar el signo de  $f(x)$  en los puntos de división. Cabe recordar que en una ecuación algebraica de grado  $n$

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n = 0, \quad \text{con } a_0 \neq 0,$$

tiene a lo mas  $n$  raíces reales. Por consiguiente, si para una ecuación de este tipo se obtiene  $n + 1$  cambios de signo, habrán quedado separadas todas las raíces de la ecuación.

**Ejemplo 1.1.1** Separar las raíces de la ecuación

$$f(x) = x^3 - 6x + 2 = 0. \tag{1.6}$$

Formemos para los puntos seleccionados la tabla siguiente:

$x$	$f(x)$	$x$	$f(x)$
$-\infty$	-	1	-
-3	-	3	+
-1	+	$+\infty$	+
0	+		

Por tanto, la ecuación (1.6) tiene tres raíces reales dentro de los intervalos  $(-3, -1)$ ,  $(0, 1)$  y  $(1, 3)$ .

Si  $f(x)$  posee una derivada continua  $f'(x)$  y pueden calcularse fácilmente las raíces de la ecuación

$$f'(x) = 0,$$

entonces puede realizarse el proceso de separación de raíces de la ecuación (1.5). Evidentemente es suficiente contar únicamente los cambios de signos de la función  $f(x)$ , para hallar los ceros de su derivada.

**Ejemplo 1.1.2** Determinar el número de raíces reales de la ecuación

$$f(x) = x + e^x = 0. \tag{1.7}$$

Como  $f'(x) = 1 + e^x > 0$  y  $f(-\infty) = -\infty$ ,  $f(+\infty) = +\infty$ , se deduce que (1.7) tiene una única raíz real.

A continuación se dará una estimación del error de una raíz aproximada.

**Teorema 1.1.2** Sea  $x^*$  una raíz y considere  $\bar{x}$  una raíz aproximada de la ecuación  $f(x) = 0$ , situadas ambas en el mismo intervalo  $[\alpha, \beta]$ . Supongamos que  $f'$  existe y que  $|f'(x)| \geq m_1 > 0$  para cada  $\alpha \leq x \leq \beta$ .<sup>1</sup>

Se cumple entonces la siguiente aproximación:

$$|\bar{x} - x^*| \leq \frac{|f(\bar{x})|}{m_1}. \tag{1.8}$$

**Demostración.** Aplicando el teorema del valor medio, se tiene:

$$f(\bar{x}) - f(x^*) = f'(c)(\bar{x} - x^*)$$

donde  $c$  es un valor entre  $\bar{x}$  y  $x^*$ , es decir,  $c \in (\alpha, \beta)$ .

Por hipótesis se tiene que  $f(x^*) = 0$  y  $|f'(c)| \geq m_1$ , entonces se obtiene que:

$$|f(\bar{x})| = |f(\bar{x}) - f(x^*)| \geq m_1|\bar{x} - x^*|,$$

<sup>1</sup>Puede tomarse para  $m_1$ , por ejemplo, el valor mínimo de  $|f'(x)|$  cuando  $\alpha \leq x \leq \beta$ , si existe.

de donde

$$|\bar{x} - x^*| \leq \frac{|f(\bar{x})|}{m_1}.$$

□

**Observación 1.1.1** La fórmula (1.8) puede ofrecer sólo resultados someros y por tanto no es siempre conveniente utilizarla. Por esta razón, en la práctica resulta conveniente estrechar el intervalo general  $(\alpha, \beta)$  que contiene la raíz  $x^*$  y su valor aproximado  $\bar{x}$ , y considerar  $|\bar{x} - x^*| \leq \beta - \alpha$ .

**Ejemplo 1.1.3** Como valor aproximado de la raíz de la ecuación  $f(x) = x^4 - x - 1 = 0$  tenemos  $\bar{x} = 1,22$ . Estimar el error absoluto en esta raíz.

Evaluando la función en la aproximación, se tiene:

$$f(\bar{x}) = 2.2153 - 1.22 - 1 = -0.0047,$$

y para  $\hat{x} = 1,23$  tenemos

$$f(\hat{x}) = 2.2888 - 1.23 - 1 = 0.0588.$$

La raíz  $x^*$  pertenece al intervalo  $(1.22, 1.23)$ . La derivada  $f'(x) = 3x^3 - 1$  crece en forma monótona y por tanto su valor más pequeño en el intervalo dado es

$$m_1 = 3 \cdot 1.22^3 - 1 = 3 \cdot 1.816 - 1 = 4.448,$$

de donde, mediante la fórmula (1.8), tenemos

$$|\bar{x} - x^*| \leq \frac{0.0047}{4.448} \approx 0.001.$$

**Observación 1.1.2** Ocasionalmente, en la práctica, la exactitud de una raíz aproximada  $\bar{x}$  se estima en función de como satisfaga la ecuación dada  $f(x) = 0$ ; es decir, si el número  $|f(\bar{x})|$  es pequeño, se considera que  $\bar{x}$  es una buena aproximación a la raíz exacta  $x^*$ ; pero si  $|f(\bar{x})|$  es grande, entonces  $\bar{x}$  se considera como una mala aproximación a la raíz  $x^*$ . Como muestran las Figuras 1.2(a) y 1.2(b), esta forma de proceder no siempre es adecuada. Se debe tener presente igualmente que si la ecuación  $f(x) = 0$  se multiplica por un número arbitrario  $k \neq 0$ , se obtiene entonces una ecuación equivalente  $kf(x) = 0$ , y el número  $|kf(\bar{x})|$  puede hacerse arbitrariamente grande o pequeño mediante la elección apropiada del factor  $k$ .

### 1.1.2. Solución gráfica de ecuaciones

Las raíces reales de la ecuación

$$f(x) = 0 \tag{1.9}$$

pueden determinarse en forma aproximada considerando las abscisas de los puntos de intersección de la gráfica de la función  $y = f(x)$  con el eje  $x$  (ver figura 1.1a). Si la ecuación (1.9) no tiene raíces muy próximas, este procedimiento puede utilizarse para separarlas. Resulta aconsejable a veces sustituir la ecuación (1.9) por una ecuación equivalente<sup>2</sup>:

$$\phi(x) = \psi(x) \tag{1.10}$$

<sup>2</sup>Dos ecuaciones se denominan equivalentes si poseen exactamente las mismas raíces.

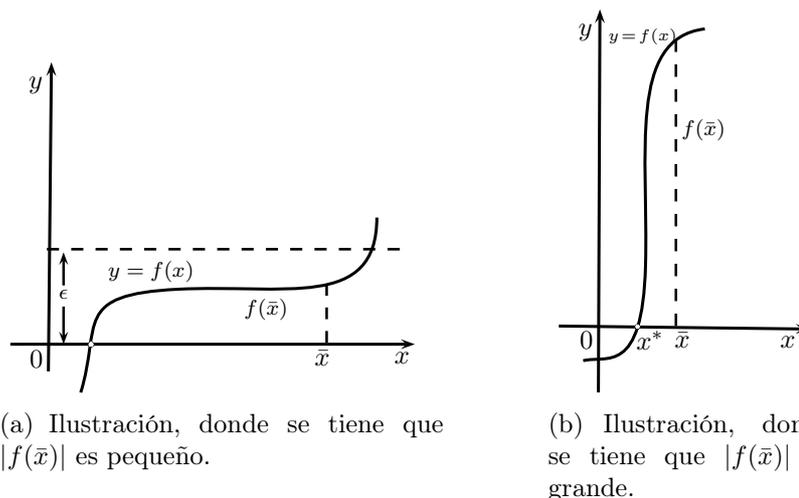


Figura 1.2: Consideraciones en torno al valor numérico de  $|f(\bar{x})|$ .

donde las funciones  $\phi(x)$  y  $\psi(x)$  son más sencillas que  $f(x)$ . Constrúyase entonces las gráficas de las funciones  $y = \phi(x)$  y  $y = \psi(x)$ , y las raíces deseadas serán las abscisas de los puntos de intersección de estas gráficas.

**Ejemplo 1.1.4** Resuélvase gráficamente la siguiente ecuación

$$x \log(x) = 1. \tag{1.11}$$

Escribiendo la ecuación (1.11) en la forma

$$\log(x) = \frac{1}{x},$$

las raíces de (1.11) pueden determinarse fácilmente, ya que son las abscisas de los puntos de intersección de la curva logarítmica  $y = \log(x)$  y la hipérbola  $y = \frac{1}{x}$ . Construyendo estas curvas (ver figura 1.3), tendremos un valor aproximado  $x^* \approx 2,5$  de la única raíz de la ecuación (1.11).

Si una de las funciones  $\phi(x)$  o  $\psi(x)$  es lineal afín, por ejemplo,  $\phi(x) = ax + b$ , queda simplificada la operación de hallar las raíces de la ecuación (1.10). Las raíces de (1.10) son entonces las abscisas de los puntos de intersección de la curva  $y = \psi(x)$  y la línea recta  $y = ax + b$ . Este procedimiento es particularmente bueno cuando han de resolverse series de ecuaciones del mismo tipo que difieren únicamente en los coeficientes  $a$  y  $b$  de una ecuación lineal. La construcción gráfica se reduce entonces a determinar los puntos de intersección de una gráfica dada,  $y = \psi(x)$ , y varias líneas rectas. Este tipo incluye evidentemente las ecuaciones de tres términos

$$x^n + ax + b = 0.$$

**Ejemplo 1.1.5** Resuélvase las ecuaciones cúbicas,

$$x^3 - 1.75x + 0.75 = 0, \quad x^3 + 2x + 7.8 = 0.$$

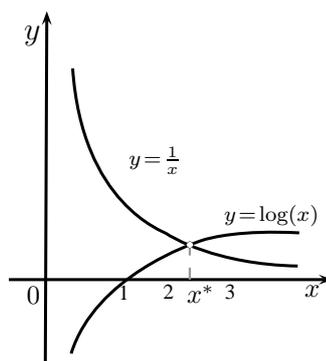


Figura 1.3: Ilustración gráfica de las aplicaciones  $y = \log(x)$ ,  $y = \frac{1}{x}$ .

Constrúyase la función cúbica  $y = x^3$ . Las raíces deseadas son las abscisas de los puntos de intersección de esta función con las líneas rectas (véase figura 1.4)  $y = 1,75x - 0,75$  e  $y = -2x - 7,8$ . Se deduce claramente de la figura que la primera ecuación tiene tres raíces reales:  $x_1 = -1,5$ ,  $x_2 = 0,5$ ,  $x_3 = 1$ , y la segunda ecuación tiene únicamente una raíz real,  $x_1 = -1,65$ .

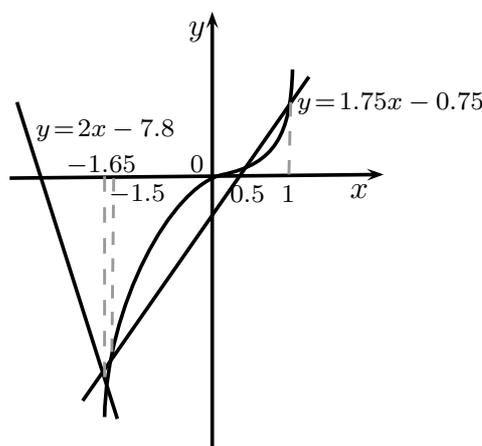


Figura 1.4: Ilustración gráfica de las funciones  $y = 2x - 7,8$ ,  $y = 1,75x - 0,75$  e  $y = x^3$ .

Debe tenerse en cuenta que aun cuando los procedimientos gráficos de resolver ecuaciones son muy convenientes y relativamente simples, se han utilizado como norma solamente para determinar las raíces de una forma aproximada. Por lo que respecta a la precisión, un caso particularmente desfavorable es aquel en que las líneas se cortan con un ángulo muy agudo y prácticamente se juntan para un cierto arco.

### 1.1.3. Método de Newton-Raphson

Supongamos que la raíz  $x^*$  de la ecuación

$$f(x) = 0 \tag{1.12}$$

está separada en el intervalo  $[a, b]$ ,  $f'(x)$  y  $f''(x)$  son continuas y conservan los signos para cada  $a \leq x \leq b$ . Habiendo determinado una aproximación  $n$ -ésima de la raíz,  $x_n \approx x^*$  ( $a \leq x_n \leq b$ ), podemos mejorarla mediante el *método de Newton* de la siguiente manera.

Sea

$$x^* = x_n + h_n, \tag{1.13}$$

donde  $h_n$  es una cantidad pequeña. Aplicando la fórmula de Taylor, obtenemos

$$0 = f(x_n + h_n) \approx f(x_n) + h_n f'(x_n)$$

En consecuencia,

$$h_n \approx -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Tomando  $h_n = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ , tendremos la aproximación  $x_{n+1}$  de la raíz  $x^*$ , dada por:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (n = 0, 1, \dots) \tag{1.14}$$

Geoméricamente, el método de Newton es equivalente a sustituir un arco pequeño de la curva  $y = f(x)$  por una tangente trazada por un punto de la curva. Supongamos, que  $f''(x) > 0$  para cada  $a \leq x \leq b$  y  $f(b) > 0$  (véase figura 1.5).

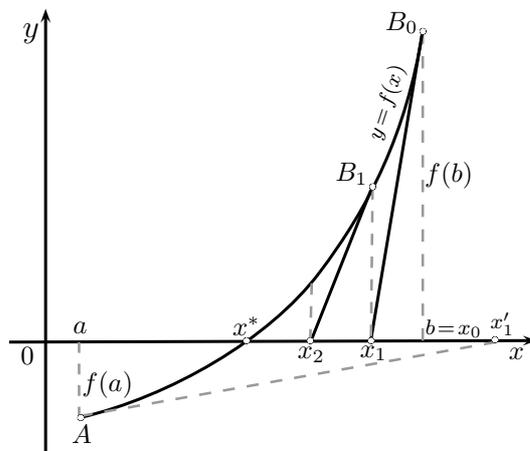


Figura 1.5: Construcción geométrica de  $x_1$  y  $x_2$  en el método de Newton.

Tomemos, por ejemplo,  $x_0 = b$  para el cual  $f(x_0)f''(x_0) > 0$ . Trácese la tangente a la curva  $y = f(x)$  en el punto  $B_0 = (x_0, f(x_0))$ . Como primera aproximación  $x_1$  de la raíz  $x^*$  tomemos la abscisa del punto de intersección de esta tangente con el eje  $x$ . Trácese nuevamente una tangente por el punto  $B_1 = (x_1, f(x_1))$ , cuya abscisa del punto de intersección con el eje  $x$  genera una segunda aproximación  $x_2$  de la raíz  $x^*$ , y así sucesivamente (ver figura 1.5). La ecuación de la tangente en el punto  $B_n = (x_n, f(x_n))$  ( $n = 0, 1, \dots$ ) es

$$y - f(x_n) = f'(x_n)(x - x_n).$$

Haciendo  $y = 0$ ,  $x = x_{n+1}$ , se obtiene la fórmula (1.14).

Notar que si se hubiese considerado  $x_0 = a$ , se tendría por tanto  $f(x_0)f''(x_0) < 0$ , y luego trazando la tangente a la curva  $y = f(x)$  por el punto  $A = (a, f(a))$ , tendríamos que el punto  $x'_1$  (ver figura 1.5) cae fuera del intervalo  $[a, b]$ ; en otras palabras, el procedimiento de Newton no es práctico para este valor inicial. Así, en el caso dado, una *buena* aproximación inicial  $x_0$  es aquella para la cual resulta válida la desigualdad

$$f(x_0)f''(x_0) > 0. \tag{1.15}$$

Demostraremos ahora que esta condición es general.

**Teorema 1.1.3** *Si  $f(a)f(b) < 0$ , y  $f'(x), f''(x)$  existen, son no nulas y conservan el signo para  $a \leq x \leq b$ , entonces, partiendo desde la aproximación inicial  $x_0 \in [a, b]$ , satisfaciendo (1.15), es posible, utilizando el método de Newton (1.14), calcular la única raíz  $x^*$  de la ecuación (1.12) con cualquier grado de exactitud.*

**Demostración.** Sin pérdida de generalidad, supongamos que  $f(a) < 0$ ,  $f(b) > 0$ ,  $f'(x) > 0$  y  $f''(x) > 0$  para  $a \leq x \leq b$ . (los otros casos son estudiados de forma similar). Por la desigualdad (1.15) tenemos  $f(x_0) > 0$  (podemos, por ejemplo, tomar  $x_0 = b$ ).

Por el principio de inducción matemática demostramos que todas las aproximaciones  $x_n > x^*$  ( $n = 0, 1, \dots$ ) y, por consiguiente,  $f(x_n) > 0$ . En efecto, se tiene,  $x_0 > x^*$ .

Suponiendo que  $x_n > x^*$ . Escribiendo

$$x^* = x_n + (x^* - x_n),$$

y empleando la expansión de Taylor, se tiene que:

$$0 = f(x^*) = f(x_n) + f'(x_n)(x^* - x_n) + \frac{1}{2}f''(c_n)(x^* - x_n)^2 \tag{1.16}$$

donde  $x^* < c_n < x_n$ .

Como  $f''(x) > 0$ , tenemos

$$f(x_n) + f'(x_n)(x^* - x_n) < 0$$

y, por lo tanto,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} > x^*$$

lo cual es lo que se quería demostrar.

Consideración los signos de  $f(x_n)$  y  $f'(x_n)$  obtenemos, de la fórmula (1.14),  $x_{n+1} < x_n$  ( $n = 0, 1, \dots$ ), es decir, las aproximaciones sucesivas  $x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$  forman una secuencia acotada monótona decreciente. Por lo tanto, existe el límite  $\overline{x^*} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .

Tomando límite en (1.14), tenemos

$$\overline{x^*} = \overline{x^*} - \frac{f(\overline{x^*})}{f'(\overline{x^*})},$$

ósea  $f(\overline{x^*}) = 0$ , de donde  $\overline{x^*} = x^*$ , completándose de esta forma la demostración. □

Por esta razón, al aplicar el método de Newton debe guiarse por la siguiente condición: *Para el punto inicial  $x_0$  elíjase el extremo del intervalo  $[a, b]$  asociado con una ordenada del mismo signo que el de  $f''(x_0)$ .*

**Observación 1.1.3** Si tenemos que:

- (1) La función  $f(x)$  esta definida y es continua en  $\mathbb{R}$ ,
- (2)  $f(a)f(b) < 0$  para algún  $a < b$ ,
- (3)  $f'(x) \neq 0$  para  $a \leq x \leq b$ , y
- (4)  $f''(x)$  existe en cualquier punto y conserva el signo,

entonces puede tomarse cualquier valor  $c \in [a, b]$  como aproximación inicial  $x_0$ , al utilizar el método de Newton para encontrar una raíz de la ecuación  $f(x) = 0$ , que pertenezca al intervalo  $[a, b]$ . Se puede, por ejemplo, tomar  $x_0 = a$  o  $x_0 = b$ .

En efecto, supongamos que  $f'(x) > 0$  para cada  $a \leq x \leq b$ ,  $f''(x) > 0$  y  $x_0 = c$ , donde  $a \leq c \leq b$ . Si  $f(c) = 0$ , la raíz es  $x^* = c$  y el problema esta resuelto. Si  $f(c) > 0$ , el razonamiento anterior es válido y el proceso de Newton con valor inicial  $c$  convergerá hacia la raíz  $x^* \in (a, b)$ .

Finalmente, si  $f(c) < 0$ , entonces determinamos el valor

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = c - \frac{f(c)}{f'(c)} > c$$

Utilizando la fórmula de Taylor obtenemos

$$\begin{aligned} f(x_1) &= f(c) - \frac{f(c)}{f'(c)}f'(c) + \frac{1}{2} \left[ \frac{f(c)}{f'(c)} \right]^2 f''(\bar{c}) \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{f(c)}{f'(c)} \right]^2 f''(\bar{c}) > 0, \end{aligned}$$

donde  $\bar{c}$  es un cierto valor intermedio entre  $c$  y  $x_1$ .

De este modo

$$f(x_1)f''(x_1) > 0.$$

Además, de la condición  $f''(x) > 0$  se deduce que  $f'(x)$  es una función creciente y, en consecuencia,  $f'(x) > f'(a) > 0$  para  $x > a$ . Es posible por tanto tomar  $x_1$  como condición inicial del proceso de Newton, que resulta convergente hacia una cierta raíz  $\bar{x}^*$  de la función  $f(x)$  tal que  $\bar{x}^* > c \geq a$ . Como la derivada  $f'(x)$  es positiva cuando  $x > a$ , la función  $f(x)$  tiene raíz única en el intervalo  $(a, \infty)$ , de esta forma se deduce que

$$\bar{x}^* = x^* \in (a, b).$$

Puede establecerse un argumento similar para otras combinaciones de signos de las derivadas  $f'(x)$  y  $f''(x)$ .

**Observación 1.1.4** De la fórmula (1.14) está claro que cuanto mayor sea el valor numérico de la derivada  $f'(x)$  en la vecindad de la raíz, tanto menor será la corrección que ha de añadirse a la aproximación  $n$ -ésima para obtener la aproximación  $(n + 1)$ . El método de Newton es por consiguiente muy conveniente cuando la gráfica de la función tiene una pendiente elevada en la vecindad de la raíz dada. Por el contrario, si el valor numérico de la derivada  $f'(x)$  es pequeño cerca de ella, las correcciones serán entonces mayores, y calcular la raíz mediante este procedimiento puede ser un proceso largo o a veces incluso imposible. Resumiendo: no utilice el método de Newton para resolver una ecuación  $f(x) = 0$  si la curva  $y = f(x)$  es casi horizontal cerca del punto de intersección con el eje  $x$ .

Para estimar el error de la aproximación  $x_n$  de orden  $n$ , puede utilizarse la expresión (1.8):

$$|x^* - x_n| \leq \frac{|f(x_n)|}{m_1}, \quad (1.17)$$

donde  $m_1$  es el valor mínimo de  $|f'(x)|$  en el intervalo  $[a, b]$ .

Obtendremos ahora otra fórmula para estimar la exactitud de la aproximación  $x_n$ . Aplicando la fórmula de Taylor tenemos:

$$f(x_n) = f(x_{n-1} + (x_n - x_{n-1})) = f(x_{n-1}) + f'(x_{n-1})(x_n - x_{n-1}) + \frac{1}{2}f''(x_{n-1}^*)(x_n - x_{n-1})^2, \quad (1.18)$$

donde  $x_{n-1}^* \in co(x_{n-1}, x_n)$ <sup>3</sup>. Ya que, en virtud de la definición de la aproximación  $x_n$ , tenemos

$$f(x_{n-1}) + f'(x_{n-1})(x_n - x_{n-1}) = 0. \quad (1.19)$$

Se deduce de (1.18) que

$$|f(x_n)| \leq \frac{1}{2}M_2(x_n - x_{n-1})^2,$$

donde  $M_2$  denota el valor máximo de  $|f''(x)|$  en el intervalo  $[a, b]$ . En consecuencia, en base a la desigualdad (1.17) tenemos finalmente que:

$$|x^* - x_n| \leq \frac{M_2}{2m_1}(x_n - x_{n-1})^2. \quad (1.20)$$

Si el proceso de Newton converge, entonces  $x_n - x_{n-1} \rightarrow 0$  para  $n \rightarrow \infty$ . Y por tanto para  $n \geq N$  tenemos

$$|x^* - x_n| \leq |x_n - x_{n-1}|,$$

es decir, los decimales iniciales “estabilizados” de las aproximaciones  $x_{n-1}$  y  $x_n$  son exactos a partir de una cierta aproximación.

Téngase en cuenta que en el caso general una coincidencia, hasta de  $\epsilon$ , de dos aproximaciones sucesivas  $x_{n-1}$  y  $x_n$  no garantiza que los valores de  $x_n$  y la raíz  $x^*$  (ver figura 1.6) coincidan con el mismo grado de exactitud.

Obtendremos también una expresión que muestre los errores absolutos de dos aproximaciones sucesivas  $x_n$  y  $x_{n+1}$ . De (1.16) tenemos

$$x^* = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{1}{2} \cdot \frac{f''(c_n)}{f'(x_n)}(x^* - x_n)^2,$$

donde  $c_n \in (x_n, x^*)$ . Por consiguiente, teniendo en cuenta (1.14), tenemos

$$x^* - x_{n+1} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{f''(c_n)}{f'(x_n)}(x^* - x_n)^2$$

y, consecuentemente,

$$|x^* - x_{n+1}| \leq \frac{M_2}{2m_1}(x^* - x_n)^2. \quad (1.21)$$

---

<sup>3</sup>La envoltura convexa de  $A$  es el conjunto  $coA = \{\lambda a_1 + (1 - \lambda)a_2 : a_1, a_2 \in A, \lambda \in [0, 1]\}$ .

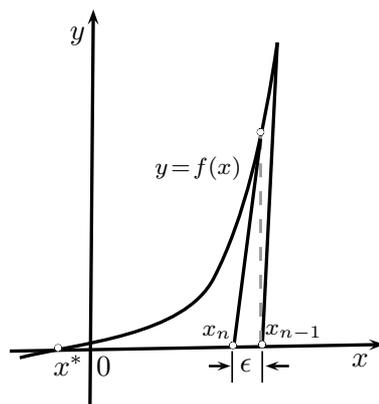


Figura 1.6: Gráfica de la diferencia entre dos aproximaciones sucesivas  $x_{n-1}$  y  $x_n$ .

La fórmula (1.21) asegura una rápida convergencia del proceso de Newton si la aproximación inicial  $x_0$  es tal que

$$\frac{M_2}{2m_1}|x^* - x_0| \leq q < 1.$$

En particular, si

$$\mu = \frac{M_2}{2m_1} \leq 1 \quad \text{y} \quad |x^* - x_n| < 10^{-m},$$

entonces de (1.21) tenemos

$$|x^* - x_{n+1}| < 10^{-2m}.$$

Esto es, en este caso, si la aproximación  $x_n$  es exacta con  $m$  decimales, la siguiente aproximación  $x_{n+1}$  lo será como mínimo para  $2m$  decimales; en otras palabras, si  $\mu \leq 1$ , el procedimiento de Newton asegura entonces el doble del número de decimales exactos de la raíz deseada en cada paso.

**Ejemplo 1.1.6** *Empleando el método de Newton, determine una raíz negativa de la ecuación  $f(x) = x^4 - 3x^2 + 75x - 10.000 = 0$  con cinco dígitos exactos.*

*Considerando  $x = 0, -10 - 100, \dots$  en el lado izquierdo tendremos  $f(0) = -10.000, f(-10) = -1050, f(-100) \approx 10^8$ . De este modo, la raíz deseada  $x^*$  está en el intervalo  $-100 < x^* < -10$ . Reduzcamos el intervalo hallado. Ya que  $f(-11) = 3.453$ , entonces  $-11 < x^* < -10$ . En este último intervalo,  $f'(x) < 0$  y  $f''(x) > 0$ . Como  $f(-11) > 0$  y  $f''(-11) > 0$ , entonces tomamos  $x_0 = -11$  como aproximación inicial. Las aproximaciones sucesivas  $x_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) están calculadas de acuerdo con el siguiente esquema:*

$n$	$x_n$	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$h_n = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
0	-11	3453	-5183	0.7
1	-10.3	134.3	-4234	0.03
2	-10.27	37.8	-4196	0.009
3	-10.261	0.2		

Examinando el caso  $n = 3$ , obteniéndose  $f(x_n + 0,001) = f(-10,260)$ . Como  $f(-10,260) < 0$ , se deduce que  $-10,261 < x^* < -10,260$  y cualquiera de estos números presenta la aproximación requerida.

**Ejemplo 1.1.7** Consideremos la ecuación

$$f(x) = 0 \tag{1.22}$$

donde  $f''(x)$  es continua y conserva el signo en  $-\infty < x < \infty$ . Por el teorema de Rolle, la ecuación (1.22) no puede tener más de dos raíces reales. Estudiemos dos casos de interés práctico.

**Caso I:** Supongamos

$$f(x_0)f'(x_0) < 0, \quad f(x_0)f''(x_0) < 0$$

(véase figura 1.7)

Entonces (1.22) tiene la raíz  $x^*$  (única) en el intervalo  $(x_0, x_1)$ , donde

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

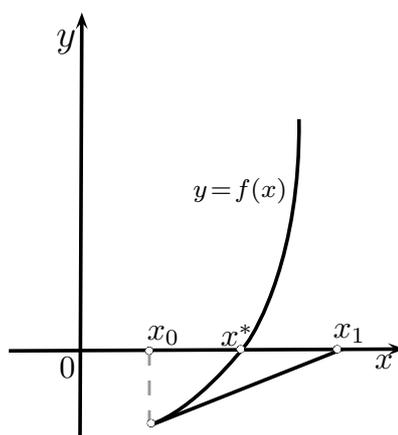


Figura 1.7: Gráfico de  $y = f(x)$  entre los puntos  $x_0$  y  $x_1$ .

La raíz  $x^*$  puede calcularse con la exactitud pedida mediante el método de Newton.

**Caso II:** Sea

$$f'(x_0) = 0, \quad f(x_0)f''(x) < 0$$

En tal caso la ecuación (1.22) tiene dos raíces  $x^*$  y  $\tilde{x}^*$  en el intervalo  $(-\infty, \infty)$  (ver figura 1.8a).

Transformando el miembro izquierdo de (1.22) por la extensión de Taylor, tendremos aproximadamente

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 = 0$$

o

$$f(x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 = 0$$

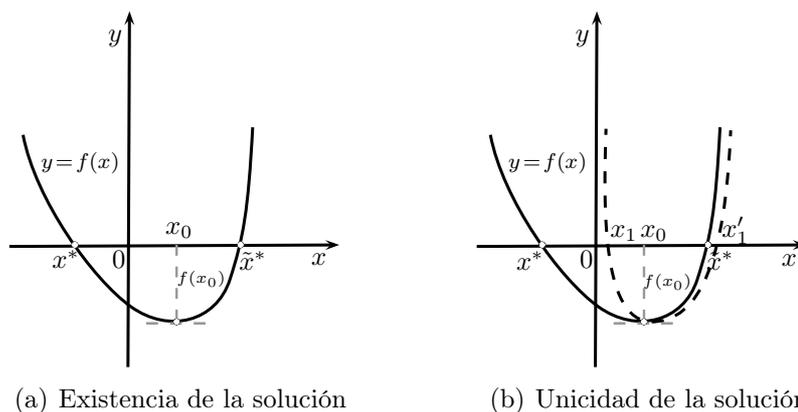


Figura 1.8: Condiciones que garantizan un cero para  $f(x)$ .

de donde para las raíces  $x^*$  y  $\tilde{x}^*$  tendremos las aproximaciones iniciales

$$\begin{cases} x_1 = x_0 - \sqrt{-\frac{2f(x_0)}{f''(x_0)}} \\ x'_1 = x_0 + \sqrt{-\frac{2f(x_0)}{f''(x_0)}} \end{cases}$$

Las cuales son las abscisas de los puntos de intersección de la parábola

$$Y = f(x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2$$

con el eje  $x$  (ver figura 1.8b). Pueden conseguirse mejoras sucesivas de las raíces mediante el método de Newton.

### 1.1.4. Método de Newton modificado

Si la derivada  $f'(x)$  varía, aunque ligeramente, en el intervalo  $[a, b]$ , en tal caso la fórmula (1.14) de la sección anterior podemos reemplazar  $f'(x_n)$  por  $f'(x_0)$ , es decir:

$$f'(x_n) \approx f'(x_0) \tag{1.23}$$

De aquí, para la raíz  $x^*$  de la ecuación  $f(x) = 0$  tendremos las aproximaciones sucesivas

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)} \quad (n = 0, 1, \dots) \tag{1.24}$$

Geoméricamente, este método significa que sustituimos las tangentes en los puntos  $B_n = (x_n, f(x_n))$  por líneas rectas paralelas a la tangente a la curva  $y = f(x)$  en el punto  $B_0 = (x_0, f(x_0))$  (ver figura 3.5).

La fórmula (1.23) nos evita la necesidad de calcular los valores de la derivada  $f'(x_n)$  en cada iteración que se realice; y por lo tanto esta fórmula es muy útil si  $f'(x_n)$  es complicada. Puede demostrarse que, supuesta la constancia de los signos de las derivadas  $f'(x)$  y  $f''(x)$ , las aproximaciones sucesivas (1.24) presentan un proceso convergente.

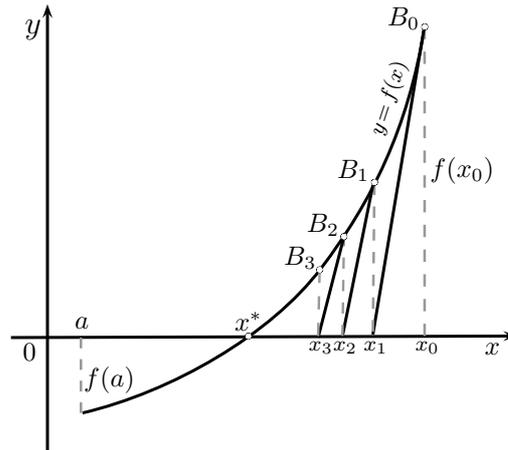


Figura 1.9: Construcción geométrica de  $x_1, x_2$  y  $x_3$  por el método de Newton modificado.

## 1.2. El Método de Newton-Raphson para sistemas de ecuaciones no lineales

### 1.2.1. Método de Newton para un sistema de dos ecuaciones

Sean  $x_n, y_n$  las raíces aproximadas del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} F(x, y) = 0, \\ G(x, y) = 0. \end{cases} \quad (1.25)$$

Donde  $F$  y  $G$  son funciones continuamente diferenciables. Haciendo

$$\begin{cases} x = x_n + h_n, \\ y = y_n + k_n, \end{cases}$$

tendremos

$$\begin{cases} F(x_n + h_n, y_n + k_n) = 0, \\ G(x_n + h_n, y_n + k_n) = 0, \end{cases} \quad (1.26)$$

de donde, utilizando la fórmula de Taylor y limitándonos a los términos lineales en  $h_n$  y  $k_n$ , se tiene:

$$\begin{cases} F(x_n, y_n) + h_n F_x(x_n, y_n) + k_n F_y(x_n, y_n) = 0, \\ G(x_n, y_n) + h_n G_x(x_n, y_n) + k_n G_y(x_n, y_n) = 0. \end{cases} \quad (1.27)$$

Si el jacobiano

$$J(x_n, y_n) = \begin{vmatrix} F_x(x_n, y_n) & F_y(x_n, y_n) \\ G_x(x_n, y_n) & G_y(x_n, y_n) \end{vmatrix} \neq 0,$$

entonces tenemos para el sistema (1.27)

$$h_n = -\frac{1}{J(x_n, y_n)} \begin{vmatrix} F(x_n, y_n) & F_y(x_n, y_n) \\ G(x_n, y_n) & G_y(x_n, y_n) \end{vmatrix}, \quad (1.28a)$$

$$k_n = -\frac{1}{J(x_n, y_n)} \begin{vmatrix} F_x(x_n, y_n) & F(x_n, y_n) \\ G_x(x_n, y_n) & G(x_n, y_n) \end{vmatrix}. \quad (1.28b)$$

En consecuencia, obtenemos:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{1}{J(x_n, y_n)} \begin{vmatrix} F(x_n, y_n) & F_y(x_n, y_n) \\ G(x_n, y_n) & G_y(x_n, y_n) \end{vmatrix}, \quad (1.29a)$$

$$y_{n+1} = y_n - \frac{1}{J(x_n, y_n)} \begin{vmatrix} F_x(x_n, y_n) & F(x_n, y_n) \\ G_x(x_n, y_n) & G(x_n, y_n) \end{vmatrix}. \quad (1.29b)$$

Para cada  $(n = 0, 1, \dots)$ . Las aproximaciones iniciales  $x_0, y_0$  están determinadas muy someramente.

**Ejemplo 1.2.1** *Determinar las raíces reales del sistema,*

$$\begin{cases} 2x^3 - y^2 - 1 = 0 \\ xy^3 - y - 4 = 0 \end{cases} \quad (1.30)$$

*Obtengamos gráficamente unas aproximaciones iniciales de los valores de las raíces:*

$$x_0 = 1.2 \quad y_0 = 1.7$$

*sustituyendo en (1.30) obtenemos*

$$\begin{aligned} F(1.2, 1.7) &= -0.434, \\ G(1.2, 1.7) &= 0.197. \end{aligned}$$

*Calculando el jacobiano*

$$J(x, y) = \begin{vmatrix} 6x^2 & -2y \\ y^3 & 3xy^2 - 1 \end{vmatrix},$$

*de donde*

$$J(x_0, y_0) = \begin{vmatrix} 8.64 & -3.40 \\ 4.91 & 9.40 \end{vmatrix} = 97.91.$$

*Calculando  $h_0$  de la expresión (1.28a):*

$$h_0 = -\frac{1}{97.91} \begin{vmatrix} -0.434 & -3.40 \\ 0.197 & 9.40 \end{vmatrix} = \frac{3.389}{97.91} = 0.0349$$

*y de aquí, empleando (1.29a) se tiene:*

$$x_1 = 1.2 + 0.0349 = 1.2349$$

*Calculando ahora,  $k_0$  de la expresión (1.28b):*

$$k_0 = -\frac{1}{97.91} \begin{vmatrix} 8.64 & -0.434 \\ 4.91 & 0.1956 \end{vmatrix} = -0.0390$$

*de donde, por (1.29b), tenemos:*

$$y_1 = 1.7 - 0.0390 = 1.6610$$

*Repetiendo este proceso con las raíces obtenidas, hallaremos  $x_2 = 1.2343, y_2 = 1.6615$  y así sucesivamente.*

### 1.2.2. Método de Newton para un sistema de $n$ ecuaciones

Consideremos, de una forma general, un sistema no lineal de ecuaciones

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \dots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases} \quad (1.31)$$

con los miembros izquierdos reales.

Escribiremos el sistema (1.31) en forma más reducida considerando el conjunto de argumentos  $x_1, x_2, \dots, x_n$  como un vector  $n$ -dimensional:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Análogamente, el conjunto de funciones  $f_1, f_2, \dots, f_n$  es también un vector  $n$ -dimensional (función vector):

$$f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}.$$

El sistema (1.31) puede por consiguiente escribirse abreviadamente

$$f(x) = 0 \quad (1.32)$$

Resolveremos (1.32) por el método de aproximaciones sucesivas. Supongamos hemos hallado la aproximación  $p$ -ésima.

$$x^p = (x_1^{(p)}, x_2^{(p)}, \dots, x_n^{(p)})$$

de una de las raíces separadas  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  de la ecuación vectorial (1.32). La raíz exacta de (1.32) puede representarse entonces como

$$x = x^{(p)} + \epsilon^{(p)} \quad (1.33)$$

donde  $\epsilon^{(p)} = (\epsilon_1^{(p)}, \epsilon_2^{(p)}, \dots, \epsilon_n^{(p)})$  es la corrección (**error de la raíz**).

Sustituyendo (1.33) en (1.32), tenemos

$$f(x^{(p)} + \epsilon^{(p)}) = 0, \quad (1.34)$$

suponiendo que la función  $f(x)$  es continuamente diferenciable en un cierto dominio convexo que contiene a  $x$  y  $x^{(p)}$ , desarrollaremos el primer miembro de la ecuación (1.34) en potencias del pequeño vector  $\epsilon^{(p)}$  limitándonos a los términos lineales

$$f(x^{(p)} + \epsilon^{(p)}) = f(x^{(p)}) + f'(x^{(p)})\epsilon^{(p)} = 0. \quad (1.35)$$

De la fórmula (1.35) se deduce que la derivada  $f'(x)$  ha de ser considerada como la matriz jacobiana del conjunto de funciones  $f_1, f_2, \dots, f_n$  con respecto a las variables  $x_1, x_2, \dots, x_n$ ; es decir,

$$f'(x) = W(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x) \end{bmatrix}$$

o abreviadamente,

$$f'(x) = W(x) = \left[ \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right] \quad (i, j = 1, 2, \dots, n).$$

El sistema (1.35) en forma extendida es un sistema lineal en las correcciones  $\epsilon^{(p)}$  para  $(p = 1, 2, \dots, n)$  con la matriz  $W(x)$ , y de aquí que la fórmula (1.35) pueda escribirse como sigue:

$$f(x^{(p)}) + W(x^{(p)})\epsilon^{(p)} = 0$$

de donde, dando por supuesto que la matriz  $W(x^{(p)})$  es no singular, tenemos

$$\epsilon^{(p)} = - [W(x^{(p)})]^{-1} f(x^{(p)}).$$

En consecuencia

$$x^{(p+1)} = x^{(p)} - [W(x^{(p)})]^{-1} f(x^{(p)}) \quad (p = 0, 1, \dots) \tag{1.36}$$

(método de Newton).

Para la aproximación de orden cero  $x^{(0)}$  podemos tomar un valor aproximado de la raíz deseada.

**Ejemplo 1.2.2** *Determinar las soluciones positivas del siguiente sistema de ecuaciones*

$$\begin{cases} x_1 + 3 \log(x_1) - x_2^2 = 0 \\ 2x_1^2 - x_1x_2 - 5x_1 + 1 = 0 \end{cases} \tag{1.37}$$

Las curvas definidas por el sistema (1.37) se cortan aproximadamente en los puntos  $M_1 = (1.4, 1.5)$  y  $M_2 = (3.4, 2.2)$ . Comenzando las iteraciones con la aproximación inicial

$$x^{(0)} = \begin{bmatrix} 3.4 \\ 2.2 \end{bmatrix}$$

Calculando las segundas aproximaciones de la raíz, efectuando los cálculos requeridos. Consideremos

$$f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{bmatrix}$$

tenemos

$$f(x^{(0)}) = \begin{bmatrix} 0.154 \\ -0.360 \end{bmatrix}$$

Formando ahora la matriz jacobiana

$$W(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{3M}{x_1} & -2x_2 \\ 4x_1 - x_2 - 5 & -x_1 \end{bmatrix}$$

donde  $M = 0.434$ , por consiguiente

$$W(x^{(0)}) = \begin{bmatrix} 1.383 & -4.4 \\ 6.4 & -3.4 \end{bmatrix}$$

y

$$\Delta = |W(x^{(0)})| = 23.457$$

De este modo, la matriz  $W(x^{(0)})$  es no singular. Formando la inversa, se tiene:

$$[W(x^{(0)})]^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} -3.4 & 4.4 \\ -6.4 & 1.4 \end{bmatrix}$$

Utilizando la expresión (1.36), obtenemos:

$$x^{(1)} = \begin{bmatrix} 3.489 \\ 2.263 \end{bmatrix}$$

Las aproximaciones subsiguientes se determinan en forma análoga. Los resultados de los cálculos se ilustran en la siguiente tabla:

$i$	$x_1$	$\epsilon_1 = \Delta x_1$	$x_2$	$\epsilon_2 = \Delta x_2$
0	3.4	0.0899	2.2	0.0633
1	3.4899	-0.0008	2.2633	-0.0012
2	3.4891	-0.0016	2.2621	-0.005
3	3.4875		2.2616	

Finalizando con la aproximación  $x^{(3)}$ , tenemos

$$x_1 = 3.4875, \quad x_2 = 2.2616$$

y

$$f(x^{(3)}) = \begin{bmatrix} 0.0002 \\ 0.000 \end{bmatrix}$$

### 1.2.3. Observaciones generales sobre la convergencia del proceso de Newton

En la sección anterior se presentó un aspecto formal del método de Newton. Las condiciones de convergencia de este método para un sistema han sido estudiadas por Willers, Stenin, Ostrowski, Kantorovich (Teorema 1) [24], entre otros. A continuación presentamos un caso especial del teorema de Kantorovich sobre la convergencia del proceso de Newton en espacios funcionales aplicado a sistemas finitos de ecuaciones no lineales; para una mayor sencillez utilizaremos valores aproximados. Al igual que L.V. Kantorovich, estableceremos la rapidez de convergencia del proceso de Newton, la unicidad de la raíz del sistema y la estabilidad del proceso con respecto a la elección de la aproximación inicial (Teorema 2 a 4). Como caso particular obtendremos el teorema de Ostrowski [27] sobre la convergencia del proceso de Newton para una ecuación con un segundo miembro complejo analítico.

En lo que sigue será conveniente considerar los conjuntos de funciones como *funciones vectoriales*. Con el objeto de simplificar la notación, generalizaremos el concepto de derivada a estos casos.

Sea  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  y

$$f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix}$$

donde  $f_i \in C^1$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ).

**Definición 1.2.1** La derivada  $f'(x)$  se entiende como la matriz jacobiana del conjunto de funciones  $f_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) con respecto a las variables  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , es decir,

$$f'(x) = \left[ \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right] \tag{1.38}$$

La función matricial

$$F(x) = \begin{bmatrix} f_{11}(x) & \dots & f_{1r}(x) \\ \vdots & \ddots & \dots \\ f_{n1}(x) & \dots & f_{nr}(x) \end{bmatrix}.$$

puede ser considerada como un conjunto de  $m$  funciones vectoriales

$$F_1(x) = \begin{bmatrix} f_{11}(x) \\ \vdots \\ f_{n1}(x) \end{bmatrix}, \dots, F_r(x) = \begin{bmatrix} f_{1r}(x) \\ \vdots \\ f_{nr}(x) \end{bmatrix}$$

Por consiguiente, es natural tomar la derivada  $F'(x)$  como significando el conjunto

$$F'(x) = [F'_1(x) \dots F'_r(x)]$$

donde

$$F'_k(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_{1k}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_{1k}}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_{nk}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_{nk}}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

son matrices jacobianas ( $k = 1, 2, \dots, r$ ).

**Definición 1.2.2** Si  $F(x) = [f_{ij}(x)]$  es una matriz funcional de dimensiones  $n \times r$  y  $f_{ij}(x) \in C^1$ , entonces

$$F'(x) = [F'_k(x)] \tag{1.39}$$

donde

$$F'_k(x) = \left[ \frac{\partial f_{ik}}{\partial x_j} \right] \quad (i, j = 1, 2, \dots, n; \quad k = 1, 2, \dots, r) \tag{1.40}$$

En particular, si la función vectorial  $f(x) = [f_i(x)]$  es tal que  $f_i(x) \in C^2$ , entonces

$$f''(x) = [W_1(x) \dots W_n(x)]$$

donde

$$W_k(x) = \left[ \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_k \partial x_j} \right] \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

En esta sección utilizaremos la  $m$ -norma (véase Apéndice A) para el cálculo de matrices; para mayor brevedad se omitirá el subíndice  $m$ :

$$\begin{aligned} \|f(x)\| &= \max_i |f_i(x)|, \\ \|f'(x)\| &= \max_i \sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j} \right|, \\ \|f''(x)\| &= \max_k \|W_k(x)\| = \max_k \left\{ \max_i \sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial^2 f_i(x)}{\partial x_k \partial x_j} \right| \right\} \end{aligned}$$

Análogamente

$$\begin{aligned} \|F(x)\| &= \max_i \sum_{j=1}^n |f_{ij}(x)|, \\ \|F'(x)\| &= \max_{i,j} \sum_{k=1}^n \left| \frac{\partial f_{ij}(x)}{\partial x_k} \right|. \end{aligned}$$

Primero, obtendremos varios estimados, semejantes al teorema de valor medio, para las  $m$ -normas de las diferencias de los valores de las funciones vectoriales, lo cual resulta útil en lo que sigue (cf. [1]).

---

<sup>4</sup>Como, evidentemente, para cualquier conjunto finito de números  $\{a_{ij}\}$  tenemos

$$\max_i (\max_j a_{ij}) = \max_{i,j} a_{ij}$$

**Lema 1.2.1** *Si*

$$F(x) = [f_{ij}(x)] \quad (n \times r)$$

donde  $f_{ij}(x)$  y sus derivadas parciales de primer orden, son continuas en un dominio convexo que contenga los puntos  $x$  y  $x + \Delta x$ , entonces

$$\|F(x + \Delta x) - F(x)\| \leq r \|\Delta x\| \cdot \|F'(x^*)\| \quad (1.41)$$

donde  $x^* = x + \theta \Delta x$ ,  $0 < \theta < 1$  y la matriz normada ha de ser considerada en el sentido de la  $m$ -norma.

**Demostración.** Utilizando la fórmula de Taylor, se tiene:

$$F(x + \Delta x) - F(x) = [f_{ij}(x + \Delta x) - f_{ij}(x)] = \left[ \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_{ij}(x_{ij}^*)}{\partial x_k} \Delta x_k \right]$$

donde  $x_{ij}^* = x + \theta_{ij} \Delta x$ ,  $0 < \theta_{ij} < 1$ ;  $i = 1, 2, \dots, n$ ;  $j = 1, 2, \dots, r$ . De donde fijando  $x$  y  $x + \Delta x$ , obtenemos

$$\begin{aligned} \|F(x + \Delta x) - F(x)\| &= \max_i \sum_{j=1}^r \left| \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_{ij}(x_{ij}^*)}{\partial x_k} \Delta x_k \right| \\ &\leq \max_i \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^n \left| \frac{\partial f_{ij}(x_{ij}^*)}{\partial x_k} \right| |\Delta x_k| \\ &\leq \max_k |\Delta x_k| \cdot \sum_{j=1}^r \max_{i,j} \sum_{k=1}^n \left| \frac{\partial f_{ij}(x_{ij}^*)}{\partial x_k} \right| \\ &= r \|\Delta x\| \max_{i,j} \sum_{k=1}^n \left| \frac{\partial f_{i,j}(x_{i,j}^*)}{\partial x_k} \right|. \end{aligned}$$

Como el número de pares  $(i, j)$  es finito, existe un par  $(p, q)$  de tal manera que:

$$\max_{i,j} \sum_{k=1}^n \left| \frac{\partial f_{ij}(x_{ij}^*)}{\partial x_k} \right| = \sum_{k=1}^n \left| \frac{\partial f_{pq}(x_{pq}^*)}{\partial x_k} \right| \leq \max_{i,j} \sum_{k=1}^n \left| \frac{\partial f_{ij}(x_{pq}^*)}{\partial x_k} \right| = \|F'(x^*)\|$$

donde  $x^* = x_{pq}^*$ .

De este modo

$$\|F(x + \Delta x) - F(x)\| \leq r \|\Delta x\| \|F'(x^*)\|$$

lo cual completa la demostración. □

**Corolario 1.2.1** *Si*

$$f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix}$$

entonces

$$\|f(x + \Delta x) - f(x)\| \leq \|\Delta x\| \cdot \|f'(x^*)\|$$

donde  $x^* = x + \theta \Delta x$  y  $0 < \theta < 1$ .

En este caso  $r = 1$ .

**Corolario 1.2.2** Para  $f(x) \in C^2$  tenemos

$$\|f'(x + \Delta x) - f'(x)\| \leq n\|\Delta x\| \cdot \|f''(x^*)\|$$

donde  $x^* = x + \theta\Delta x$  y  $0 < \theta < 1$ .

**Lema 1.2.2** Si

$$f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix} \in C^2$$

en un dominio convexo que contiene los puntos  $x$  y  $x + \Delta x$ , entonces

$$\|f(x + \Delta x) - f(x) - f'(x)\Delta x\| = \frac{1}{2}n\|\Delta x\|^2 \cdot \|f''(x^*)\| \quad (1.42)$$

donde  $x^* = x + \theta\Delta x$  y  $0 < \theta < 1$ .

**Demostración.** Utilizando la fórmula de Taylor de dos términos, obtenemos

$$\begin{aligned} \|f(x + \Delta x) - f(x) - f'(x)\Delta x\| &= \|[f_i(x + \Delta x) - f_i(x) - df_i(x_i)]\| \\ &= \frac{1}{2} \left\| \left[ \sum_{j,k} \frac{\partial^2 f_i(x_i^*)}{\partial x_j \partial x_k} \Delta x_j \Delta x_k \right] \right\| \\ &\leq \frac{1}{2} \left\| \left[ \sum_j |\Delta x_j| \sum_k \left| \frac{\partial^2 f_i(x_i^*)}{\partial x_j \partial x_k} \right| |\Delta x_k| \right] \right\| \\ &\leq \frac{1}{2} \max_j |\Delta x_j| \cdot \max_k |\Delta x_k| \cdot \left\| \left[ \sum_j \sum_k \left| \frac{\partial^2 f_i(x_i^*)}{\partial x_j \partial x_k} \right| \right] \right\| \\ &= \frac{1}{2} \|\Delta x\|^2 \left\| \left[ \sum_j \sum_k \left| \frac{\partial^2 f_i(x_i^*)}{\partial x_j \partial x_k} \right| \right] \right\|. \end{aligned} \quad (1.43)$$

donde  $x_i^* = x + \theta_i\Delta x$ ,  $0 < \theta_i < 1$ .

Como

$$\begin{aligned} \sum_k \left| \frac{\partial^2 f_i(x_i^*)}{\partial x_j \partial x_k} \right| &\leq \max_{i,j} \sum_k \left| \frac{\partial^2 f_i(x_i^*)}{\partial x_j \partial x_k} \right| \\ &= \sum_k \left| \frac{\partial^2 f_p(x_p^*)}{\partial x_j \partial x_k} \right| \leq \max_{i,j} \sum_k \left| \frac{\partial^2 f_i(x_p^*)}{\partial x_j \partial x_k} \right| = \|f''(x_p^*)\|. \end{aligned}$$

entonces de la desigualdad (1.43) tenemos (tomando en consideración el significado de la norma)

$$\begin{aligned} \|f(x + \Delta x) - f(x) - f'(x)\Delta x\| &\leq \frac{1}{2} \|\Delta x\|^2 \|f''(x^*)\| \\ &= \frac{n}{2} \|\Delta x\|^2 \|f''(x^*)\| \end{aligned}$$

donde  $x^* = x_p^* = x + \theta\Delta x$ ,  $0 < \theta < 1$ . □

1.2.4. Existencia de las raíces de un sistema y convergencia del proceso de Newton

**Teorema 1.2.1** *Dado un sistema no lineal de ecuaciones algebraicas con coeficientes reales:*

$$f(x) = 0 \tag{1.44}$$

donde la función vector

$$f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix}$$

está definida y es continua, juntamente con sus derivadas parciales de primer y segundo orden, en un dominio  $\omega$ , es decir,  $f(x) \in C^2(\omega)$ . Supongamos que  $x^{(0)}$  es un punto que pertenece a  $\omega$  con su  $\mathcal{H}$ -vecindad cerrada:

$$\overline{U}_{\mathcal{H}}(x^{(0)}) = \{\|x - x^{(0)}\| \leq \mathcal{H}\} \subset \omega$$

donde la norma ha de entenderse como  $m$ -norma (véase Preámbulo A), y son válidas las condiciones siguientes:

1. La matriz jacobiana  $W(x) = \left[ \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right]$  tiene inversa  $\Gamma_0 = [W(x^{(0)})]^{-1}$  para  $x = x^{(0)}$ , donde

$$\|\Gamma_0\| \leq A_0$$

2.  $\|\Gamma_0 f(x^{(0)})\| \leq B_0 \leq \frac{\mathcal{H}}{2}$ ,

3.  $\sum_{k=1}^n \left| \frac{\partial^2 f_i(x)}{\partial x_j \partial x_k} \right| \leq C$ , donde  $i, j = 1, 2, \dots, n$  y  $x \in U(x^{(0)})$ ,

4. Las constantes  $A_0, B_0$  y  $C$  satisfacen la desigualdad

$$\mu_0 = 2nA_0B_0C \leq 1 \tag{1.45}$$

Bajo estas condiciones, el proceso de Newton, dado por:

$$x^{(p+1)} = x^{(p)} - [W(x^{(p)})]^{-1} f(x^{(p)}) \quad (p = 0, 1, \dots) \tag{1.46}$$

Converge para la aproximación inicial  $x^{(0)}$  y el vector límite,  $\bar{x} = \lim_{p \rightarrow \infty} x^{(p)}$ , es una solución del sistema (1.44) de modo que

$$\|\bar{x} - x^{(0)}\| \leq 2B_0 \leq \mathcal{H}$$

**Demostración.** Introduzcamos las notaciones

$$h_p = \|x^{(p+1)} - x^{(p)}\| = \max_k |x_k^{(p+1)} - x_k^{(p)}|,$$

$$\Gamma_p = [W(x^{(p)})]^{-1} \quad (p = 0, 1, \dots)$$

De la fórmula (1.46) tenemos

$$h_p = \|\Gamma_p f(x^{(p)})\|$$

Iniciando desde la condición 1 hasta 4, obtendremos estimaciones para las cantidades  $\Gamma_p$  y  $\Gamma_p f(x^{(p)})$ .

Consideremos en primer lugar, el caso  $p = 1$ . Haciendo uso de la condición 2, tenemos

$$h_0 = \|x^{(1)} - x^{(0)}\| = \| [W(x^{(0)})]^{-1} f(x^{(0)}) \| \leq B_0 \leq \frac{\mathcal{H}}{2}$$

y por tanto

$$h_0 \leq B_0$$

y

$$\bar{U}_{\frac{\mathcal{H}}{2}}(x^{(1)}) \subset \bar{U}_{\mathcal{H}}(x^{(0)})$$

Para estimar  $\Gamma_1 = [W(x^{(1)})]^{-1}$ , haremos uso de la igualdad  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ , y representemos esta cantidad de la forma

$$\Gamma_1 = [W(x^{(0)}) \cdot \Gamma_0 W(x^{(1)})]^{-1} = [\Gamma_0 W(x^{(1)})]^{-1} \cdot \Gamma_0 \tag{1.47}$$

Teniendo en cuenta la Condición 1 del teorema, se obtiene:

$$\begin{aligned} \|E - \Gamma_0 W(x^{(1)})\| &= \|\Gamma_0 [W(x^{(0)}) - W(x^{(1)})]\| \\ &\leq \|\Gamma_0\| \|W(x^{(0)}) - W(x^{(1)})\| \leq A_0 \|W(x^{(1)}) - W(x^{(0)})\| \end{aligned}$$

empleando la condición 3 se deduce

$$\|f''(x)\| = \max_{i,j} \sum_{k=1}^n \left| \frac{\partial^2 f_i(x)}{\partial x_j \partial x_k} \right| \leq C$$

en virtud del corolario 1.2.2 tenemos:

$$\|W(x^{(1)}) - W(x^{(0)})\| = \|f'(x^{(1)}) - f'(x^{(0)})\| \leq n \|x^{(1)} - x^{(0)}\| C \leq n B_0 C$$

y por lo tanto

$$\|E - \Gamma_0 W(x^{(1)})\| \leq n A_0 B_0 C = \frac{\mu_0}{2} \leq \frac{1}{2}$$

Teniendo en consideración el siguiente enunciado:

**Observación 1.2.1** Si  $\|X\| < 1$ , existe una matriz inversa

$$(E - X)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} X^k$$

Lo que es más, si  $\|E\| = 1$ , entonces

$$\|(E - X)^{-1}\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|X\|^k = \frac{1}{1 - \|X\|}$$

se concluye, a partir de esta observación que existe una matriz inversa

$$[\Gamma_0 W(x^{(1)})]^{-1} = \{E - (E - \Gamma_0 W(x^{(1)}))\}^{-1}$$

Y como  $\|E\| = \|E\|_m = 1$ , se deduce que

$$\|[\Gamma_0 W(x^{(1)})]^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \frac{\mu_0}{2}} \leq 2 \quad (1.48)$$

Obteniendo ahora de la fórmula (1.47) que:

$$\|\Gamma_1\| \leq \|[\Gamma_0 W(x^{(1)})]^{-1}\| \|\Gamma_0\| \leq 2A_0 = A_1 \quad (1.49)$$

De la expresión (1.46) implica

$$f(x^{(0)} + f')(x^{(0)})(x^{(1)} - x^{(0)}) = 0$$

de donde, en base al Lema 1.2.2, tenemos

$$\begin{aligned} \|f(x^{(1)})\| &= \|f(x^{(1)}) - f(x^{(0)}) - f'(x^{(0)})(x^{(1)} - x^{(0)})\| \\ &\leq \frac{1}{2}n\|x^{(1)} - x^{(0)}\|^2 \|f''(x^*)\| \leq \frac{1}{2}nB_0^2C \end{aligned}$$

donde

$$x^* = x^{(0)} + \theta(x^{(1)} - x^{(0)}) \quad 0 < \theta < 1.$$

Por consiguiente, teniendo en cuenta la desigualdad (1.49), obtenemos

$$\begin{aligned} \|\Gamma_1 f(x^{(1)})\| &\leq \|\Gamma_1\| \|f(x^{(1)})\| \\ &\leq 2A_0 \cdot \frac{1}{2}nB_0^2C = nA_0B_0^2C = \frac{1}{2}\mu_0B_0 = B_1 \end{aligned} \quad (1.50)$$

De este modo, tenemos para el punto  $x^{(1)}$ .

$$\overline{U}_{\frac{\mathcal{H}}{2}}(x^{(1)}) \subset \overline{U}_{\mathcal{H}}(x^{(0)}) \subset \omega$$

y, además,

$$\|\Gamma_1\| \leq A_1, \quad h_1 = \|\Gamma_1 f(x^{(1)})\| \leq B_1$$

donde

$$\begin{aligned} A_1 &= 2A_0 \\ B_1 &= \frac{1}{2}\mu_0B_0 \leq \frac{\mathcal{H}}{4} \end{aligned}$$

por consiguiente obtenemos

$$\mu_1 = 2nA_1B_1C = 2n \cdot 2A_0 \cdot \frac{1}{2}\mu_0B_0C = \mu_0 \cdot 2nA_0B_0C = \mu_0^2 \leq 1 \quad (1.51)$$

De este modo estamos nuevamente en las condiciones del teorema con la única diferencia de que en lugar de la vecindad  $\overline{U}(x^{(0)})$  tenemos la  $\overline{U}_{\frac{\mathcal{H}}{2}}(x^{(1)})$  incluida en la primera.

Repitiendo argumentos similares, estableceremos que las aproximaciones sucesivas  $x^{(p)}$  ( $p = 1, 2, \dots$ ) son significativas y tales que

$$\overline{U}_{\mathcal{H}}(x^{(0)}) \supset \overline{U}_{\frac{\mathcal{H}}{2}}(x^{(1)}) \supset \dots \supset \overline{U}_{\frac{\mathcal{H}}{2^p}}(x^{(p)}) \dots$$

También

$$\begin{aligned} \|\Gamma_p\| &= \| [W(x^{(p)})]^{-1} \| \leq A_p \\ \|\Gamma_p f(x^{(p)})\| &= \|x^{(p+1)} - x^{(p)}\| \leq B_p \end{aligned}$$

donde las constantes  $A_p$  y  $B_p$  están relacionadas por las siguientes secuencias:

$$\begin{cases} A_p = 2A_{p-1}, \\ B_p = \frac{1}{2}\mu_{p-1}B_{p-1}. \end{cases} \quad (1.52)$$

y

$$\mu_p = 2nA_pB_pC \quad (p = 1, 2, \dots) \quad (1.53)$$

Demostremos por el criterio de Cauchy es válido para la secuencia de aproximaciones  $x^{(p)}$  ( $p = 1, 2, \dots$ ). En efecto, para  $q > 0$  tenemos

$$x^{(p+q)} \in \overline{U}_{\frac{\mathcal{H}}{2^p}}(x^{(p)})$$

y por tanto

$$\|x^{(p+q)} - x^{(p)}\| \leq \frac{\mathcal{H}}{2^p} < \epsilon$$

si  $p > N$  y  $q > 0$ , lo que es equivalente al criterio de Cauchy. De aquí se deduce que el límite

$$\lim_{p \rightarrow \infty} x^{(p)} = \bar{x} \in \overline{U}_{\mathcal{H}}(x^{(0)})$$

existe.

Asegurémonos de que  $\bar{x}$  es una solución del sistema (1.44). De la relación (1.46) tenemos

$$f(x^{(p)}) + W(x^{(p)})(x^{(p+1)} - x^{(p)}) = 0$$

Pasando al límite en esta ecuación para  $p \rightarrow \infty$  y teniendo en cuenta que, en el proceso

$$x^{(p+1)} - x^{(p)} \rightarrow 0$$

y también que  $W(x^{(p)})$  es continua y acotada en  $\overline{U}_{\mathcal{H}}(x^{(0)})$ , tenemos

$$\lim_{p \rightarrow \infty} f(x^{(p)}) = 0$$

De donde, en virtud de la función de continuidad  $f(x)$ , obtenemos

$$f\left(\lim_{p \rightarrow \infty} x^{(p)}\right) = f(\bar{x}) = 0$$

Es decir,  $\bar{x}$  es una solución del sistema (1.44). Además,

$$\begin{aligned} \|\bar{x} - x^{(0)}\| &= \left\| \sum_{p=0}^{\infty} [x^{(p+1)} - x^{(p)}] \right\| \\ &\leq \sum_{p=0}^{\infty} \|x^{(p+1)} - x^{(p)}\| \leq \sum_{p=0}^{\infty} B_p \leq B_0 + \frac{B_0}{2} + \dots = 2B_0 \leq \mathcal{H} \end{aligned}$$

Queda terminada la demostración del teorema. □

**Observación 1.2.2** Si  $f(x) \in C^2(\omega)$  y el sistema (1.44) tiene, en el dominio  $\omega$ , una solución simple  $\bar{x}$ , es decir, tal que

$$f(\bar{x}) = 0, \quad f'(\bar{x}) = W(\bar{x}) \neq 0$$

entonces las condiciones del Teorema 1.2.1 son válidas para cualquier punto  $x^{(0)}$  suficientemente próximo a  $\bar{x}$ .

Para verificar las condición 2 resulta útil observar que  $B_0$  presenta un estimado de la divergencia entre la inicial y la primera aproximación del proceso de Newton:

$$\|\Gamma_0 f(x^{(0)})\| = \|(x^{(1)}) - (x^{(0)})\| \leq B_0$$

y por tanto esta desigualdad puede verificarse fácilmente tan pronto se halle la aproximación  $x^{(1)}$ .

**Observación 1.2.3** Se obtiene una situación análoga para el teorema de convergencia si utilizamos la norma  $\|A\|_l$  o  $\|A\|_k$  en lugar de la norma  $\|A\|_m$ .

### 1.2.5. Rapidez de convergencia del proceso de Newton

**Teorema 1.2.2** Si se cumplen las condiciones desde 1 hasta 4 del Teorema 1.2.1 se cumple también la siguiente desigualdad para las aproximaciones sucesivas  $x^{(p)}$  ( $p = 1, 2, \dots$ ):

$$\|\bar{x} - x^{(p)}\| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{p-1} \mu_0^{2^{p-1}} B_0$$

donde  $\bar{x}$  es una solución del sistema y  $\mu_0$  se determina por la igualdad (1.45) de la sección precedente.

**Demostración.** Utilizando las relaciones (1.52) y (1.53) de la Sección anterior, tenemos

$$\begin{aligned} \mu_p &= 2nA_p B_p C = 2n \cdot 2A_{p-1} \cdot \frac{1}{2} \mu_{p-1} B_{p-1} \cdot C \\ &= \mu_{p-1} \cdot 2nA_{p-1} B_{p-1} C = \mu_{p-1}^2 \end{aligned}$$

De aquí obtenemos

$$\begin{cases} \mu_1 = \mu_0^2, \\ \mu_2 = \mu_1^2 = \mu_0^4, \\ \vdots \\ \mu_p = \mu_0^{2^p} \end{cases} \quad (1.54)$$

Además,

$$B_p = \frac{1}{2}\mu_{p-1}B_{p-1} = \frac{1}{2}\mu_0^{2^p-1}B_{p-1}$$

y por tanto

$$\begin{aligned} B_p &= \frac{1}{2}\mu_0^{2^p-1} \cdot \frac{1}{2}\mu_0^{2^p-2} \cdots \frac{1}{2}\mu_0^{2^0} B_0 \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^p \cdot \mu_0^{2^p-1+2^p-2+\cdots+1} B_0 = \left(\frac{1}{2}\right)^p \mu_0^{2^p-1} B_0 \end{aligned} \quad (1.55)$$

Como

$$\|x^{(p+1)} - x^{(p)}\| \leq B_0$$

Tenemos, para  $q > 1$ ,

$$\begin{aligned} \|x^{(p+q)} - x^{(p)}\| &\leq \|x^{(p+1)} - x^{(p)}\| + \|x^{(p+2)} - x^{(p+1)}\| + \cdots + \|x^{(p+q)} - x^{(p+q-1)}\| \\ &\leq B_p + B_{p+1} + \cdots + B_{p+q-1} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^p \mu_0^{2^p-1} B_0 + \left(\frac{1}{2}\right)^{p+1} \mu_0^{2^{p+1}-1} B_0 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{p+q-1} \mu_0^{2^{p+q-1}-1} B_0 \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^p \mu_0^{2^p-1} B_0 \left[ 1 + \frac{1}{2} \cdot \mu_0^{2^p} + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{q-1} \mu_0^{2^p(2^{q-1}-1)} \right] \end{aligned}$$

De donde, teniendo en cuenta que  $\mu_0 \leq 1$ , obtenemos

$$\begin{aligned} \|x^{(p+q)} - x^{(p)}\| &\leq \left(\frac{1}{2}\right)^p \mu_0^{2^p-1} B_0 \left[ 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{q-1} \right] \\ &\leq \left(\frac{1}{2}\right)^{p-1} \mu_0^{2^p-1} B_0 \end{aligned}$$

Pasando al límite para  $q \rightarrow \infty$ , tenemos finalmente

$$\|\bar{x} - x^{(p)}\| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{p-1} \mu_0^{2^p-1} B_0 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^p \mu_0^{2^p-1} \mathcal{H}$$

donde

$$\mu_0 = 2nA_0B_0C \leq 1$$

Por tanto, para  $\mu_0 < 1$  la convergencia del proceso de Newton es super rápida. Para  $p = 0$  tenemos

$$\|\bar{x} - x^{(0)}\| \leq 2B_0 \leq \mathcal{H}$$

□

### 1.2.6. Unicidad de solución

**Teorema 1.2.3** *Dadas las condiciones 1 hasta 4 del Teorema 1.2.1, en el dominio*

$$\|x - x^{(0)}\| \leq 2B_0 \quad (1.56)$$

*hay una única solución del sistema (1.44) (Sec. 1.2.4).*

**Demostración.** Supongamos que además de la solución  $\bar{x}$  del sistema (1.44) de la Sec. 1.2.4, cuya solución está definida por el proceso de Newton, existe otra solución  $\tilde{x}$  del sistema tal que

$$\|\tilde{x} - x^{(0)}\| \leq 2B_0 \quad (1.57)$$

Las aproximaciones sucesivas  $x^{(p)}$  ( $p = 1, 2, \dots$ ) del proceso de Newton pertenecen a la vecindad de (1.44) y satisfacen la condición

$$f(x^{(p)}) + W_p(x^{(p+1)} - x^{(p)}) = 0$$

donde

$$W_p = W(x^{(p)})$$

De aquí, teniendo en consideración que

$$f(\tilde{x}) = 0$$

tenemos

$$W_p(x^{(p+1)} - \tilde{x}) = f(\tilde{x}) - f(x^{(p)}) - W_p(\tilde{x} - x^{(p)})$$

y, en consecuencia

$$x^{(p+1)} - \tilde{x} = \Gamma_p[f(\tilde{x}) - f(x^{(p)}) - W_p(\tilde{x} - x^{(p)})]$$

donde

$$\Gamma_p = W_p^{-1}$$

Estimando por la norma, tenemos

$$\|\tilde{x} - x^{(p+1)}\| \leq \|\Gamma_p\| \|f(\tilde{x}) - f(x^{(p)}) - W_p(\tilde{x} - x^{(p)})\|$$

Según la notación de la Sec. 1.2.4. (véase Teorema 1.2.1),

$$\|\Gamma_p\| \leq A_p$$

Aplicando el Lemma 1.2.2 de la Sec. 1.2.3, tenemos la desigualdad

$$\|f(\tilde{x}) - f(x^{(p)}) - W_p(\tilde{x} - x^{(p)})\| \leq \frac{1}{2}nC\|\tilde{x} - x^{(p)}\|^2$$

donde la constante  $C$  queda definida de la condición 3 del Teorema 1.2.1. Por esta razón

$$\|\tilde{x} - x^{(p+1)}\| \leq \frac{1}{2}nA_pC\|\tilde{x} - x^{(p)}\|^2 \quad p = 1, 2, \dots \quad (1.58)$$

Considerando  $p = 0$  en la desigualdad (1.58) y utilizando la desigualdad (1.57), obtenemos

$$\|\tilde{x} - x^{(1)}\| \leq \frac{1}{2}nA_0C\|\tilde{x} - x^{(0)}\| \leq 2nA_0B_0^2C$$

o, introduciendo los números definidos por las relaciones

$$\begin{cases} \mu_p = 2nA_p B_p C \\ B_{p+1} = \frac{1}{2}\mu_p B_p \end{cases} \quad (p = 0, 1, \dots) \quad (1.59)$$

determinamos que

$$\|\tilde{x} - x^{(1)}\| \leq \mu_0 B_0 = 2B_1 \quad (1.60)$$

Análogamente, para  $p = 1$  obtenemos de las fórmulas (1.58), (1.59) y (1.60) que:

$$\|\tilde{x} - x^{(2)}\| \leq \frac{1}{2}nA_1 C \|\tilde{x} - x^{(1)}\|^2 \leq 2nA_1 B_1^2 C = \mu_1 B_1 = 2B_2$$

Generalmente

$$\|\tilde{x} - x^{(p)}\| \leq 2B_p \quad (p = 0, 1, \dots) \quad (1.61)$$

En función de la fórmula (1.55) de la Sec. 1.2.5 la cantidad  $B_p \rightarrow 0$  cuando  $p \rightarrow \infty$ , entonces pasando a límites en la desigualdad (1.61) tenemos

$$\tilde{x} = \lim_{p \rightarrow \infty} x^{(p)} = \bar{x}$$

Por tanto, la solución del sistema (1.44) en el dominio  $\|x - x^{(0)}\| \leq 2B_0$  es única.  $\square$

**Observación 1.2.4** Si el dominio  $\bar{U}_{\mathcal{H}}(x^{(0)})$  es tal que:

$$\frac{2}{\mu_0} B_0 \leq \mathcal{H}$$

entonces en el dominio ampliado (1.56)

$$\|x - x^{(0)}\| \leq \frac{2}{\mu_0} B_0 \quad (1.62)$$

no hay soluciones del sistema (1.44) distintas a  $\bar{x}$ .

En efecto, suponiendo que en el dominio (1.62) exista una solución  $\tilde{x}$  del sistema (1.44) (Sec. 1.2.4) y repitiendo el razonamiento del teorema, obtendremos una desigualdad de la forma (1.58):

$$\|\tilde{x} - x^{(p+1)}\| \leq \frac{1}{2}nA_p C \|\tilde{x} - x^{(p)}\|^2$$

donde  $x^{(p)}$  ( $p = 0, 1, \dots$ ) son aproximaciones sucesivas del proceso de Newton con aproximación inicial  $x^{(0)}$ . De aquí, como

$$\|\tilde{x} - x^{(0)}\| \leq \frac{2}{\mu_0} B_0,$$

y utilizando los números  $\mu_{p+1} = \mu_p^2$  obtenemos sucesivamente

$$\begin{aligned} \|\tilde{x} - x^{(1)}\| &\leq \frac{1}{2}nA_0 C \frac{4}{\mu_0^2} B_0^2 \\ &= 2nA_0 B_0 C \cdot \frac{1}{\mu_0^2} B_0 = \frac{1}{\mu_0} B_0 = \frac{2}{\mu_0^2} B_1 = \frac{2}{\mu_1} B_1, \\ \|\tilde{x} - x^{(2)}\| &\leq \frac{1}{2}nA_1 C \frac{4}{\mu_1^2} B_1^2 = 2nA_1 B_1 C \cdot \frac{1}{2}\mu_1 B_1 \cdot \frac{2}{\mu_1^3} \\ &= \mu_1 B_2 \frac{2}{\mu_1^3} = \frac{2}{\mu_1^2} B_2 = \frac{2}{\mu_2} B_2 \end{aligned}$$

y así sucesivamente.

Generalmente

$$\|\tilde{x} - x^{(p)}\| \leq \frac{2}{\mu_p} B_p \quad (p = 0, 1, \dots)$$

Como

$$B_p = \frac{1}{2} \mu_{p-1} B_{p-1}$$

y

$$\mu_p = \mu_{p-1}^2$$

entonces

$$\frac{B_p}{\mu_p} = \frac{1}{2} \cdot \frac{B_{p-1}}{\mu_{p-1}} = \left(\frac{1}{2}\right)^p \cdot \frac{B_0}{\mu_0} \quad (1.63)$$

La última relación puede obtenerse también directamente de las fórmulas (1.54) y (1.55) de la Sec. 1.2.5.

De este modo

$$\|\tilde{x} - x^{(p)}\| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{p-1} \frac{B_0}{\mu_0} \quad (p = 0, 1, \dots)$$

En consecuencia

$$\tilde{x} = \lim_{p \rightarrow \infty} x^{(p)} = \bar{x}$$

lo cual es lo que se quería demostrar.

### 1.2.7. Estabilidad de convergencia del problema de Newton bajo variaciones de la aproximación inicial

**Teorema 1.2.4** Si se cumplen las condiciones 1 hasta 4 del Teorema 1.2.1 (Sec. 1.2.4) y

$$\frac{2}{\mu_0} B_0 \leq \mathcal{H}$$

donde  $\mu_0 = 2nA_0B_0C < 1$ , entonces del proceso de Newton converge hacia una solución única  $\bar{x}$  del sistema (1.44) de la Sec. 1.2.4 en el dominio principal  $\|x - x^{(0)}\| \leq 2B_0$  para cualquier valor de la aproximación inicial  $x^{(0)}$  en el dominio

$$\|x'^{(0)} - x^{(0)}\| \leq \frac{1 - \mu_0}{2\mu_0} B_0 \quad (1.64)$$

**Demostración.** Por analogía con las notaciones introducidas más arriba

$$W_0 = W(x^{(0)}) \quad \text{y} \quad \Gamma_0 = W_0^{-1}$$

introducimos las notaciones:

$$W'_0 = W(x'^{(0)}) \quad \text{y} \quad \Gamma'_0 = (W'_0)^{-1}$$

Demostraremos que en el punto  $x'^{(0)}$  se cumplirán condiciones análogas a las condiciones 1 a 4 del Teorema 1.2.1.

Utilizando la notación y el sistema de prueba del Teorema 1.2.1, tenemos

$$\begin{aligned}\|E - \Gamma_0 W'_0\| &= \|\Gamma_0(W_0 - W'_0)\| \\ &\leq \|\Gamma_0\| \|W_0 - W'_0\| \leq A_0 n C \|x^{(0)} - x^{(0)}\|\end{aligned}$$

de donde, teniendo en cuenta la desigualdad (3.2), obtenemos

$$\|E - \Gamma_0 W'_0\| \leq A_0 n C \frac{1 - \mu_0}{2\mu_0} B_0 = \frac{1 - \mu_0}{4} \leq \frac{1}{4}$$

En consecuencia

$$\begin{aligned}\|(\Gamma_0 W'_0)^{-1}\| &= \|[E - (E - \Gamma_0 W'_0)]^{-1}\| \\ &\leq \frac{1}{1 - \|E - \Gamma_0 W'_0\|} \leq \frac{1}{1 - \frac{1 - \mu_0}{4}} = \frac{4}{3 + \mu_0}\end{aligned}\tag{1.65}$$

Y por tanto existe

$$\Gamma'_0 = (\Gamma_0 W'_0)^{-1} \Gamma_0$$

y

$$\|\Gamma'_0\| \leq \|(\Gamma_0 W'_0)^{-1}\| \|\Gamma_0\| \leq \frac{4A_0}{3 + \mu_0} = A'\tag{1.66}$$

Deducimos entonces

$$\begin{aligned}\|\Gamma_0 f(x^{(0)})\| &\leq \|\Gamma_0\| \|f(x^{(0)}) - f(x^{(0)}) - W_0(x^{(0)} - x^{(0)})\| \\ &\quad + \|\Gamma_0 f(x^{(0)})\| + \|x^{(0)} - x^{(0)}\| \\ &\leq \frac{1}{2} A_0 n C \|x^{(0)} - x^{(0)}\|^2 + B_0 + \|x^{(0)} - x^{(0)}\| \\ &\leq \frac{1}{4} \mu_0 B_0 \frac{1 - 2\mu_0 + \mu_0^2}{4\mu_0^2} + B_0 + \frac{1 - \mu_0}{2\mu_0} B_0 \\ &= \frac{1 - 2\mu_0 + \mu_0^2 + 16\mu_0 + 8 - 8\mu_0}{16\mu_0^0} B_0 = \frac{(3 + \mu_0)^2}{16\mu_0} B_0\end{aligned}$$

De aquí, utilizando la desigualdad (1.65), tenemos

$$\begin{aligned}\|\Gamma'_0 f(x^{(0)})\| &\leq \|(\Gamma_0 W'_0)^{-1} \cdot \Gamma_0 f(x^{(0)})\| \\ &\leq \|(\Gamma_0 W'_0)^{-1}\| \cdot \|\Gamma_0 f(x^{(0)})\| \\ &\leq \frac{4}{3 + \mu_0} \cdot \frac{(3 + \mu_0)^2}{16\mu_0} B_0 = \frac{3 + \mu_0}{4\mu_0} B_0 = B'\end{aligned}\tag{1.67}$$

Considerando las desigualdades (1.66) y (1.67) tenemos

$$\mu' = 2nA'B'C = 2n \frac{4A_0}{3 + \mu_0} \cdot \frac{3 + \mu_0}{4\mu_0} B_0 C = 2nA_0 B_0 C \frac{1}{\mu_0} = 1$$

Además,

$$2B' + \|x^{(0)} - x^{(0)}\| \leq \frac{3 + \mu_0}{2\mu_0} B_0 + \frac{1 - \mu_0}{2\mu_0} B_0 = \frac{2B_0}{\mu_0} \leq \mathcal{H}$$

y en consecuencia tanto más

$$2B' \leq \frac{2B_0}{\mu_0} \leq \mathcal{H}$$

Por tanto, las condiciones del Teorema 1.2.1 se cumplen perfectamente para el punto  $x'^{(0)}$ , y

$$\overline{U}_{2B'}(x'^{(0)}) \subset \overline{U}_{\frac{2B_0}{\mu_0}}(x^{(0)}) \subset \overline{U}_{\mathcal{H}}(x^{(0)}) \quad (1.68)$$

Por esta razón, el proceso de Newton

$$x'^{(p+1)} = x'^{(p)} - \Gamma'_p f(x'^{(p)})$$

donde

$$\Gamma'_p = [W(x'^{(p)})]^{-1} \quad (p = 1, 2, \dots)$$

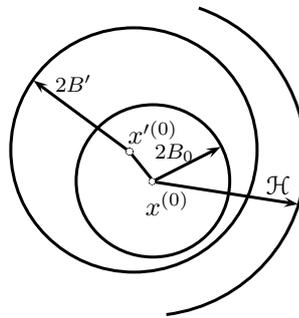


Figura 1.10: Ilustración de las condiciones iniciales  $x^{(0)}$ ,  $x'^{(0)}$  en la  $\mathcal{H}$ -vecindad.

converge hacia una cierta solución  $\bar{x}'$  del sistema (1.44), Sec. 1.2.4, dentro del dominio  $\overline{U}_{2B'}(x'^{(0)})$ . Sobre la base de la fórmula (1.68)

$$x'^{*} \in \overline{U}_{\frac{2B_0}{\mu_0}}(x^{(0)})$$

Sin embargo, en virtud de la observación correspondiente al Teorema 1.2.3 de la sección anterior existe una **única solución**  $x^*$  del sistema básico (1.44) en el dominio  $\overline{U}_{\frac{2B_0}{\mu_0}}(x^{(0)})$ , y por tanto

$$\bar{x}' = \bar{x}$$

y

$$\bar{x} = \lim_{p \rightarrow \infty} x'^{(p)}$$

lo cual completa la demostración. □

**Observación 1.2.5** Si  $2B_0 < \mathcal{H}$  y  $\mu_0 < 1$ , entonces para la aproximación inicial  $x^{(0)}$  existe siempre una vecindad, cualquier punto de la cual puede ser tomado como una aproximación inicial de un proceso de Newton convergente hacia la solución deseada  $\bar{x}$ .

En efecto, supongamos

$$2B_0 < 2qB_0 = \mathcal{H}$$

donde  $q > 1$ . Estableciendo

$$\mu_0^* = \max\left(\mu_0, \frac{1}{q}\right)$$

Encontraremos por los Teoremas 1.2.1 y 1.2.4 el proceso de Newton apropiado, para cualquier aproximación inicial  $x^{(0)}$  que satisfaga la condición

$$\|x^{(0)} - x^{(0)}\| \leq \frac{1 - \mu_0^*}{2\mu_0} B_0$$

convergerá hacia la solución  $\bar{x}$  del sistema (1.44).

### 1.2.8. Método de Newton modificado

Un inconveniente esencial al formar el proceso de Newton

$$x^{(p+1)} = x^{(p)} - [W(x^{(p)})]^{-1} f(x^{(p)}) \quad (p = 0, 1, \dots) \quad (1.69)$$

es la necesidad de calcular la matriz inversa  $[W(x^{(p)})]^{-1}$  en cada paso. Si la matriz  $W^{-1}(x)$  es continua en la proximidad de la solución deseada  $\bar{x}$  y la aproximación inicial  $x^{(0)}$  está suficientemente próxima a  $\bar{x}$ , entonces podemos escribir de forma aproximada

$$[W(x^{(p)})]^{-1} \approx [W(x^{(0)})]^{-1}.$$

Llegamos de este modo al proceso de *Newton modificado*:

$$\xi^{(p+1)} = \xi^{(p)} - [W(x^{(0)})]^{-1} f(\xi^{(p)}) \quad (p = 0, 1, 2, \dots) \quad (1.70)$$

donde  $\xi^{(0)} = x^{(0)}$ . Obsérvese que las primeras aproximaciones  $x^{(1)}$  y  $\xi^{(1)}$  coinciden para los procesos (1.69) y (1.70):

$$x^{(1)} = \xi^{(1)}$$

La convergencia del proceso de Newton modificado (1.70) ha sido estudiada por L. V. Kantorovich [24].

**Teorema 1.2.5** Si se cumplen las condiciones (1) a (4) del Teorema 1.2.1 (Sec. 1.2.4) y

$$\mu_0 = 2nA_0B_0C < 1$$

el proceso de Newton modificado (1.70) definido por la aproximación inicial  $\xi^{(0)} = x^{(0)}$  converge hacia la solución  $\bar{x}$  del sistema

$$f(x) = 0$$

y

$$\|\bar{x} - \xi^{(p)}\| \leq \mu_0^p \|\bar{x} - x^{(0)}\| \leq 2B_0\mu_0^p \quad (p = 0, 1, \dots) \quad (1.71)$$

donde  $m$  es la  $m$ -norma.

**Demostración.** Considérese la función vectorial

$$F(x) = x - \Gamma_0 f(x) = [F_i(x)]$$

donde  $\Gamma_0 = [W(x^{(0)})]^{-1}$ .

Evidentemente

$$F(\xi^{(p)}) = \xi^{(p)} - \Gamma_0 f(\xi^{(p)}) = \xi^{(p+1)} \quad (p = 0, 1, \dots) \quad (1.72)$$

Además

$$F'(x) = E - \Gamma_0 f'(x) \quad (1.73)$$

de donde, en particular,

$$F'(x^{(0)}) = E - \Gamma_0 f'(x^{(0)}) = E - E = 0 \quad (1.74)$$

Demostraremos por inducción que todas las aproximaciones  $\xi^{(p)}$  ( $p = 0, 1, 2, \dots$ ) pertenecen en la  $2B_0$ -vecindad del punto  $x^{(0)}$ , es decir

$$\|\xi^{(p)} - x^{(0)}\| < 2B_0 \quad (1.75)$$

En efecto, para  $p = 1$ , (1.75) es obvio ya que por la condición 2 del teorema, tenemos

$$\|\xi^{(1)} - x^{(0)}\| = \|x^{(1)} - x^{(0)}\| \leq B_0$$

Supongamos ahora que para cierto  $p$  es válida la desigualdad (1.75). En tal caso, utilizando el Lema 1.2.2 (Sec. 1.2.3), tenemos

$$\begin{aligned} \|\xi^{(p+1)} - x^{(0)}\| &= \|F(\xi^{(p)}) - x^{(0)}\| = \|\xi^{(p)} - \Gamma_0 f(\xi^{(p)}) - x^{(0)}\| \\ &= \|\Gamma_0 [f(\xi^{(p)}) - W(x^{(0)})(\xi^{(p)} - x^{(0)})]\| \leq \|\Gamma_0 f(x^{(0)})\| \\ &+ \|\Gamma_0 [f(\xi^{(p)}) - f(x^{(0)}) - W(x^{(0)})(\xi^{(p)} - x^{(0)})]\| \\ &\leq B_0 + \frac{1}{2} A_0 n C \|\xi^{(p)} - x^{(0)}\|^2 \end{aligned}$$

Utilizando (1.75), encontramos que:

$$\begin{aligned} \|\xi^{(p+1)} - x^{(0)}\| &< B_0 + \frac{1}{2} n A_0 C \cdot 4B_0^2 \\ &= B_0 + 2n A_0 B_0 C \cdot B_0 = (1 + \mu_0) B_0 < 2B_0 \end{aligned}$$

lo cual prueba nuestra afirmación.

Como se ha supuesto que se cumplen las condiciones del Teorema 1.2.1 de la Sec. 1.2.4, el sistema  $f(x) = 0$  tiene una raíz  $\bar{x}$  tal que  $\|\bar{x} - x^{(0)}\| \leq 2B_0$ .

Consideremos la diferencia,  $\bar{x} - \xi^{(p)}$ , donde  $p \geq 1$ . Teniendo en cuenta que

$$F(\bar{x}) = \bar{x} - \Gamma_0 f(\bar{x}) = \bar{x}$$

y utilizando el Lema 1.2.1 de la Sec. 1.2.3, tenemos

$$\|\bar{x} - \xi^{(p)}\| = \|F(\bar{x}) - F(\xi^{(p-1)})\| \leq \|\bar{x} - \xi^{(p-1)}\| \cdot \|F'(\theta)\| \quad (1.76)$$

donde  $\theta$  es un punto en el intervalo  $[\bar{x}, \xi^{(p-1)}]$ .

Además (véase Sec. 1.2.3, Lema 1.2.1, Corolario 1.2.2)

$$\|F'(\theta)\| = \|F'(\theta) - F'(x^{(0)})\| \leq n\|\theta - x^{(0)}\| \max \|F''(\eta)\| \quad (1.77)$$

donde  $\eta$  es un punto en el intervalo  $[\theta, x^{(0)}]$ . De la fórmula (1.73) tenemos:

$$F'(x) = \left[ \delta_{ij} - \sum_{s=1}^n \gamma_{is} \frac{\partial f_s}{\partial x_j} \right]$$

donde  $\delta_{ij}$  es el delta de Kronecker y  $\Gamma_0 = [\gamma_{ij}]$ . Por consiguiente

$$\frac{\partial F_i}{\partial x} = \delta_{ij} - \sum_{s=1}^n \gamma_{is} \frac{\partial f_s}{\partial x}$$

y

$$\frac{\partial^2 F_i}{\partial x_j \partial x_k} = - \sum_{s=1}^n \gamma_{is} \frac{\partial^2 f_s}{\partial x_j \partial x_k}$$

En consecuencia

$$\begin{aligned} \|F''(\eta)\| + \max_{i,j} \sum_{s=1}^n \left| \frac{\partial^2 F_i(\eta)}{\partial x_j \partial x_k} \right| &= \max_{i,j} \sum_{k=1}^n \left| \sum_{s=1}^n \gamma_{is} \frac{\partial^2 f_s(\eta)}{\partial x_j \partial x_k} \right| \\ &\leq \max_{i,j} \sum_{k=1}^n |\gamma_{is}| \sum_{k=1}^n \left| \frac{\partial^2 f_s(\eta)}{\partial x_j \partial x_k} \right| \\ &\leq \max_{i,j} \sum_{s=1}^n |\gamma_{is}| C = C \|\Gamma_0\| \leq A_0 C \end{aligned}$$

y, por lo tanto, basado en (1.77),

$$\|F'(\theta)\| \leq nA_0C\|\theta - x^{(0)}\|$$

Como el punto  $\theta$  pertenece a la  $2B_0$ -vecindad del punto  $x^{(0)}$  se deduce que

$$\|\theta - x^{(0)}\| \leq 2B_0$$

y, en consecuencia

$$\|F'(\theta)\| \leq 2nA_0B_0C = \mu_0 \quad (1.78)$$

Teniendo en consideración la desigualdad (1.78), deducimos de la desigualdad (1.76) que

$$\|\bar{x} - \xi^{(p)}\| \leq \mu_0 \|\bar{x} - \xi^{(p-1)}\|$$

de donde

$$\|\bar{x} - \xi^{(p)}\| \leq \mu_0^p \|\bar{x} - \xi^{(0)}\| = \mu_0^p \|\bar{x} - x^{(0)}\| \leq 2B\mu_0^p$$

De la última desigualdad se tiene entonces, para  $\mu_0 < 1$ ,

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \xi^{(p)} = \bar{x}$$

Queda finalizada la demostración del teorema. □

---



---

## CAPÍTULO 2

---

# PRELIMINARES DE CONJUNTOS DIFUSOS

### Introducción

EL concepto intuitivo de conjunto clásico corresponde al de una colección de objetos, reunidos usualmente mediante la referencia a alguna propiedad que los caracteriza. En la teoría de conjuntos usuales, un conjunto está bien *definido* si se puede determinar de manera absoluta si determinado elemento pertenece o no al conjunto sin ninguna ambigüedad.

Las operaciones que se pueden realizar con los conjuntos clásicos, tales como la unión, intersección, complemento, diferencia se definen mediante axiomas sencillos que, como se verá en el desarrollo del trabajo, corresponden a casos particulares de la matemática difusa<sup>1</sup>, en particular de los conjuntos difusos.

La lógica clásica igualmente se puede considerar como un caso particular de la lógica difusa. Por tanto, es conveniente tener presente tanto los fundamentos de la misma, las operaciones que se pueden realizar con los objetos de la lógica, y las principales propiedades que poseen dichas operaciones.

Los fundamentos de la matemática difusa nació en un artículo de Lotfi A. Zadeh<sup>2</sup> publicado en el año 1965, que tenía por título “Fuzzy Sets”, explicando en un comienzo el concepto de conjunto difuso (Fuzzy Set) bajo el que reside la idea de que los elementos sobre los que se construye el pensamiento humano no son números sino etiquetas lingüísticas. Este razonamiento difuso permite representar el conocimiento común, que es mayoritariamente del tipo lingüístico cualitativo y no necesariamente cuantitativo, en un lenguaje matemático a través de la teoría de conjuntos difusos y funciones de pertenencias asociadas a ellos. Es así como se trabaja a la vez con datos numéricos y términos lingüísticos; los términos lingüísticos son inherentemente menos precisos que los datos numéricos pero en



Lotfi A. Zadeh.

---

<sup>1</sup>A la hora de traducir el término inglés fuzzy, se barajaron principalmente dos alternativas: borroso y difuso. Aunque en algunas bibliografías se habla aún de Matemática borroso, se utiliza más el término difuso.

<sup>2</sup>Profesor de ciencia computacional en la Universidad de California en Berkeley

muchas ocasiones aportan una información más útil para el razonamiento humano.

La matemática difusa tiene en cuenta que solo en pocas ocasiones el concepto de blanco/negro o verdadero/falso es absoluto. Por el contrario, existen infinitos tonos de gris o valores de verdad en muchos de los aspectos de la realidad. En la actualidad es un campo de investigación muy importante, tanto por sus implicaciones matemáticas o teóricas como por sus aplicaciones prácticas. Prueba de esta importancia es el gran número de revistas internacionales (Fuzzy Sets and Systems, IEEE Transactions on Fuzzy Systems, entre otras) congresos (FUZZ-IEEE, IPMU, EUSFLAT, ESTYLF, entre otros) y libros (Kruse, 1994), (McNeill, 1994), (Mohammed, 1993), (Pedrycz, 1998) dedicados al tema.

Este segundo capítulo está organizado de la siguiente manera: En la sección 2.1 se desarrolla un estudio intuitivo de la matemática difusa, en la sección 2.2 se desarrollo un estudio de conjuntos difusos, métrica de Hausdorff, función soporte, espacio  $\mathbb{E}^n$  y finalmente se estudia la completitud del espacio métrico  $(\mathbb{E}^n, d)$ .

## 2.1. Desarrollo intuitivo de la matemática difusa

Un conjunto clásico es definido de tal manera que divide los individuos en grupos: miembros y no miembros. Esta división es bien definida, no es ambigua, y se da de manera abrupta, y puede ser suficientemente válida para algunos conceptos y conjuntos, como por ejemplo la pertenencia de un número  $a$  al conjunto  $\mathbb{N}$ , o bien de una letra determinada al conjunto de las vocales en el idioma español.

Siendo así, una función de pertenencia para un conjunto clásico  $A$  se puede definir como:

$$\phi_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ no pertenece al conjunto } A, \\ 1 & \text{si } x \text{ pertenece al conjunto } A. \end{cases}$$

Sin embargo, muchos conceptos de clasificación presentan otras características. Por ejemplo el conjunto de las personas altas, la temperatura o la edad, no tienen una frontera clara de clasificación, la cual se caracteriza más bien por ser poco precisa, de manera que se puede considerar la transición gradual desde la *no pertenencia* hasta la *pertenencia total* al conjunto.

Para definir un conjunto difuso, se debe establecer una función de pertenencia (o también llamada función de membresía en algunos textos) que permita asignar a cada elemento, un valor real entre 0 y 1 que indica que tanto pertenece al conjunto. Los valores próximos a 1 denotan mayor grado de pertenencia al conjunto, mientras que los valores próximos a 0 denotan poca pertenencia. En los extremos, se tiene que el valor 0 denota nula pertenencia mientras que el valor 1 denota pertenencia total al conjunto. Usualmente se utiliza cualquiera de las siguientes notaciones para hacer referencia a esta aplicación:

$$\begin{aligned} \chi_A & : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1], \\ A & : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]. \end{aligned}$$

Donde el símbolo  $A$  denota tanto al conjunto como a la función de pertenencia asociada. Se utilizará la primera notación en el transcurso del trabajo.

En el campo aplicativo, la lógica difusa ha llegado a ser fundamental como ya se ha señalado previamente, por cuanto permite al científico e ingeniero explotar la tolerancia a la imprecisión

que se da en situaciones y problemas reales. La lógica difusa es de gran valor principalmente en los siguientes casos:

- Situaciones complejas donde es prácticamente imposible tener un modelo matemático que la represente adecuadamente. Esto puede deberse en parte a la complejidad del problema, y en parte a que no se tiene suficiente información sobre el mismo.
- Situaciones donde obtener una alta precisión puede requerir demasiado tiempo.
- Situaciones donde la solución encontrada por los métodos clásicos requiere simplificar excesivamente el problema real. En otras palabras, mediante los métodos clásicos se obtendría un modelo que no representa con adecuada fidelidad la situación de interés.
- Situaciones que involucran procesos altamente no lineales donde intentar obtener una alta precisión puede llegar a ser muy costoso.

Así, la lógica difusa tiene un gran potencial para entender sistemas que son esquivos a desarrollos analíticos por su complejidad. Este tipo de problemas no está circunscrito a ser de un determinado tipo; por ejemplo, pueden ser de tipo lineal o no lineal. En casos donde se presenta esta incertidumbre, es conveniente utilizar *aproximadores universales*, esto es, sistemas que describen en cierta manera el comportamiento de sistemas complejos, usualmente no lineales.

Los conjuntos difusos representan conceptos lingüísticos como por ejemplo el término estatura se puede clasificar en: bajo, medio y alto, que se emplea a menudo para definir los estados de una variable. Tal variable normalmente se denomina *variable difusa*.

Dado que las variables borrosas capturan las incertidumbres de la medida como la parte de datos experimentales, ellos se armonizan más a la realidad que las variables clásicas. Es una paradoja interesante que las bases de datos alimentadas con variables borrosas nos proporcionan, de hecho, evidencia más exacta y más real de los fenómenos que la base de datos alimentadas con las variables clásicas.

**Ejemplo 2.1.1** Se considerarán ahora tres conjuntos difusos que representan los conceptos de *persona joven*, de *mediana edad* y con *bastante edad*. Se puede obtener una expresión razonable de estos conceptos si se utilizan

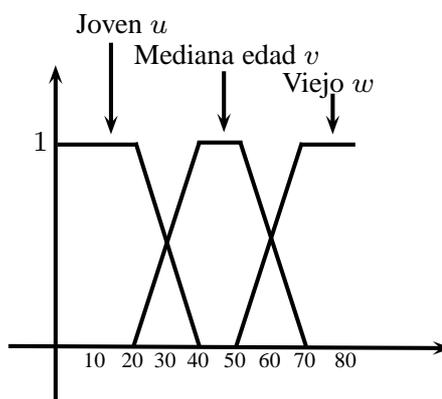


Figura 2.1: Función de pertenencia trapezoidal.

funciones de pertenencia trapezoidales  $u, v, w$ . Estas aplicaciones se pueden definir en el intervalo  $[0, 80]$  de la siguiente manera:

$$u(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 20 \\ \frac{(35-x)}{15} & \text{si } 20 < x < 35 \\ 0 & \text{si } x \geq 35 \end{cases}$$

$$v(x) = \begin{cases} 0 & \text{cuando } x < 20 \text{ o } x > 60 \\ \frac{(x-20)}{15} & \text{si } 20 < x < 35 \\ \frac{(20-x)}{15} & \text{si } 35 < x < 60 \\ 1 & \text{si } 35 \leq x \leq 45 \end{cases}$$

$$w(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 45 \\ \frac{(x-45)}{15} & \text{si } 45 < x < 60 \\ 1 & \text{si } x \geq 60 \end{cases}$$

## 2.2. Fundamentos de la matemática difusa

### 2.2.1. Conjuntos difusos

Como se ha señalado previamente, la idea de conjunto difuso fue propuesto por primera vez por Lotfi A. Zadeh en la década de los 60s, como una forma de manipular conceptos que involucran incertidumbre o vaguedad.

Los conjuntos difusos se consideran con respecto a un conjunto universo no vacío  $X$  (a nosotros nos interesa el caso particular  $X = \mathbb{R}^n$ ). La idea esencial es que a cada elemento  $x \in \mathbb{R}^n$  se le asigna  $u(x)$  el cual representa el grado de pertenencia del elemento  $x$  al conjunto difuso  $u$ , donde  $u(x) = 0$  correspondiente a la *no pertenencia*,  $0 < u(x) < 1$  una *pertenencia parcial* y  $u(x) = 1$  una *pertenencia total* al conjunto difuso  $u$ . Según Lotfi Zadeh un *subconjunto difuso* de  $X$  es un subconjunto no vacío  $\{(x, u(x)) : x \in \mathbb{R}^n\}$  de  $\mathbb{R}^n \times [0, 1]$  para una cierta aplicación  $u : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ . La función  $u$  es a menudo considerada como el conjunto difuso.

Es evidente que la única posibilidad de pertenencia de los elementos de un subconjunto clásico  $A$  de  $\mathbb{R}^n$  son la no pertenencia y la pertenencia total. Así el conjunto puede ser identificado como un conjunto difuso sobre  $\mathbb{R}^n$  dada por su función característica  $\chi_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \{0, 1\}$ , es decir, definida por:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin A, \\ 1 & \text{si } x \in A. \end{cases} \tag{2.1}$$

Considere las siguientes ilustraciones de conjuntos difusos:

1. Considerar el conjunto difuso, dado por la aplicación  $u : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  definido por

$$u(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } x \in [-1, 0) \cup (0, 1], \\ 1 & \text{si } x = 0, \\ 0 & \text{en otros casos,} \end{cases} \tag{2.2}$$

2. Supongamos que nos interesa representar el conjunto difuso  $v$  de los números reales próximos a cero. Se podría tomar la función:

$$v(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{si } x \in [-1, 1], \\ 0 & \text{en otros casos,} \end{cases}$$

Es claro que  $u(0) = 1$  lo cual significa que  $x = 0$  pertenece completamente al conjunto difuso  $v$ , pero a medida que se van alejando de cero su grado de pertenencia va disminuyendo simétricamente, hasta ser nula fuera del intervalo  $[-1, 1]$ .

Cabe señalar que podría existir otros criterios diferentes, como por ejemplo considerar para este mismo conjunto difuso la siguiente representación:

$$v(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

lo cual también puede ser una función de pertenencia para el conjunto difuso considerado.

Es claro que son innumerables las representaciones de un número difuso real, pero la idea central es que la función de pertenencia refleje lo mejor posible las cualidades más relevantes del conjunto difuso que se desea representar.

Los espacios métricos de conjuntos difuso proporcionan un marco adecuado y coherente para diversas aplicaciones en matemáticas.

**Definición 2.2.1 (Niveles de un conjunto difuso sobre  $\mathbb{R}^n$ )** Sea  $u$  un conjunto difuso y  $0 < r \leq 1$ , el conjunto de los  $r$ -nivel de  $u$ , es aquel conjunto cuyos elementos pertenecen al conjunto difuso con grado de pertenencia mayor o igual que  $r$ , es decir:

$$[u]^r = \{x \in \mathbb{R}^n : u(x) \geq r\} \quad \text{para cada } r \in (0, 1], \quad (2.3)$$

considerando que  $[u]^r := [u_L^r, u_R^r]$ . Para el caso  $r = 0$  se define el conjunto soporte de  $u$ , es decir:

$$[u]^0 = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : u(x) > 0\}} = [u_L^0, u_R^0]. \quad (2.4)$$

Tener presente el lector que sin hipótesis adicionales sobre la aplicación  $u$  puede ocurrir que:

$$[u]^0 = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : u(x) > 0\}} \neq \{x \in \mathbb{R}^n : u(x) \geq 0\}.$$

No es difícil demostrar las siguientes propiedades de los conjuntos de nivel:

**Proposición 2.2.1** La familia de niveles  $\{[u]^r : r \in [0, 1]\}$  de un conjunto difuso  $u$ , verifica las siguientes propiedades:

(a)  $[u]^0 \supseteq [u]^r \supseteq [u]^t$  para cada  $0 \leq r \leq t \leq 1$ .

(b) Si  $r_n \nearrow r$  entonces  $[u]^r = \bigcap_{n=1}^{\infty} [u]^{r_n}$ , es decir, la aplicación de nivel es continua a su izquierda.

(c)  $u = v$ , si y sólo si,  $[u]^r = [v]^r$ , para cada  $r \in [0, 1]$ .

(d)  $[u]^r \neq \emptyset$  para todo  $r \in [0, 1]$ , es decir  $u(x) = 1$  para algún  $x \in \mathbb{R}^n$  (cuando la aplicación  $u$ , verifica esta condición se dice que es normal).

(e) Se considera un orden parcial  $\leq$  en  $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$  dado por:

$$u, v \in E^1, u \leq v \Leftrightarrow (u_L^r \leq v_L^r, u_R^r \leq v_R^r, \forall r \in [0, 1]).$$

si  $u = 0$ , es decir,  $u$  denota la función característica del singleton cero, por tanto se tiene:  
 $0 \leq v \Leftrightarrow (0 \leq v_L^r \leq v_R^r, \forall r \in [0, 1])$  se dice que  $v$  es no negativo y si  $v = 0$  tenemos  
 $u \leq 0 \Leftrightarrow (u_L^r \leq u_R^r \leq 0, \forall r \in [0, 1])$  se dice que  $u$  es no positivo.

Para cada  $u \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ , se definen las funciones  $u_L : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $u_R : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  dadas por  $u_L(r) = \underline{u}(r)$  y  $u_R(r) = \bar{u}(r)$ , para cada  $r \in [0, 1]$ . Donde  $\underline{u}(r)$  es una aplicación acotada, monótona creciente y continua por su izquierda y  $\bar{u}(r)$  es una aplicación acotada, monótona decreciente y continua por su izquierda.

**Ejemplo 2.2.1** Con base en el ejemplo 2.1.1, se puede obtener los  $r$ -niveles para los conjuntos difusos  $u, v$  y  $w$  Según la figura (2.1). Para cada  $r \in (0, 1]$  se tiene:

$$\begin{aligned} [u]^0 &= [v]^0 = [w]^0 = [0, 80], \\ [u]^r &= [0, (35 - 15r)], \\ [v]^r &= [(15r + 20), (60 - 15r)], \\ [w]^r &= [(15r + 45), 80]. \end{aligned}$$

**Ejemplo 2.2.2** A partir del conjunto difuso  $u$  definido en la ecuación (2.2), podemos determinar su conjunto de nivel, es decir:

$$[u]^r = \begin{cases} [-1, 1] & \text{si } 0 \leq r \leq \frac{1}{2}, \\ \{0\} & \text{si } \frac{1}{2} < r \leq 1. \end{cases}$$

Además, la aplicación  $\underline{u} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  viene dado por:

$$\underline{u}(r) = \begin{cases} -1 & \text{si } 0 \leq r \leq \frac{1}{2}, \\ \{0\} & \text{si } \frac{1}{2} < r \leq 1. \end{cases}$$

y  $\bar{u} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  es

$$\bar{u}(r) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq r \leq \frac{1}{2}, \\ \{0\} & \text{si } \frac{1}{2} < r \leq 1. \end{cases}$$

Respecto a las operaciones elementales de conjuntos clásicos, tales como el complemento, intersección y unión, pueden generalizarse a los conjuntos difusos en más de una forma. Sin embargo, una generalización particular que es de nuestro interés es la que produce las llamadas operaciones difusas estándar. Estas son definidas punto a punto en términos de los grados de pertenencia. Consideremos la aplicación  $u : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$  como un subconjunto difuso de un espacio universo no vacío  $\mathbb{R}^n$  y denotaremos la clase de todas las funciones o conjuntos difusos por medio de  $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ , es decir:

$$\mathcal{F}(\mathbb{R}^n) = \{u / u : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]\}.$$

El complemento  $u^c$  con  $u \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ , la unión  $u \vee v$  y la intersección  $u \wedge v$  con  $u, v \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$  son definidas, respectivamente, por:

$$u^c(x) = 1 - u(x), \tag{2.5}$$

Los elementos de  $\mathbb{R}^n$  para los que  $u^c(x) = u(x)$  se llaman puntos de equilibrio de  $u$ . En términos del ejemplo anterior, los puntos de equilibrio de  $v$  son 27.5 y 52.5

$$(u \vee v)(x) = u(x) \vee v(x) := \text{máx}\{u(x), v(x)\}, \tag{2.6}$$

$$(u \wedge v)(x) = u(x) \wedge v(x) := \text{mín}\{u(x), v(x)\}, \tag{2.7}$$

para cada  $x \in \mathbb{R}^n$ . Donde el mín y máx denotan al operador mínimo y al operador máximo, respectivamente. Debido a la asociatividad de mín y máx, estas definiciones pueden extenderse a cualquier número finito de conjuntos difusos. Obviamente que  $u^c, u \vee v, u \wedge v \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ .

Es claro que si  $u, v \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ , entonces no podemos esperar que las operaciones algebraicas usuales entre funciones sean las adecuadas sobre el espacio  $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$  (si es que se desea obtener nuevamente un elemento de  $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ ) ya que, por ejemplo, si sumamos punto a punto como es habitual entre aplicaciones, puede ocurrir que:

$$(u + v)(x) = u(x) + v(x) \notin [0, 1].$$

La solución a este problema, pasa por el llamado *principio de extensión* de Zadeh [32] el cual, esencialmente nos dice lo siguiente:

Sea la función  $f : X_1 \times X_2 \rightarrow Y$ , donde  $X_1, X_2$  y  $Y$  son conjuntos clásicos no vacíos y  $f$  una aplicación cualquiera, esta puede ser extendida al contexto difuso como:

$$\bar{f} : \mathcal{F}(X_1) \times \mathcal{F}(X_2) \rightarrow \mathcal{F}(Y)$$

donde

$$\bar{f}(u_1, u_2)(y) = \begin{cases} \sup_{(x_1, x_2) \in f^{-1}(y)} u_1(x_1) \wedge u_2(x_2) & \text{si } f^{-1} \neq \emptyset, \\ 0 & \text{si } f^{-1} = \emptyset. \end{cases} \tag{2.8}$$

Para cada  $y \in Y$ . Aquí el conjunto  $f^{-1}(y) = \{(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2 : f(x_1, x_2) = y\}$ , puede ser vacío o contener uno o más puntos. La generalización obvia es válida para las asignaciones definidas en una  $N$ -tupla  $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_N$  donde  $N \geq 1$ , el operador cuña es sencillo cuando  $N = 1$ .

La definición de adición y multiplicación por escalar sobre  $\mathcal{F}(X)$  puede realizarse vía este principio de extensión y, además se requiere que el espacio base  $X$  posea una estructura lineal.

**Definición 2.2.2 (Adición y producto por escalar en  $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ )** Para la adición de dos conjuntos difusos  $u, v \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ , el principio de extensión de Zadeh es aplicado sobre la función  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  definida por  $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ , entonces ella induce una adición sobre  $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$  tal que:

$$(u \dot{+} v)(x) = \sup_{x_1 + x_2 = x} u(x_1) \wedge v(x_2), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \tag{2.9}$$

en cuanto a la multiplicación por escalar de  $u \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$  por un escalar no nulo  $\lambda$ , se considera la función  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  definida por  $f(x) = \lambda x$  y empleando el principio de extensión, ella induce el producto escalar  $\lambda u$  sobre  $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ , tal que:

$$(\lambda u)(x) = u(x/\lambda), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \lambda \neq 0. \quad (2.10)$$

Obviamente que, así definidos, tanto  $u + v$  como  $\lambda u$  pertenecen a  $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ .

La totalidad de conjuntos difusos  $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$  en un espacio base  $\mathbb{R}^n$  es a menudo demasiado amplio y general para generar sólidos resultados o lo suficientemente específico, por lo que existen diversas restricciones técnicas que se establecen sobre los conjuntos difusos. En particular, un conjunto difuso  $u \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$  es llamado *conjunto difuso normal* si existe al menos un punto  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , tal que  $u(x_0) = 1$ , así el conjunto 1-nivel  $([u]^1)$  y por lo tanto, todos los otros conjuntos de nivel  $[u]^r$   $0 < r < 1$  y el soporte  $[u]^0$  de  $u$  son todos subconjuntos no vacíos de  $\mathbb{R}^n$ . Por razones técnicas, los conjuntos de nivel son a veces considerados compactos y cuando  $X$  es un espacio lineal, es asumido como un conjunto convexo. De hecho, la convexidad de los conjuntos de nivel de un conjunto difuso  $u$  es equivalente a ser un *conjunto difuso convexo*, es decir, satisfaciendo:

$$u(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq u(x_1) \wedge u(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n, \lambda \in [0, 1]. \quad (2.11)$$

En el caso de los *números difusos*, es decir, los conjuntos difusos  $u : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ , la convexidad difusa significa que los conjuntos de nivel son los intervalos.

En lo que sigue, usaremos principalmente los siguientes espacios no vacíos de  $\mathbb{R}^n$ :

1.  $C(\mathbb{R}^n) = \{A \subseteq \mathbb{R}^n / A \neq \emptyset, A \text{ cerrado}\}$ ,
2.  $K(\mathbb{R}^n) = \{A \subseteq \mathbb{R}^n / A \neq \emptyset, A \text{ compacto}\}$ ,
3.  $KC(\mathbb{R}^n) = \{A \subseteq \mathbb{R}^n / A \neq \emptyset, A \text{ compacto-convexo}\}$ .

Tenemos entonces las inclusiones estrictas

$$KC(\mathbb{R}^n) \subset K(\mathbb{R}^n) \subset C(\mathbb{R}^n).$$

Recordemos que un subconjunto no vacío  $A$  de  $\mathbb{R}^n$  es convexo si para todo  $a_1, a_2 \in A$  y para todo  $\lambda \in [0, 1]$ , el punto

$$a = \lambda a_1 + (1 - \lambda)a_2 \quad (2.12)$$

pertenece a  $A$ . Para cualquier subconjunto no vacío  $A$  de  $\mathbb{R}^n$ , denotamos por  $coA$  su envoltura convexa, que es la totalidad de puntos  $a$  de la forma (2.12) o, en forma equivalente, es aquel subconjunto convexo más pequeño que contiene  $A$ . Claramente

$$A \subseteq coA = co(coA) \quad (2.13)$$

con  $A = coA$  si  $A$  es convexo. Por otra parte  $coA$  es cerrado (compacto) si  $A$  es cerrado (compacto). Sean  $A$  y  $B$  dos subconjuntos no vacíos de  $\mathbb{R}^n$  y sea  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Se define la adición y la multiplicación por escalar de Minkowski, de la siguiente forma:

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}, \quad (2.14)$$

y

$$\lambda A = \{\lambda a : a \in A\}, \quad (2.15)$$

Luego tenemos

**Proposición 2.2.2** *Los espacios  $C(\mathbb{R}^n)$ ,  $K(\mathbb{R}^n)$  y  $CK(\mathbb{R}^n)$  son cerrados bajo la operación de adición y multiplicación por escalar.*

De hecho, estas dos operaciones inducen una *estructura lineal* en,  $C(\mathbb{R}^n)$ ,  $K(\mathbb{R}^n)$  y  $CK(\mathbb{R}^n)$  con elemento neutro igual a  $\{0\}$ . La estructura es la de un cono en lugar de un espacio vectorial, ya que, en general,

$$A + (-1)A \neq \{0\}.$$

**Ejemplo 2.2.3** *Sea  $A = [0, 1]$  de manera que  $(-1)A = [-1, 0]$ , y por consiguiente se tiene:*

$$A + (-1)A = [0, 1] + [-1, 0] = [-1, 1].$$

Por lo tanto, adicionando -1 veces un conjunto no constituye una operación natural de la resta. En su lugar, se define la diferencia Hukuhara  $A - B$  de conjuntos no vacíos  $A$  y  $B$ , siempre cuando exista un conjunto no vacío  $C$  satisfaciendo:

$$A = B + C \tag{2.16}$$

**Ejemplo 2.2.4** *De el ejemplo anterior,*

$$[-1, 1] - [-1, 0] = [0, 1] \text{ y } [-1, 1] - [0, 1] = [-1, 0].$$

Claramente,  $A - A = \{0\}$  para todo subconjunto no vacío  $A$ . De (2.16), una condición necesaria para la diferencia Hukahara  $A - B$  para existir es que algunos traducen de  $B$  sea un subconjunto de  $A$ ,

$$B + \{c\} \subseteq A$$

para algún  $c \in \mathbb{R}^n$ . Cuando existe la diferencia  $A - B$  ella es única. Sin embargo, la diferencia Hukahara necesariamente no tiene por qué existir, esto se observa en el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 2.2.5**  $\{0\} - [0, 1]$  *no existe, ya que no se traducen en  $[0, 1]$  puede siempre pertenecen al conjunto singleton del  $\{0\}$ .*

### 2.2.2. Métrica de Hausdorff

Sea  $x$  un punto en  $\mathbb{R}^n$  y  $A$  un subconjunto no vacío de  $\mathbb{R}^n$ . La *distancia*  $d(x, A)$  de  $x$  al conjunto  $A$  se define por:

$$d(x, A) = \inf\{\|x - a\| : a \in A\} \tag{2.17}$$

Por lo tanto  $d(x, A) = d(x, \bar{A}) \geq 0$  y  $d(x, A) = 0$  si y sólo si  $x \in \bar{A}$ , donde  $\bar{A}$  denota la clausura de  $A$  en  $\mathbb{R}^n$ .

Vamos a llamar al subconjunto

$$S_\epsilon(A) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, A) < \epsilon\} \tag{2.18}$$

una  $\epsilon$ -vecindad de  $A$ . Su adherencia se define como el subconjunto

$$\bar{S}_\epsilon(A) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, A) \leq \epsilon\} \tag{2.19}$$

En particular, vamos a denotar por  $\bar{S}_1^n$  la bola unitaria cerrada en  $\mathbb{R}^n$ ,

$$\bar{S}_1^n = \bar{S}_1(\{0\}) \tag{2.20}$$

que claramente es un subconjunto compacto de  $\mathbb{R}^n$ . Tenga en cuenta que

$$\bar{S}_\epsilon(A) = A + \epsilon\bar{S}_1^n \tag{2.21}$$

para cualquier  $\epsilon > 0$  y cualquier subconjunto no vacío  $A$  de  $\mathbb{R}^n$ . En algunas partes del texto escribiremos  $S(A, \epsilon)$  y  $\bar{A}(A, \epsilon)$  para denotar  $S_\epsilon(A)$  y  $\bar{S}_\epsilon(A)$ .

Sean  $A$  y  $B$  subconjuntos no vacío de  $\mathbb{R}^n$ . Se define la *separación de Hausdorff* del conjunto  $B$  al conjunto  $A$  por:

$$d_H^*(B, A) = \sup\{d(b, A) : b \in B\} \tag{2.22}$$

o, equivalentemente,

$$d_H^*(B, A) = \inf\{\epsilon > 0 : B \subseteq A + \epsilon\bar{S}_1^n\}. \tag{2.23}$$

Tenemos  $d_H^*(B, A) \geq 0$  con  $d_H^*(B, A) = 0$  si y sólo si  $B \subseteq \bar{A}$ . Además, la desigualdad triangular es:

$$d_H^*(B, A) \leq d_H^*(B, C) + d_H^*(C, A)$$

está desigualdad es válida cualquiera sean los conjunto no vacíos  $A, B$  y  $C \in \mathbb{R}^n$ . En general, se tiene:

$$d_H^*(B, A) \neq d_H^*(A, B).$$

Se define la *distancia de Hausdorff* entre subconjuntos no vacíos  $A$  y  $B$  de  $\mathbb{R}^n$  de la siguiente forma:

$$d_H(A, B) = \mbox{máx}\{d_H^*(A, B), d_H^*(B, A)\}, \tag{2.24}$$

la cual satisface la simetría en  $A$  y  $B$ . En consecuencia,

1. **Positividad:**  $d_H(A, B) \geq 0$
2. **Identidad de los indiscernibles:**  $d_H(A, B) = 0$  si y sólo si  $\bar{A} = \bar{B}$ ,
3. **Simetría:**  $d_H(A, B) = d_H(B, A)$ ,
4. **Desigualdad Triangular:**  $d_H(A, B) \leq d_H(A, C) + d_H(C, B)$ ,

para cualquier subconjuntos no vacíos  $A, B$  y  $C$  de  $\mathbb{R}^n$ . Si examinamos los subconjuntos cerrados no vacíos de  $\mathbb{R}^n$ , encontramos que la distancia de Hausdorff (2.24) es una métrica, conocida como la métrica de Hausdorff [18]. Por lo tanto  $(C(\mathbb{R}^n), d_H)$  es un espacio métrico. Más aún, tenemos:

**Proposición 2.2.3**  $(C(\mathbb{R}^n), d_H)$  es un espacio métrico completo separable en donde  $K(\mathbb{R}^n)$  y  $KC(\mathbb{R}^n)$  son subconjuntos cerrados. Por lo tanto,  $(K(\mathbb{R}^n), d_H)$  y  $(KC(\mathbb{R}^n), d_H)$  son también espacios métricos completos separables.

Las siguientes propiedades de la métrica de Hausdorff será útil en la siguiente sección.

**Proposición 2.2.4** Sea  $A, A', B, B' \in K(\mathbb{R}^n)$ , entonces

$$d_H(tA, tB) = td_H(A, B) \quad \forall t \geq 0, \quad (2.25)$$

$$d_H(A + B, A' + B') \leq d_H(A, A') + d_H(B, B'), \quad (2.26)$$

$$d_H(\text{co}A, \text{co}B') \leq d_H(A, B). \quad (2.27)$$

**Proposición 2.2.5** Sea  $A, B \in KC(\mathbb{R}^n)$  y  $C \in K(\mathbb{R}^n)$  entonces

$$d_H(A + C, B + C) = d_H(A, B). \quad (2.28)$$

Se define la *magnitud* de un subconjunto no vacío de  $A$  de  $\mathbb{R}^n$  por:

$$\|A\| = \sup\{\|a\| : a \in A\} \quad (2.29)$$

o, equivalentemente,

$$\|A\| = d_H(\{0\}, A). \quad (2.30)$$

Aquí,  $\|A\|$  es finito y el supremo en (2.29) se alcanza cuando  $A \in K(\mathbb{R}^n)$ . De (2.25) se deduce que,

$$\|tA\| = t\|A\| \quad \forall t \geq 0. \quad (2.31)$$

Por otra parte, por las condiciones (positividad, identidad, simetría y la desigualdad triangular) de la métrica de Hausdorff y por (2.30) se obtiene

$$\| \|A\| - \|B\| \| \leq d_H(A, B) \quad \forall A, B \in C(\mathbb{R}^n). \quad (2.32)$$

Decimos que un subconjunto  $\mathcal{U}$  de  $\mathbb{R}^n$  (o  $KC(\mathbb{R}^n)$ ) es uniformemente acotado si existe una constante finita  $c(\mathcal{U})$  tal que

$$\|A\| \leq c(\mathcal{U}) \quad \forall A \in \mathcal{U}. \quad (2.33)$$

Tenemos entonces la siguiente caracterización simple de compacidad.

**Proposición 2.2.6** Un subconjunto no vacío  $A$  de el espacio métrico  $(K(\mathbb{R}^n), d_H)$ , o  $(KC(\mathbb{R}^n), d_H)$ , es compacto si y sólo si es cerrado y uniformemente acotado.

La inclusión de conjunto induce un orden parcial en  $K(\mathbb{R}^n)$ . Escribimos  $A \leq B$  si y sólo si  $A \subseteq B$ , donde  $A, B \in K(\mathbb{R}^n)$ . Entonces,

$$\mathcal{L}(B) = \{A \in K(\mathbb{R}^n) : B \leq A\}, \quad \mathcal{U}(B) = \{A \in K(\mathbb{R}^n) : A \leq B\} \quad (2.34)$$

son subconjuntos cerrados de  $K(\mathbb{R}^n)$  para cualquier  $B \in K(\mathbb{R}^n)$ . De hecho, de la Proposición 1.5,  $\mathcal{U}(B)$  es un subconjunto compacto de  $K(\mathbb{R}^n)$ .

**Proposición 2.2.7**  $\mathcal{U}(B)$  es un subconjunto compacto de  $K(\mathbb{R}^n)$ .

Esta proposición sigue siendo válida para  $KC(\mathbb{R}^n)$ . La sucesión de subconjuntos encajados en  $(K(\mathbb{R}^n), d_H)$  tienen bastante utilidad en la intersección de conjuntos y propiedades de convergencia de estos.

**Proposición 2.2.8** Sea  $\{A_j\} \subset K(\mathbb{R}^n)$  satisfaciendo

$$\dots \subseteq A_j \subseteq \dots \subseteq A_2 \subseteq A_1.$$

Entonces  $A = \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j \in K(\mathbb{R}^n)$  y

$$d_H(A_n, A) \rightarrow 0 \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty. \quad (2.35)$$

Por otra parte, si  $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \subseteq A_j \subseteq \dots$  y  $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in K(\mathbb{R}^n)$ , entonces (2.35).

### 2.2.3. Función soporte

Sea  $A$  un subconjunto no vacío de  $\mathbb{R}^n$ . La función soporte de  $A$  es definida para todo  $p \in \mathbb{R}^n$  de la siguiente forma:

$$s(p, A) = \sup\{\langle p, a \rangle : a \in A\}, \quad (2.36)$$

que puede tomar el valor  $\infty$  cuando  $A$  es no acotado. No obstante, cuando  $A$  es un subconjunto compacto-convexo de  $\mathbb{R}^n$  el supremo es siempre alcanzado y la función soporte  $s(\cdot, A) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  está bien definida. En efecto

$$|s(p, A)| \leq \|A\| \|p\| \quad \forall p \in \mathbb{R}^n \quad (2.37)$$

y

$$|s(p, A) - s(q, A)| \leq \|A\| \|p - q\| \quad \forall p, q \in \mathbb{R}^n \quad (2.38)$$

Además, para cada  $p \in \mathbb{R}^n$

$$s(p, A) \leq s(p, B) \quad \text{si } A \subseteq B \quad (2.39)$$

y

$$s(p, \text{co}(A \cup B)) \leq \max\{s(p, A), s(p, B)\}. \quad (2.40)$$

La función soporte  $s(p, A)$  es el único vínculo con el subconjunto  $A \in KC(\mathbb{R}^n)$  en el sentido que  $s(p, A) = s(p, B)$  para todo  $p \in \mathbb{R}^n$  si y sólo si  $A = B$  cuando  $A$  y  $B$  son restringido a  $KC(\mathbb{R}^n)$ . Esto además preserva la adición de conjuntos y la multiplicación por escalar no negativa. Esto es, para cada  $p \in \mathbb{R}^n$ ,

$$s(p, A + B) = s(p, A) + s(p, B) \quad (2.41)$$

que, en particular,

$$s(p, A + \{x\}) = s(p, A) + \langle p, x \rangle \quad (2.42)$$

para cualquier  $x \in \mathbb{R}^n$ , y

$$s(p, tA) = ts(p, A), \quad t \geq 0. \quad (2.43)$$

La métrica de Hausdorff se relacionada con la función soporte para un subconjunto  $A, B \in CK(\mathbb{R}^n)$ , pues tenemos

$$d_H(A, B) = \sup\{|s(p, A) - s(p, B)| : p \in S^{n-1}\} \quad (2.44)$$

donde  $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$  es la esfera unidad sobre  $\mathbb{R}^n$ .

Sea  $C(S^{n-1})$  denota el espacio de Banach de funciones continuas,  $f : S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$  con la norma del supremo

$$\|f\| = \sup\{\|f(p)\| : p \in S^{n-1}\}.$$

Se puede emplear la función soporte para sumergir el espacio métrico  $(KC(\mathbb{R}^n), d_H)$  isometricamente como un cono positivo sobre  $C(S^{n-1})$ . Para ello, se define  $j : KC(\mathbb{R}^n) \rightarrow C(S^{n-1})$  donde  $j(A)(\cdot) = s(\cdot, A)$  para cada  $A \in KC(\mathbb{R}^n)$ . De las propiedades de la función soporte,  $j$  es una aplicación univalente, satisfaciendo

$$j(A + B) = j(A) + j(B) \quad (2.45)$$

y

$$j(tA) = tj(A), \quad t \geq 0, \quad (2.46)$$

con

$$\|j(A) - j(B)\| = d_H(A, B) \quad (2.47)$$

para todo  $A, B \in KC(\mathbb{R}^n)$ . El deseado como positivo es la imagen de  $j(KC(\mathbb{R}^n))$  en  $C(S^{n-1})$ . Claramente  $j$  es continua al igual que su aplicación inversa  $j^{-1} : j(KC(\mathbb{R}^n)) \rightarrow KC(\mathbb{R}^n)$ . Para un conjunto  $A \in KC(\mathbb{R}^n)$  fijo,  $s(p, A)$ , es positivamente homogénea

$$s(tp, A) = ts(p, A), \quad t \geq 0 \tag{2.48}$$

para cualquier  $p \in \mathbb{R}^n$ , y subadición

$$s(p_1 + p_2, A) \leq s(p_1, A) + s(p_2, A) \tag{2.49}$$

para todo  $p_1, p_2 \in \mathbb{R}^n$ . Por otra parte, combinando (2.48) y (2.49) vemos que  $s(\cdot, A)$  es una aplicación convexa, es decir, satisfaciendo:

$$s(\lambda p_1 + (1 - \lambda)p_2, A) \leq \lambda s(p_1, A) + (1 - \lambda)s(p_2, A) \tag{2.50}$$

para todo  $p_1, p_2 \in \mathbb{R}^n$  y  $\lambda \in [0, 1]$ .

El subconjunto no vacío convexo compacto de  $\mathbb{R}^n$  son únicamente caracterizados por dichas funciones.

**Proposición 2.2.9** *Para cada aplicación continua, positivamente homogénea y subaditiva  $s : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  existe un único subconjunto no vacío compacto convexo, dado por:*

$$A = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle p, x \rangle \leq s(p) \text{ para todo } p \in \mathbb{R}\}$$

donde  $s$  es una función soporte.

### 2.2.4. El espacio $E^n$

Recordemos que un subconjunto difuso de  $\mathbb{R}^n$  es definido en términos de una función de pertenencia que asigna a cada punto  $x \in \mathbb{R}^n$  un grado de pertenencia al conjunto difuso. Tal función de pertenencia es:

$$u : \mathbb{R}^n \rightarrow I = [0, 1]$$

se utiliza habitualmente para denotar el conjunto difuso correspondiente.

Para cada  $r \in (0, 1]$  el conjunto de los  $r$ -nivel  $[u]^r$  de un conjunto difuso  $u$ , es el subconjunto de puntos  $x \in \mathbb{R}^n$  con grado de pertenencia  $u(x)$  de al menos  $r$ , es decir:

$$[u]^r = \{x \in \mathbb{R}^n : u(x) \geq r\}.$$

El soporte  $[u]^0$  de un conjunto difuso es entonces definido como la adherencia de la unión de todos los conjuntos de nivel, es decir:

$$[u]^0 = \overline{\bigcup_{r \in (0,1]} [u]^r}.$$

Sea  $P_k(\mathbb{R}^n)$  denota la familia de todos los subconjuntos no vacíos compacto convexo de  $\mathbb{R}^n$ . Definiendo la adición y multiplicación por escalar en  $P_k(\mathbb{R}^n)$  por:

$$A + B = \{z : z = x + y, x \in A \wedge y \in B\}$$

Para todo  $A, B \in P_k(\mathbb{R}^n)$  y

$$\lambda A = \{z : z = \lambda x, x \in A\}$$

Para todo  $A \in P_k(\mathbb{R}^n)$ . Del autor Rådström [29], sabemos que  $P_k(\mathbb{R}^n)$  forma un semigrupo conmutativo bajo la adición que satisface la ley de cancelación. Además, si  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  y  $A, B \in P_k(\mathbb{R}^n)$ , entonces

$$\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B, \quad \alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A, \quad 1A = A,$$

y para  $\alpha, \beta > 0$ ,  $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$ .

Denotemos por  $E^n$  el espacio de todos los subconjuntos difusos  $u$  de  $\mathbb{R}^n$  que satisfacen los siguientes supuestos:

- (1)  $u$  es una aplicación de  $\mathbb{R}^n$  en  $I = [0, 1]$ ,
- (2)  $[u]^0$  es un subconjunto acotado de  $\mathbb{R}^n$ ,
- (3)  $[u]^r$  es un subconjunto compacto en  $\mathbb{R}^n \forall r \in I$ ,
- (4)  $u$  es difuso convexo, es decir

$$u(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \min(u(x), u(y)) \quad \forall \lambda \in [0, 1].$$

Sea  $u$  una aplicación difusa convexa y  $x, y \in [u]^r$  para algún  $r \in (0, 1]$ . Por lo tanto  $u(x) \geq r$  y  $u(y) \geq r$ . En consecuencia

$$u(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \min(u(x), u(y)) \geq r$$

para cualquier  $\lambda \in [0, 1]$  y por lo tanto  $\lambda x + (1 - \lambda)y \in [u]^r$ . Como resultado,  $[u]^r$  es un subconjunto convexo de  $\mathbb{R}^n$  para cualquier  $r \in [0, 1]$ . El soporte  $[u]^0$  es también convexo, lo cual se desprende del siguiente hecho:

$$d_H([u]^r, [u]^0) \rightarrow 0 \quad \text{cuando } r \rightarrow 0^+$$

y el completamiento del espacio métrico  $(KC(\mathbb{R}^n), d_H)$ . Así tenemos:

**Lema 2.2.1** *Si  $u$  es difuso convexo, entonces  $[u]^r$  es convexo para cada  $r \in I$ .*

Ahora, luego de las herramientas construidas podemos probar el siguiente teorema de representación de *Negoita-Ralescu*:

**Teorema 2.2.1** Si  $u \in E^n$ , y se satisface:

$$[u]^r \in P_k(\mathbb{R}^n) \quad \forall 0 \leq r \leq 1, \quad (2.51)$$

$$[u]^{r_2} \subseteq [u]^{r_1} \quad \forall 0 \leq r_1 \leq r_2 \leq 1. \quad (2.52)$$

Y, además  $\{r_k\}$  es una sucesión no decreciente y convergente para  $r > 0$ , entonces

$$[u]^r = \bigcap_{k \geq 1} [u]^{r_k}. \quad (2.53)$$

Por el contrario, si  $\{A^r : 0 \leq r \leq 1\}$  es una familia de subconjuntos de  $\mathbb{R}^n$  satisfaciendo (2.51)-(2.53) entonces existe una aplicación  $u \in E^n$  de modo que:

$$[u]^r = A^r \quad \forall 0 < r \leq 1$$

y

$$[u]^0 = \overline{\bigcup_{r \in (0,1)} A^r} \subseteq A^0.$$

**Demostración.** Si  $u \in E^n$ , tenemos de la definición

$$[u]^t \subseteq [u]^r \subseteq [u]^0,$$

donde  $[u]^0 = \overline{\bigcup_{r \in (0,1)} [u]^r}$ . Ya que  $u$  es normal,  $u$  se aplica desde  $\mathbb{R}^n$  en  $I = [0, 1]$ . También  $[u]^r$  es un subconjunto compacto de  $\mathbb{R}^n$  para todo  $r \in [0, 1]$  y para cualquier sucesión no decreciente  $r_i \rightarrow r$  en  $I$ ,  $[u]^r = \bigcap_{i \geq 1} [u]^{r_i}$ . También sabemos que  $u$  y  $[u]^r$  son convexo por el lemma 1.5.1. Esto demuestra la primera parte del teorema 1.5.1. A continuación probar lo contrario. Para  $x \in A^0$ , se define  $I_x = \{r \in I : x \in A^r\}$  y sea  $r_0 = \sup I_x$ . El objetivo es que  $I_x = [0, r_0]$ . Si  $r_0 = 0$ , no hay nada que probar y por lo tanto supongamos que  $r_0 > 0$  y sea  $t \in (0, r_0)$ . Entonces existe  $t_1 \in [t, r_0)$  de tal manera que  $t_1 \in I_x$ . Por lo tanto  $x \in A^{t_1}$  lo que implica por (1.5.2),  $x \in A^t$  y  $t \in I_x$ . Por definición,  $0 \in I_x$  y en consecuencia  $[0, r_0] \subseteq I_x$ .

Sea  $r_i$  convergente a  $r_0$  monótonamente en  $I_x$ . Entonces  $x \in A^{r_i}$  para cada  $i = 1, 2, \dots$  y por lo tanto por (1.5.3),  $x \in A^{r_0}$ . Así  $r_0 \in I_x$  y  $[0, r_0] \subseteq I_x$ . Por último, ya que  $t \in I_x$  implica que  $t \leq r_0$ , teniendo  $I_x \subseteq [0, r_0]$ . Por lo tanto  $I_x = [0, r_0]$  como se afirmó.

Sea  $r \in [0, 1]$ . Si  $x \in [u]^r$ , entonces  $u(x) \geq r > 0$  y así  $x \in A^0$  y  $u(x) = \sup I_x = r_0 \geq r$ . Por lo tanto  $x \in A^{r_0}$  y consecuentemente por (1.5.2)  $x \in A^r$ , es decir,  $[u]^r \subseteq A^r$ . Por el contrario, si  $x \in A^r$ , entonces  $u(x) \sup I_x = r_0 \geq r$  y por lo tanto,  $x \in [u]^r$ . Esto implica  $A^r \subseteq [u]^r$ . En función de los resultados, se obtiene  $[u]^r = A^r$  para todo  $r \in (0, 1]$ .

Sea  $[u]^0$ , nos encontramos con que la aplicación  $u : \mathbb{R}^n \rightarrow I$  es semicontinua superior (scs), ya que los intervalos  $[u]^r$  están cerrados. Por otra parte  $[u]^0$  es compacto y por tanto acotado. También es convexo. Así  $u$  satisface los requisitos, excepto convexidad. Para demostrar la convexidad, sea  $x, y \in [u]^r$  con  $\min\{u(x), u(y)\} = \gamma \geq r$ . Entonces,  $x, y \in [u]^\gamma$ , el cual es convexo y así  $\lambda x + (1 - \lambda)y \in [u]^\gamma$  para cualquier  $\lambda \in [0, 1]$ . Por lo tanto

$$u(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \gamma = \min\{u(x), u(y)\},$$

y por lo tanto  $u$  es difuso convexo. en consecuencia  $u \in E^n$ .

Una ventaja de que sólo requiriendo  $u \in E^n$  para ser semi continua superior y no continua es que los subconjuntos compacto no vacíos de  $\mathbb{R}^n$  pueden también estar incluido en  $E^n$  por medio de sus funciones características. Mediante una aplicación simple del teorema 1.5.1, obteniéndose:

**Proposición 2.2.10** *Sea  $A \in KC(\mathbb{R}^n)$ , entonces  $\chi_A \in E^n$ .*

También se necesita el siguiente resultado. Ver Castaing y Valadier [11] para su demostración.

**Teorema 2.2.2** *Sea  $\{A_k\}$  una sucesión en  $P_k(\mathbb{R}^n)$  convergente a  $A$ . Además, sea  $d_H(A_k, A) \rightarrow 0$  cuando  $k \rightarrow \infty$ . Entonces*

$$A = \bigcap_{k \geq 1} \overline{\{U_{m \geq k} A_m\}}.$$

En el contexto de los conjuntos difuso llamamos un subconjunto de  $\mathbb{R}^n$ , o más precisamente su función característica  $\chi_A$ , un subconjunto clásico de  $\mathbb{R}^n$ .

El *endografo*  $end(u)$  de un conjunto difuso  $u \in E^n$  es definido como:

$$end(u) = \{(x, r) \in \mathbb{R}^n \times I : u(x) \leq r\}. \quad (2.54)$$

Es un subconjunto cerrado no vacío de  $\mathbb{R}^n \times I$ . Restringiéndose a los puntos que se encuentran por sobre el conjunto soporte, obtiéndose el soporte endografo o sendografo de la aplicación  $u$

$$send(u) = end(u) \cap ([u]^0 \times I), \quad (2.55)$$

el cual es un subconjunto compacto no vacío de  $\mathbb{R} \times I$ . De hecho,

$$send(u) = \bigcup \{[u]^r \times \{r\} : r \in I\}. \quad (2.56)$$

**Ejemplo 2.2.6** *Sea  $A \in KC(\mathbb{R}^n)$ , así  $\chi_A \in E^n$ . Entonces  $[\chi_A] = r$  para todo  $r \in I$ ,*

$$end(\chi_A) = (\mathbb{R}^n \times \{0\}) \bigcup (A \times I)$$

y

$$send(\chi_A) = A \times I.$$

Vamos a definir la adición y la multiplicación por escalar de conjuntos difusos en  $E^n$  para cierto nivel  $r$ , es decir, sea  $u, v \in E^n$  y  $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$[u + v]^r = [u]^r + [v]^r \quad (2.57)$$

y

$$[cu]^r = c[u]^r \quad (2.58)$$

para cada  $r \in I$ .

**Proposición 2.2.11**  *$E^n$  es cerrado bajo la suma (2.57) y multiplicación por escalar (2.58).*

**Demostración.** Aplicando el Teorema 2.2.1 a las familias de subconjuntos  $\{[u + v]^r : r \in I\}$  y  $\{[cu]^r\}$ . Las propiedades (2.51) y (2.52) se derivan de los  $\{[u]^r : r \in I\}$  y  $\{[v]^r : r \in I\}$ , las definiciones (2.57) y (2.58), y la clausura del conjunto  $KC(\mathbb{R}^n)$  bajo la adición y la multiplicación por escalar. Ahora consideremos  $\{r_i\}$  una sucesión no decreciente en  $I$ , con  $r_i \uparrow r$  en  $I$ . Entonces, por (2.57) y (2.58), y además por la propiedad (2.53) para  $\{[u]^r : r \in I\}$  y  $\{[v]^r : r \in I\}$ , y por la Proposición 2.2.4,

$$\begin{aligned} d_H([u + v]^{r_i}, [u + v]^r) &= d_H([u]^{r_i} + [v]^{r_i}, [u]^r + [v]^r) \\ &\leq d_H([u]^{r_i} + [u]^r) + d_H([v]^{r_i} + [v]^r) \\ &\rightarrow 0 \text{ cuando } n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} d_H([cu]^{r_i}, [cu]^r) &= |c| d_H([u]^{r_i} + [u]^r) \\ &\rightarrow 0 \text{ cuando } n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

por lo tanto las familias de subconjuntos también satisfacen la propiedad (2.53). En consecuencia, según el teorema 2.2.1,  $u + v \in E^n$  y  $cu \in E^n$ .

En la Sección 1.2, El principio de extensión de Zadeh fue usado para definir la adición y la multiplicación por escalar de conjuntos difusos. Es decir:

$$(u \tilde{+} v)(z) = \sup_{z=x+y} \min\{u(x), v(y)\} \quad (2.59)$$

y

$$(\tilde{c}u)(x) = u(x/c). \quad (2.60)$$

en  $E^n$ , esta definición es equivalente a la propuesta en términos de conjuntos de niveles, establecida en (2.57) y (2.58) respectivamente.

**Proposición 2.2.12** Si  $u, v \in E^n$  y  $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , entonces

$$u \tilde{+} v = u + v \quad y \quad \tilde{c}u = cu.$$

**Demostración.** Sea  $r \in (0, 1]$ . Entonces

$$\begin{aligned} \{x : \tilde{c}u(x) \geq r\} &= \{x : u(x/c) \geq r\} \\ &= \{c\tilde{x} : u(\tilde{x}) \geq r\} \\ &= c\{\tilde{x} : u(\tilde{x}) \geq r\} = c[u]^r = [cu]^r \end{aligned}$$

y así las definiciones (2.58) y (2.60) coinciden. Supongamos que  $(u \tilde{+} v)(x) \geq r$ . Por la definición de el supremo, existe un  $x_k \in [u]^{r(1-1/k)}$ ,  $y_k \in [v]^{r(1-1/k)}$  para  $k = 1, 2, \dots$  de modo que  $x_k + y_k = z$  y así

$$(\tilde{u} + \tilde{v})(z) \geq \min\{u(x_k), v(y_k)\} \geq r(1 - 1/k).$$

Ya que  $[u]^{r(1-1/k)} \rightarrow [u]^r$ ,  $[v]^{r(1-1/k)} \rightarrow [v]^r$ , con respecto a la métrica de Hausdorff  $d_H$ , por la compacidad de todos estos conjuntos existe  $x_{k_j} \rightarrow \tilde{x}$  y  $y_{k_j} \rightarrow \tilde{y}$ . Por consiguiente,  $x_{k_j} + y_{k_j} \rightarrow \tilde{x} + \tilde{y}$ . Pero  $x_{k_j} + y_{k_j} = z$  así  $z = \tilde{x} + \tilde{y} \in [u]^r + [v]^r$  y

$$\{z : (u \tilde{+} v) \geq r\} \subseteq [u]^r + [v]^r.$$

La vuelta de la demostración, sea  $\tilde{x} \in [u]^r$  y  $\tilde{y} \in [v]^r$ , de este modo  $u(\tilde{x}) \geq r$  y  $v(\tilde{y}) \geq r$ , entonces con  $z = \tilde{x} + \tilde{y}$

$$(u\tilde{+}v)(z) \geq \min\{u(\tilde{x}), v(\tilde{y})\} \geq r,$$

y así  $[u]^r + [v]^r \subseteq \{z : (u\tilde{+}v)(z) \geq r\}$ . Por lo tanto debemos mostrar que

$$\{z : (u\tilde{+}v)(z) \geq r\} = [u]^r + [v]^r = [u + v]^r,$$

las definiciones (2.57) y (2.59) coinciden.

El concepto de función soporte de un subconjunto no vacío compacto convexo de  $\mathbb{R}^n$ , introducido en la sección 1.4, puede ser usualmente generalizado a los conjuntos difusos en  $E^n$ . Sea  $u \in E^n$  y definiendo  $s_u : I \times S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$  por:

$$s_u(r, p) = s(p, [u]^r) = \sup\{\langle p, a \rangle : a \in [u]^r\} \quad (2.61)$$

para  $(r, p) \in I \times S^{n-1}$ , donde  $s(\cdot, [u]^r)$  es la función soporte de  $[u]^r$ . Vamos a llamar a  $s_u$ , la función soporte de el conjunto difuso  $u$ . Notar que el supremo en (2.61) es alcanzado desde el conjunto de nivel  $[u]^r$ , cual es compacto y así se puede reemplazar por el máximo. Por otra parte, para  $u, v \in E^n$

$$u = v \quad \text{si y sólo si} \quad s_u = s_v, \quad (2.62)$$

ya que la función soporte en  $KC(\mathbb{R}^n)$  caracteriza de forma única los elementos de  $KC(\mathbb{R}^n)$ ; véase la Proposición 2.2.9.

Las siguientes propiedades son una consecuencia directa de las funciones soporte de los conjuntos de nivel.

**Proposición 2.2.13** *Sea  $u \in E^n$ . Entonces la función soporte  $s_u$  es:*

1. Uniformemente acotada en  $I \times S^{n-1}$ ,
2. Lipschitziana en  $p \in S^{n-1}$  y uniformemente en  $I$ , y
3. Para cada  $r \in I$ ,

$$d_H([u]^r, [v]^r) = \sup\{|s_u(r, p) - s_v(r, p)| : p \in S^{n-1}\}. \quad (2.63)$$

**Demostración.** Usando la desigualdad (2.37) y (2.38)

$$|s_u(r, p)| = |s(p, [u]^r)| \leq \|[u]^r\| \|p\| \leq \|[u]^0\|, \quad (2.64)$$

ya que  $[u]^r \subseteq [u]^0$  y  $\|p\| = 1$ , y

$$|s_u(r, p) - s_u(r, q)| = |s(p, [u]^r) - s(q, [u]^r)| \quad (2.65)$$

$$\leq \|[u]^r\| \|p - q\| \quad (2.66)$$

$$\leq \|[u]^0\| \|p - q\|. \quad (2.67)$$

Así, (2.51) y (2.52) se mantienen. La propiedad (2.53) es una reafirmación de (2.44).

Además, obtenemos la siguiente dependencia con respecto al grado de pertenencia.

**Proposición 2.2.14** Sea  $u \in E^n$ . Entonces  $s_u(\cdot, p)$  es no decreciente y continua por su izquierda para  $r \in I$ , para cada  $p \in S^{n-1}$ .

**Demostración.** Ya que  $[u]^t \subseteq [u]^r$  para  $0 \leq t \leq r$

$$s_u(t, p) = s_u(p, [u]^t) \leq s(p, [u]^r) = s_u(r, p)$$

por (2.39), de este modo  $s_u(\cdot, p)$  es creciente para cada  $p \in S^{n-1}$ . Además, para una sucesión no decreciente  $r_i \uparrow r$  en  $I$ ,

$$|s_u(r_i, p) - s_u(r, p)| \leq d_H([u]^{r_i}, [u]^r) \rightarrow 0$$

cuando  $i \rightarrow \infty$  por (2.63) (véase Lemma 2.2.1).

**Ejemplo 2.2.7** Sea  $u \in E^1$ , su conjunto de nivel es  $[u]^r = [-1 + r, 1 - r]$  para  $r \in I$ . Entonces, como  $S^0 = \{-1, 1\}$ , la función soporte  $s_u$  es dada por  $s_u(r, \pm 1) = 1 - r$  para todo  $r \in I$ .

Un conjunto difuso  $u \in E^n$  es llamado un conjunto difuso lipschitziano si es una función Lipschitz de su grado de pertenencia, es decir:

$$d_H([u]^r, [u]^t) \leq K|r - t|$$

para todo  $r, t \in I$  y alguna constante finita  $K$ . En vista de la Proposición 2.2.13, esto es equivalente a que la función soporte  $s_u(\cdot, p)$  sea uniformemente lipschitziana en  $p \in S^{n-1}$ .

El subconjunto  $KC^*$  de conjuntos difusos convexo-sendografo consiste de  $\mathbb{R}^n \times I$ . Por lo tanto  $u \in KC^*$  si y sólo si  $u : \mathbb{R}^n \rightarrow I$  es una función cóncava sobre su soporte  $[u]^0$ , es decir, si y sólo si

$$u(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \lambda u(x) + (1 - \lambda)u(y)$$

para todo  $x, y \in [u]^0$  y  $\lambda \in [0, 1]$ . Tenga en cuenta que un conjunto difuso convexo no es necesariamente un conjunto difuso convexo-sendografo. Denotaremos por  $KC^{1*}$  el subconjunto formado por los  $u \in KC^*$  para que el nivel superior  $[u]^1$  es un conjunto único.

Los conjuntos difusos  $u \in E^1$  son a menudo llamados números difusos. Los *números difusos triangulares* son los conjuntos difusos en  $E^1$  para el cual el sendografo es un triángulo. Un número difuso triangular  $u \in E^1$  se caracteriza por una tripleta (ordenada)  $(x_l, x_c, x_r) \in \mathbb{R}^3$  satisfaciendo  $x_l \leq x_c \leq x_r$ , tal que  $[u]^0 = [x_l, x_r]$  y  $[u]^1 = \{x_c\}$ , entonces

$$[u]^r = [x_c - (1 - r)(x_c - x_l), x_c + (1 - r)(x_r - x_c)]$$

para cualquier  $r \in I$ . Además

$$d_H([u]^r, [u]^t) = |r - t| \max\{x_c - x_l, x_r - x_c\}$$

así que todos los números difusos triangulares son Lipschitzianos.

2.2.5. El espacio métrico  $(E^n, d)$

Puesto que  $E^n$  es un espacio de determinadas funciones  $u : \mathbb{R}^n \rightarrow I$  un candidato evidente para una métrica sobre  $E^n$  es el espacio métricos de funciones

$$d(u, v) = \sup\{|u(x) - v(x)| : x \in \mathbb{R}^n\} \tag{2.68}$$

que mide la diferencia más grande en los grados de pertenencia de los dos conjuntos difusos  $u, v \in E^n$  en todos los puntos  $x$  pertenecientes a  $\mathbb{R}^n$ . Tenga en cuenta que

$$d(cu, cv) = d(u, v) \tag{2.69}$$

para todo  $u, v \in E^n$  y  $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , donde  $cu, cv \in E^n$  son interpretados como la multiplicación por escalar de conjuntos difusos (2.60), en lugar de la multiplicación usual de una función por un escalar.

Considerando a  $D_H$  la métrica de Hausdorff en  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Para cualquier  $u \in E^n$ , el sendografo  $send(u)$ , definido por (2.55), es un subconjunto no vacío compacto convexo de  $\mathbb{R}^n \times I \subset \mathbb{R}^{n+1}$ . La métrica de sendografo  $D_\infty$  en  $E^n$  es definida en terminos de la métrica de Hausdorff en el subespacio  $send(E^n) = \{send(u) : u \in E^n\}$  de  $C(\mathbb{R}^{n+1})$ , que se define:

$$D_\infty(u, v) = D_H(send(u), send(v)) \tag{2.70}$$

para todo  $u, v \in E^n$ . Sin duda, es una métrica ya que  $send(u) = send(v)$  si y sólo si  $u = v$  en  $E^n$ . De las propiedades de la métrica de Hausdorff  $D_H$  en  $C(\mathbb{R}^{n+1})$ , se deduce que:

$$D_\infty(u + w, v + w') \leq D_\infty(u, v) + D_\infty(w, w') \tag{2.71}$$

para todo  $u, v, w, w' \in E^n$  y

$$D_\infty(u + w, v + w) = D_\infty(u, v) \tag{2.72}$$

para todo  $u, v \in E^n$  y  $w \in CK^*$ , es decir con  $send(w)$  convexo.

Las métricas más utilizadas en  $E^n$  involucran la métrica de Hausdorff, es decir la distancia entre los conjuntos de nivel de los conjuntos difusos. Ellos son, de hecho, los espacios métricos de funciones, aplicadas a las funciones  $\phi : I \rightarrow R^+$  definidas por:

$$\phi(r) = d_H([u]^r, [v]^r) \tag{2.73}$$

para  $r \in I$ , donde  $u, v \in E^n$ . En vista de (2.63) y la Proposición 2.2.14, estas funciones son continuas por su izquierda y por lo tanto medible en  $I$ .

La *métrica del supremo*  $d$  en  $E^n$  es definida por:

$$d(u, v) = \sup\{[u]^r, [v]^r : r \in I\} \tag{2.74}$$

para todo  $u, v \in E^n$  y es claramente una métrica en  $E^n$ . El supremo en (2.74) no necesariamente es alcanzado, por lo que no puede ser reemplazado por el máximo.

**Ejemplo 2.2.8** Sea  $u, v \in E^1$  se definen sus conjuntos de niveles por:

$$[u]^r = [v]^r = [0, 1] \quad \text{para } 0 \leq r \leq \frac{1}{2},$$

y

$$[u]^r = \{0\}, [v]^r = [0, 2(1-r)] \quad \text{para } \frac{1}{2} < r \leq 1,$$

así

$$\phi(r) = d_H([u]^r, [v]^r) = \begin{cases} 0 & \text{para } 0 \leq r \leq \frac{1}{2} \\ 2(1-r) & \text{para } \frac{1}{2} < r \leq 1. \end{cases}$$

Entonces  $\sup\{\phi(r) : r \in I\} = 1$ , pero este no es alcanzado.

De las propiedades de la métrica de Hausdorff escritas en las Proposiciones 2.2.4 y 2.2.5, obtenemos

$$d(cu, cv) = |c|d(u, v)$$

$$d(u + w, v + w) = d(u, v)$$

y

$$d(u + w, u + w') \leq (u, v) + d(w, w')$$

para todo  $c > 0$ , y para todo  $u, v, w, w' \in E^n$ .

En vista de la identidad (2.63) en relación a la métrica de Hausdorff, la distancia entre conjuntos de nivel y la distancia entre sus funciones soportes, una expresión alternativa para  $d$  es dada por:

$$d(u, v) = \sup\{|s_u(r, q) - s_v(r, q)| : (r, q) \in I \times S^{n-1}\}$$

para todo  $u, v \in E^n$ .

El espacio  $(E^n, D_\infty)$  y  $(E^n, d)$  son espacios métricos completos. La demostración para ver que  $(E^n, D_\infty)$  es un espacio métrico completo puede ser consultada en [15]-[30]. La demostración de que el espacio métrico  $(E^n, d)$  es completo, será estudiada en lo que sigue.

**Teorema 2.2.3**  $(E^n, d)$  es un espacio métrico completo.

**Demostración.** Sea  $\{u_k\}$  una sucesión de Cauchy en  $(E^n, d)$ . Entonces  $\{[u_k]^r\}$ , para cada  $r \in I$  es una sucesión de Cauchy en  $(KC(\mathbb{R}^n), d_H)$ , el cual es completo, de este modo existe un  $C_r \in KC(\mathbb{R}^n)$  para cada  $r \in I$  de tal manera que:

$$d_H([u_k]^r, C_r) \rightarrow 0 \quad \text{cuando } k \rightarrow \infty.$$

Esta convergencia es uniforme para cada  $r \in I$ . Vamos a mostrar que la familia  $\{C_r : r \in I\}$  satisface las condiciones (2.51) y (2.53) y así existe un  $u \in E^n$  tal que  $[u]^r = C_r$  para cada  $r \in I$ . Dado que  $C_r \in KC(\mathbb{R}^n)$  para cada  $r \in I$ , la condición (2.51) es trivialmente satisfecha. Considere  $0 \leq t < r \leq 1$ . Entonces

$$\begin{aligned} d_H^*(C_r, C_t) &\leq d_H^*(C_r, [u_k]^r) + d_H^*([u_k]^r, [u_k]^t) + d_H^*([u_k]^t, C_t) \\ &\leq d_H(C_r, [u_k]^r) + d_H([u_k]^t, C_t) \\ &\rightarrow 0 \quad \text{cuando } k \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Aquí hemos utilizado  $d_H^*$  como la separación de Hausdorff en  $\mathbb{R}^n$ , de modo  $d_H^*([u_k]^r, [u_k]^t) = 0$  porque  $[u_k]^r \subseteq [u_k]^t$ . Por lo tanto  $d_H^*(C_r, C_t) = 0$  y, ya que estos conjuntos son compactos,  $C_r \subseteq C_t$ ,

de modo que la condición (2.52) se satisface. Sea  $\{r_i\}$  una sucesión no decreciente en  $I$  con  $r_i \uparrow r \in I$ . Por el resultado anterior,  $C_r \subseteq C_{r_i}$  para  $i = 1, 2, \dots$ , así

$$C_r \subseteq \bigcap_{i=1}^{\infty} C_{r_i}. \quad (2.75)$$

consideremos  $x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} C_{r_i}$ , de este modo  $x \in C_{r_i}$  para  $i = 1, 2, \dots$ . Entonces

$$\begin{aligned} d_H^*(\{x\}, C_r) &\leq d_H^*(C_{r_i}, C_r) \\ &\leq d_H^*(C_{r_i}, [u_k]^{r_i}) + d_H^*([u_k]^{r_i}, [u_k]^r) + d_H^*([u_k]^r, C_r) \\ &\rightarrow 0 \text{ cuando } k \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

ya que el primero y tercer término convergen a 0 cuando  $k \rightarrow \infty$  uniformemente en  $r$ ,  $r_i \in I$  y el segundo término converge a 0 cuando  $i \rightarrow \infty$  para cada  $k = 1, 2, \dots$  (Condición (2.53) del Teorema 2.2.1). Así  $x \in C_r$  y  $\bigcap_{i=1}^{\infty} C_{r_i} \subseteq C_r$ . Combinando esto con (2.75) resulta:

$$C_r = \bigcap_{i=1}^{\infty} C_{r_i},$$

y así la condición (2.53) del Teorema 2.2.1 se cumple. Aplicando el Teorema 2.2.1, existe un  $u \in E^n$  tal que  $[u]^r = C_r$  para cada  $r \in I$ . Por otra parte

$$\begin{aligned} d_H([u_k]^r, [u]^r) &\leq d_H([u_k]^r, [u_j]^r) + d_H([u_j]^r, [u]^r) \\ &\leq d(u_k, u_j) + d_H([u_j]^r, [u]^r) \\ &< \epsilon + d_H([u_j]^r, [u]^r) \end{aligned}$$

para cada  $j, k \geq N(\epsilon)$ , ya que  $\{u_k\}$  es una sucesión de Cauchy en  $(E^n, d)$ . Tomando el límite cuando  $j \rightarrow \infty$  se obtiene  $d_H([u_k]^r, [u]^r) \leq \epsilon$  para todo  $k \geq N(\epsilon)$  de manera uniforme en  $r \in I$ , de modo que  $d(u_k, u) \leq \epsilon$  para todo  $k \geq N(\epsilon)$ . Por lo tanto  $u_k \rightarrow u$  en  $(E^n, d)$ , lo cual completa la demostración.

---



---

## CAPÍTULO 3

---

# MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON. MARCO DIFUSO

### Introducción

EN este capítulo se estudia la resolución numérica de sistemas de ecuaciones no lineales difusas, lo cual constituye el objetivo principal de esta tesis. Más precisamente describimos, analizamos y simulamos el método Newton aplicado a sistemas de ecuaciones no lineales difusas. Una de las características principales de este tipo de problemas es que las técnicas analíticas estándares de soluciones, tales como el método de J.J. Buckley y Y. Qu [8]-[10], no son adecuadas para resolverlos. En este capítulo se adaptan los métodos numéricos clásicos a los problemas difusos, y se muestran simulaciones numéricas para ciertos ejemplos particulares.

En este trabajo se quiere determinar la solución numérica de la ecuación no lineal difusa  $F(x) = 0$ , donde  $F$  es una aplicación difusa

$$\begin{aligned} F : \mathcal{F}(\mathbb{R}^n) &\rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}^n) \\ x &\mapsto F(x) \end{aligned}$$

y donde  $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$  denota la clase de los conjuntos difusos sobre  $\mathbb{R}^n$ . Cabe señalar que la ecuación no lineal difusa  $F(x) = 0$  también puede representar un sistema no lineal difuso, considerándolo como una ecuación vectorial. Por lo tanto, cada vez que se escriba  $F(x) = 0$  consideraremos que este es un sistema no lineal difuso, a menos que se diga que sólo es una ecuación no lineal.

Este problema tiene variadas aplicaciones que son de gran interés, y que surgen con bastante frecuencia en las matemáticas, ingeniería, ciencias sociales y las ciencias naturales. Bajo la mirada de la lógica difusa nuestra ecuación no lineal difusa  $F(x) = 0$  debe ser resuelta para modelar ciertos fenómenos presentes en las diversas ciencias. Dicha tarea en general no puede ser efectuada de manera exacta, es decir en un número finito de pasos. Para resolver este problema se podría pensar en adaptar los métodos numéricos clásicos a los problemas difusos, y tratar de extender los resultados conocidos a los mismos.

De aquí, se formulan las siguientes interrogantes:

- Dada una ecuación no lineal difusa  $F(x) = 0$ , ¿Bajo que condiciones posee solución?

- ¿Es posible adaptar los métodos numéricos clásicos, tales como Newton o cuasi Newton, para la resolución numérica de  $F(x) = 0$ ?
- Si es afirmativa la respuesta precedente, ¿Cuál será el orden de convergencia de estos métodos?

En cuanto a las interrogantes anteriores, se puede mencionar que en el año 1990 J.J Buckley y Y. Qu [8] dan a conocer condiciones necesarias y suficientes para la existencia de soluciones de algunas ecuaciones lineales y cuadráticas, que modelan algunos fenómenos de la química, economía, finanzas y física. Obtienen solución cuando los parámetros difusos son reales o complejos. Más tarde en el año 1991, los mismos autores trabajan en un nuevo concepto de solución para resolver ecuaciones difusas [9]. Posteriormente construyen una solución  $\tilde{x}$  para la ecuación matricial difusa  $\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$  donde los elementos en  $\tilde{A}$  y  $\tilde{b}$  son números difusos triangulares (véase [13]),  $\tilde{A}$  es cuadrada y no-singular. Se argumenta que los métodos previos que determinan a  $\tilde{x}$ , los cuales están basados en el principio de extensión y aritmética difusa clásica, deben ser abandonados, ya que es demasiado habitual no encontrar soluciones. Es por ello que Buckley y Y. Qu presentan seis nuevas soluciones de las cuales se demuestra que cinco de ellas son idénticas. Luego, adoptan el valor común  $\tilde{X}$  de estas cinco nuevas soluciones como solución para  $\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$ . Además muestran que  $\tilde{X}$  es un vector difuso de  $\mathbb{R}^n$ , i.e.,  $\tilde{X} = (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n)$ , donde  $\tilde{x}_i$  es un número real difuso para cada  $i = 1 \dots n$  [10]. Por otro lado, en el año 2004 los autores S. Abbasbandy y B. Asady [2], proponen una solución numérica para una ecuación no lineal difusa por medio del método de Newton. Posteriormente los autores B. Asady, S. Abbasbandy y M. Alavi [1] desarrollan un método para resolver un sistema lineal difuso  $m \times n$ , con  $m \leq n$ . Dan a conocer condiciones para la existencia de una solución difusa y explican el procedimiento numérico para determinar la solución. Mas tarde, en el año 2006, los autores S. Abbasbandy, J.J. Nieto, R. Ezzati y E. Rodríguez-López [4] proponen una solución numérica para la ecuación  $Ex^2 + Fx + G = x$ , donde  $E, F, G$  y  $x$  son números difusos positivos utilizando el método de Newton. Posteriormente en el año 2006, los autores S. Abbasbandy y R. Ezzati [3] dan a conocer la solución numérica para un sistema de ecuaciones no lineales difuso por medio del método de Newton. Además los autores S. Abbasbandy y A. Jafarian [2] dan a conocer la solución numérica para una ecuación no lineal difusa por el método del máximo descenso, así como también los mismos autores aproximan la solución de un sistema de ecuaciones lineales difuso [6], por medio del método de máximo descenso, discutiendo su orden de convergencia. Recientemente en el año 2008, el autor Javad Shokri [31] sugiere analizar un nuevo método iterativo de dos pasos para resolver la ecuación no lineal difusa usando la regla de la cuadratura del punto medio.

Como se puede observar, en los últimos años se ha prestado bastante atención al desarrollo de métodos iterativos que permitan resolver la ecuación no lineal difusa  $F(x) = 0$ . Nuestro propósito es describir el método de Newton y aplicarlo a la resolución de problemas más generales (coeficientes de las ecuaciones que no sean necesariamente números difusos triangulares, o no necesariamente positivos).

Este capítulo está organizado como sigue. En un principio describimos el método de Newton para la resolución de un sistema no lineal difuso. Enseguida se muestran simulaciones numéricas para resolver algunos ejemplos particulares de sistemas de ecuaciones no lineales difusas.

### 3.1. El Método de Newton-Raphson para ecuaciones no lineales difusas

Nuestro primer objetivo es resolver numéricamente la ecuación no lineal difusa:

$$F(x) = 0 \tag{3.1}$$

donde  $F : E^1 \rightarrow E^1$  es una aplicación no lineal difusa, definida en  $E^1 := \mathcal{F}(\mathbb{R})$  sobre sí mismo. La forma paramétrica asociada a (3.1) es la siguiente:

$$\begin{cases} \underline{F}(\underline{x}(r), \bar{x}(r); r) = 0, \\ \overline{F}(\underline{x}(r), \bar{x}(r); r) = 0, \end{cases} \quad \forall r \in [0, 1], \tag{3.2}$$

donde  $(\underline{x}(r), \bar{x}(r))$  denota la parametrización del número difuso  $x$  para cada  $0 \leq r \leq 1$ . Sea  $H : \mathbb{R}^2 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  la aplicación definida por:

$$H(\mathbf{x}; r) := (\underline{F}(\mathbf{x}; r), \overline{F}(\mathbf{x}; r)),$$

donde  $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ . Sea  $u(r) := (\underline{x}(r), \bar{x}(r))$  y  $u^*(r) = (\underline{x}^*(r), \bar{x}^*(r))$  la solución del sistema (3.2), es decir,  $H(u^*(r); r) = 0$  para cada  $r \in [0, 1]$ .

Considerando el estudio desarrollado en el capítulo precedente, concretamente en la sección (1.2.4), se obtienen ciertas condiciones que garantizan la existencia de soluciones y la convergencia del proceso de Newton para el sistema no lineal  $H(\mathbf{x}(r); r) = 0$  para cada  $r \in [0, 1]$ . En primera instancia se exige que la aplicación  $\mathbf{x} \mapsto H(\mathbf{x}; r)$ , para cada  $r \in [0, 1]$  fijo, así como también sus primeras y segundas derivadas parciales deben estar definidas y ser continuas en un cierto conjunto  $\Omega$  abierto de  $\mathbb{R}^2$ , es decir,  $H(\cdot; r) \in C^2(\Omega)$  para cada  $r \in [0, 1]$  fijo. Adicionalmente suponemos que la condición inicial  $u^{(0)}(r)$  pertenece al conjunto  $\Omega$  con su  $\rho$ -vecindad cerrada, es decir:

$$\overline{U}_\rho(u^{(0)}) = \{\|x - u^{(0)}\| \leq \rho\} \subset \Omega$$

donde esta norma ha entenderse como la  $m$ -norma. Además se deben verificar las siguientes condiciones sobre el conjunto  $\Omega$ :

1. La matriz jacobiana  $J(\mathbf{x}) = \left[ \frac{\partial H_i}{\partial x_j} \right]$  tiene inversa  $T_0 = [J(u^{(0)})]^{-1}$ , donde  $u^{(0)}$  es la condición inicial y donde se satisface

$$\|T_0\| \leq A_0$$

2.  $\|T_0 H(u^{(0)})\| \leq B_0 \leq \frac{\rho}{2}$ ,

3.  $\sum_{k=1}^n \left| \frac{\partial^2 H_i(\mathbf{x})}{\partial x_j \partial x_k} \right| \leq C$ , donde  $\mathbf{x} \in U(u^{(0)})$ ,

4. Las constantes  $A_0, B_0$  y  $C$  satisfacen la relación

$$\beta_0 = 2nA_0B_0C \leq 1$$

Bajo estos supuestos, el proceso de Newton, dado por:

$$u^{(n+1)} = u^{(n)} - [J(u^{(n)})]^{-1}H(u^{(n)}) \quad n \geq 0$$

converge partiendo de la condición inicial  $u^{(0)}(r) := (\underline{x}(1), \bar{x}(1), \underline{x}(1) - \underline{x}(0), \bar{x}(0) - \bar{x}(1))$  y el vector límite,  $u^* = \lim_{n \rightarrow \infty} u^{(n)}$ , es la solución del sistema (3.2) de modo que

$$\|u^*(r) - u^{(0)}(r)\| \leq 2B_0 \leq \rho$$

Si adicionalmente suponemos que  $\underline{x}^*(r) \leq \bar{x}^*(r)$  para cada  $r \in [0, 1]$  y que  $r \mapsto \underline{x}^*(r)$  es una aplicación acotada, monótona creciente y continua por su izquierda, y que  $r \mapsto \bar{x}^*(r)$  es una aplicación acotada, monótona decreciente y continua por su izquierda. Entonces, por el teorema de representación de *Negoita-Ralescu* sabemos que existe un único número difuso  $x^*(r)$  tal que  $(\underline{x}^*(r), \bar{x}^*(r))$  es su parametrización. En este caso, diremos que  $x^*(r)$  es solución de la ecuación difusa (3.1).

Nuestro segundo objetivo es resolver numéricamente el sistema no lineal difuso:

$$\begin{cases} F(X, Y) = 0, \\ G(X, Y) = 0. \end{cases} \quad (3.3)$$

Donde  $X, Y \in E^1$ . En forma paramétrica, el sistema anterior se escribe:

$$\begin{cases} \underline{F}(\underline{X}(r), \bar{X}(r), \underline{Y}(r), \bar{Y}(r); r) = 0, \\ \bar{F}(\underline{X}(r), \bar{X}(r), \underline{Y}(r), \bar{Y}(r); r) = 0, \\ \underline{G}(\underline{X}(r), \bar{X}(r), \underline{Y}(r), \bar{Y}(r); r) = 0, \\ \bar{G}(\underline{X}(r), \bar{X}(r), \underline{Y}(r), \bar{Y}(r); r) = 0, \end{cases} \quad \forall r \in [0, 1], \quad (3.4)$$

donde  $(\underline{X}(r), \bar{X}(r))$  (resp.  $(\underline{Y}(r), \bar{Y}(r))$ ) corresponde a la parametrización de  $X$  (resp. de  $Y$ ).

Sea  $H : \mathbb{R}^4 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^4$  definida por:

$$H(\mathbf{x}; r) := (\underline{F}(\mathbf{x}; r), \bar{F}(\mathbf{x}; r), \underline{G}(\mathbf{x}; r), \bar{G}(\mathbf{x}; r)),$$

donde  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ . Definiendo  $\mathbf{U}(r) := (\underline{X}(r), \bar{X}(r), \underline{Y}(r), \bar{Y}(r))$ , tenemos que  $\mathbf{U}^*(r) = (\underline{X}^*(r), \bar{X}^*(r), \underline{Y}^*(r), \bar{Y}^*(r))$  es la solución del sistema (3.4) si y solamente si  $H(\mathbf{U}^*(r); r) = 0$  para todo  $r \in [0, 1]$ .

Imponiendo condiciones que garantizan la existencia de la solución y la convergencia del proceso de Newton para el sistema no lineal  $H(\mathbf{x}; r) = 0$ . Se exige que la aplicación  $H$ , su primera y segundas derivadas deben estar bien definidas y ser continuas en un cierto dominio  $\Omega$ , es decir,  $H(\mathbf{x}; r) \in C^2(\Omega)$ . Adicionalmente suponer que la condición inicial  $U^{(0)}(r)$  pertenece al conjunto  $\Omega$  con su  $r$ -vecindad cerrada, es decir

$$\bar{V}_r(U^{(0)}) = \{\|X - U^{(0)}\| \leq r\} \subset \Omega$$

donde esta norma ha entenderse como la  $m$ -norma. Además se deben verificar las siguientes condiciones sobre el conjunto  $\Omega$ :

1. La matriz jacobiana  $J(\mathbf{x}) = \left[ \frac{\partial H_i}{\partial x_j} \right]$  tiene inversa  $T_0 = [J(U^{(0)})]^{-1}$ , donde  $U^{(0)}$  es la condición inicial y además se satisface

$$\|T_0\| \leq A_0$$

2.  $\|T_0 H(U^{(0)})\| \leq B_0 \leq \frac{r}{2}$ ,

3.  $\sum_{k=1}^n \left| \frac{\partial^2 H_i(\mathbf{x})}{\partial x_j \partial x_k} \right| \leq C$ , donde  $\mathbf{x} \in V(U^{(0)})$ ,

4. Las constantes  $A_0, B_0$  y  $C$  satisfacen la relación

$$\beta_0 = 2nA_0B_0C \leq 1$$

Bajo estos requerimientos, el proceso de Newton, dado por:

$$U^{(n+1)} = U^{(n)} - [J_H(U^{(n)})]^{-1} H(U^{(n)}) \quad n \geq 0$$

converge partiendo de la condición inicial  $U^{(0)}(r) = (X^{(0)}(r), Y^{(0)}(r))$  dada por el número difuso trapezoidal:

$$\begin{cases} X^{(0)}(r) & := (\underline{X}(1), \overline{X}(1), \underline{X}(1) - \underline{X}(0), \overline{X}(0) - \overline{X}(1)), \\ Y^{(0)}(r) & := (\underline{Y}(1), \overline{Y}(1), \underline{Y}(1) - \overline{Y}(0), \overline{Y}(0) - \overline{Y}(1)). \end{cases}$$

y el vector límite,  $U^* = \lim_{n \rightarrow \infty} U^{(n)}$ , es la solución del sistema (3.4) de modo que

$$\|U^*(r) - U^{(0)}(r)\| \leq 2B_0 \leq r$$

**Teorema 3.1.1** *Supongamos que para cada  $r \in [0, 1]$  fijo, la función  $H(\cdot; r)$  es de clase  $C^1$  con respecto a  $U$ . Supongamos que existe  $\beta > 0$  tal que  $\|J_H(U^*(r); r)^{-1}\| \leq \beta$  y que  $J_H$  es lipschitziana con respecto a  $U$ , con constante de Lipschitz  $\gamma$ , entonces la sucesión  $(U^{(n)}(r))_{n \in \mathbb{N}}$  converge a  $U^*(r)$ , y se tiene que:*

$$\|U^{(n+1)}(r) - U^*(r)\| \leq \beta\gamma \|U^{(n)}(r) - U^*(r)\|^2 \quad \forall r \in [0, 1]. \quad (3.5)$$

Por último, enunciaremos un resultado [23] que utilizaremos

**Teorema 3.1.2** *Sea  $E, F, G$  números difusos tales que*

$$E, F, G \geq \chi_0,$$

*y suponga que existe un  $p > 0$  de modo que*

$$\overline{E}(0)p^2 + \overline{F}(0)p + \overline{G}(0) \leq p,$$

*entonces la ecuación difusa  $Ex^2 + Fx + G = x$  tiene soluciones en el intervalo*

$$[\chi_0, \chi_p] := \{x \in E^1 : \chi_0 \leq x \leq \chi_p\}.$$

3.1.1. Ecuaciones cuadráticas difusas

En este apartado discutiremos entorno de las soluciones de las igualdades difusas  $AX^2 = C$ ,  $AX^2 + B = C$  y  $AX^2 + BX = C$ , En cada uno de los casos consideramos que  $A$  y  $C$  (o  $A, B, C$ ) son números difusos reales.

1.  $AX^2 = C$

- Sean  $A$  y  $C$  números difusos reales. Se asumirá que el cero no pertenece al soporte de  $A$ , de este modo  $A > 0$  o  $A < 0$ . Además, ya que  $X^2 \geq 0$  necesariamente tenemos que  $C \geq 0$  o  $C \leq 0$ .

**Teorema.** Existe la solución  $\underline{X} \geq 0$  y  $\overline{X} = -\underline{X}$ , si y sólo si:

- (a)  $a_1c_2 > c_1a_2$  y  $a_3c_2 < c_3a_2$  cuando  $A > 0, C \geq 0$ ;
- (b)  $a_1c_2 < c_1a_2$  y  $a_3c_2 > c_3a_2$  cuando  $A < 0, C \leq 0$ .

2.  $AX^2 + B = C$

- Sean  $A, B$  y  $C$  números difusos reales. Considere  $c_i^* = c_i - b_i, i = 1, 2, 3$ .

**Teorema.** La ecuación tiene soluciones  $\underline{X} \geq 0$  y  $\overline{X} = -\underline{X}$ , si y sólo si

- (a)  $c_i^* \geq 0$  para todo  $i$ ,  $a_1c_2^* > c_1^*a_2$  y  $a_3c_2^* < c_3^*a_2$  cuando  $A > 0$ ;
- (b)  $c_i^* \leq 0$  para todo  $i$ ,  $a_1c_2^* < c_1^*a_2$  y  $a_3c_2^* > c_3^*a_2$  cuando  $A < 0$ .

3.  $AX^2 + BX = C$

- $A, B, C$  y  $X$  son números difusos reales. Considerando el conjunto de los  $r$ -nivel obtenemos dos ecuaciones para resolver  $\underline{x}(r)$  y  $\overline{x}(r)$  (ver cuadro 1.1). En cada uno de los ocho casos considerar: (1)  $x_1$  es una solución para  $\underline{x}(r)$  cuando  $r = 0$ ; (2)  $x_2$  es una solución para  $\underline{x}(r)$  y  $\overline{x}(r)$  cuando  $r = 1$ ; y (3)  $x_3$  es una solución para  $\overline{x}(r)$  cuando  $r = 0$ ;

Ya que estamos interesados en determinar soluciones reales  $X$ , asumiremos que los  $x_i$  son números reales y escogiendo  $x_i \geq 0$  cuando  $X \geq 0$  y  $x_i \leq 0$  cuando  $X \leq 0$ .

**Teorema.** (a) Caso  $P(1, 1)$  tiene una solución  $X \geq 0$  si y sólo si  $0 \leq x_1 < x_2 < x_3$  y

$$c_2 - c_1 > (a_2 - a_1)x_2^2 + (b_2 - b_1)x_2, \tag{3.6}$$

$$c_3 - c_2 > (a_3 - a_2)x_3^2 + (b_3 - b_2)x_3. \tag{3.7}$$

(b) Caso  $P(2, 2)$  tiene una solución  $X \geq 0$  si y sólo si  $0 \leq x_1 < x_2 < x_3$  y

$$c_2 - c_1 > (a_2 - a_1)x_3^2 + (b_2 - b_1)x_3, \tag{3.8}$$

$$c_3 - c_2 > (a_3 - a_2)x_2^2 + (b_3 - b_2)x_2. \tag{3.9}$$

(c) Caso  $N(1, 2)$  tiene una solución  $X \leq 0$  si y sólo si  $x_1 < x_2 < x_3 \leq 0$  y

$$c_2 - c_1 > (a_2 - a_1)x_2^2 + (b_3 - b_2)x_2, \tag{3.10}$$

$$c_3 - c_2 > (a_3 - a_2)x_1^2 + (b_1 - b_2)x_1. \tag{3.11}$$

(d) Caso  $N(2, 1)$  tiene una solución  $X \leq 0$  si y sólo si  $x_1 < x_2 < x_3 \leq 0$  y

$$c_2 - c_1 > (a_2 - a_1)x_1^2 + (b_3 - b_2)x_1, \tag{3.12}$$

$$c_3 - c_2 > (a_3 - a_2)x_2^2 + (b_1 - b_2)x_2. \tag{3.13}$$

Resolver la ecuación considerando $X \geq 0$ ( $0 \leq r \leq 1$ )		
	$B \geq 0$	$B \leq 0$
$A > 0$	$\begin{aligned} a_1(r)(x_1(r))^2 + b_1(r)x_1(r) &= c_1(r) \\ a_2(r)(x_2(r))^2 + b_2(r)x_2(r) &= c_2(r) \\ &P(1, 1) \end{aligned}$	$\begin{aligned} a_1(r)(x_1(r))^2 + b_1(r)x_2(r) &= c_1(r) \\ a_2(r)(x_2(r))^2 + b_2(r)x_1(r) &= c_2(r) \\ &P(1, 2) \end{aligned}$
$A < 0$	$\begin{aligned} a_1(r)(x_2(r))^2 + b_1(r)x_1(r) &= c_1(r) \\ a_2(r)(x_1(r))^2 + b_2(r)x_2(r) &= c_2(r) \\ &P(2, 1) \end{aligned}$	$\begin{aligned} a_1(r)(x_2(r))^2 + b_1(r)x_2(r) &= c_1(r) \\ a_2(r)(x_1(r))^2 + b_2(r)x_1(r) &= c_2(r) \\ &P(2, 2) \end{aligned}$
Resolver la ecuación considerando $X \leq 0$ ( $0 \leq r \leq 1$ )		
	$B \leq 0$	$B \geq 0$
$A > 0$	$\begin{aligned} a_1(r)(x_2(r))^2 + b_2(r)x_1(r) &= c_1(r) \\ a_2(r)(x_1(r))^2 + b_1(r)x_2(r) &= c_2(r) \\ &N(1, 1) \end{aligned}$	$\begin{aligned} a_1(r)(x_2(r))^2 + b_2(r)x_2(r) &= c_1(r) \\ a_2(r)(x_1(r))^2 + b_1(r)x_1(r) &= c_2(r) \\ &N(1, 2) \end{aligned}$
$A < 0$	$\begin{aligned} a_1(r)(x_1(r))^2 + b_2(r)x_1(r) &= c_1(r) \\ a_2(r)(x_2(r))^2 + b_1(r)x_2(r) &= c_2(r) \\ &N(2, 1) \end{aligned}$	$\begin{aligned} a_1(r)(x_1(r))^2 + b_2(r)x_2(r) &= c_1(r) \\ a_2(r)(x_2(r))^2 + b_1(r)x_1(r) &= c_2(r) \\ &N(2, 2) \end{aligned}$

Cuadro 3.1: Resolución de la ecuación no lineal  $AX^2 + BX = C$  en términos de los signos de sus coeficientes.

### 3.2. Ejemplos numéricos

En esta sección daremos a conocer ejemplos para ilustrar el método de Newton-Raphson, se mostrarán los resultados obtenidos usando Matlab. En particular, resolveremos algunas ecuaciones difusas y algunos sistemas de ecuaciones no lineales difusos.

#### 3.2.1. Ilustraciones del Método de Newton para ecuaciones no lineales difusas

En el ejemplo siguiente empleamos el Teorema 3.1.2 para asegurar la existencia de soluciones.

**Ejemplo 3.2.1** Consideremos la ecuación no lineal difusa

$$(0, 0.5, 1)x^2 + (0, 0.1, 0.25)x + (0.025, 0.05, 0.1) = x.$$

Suponiendo que  $x$  es un número difuso positivo, la forma paramétrica de esta ecuación es:

$$\begin{cases} 0.5r\underline{x}^2(r) - (1 - 0.1r)\underline{x}(r) + (0.025 + 0.025r) = 0, \\ (1 - 0.5r)\overline{x}^2(r) - (0.75 + 0.15r)\overline{x}(r) + (0.1 - 0.05r) = 0. \end{cases} \quad (3.14)$$

Para obtener la condición inicial se evalúa el sistema (3.14) en  $r = 0$  y  $r = 1$ ,

$$\begin{cases} -\underline{x}(0) + 0.025 = 0, & \begin{cases} 0.5\underline{x}^2(1) - 0.9\underline{x}(1) + 0.05 = 0, \\ 0.5\overline{x}^2(1) - 0.9\overline{x}(1) + 0.05 = 0. \end{cases} \\ \overline{x}^2(0) - 0.75\overline{x}(0) + 0.1 = 0, & \end{cases}$$

obteniéndose  $\underline{x}(0) = 0.025$ ,  $\overline{x}(0) = 0.1734$  y  $\underline{x}(1) = \overline{x}(1) = 0.0574$ . Por tanto la condición inicial es  $x^{(0)} = (0.0574, 0.0574, 0.0324, 0.116)$ . Hemos resuelto el sistema (3.14) para 20 valores de  $r$  en una malla equiespaciada del intervalo  $[0, 1]$ , al cabo de 2 iteraciones como máximo, obtenemos una solución aproximada con un error menor que  $3 \cdot 10^{-4}$  para cada  $r$  en dicha malla (ver figura 3.1).

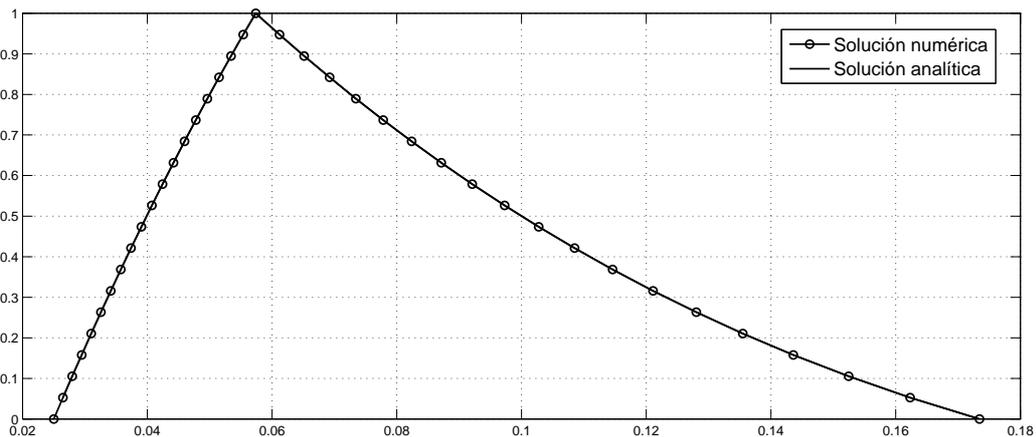


Figura 3.1: Gráfico de la solución numérica y analítica (suponiendo  $x \geq 0$ )

Ahora suponiendo  $x$  negativo se tiene

$$\begin{cases} 0.5r\bar{x}^2(r) - (0.75 + 0.15r)\underline{x}(r) + (0.025 + 0.025r) = 0, \\ (1 - 0.5r)\underline{x}^2(r) - (1 - 0.1r)\bar{x}(r) + (0.1 - 0.05r) = 0. \end{cases} \quad (3.15)$$

Resolviendo el sistema (3.15) para  $r = 0$  resulta:

$$\begin{cases} -0.75\underline{x}(0) + 0.025 = 0, \\ \underline{x}^2(0) - \bar{x}(0) + 0.1 = 0, \end{cases} \quad (3.16)$$

se tiene que  $\underline{x}(0) \simeq 0.0\bar{3}$  y  $\bar{x}(0) \simeq 0.10\bar{1}$ , lo cuál no es posible, ya que  $x$  debe ser no positivo para cada valor de  $r$ , en consecuencia la raíz negativa no existe.

**Ejemplo 3.2.2** Consideremos la ecuación no lineal difusa

$$(4, 5, 1, 1)x^2 + (1, 2, 1, 1)x = (1, 2, 1, 1).$$

Suponiendo que  $x$  es un número difuso positivo, la forma paramétrica de esta ecuación es:

$$\begin{cases} (3 + r)\underline{x}^2(r) + r\underline{x}(r) - r = 0, \\ (6 - r)\bar{x}^2(r) + (3 - r)\bar{x}(r) - (3 - r) = 0. \end{cases} \quad (3.17)$$

Para obtener la condición inicial se evalúa el sistema (3.17) en  $r = 0$  y  $r = 1$ :

$$\begin{cases} 3\underline{x}^2(0) = 0, & \begin{cases} 4\underline{x}^2(1) + \underline{x}(1) - 1 = 0, \\ 5\bar{x}^2(1) + 2\bar{x}(1) - 2 = 0, \end{cases} \\ 6\bar{x}^2(0) + 3\bar{x}(0) - 3 = 0, & \end{cases}$$

obteniéndose  $\underline{x}(0) = 0$ ,  $\bar{x}(0) = 0.5$ ,  $\underline{x}(1) = 0.3904$  y  $\bar{x}(1) = 0.4633$ . Por tanto la condición inicial es  $x^{(0)} = (0.3904, 0.4633, 0.3904, 0.0367)$ .

Hemos resuelto el sistema (3.17) para 20 valores de  $r$  en una malla equiespaciada del intervalo  $[0, 1]$ , al cabo de 5 iteraciones como máximo, obtenemos una solución aproximada con un error menor que  $8 \cdot 10^{-4}$  para cada  $r$  en dicha malla (ver figura 3.2).

Ahora suponiendo  $x$  negativo se tiene que:

$$\begin{cases} (3 + r)\bar{x}^2(r) + r\underline{x}(r) = r, \\ (6 - r)\underline{x}^2(r) + (3 - r)\bar{x}(r) = (3 - r). \end{cases} \quad (3.18)$$

Resolviendo el sistema (3.18) para  $r = 0$  y  $r = 1$ :

$$\begin{cases} 3\bar{x}^2(0) = 0, & \begin{cases} 4\bar{x}^2(1) + \underline{x}(1) - 1 = 0, \\ 5\underline{x}^2(1) + 2\bar{x}(1) - 2 = 0. \end{cases} \\ 6\underline{x}^2(0) + 3\bar{x}(0) - 3 = 0, & \end{cases}$$

Se obtiene  $\underline{x}(0) \simeq -0.7071$  y  $\bar{x}(1) \simeq -0.8183$ , por tanto  $\underline{x}(0) > \bar{x}(1)$ , en consecuencia la raíz negativa no existe.

En el ejemplo siguiente empleamos el Teorema 3.1.2 para asegurar la existencia de soluciones.

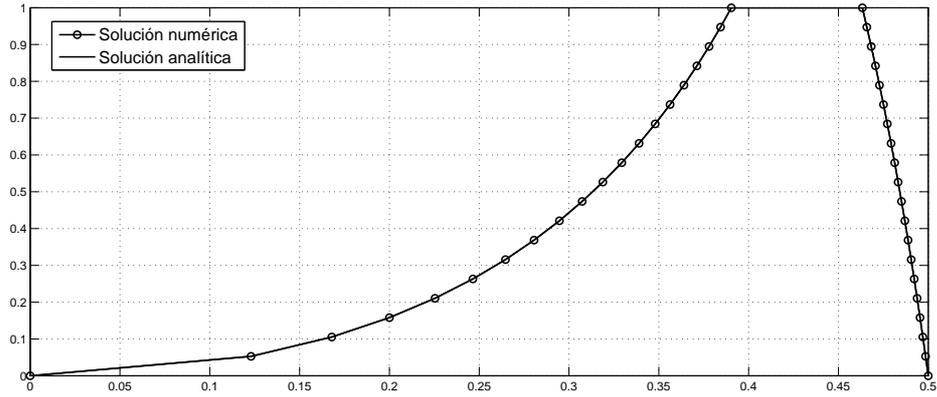


Figura 3.2: Gráfico de la solución numérica y analítica (suponiendo  $x \geq 0$ )

**Ejemplo 3.2.3** Consideremos la ecuación no lineal difusa

$$(2, 4, 1, 2)x^2 + (0, 0.25, 0.5)x + (0, 0.0025, 00.005) = 0.$$

Suponiendo que  $x$  es un número difuso positivo, la forma paramétrica de esta ecuación es:

$$\begin{cases} (1+r)\underline{x}^2(r) + (0.25r-1)\underline{x}(r) + (0.0025r) = 0, \\ (6-2r)\overline{x}^2(r) - (0.5+0.25r)\overline{x}(r) + (0.005-0.0025r) = 0. \end{cases} \quad (3.19)$$

Para obtener la condición inicial se evalúa el sistema (3.19) en  $r = 0$  y  $r = 1$ :

$$\begin{cases} \underline{x}^2(0) - \underline{x}(0) = 0, & \begin{cases} 2\underline{x}^2(1) - 0.75\underline{x}(1) + 0.0025 = 0, \\ 4\overline{x}^2(1) - 0.75\overline{x}(1) + 0.0025 = 0. \end{cases} \\ 6\overline{x}^2(0) - 0.5\overline{x}(0) + 0.005 = 0, & \end{cases}$$

Se obtiene  $\underline{x}(0) = 0$ ,  $\overline{x}(0) = 0.0717$  y  $\underline{x}(1) = \overline{x}(1) = 0.0034$ . Por tanto la condición inicial es  $x^{(0)} = (0.0034, 0.0034, 0.0034, 0.0683)$ . Hemos resuelto el sistema (3.19) para 20 valores de  $r$  en una malla equiespaciada del intervalo  $[0, 1]$ , al cabo de 2 iteraciones como máximo, obtenemos una solución aproximada con un error menor que  $6 \cdot 10^{-5}$  para cada  $r$  en dicha malla (ver figura 3.3).

Ahora suponiendo  $x$  negativo se tiene:

$$\begin{cases} (3+r)\overline{x}^2(r) + (3-r)\underline{x}(r) - (1+r) = 0, \\ (5-r)\underline{x}^2(r) + (1+r)\overline{x}(r) - (3-r) = 0. \end{cases} \quad (3.20)$$

Resolviendo el sistema (3.20) para  $r = 0$  se obtiene:

$$\begin{cases} 3\overline{x}^2(0) + 3\underline{x}(0) - 1 = 0, \\ 5\underline{x}^2(0) + \overline{x}(0) - 3 = 0. \end{cases} \quad (3.21)$$

Se tiene  $\underline{x}(0) \simeq -0.9069$  y  $\overline{x}(0) \simeq -1.1137$ , por tanto  $\underline{x}(0) > \overline{x}(0)$ , y en consecuencia la raíz negativa no existe.

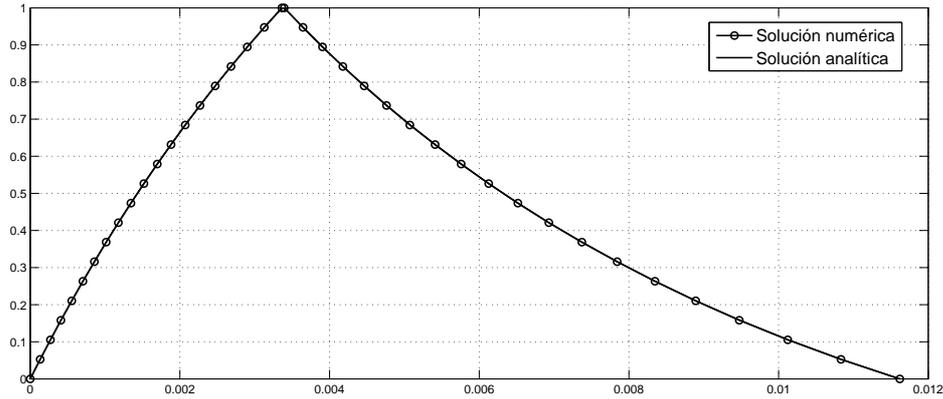


Figura 3.3: Gráfico de la solución numérica y analítica (suponiendo  $x \geq 0$ )

### 3.2.2. Ilustraciones del Método de Newton para sistemas de ecuaciones no lineales difusos

**Ejemplo 3.2.4** Consideremos el sistema no lineal difuso

$$\begin{cases} X^2 - \frac{1}{2}Y^2 = (1, 4, 0.6, 3), \\ \frac{1}{4}X^2 + \frac{3}{2}Y^2 = (1, 3, 0.5, 1). \end{cases}$$

Suponiendo que  $X$  e  $Y$  positivos, la forma paramétrica de este sistema es:

$$\begin{cases} \underline{X}^2(r) - \frac{1}{2}\overline{Y}^2(r) = (0.4 + 0.6r), \\ \overline{X}^2(r) - \frac{1}{2}\underline{Y}^2(r) = (7 - 3r), \\ \frac{1}{4}\underline{X}^2(r) + \frac{3}{2}\underline{Y}^2(r) = (0.5 + 0.5r), \\ \frac{1}{4}\overline{X}^2(r) + \frac{3}{2}\overline{Y}^2(r) = (4 - r). \end{cases} \quad (3.22)$$

Para obtener la condición inicial, evaluamos el sistema (3.22) para  $r = 0$  y  $r = 1$ :

$$\begin{cases} \underline{X}^2(0) - \frac{1}{2}\overline{Y}^2(0) - 0.4 = 0, \\ \overline{X}^2(0) - \frac{1}{2}\underline{Y}^2(0) - 7 = 0, \\ \frac{1}{4}\underline{X}^2(0) + \frac{3}{2}\underline{Y}^2(0) - 0.5 = 0, \\ \frac{1}{4}\overline{X}^2(0) + \frac{3}{2}\overline{Y}^2(0) - 4 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \underline{X}^2(1) - \frac{1}{2}\overline{Y}^2(1) - 1 = 0, \\ \overline{X}^2(1) - \frac{1}{2}\underline{Y}^2(1) - 4 = 0, \\ \frac{1}{4}\underline{X}^2(1) + \frac{3}{2}\underline{Y}^2(1) - 1 = 0, \\ \frac{1}{4}\overline{X}^2(1) + \frac{3}{2}\overline{Y}^2(1) - 3 = 0, \end{cases}$$

obteniéndose  $\underline{X}(0) = 1.069606$ ,  $\overline{X}(0) = 2.659197$ ,  $\underline{Y}(0) = 0.3777$ ,  $\overline{Y}(0) = 1.219882$ ,  $\underline{X}(1) = 1.284659$ ,  $\overline{X}(1) = 2.048366$ ,  $\underline{Y}(1) = 0.625756$ ,  $\overline{Y}(1) = 1.140482$ . Por tanto

$$X_0 = (1.284659, 2.048366, 0.215053, 0.610831), \quad Y_0 = (0.625786, 1.140482, 0.248086, 0.0794).$$

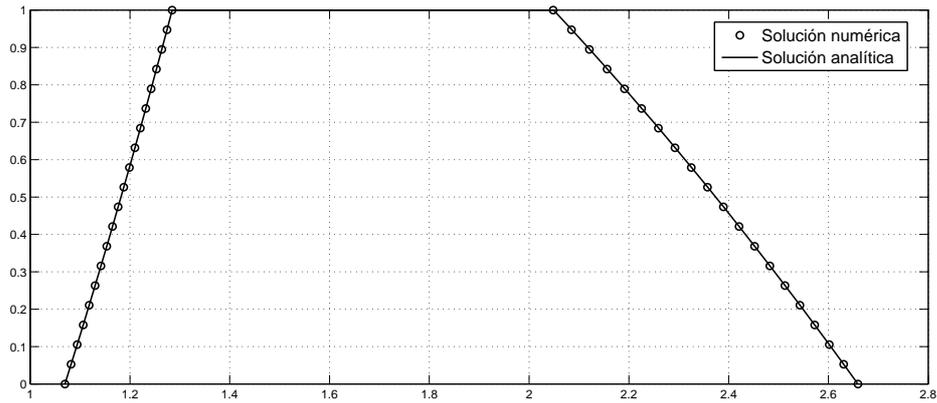


Figura 3.4: Gráfico de la solución numérica y analítica para  $X$  (suponiendo  $X, Y$  positivos)

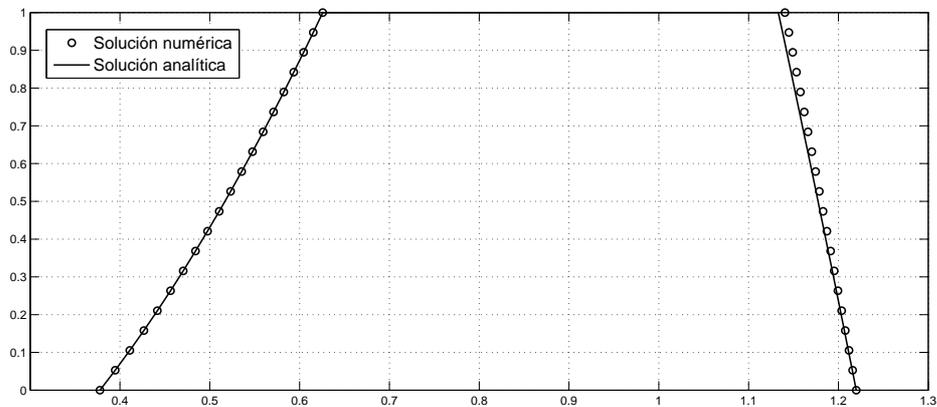


Figura 3.5: Gráfico de la solución numérica y analítica para  $Y$  (suponiendo  $X, Y$  positivos)

Después de 2 iteraciones, obtenemos la solución de  $X$  e  $Y$  con un error máximo menor que  $2 \cdot 10^{-4}$ , (ver figura 3.4-3.5).

Ahora considerando  $X$  e  $Y$  negativos, se obtiene:

$$\begin{cases} \overline{X}^2(r) - \frac{1}{2}\underline{Y}^2(r) = (0.4 + 0.6r), \\ \underline{X}^2(r) - \frac{1}{2}\overline{Y}^2(r) = (7 - 3r), \\ \frac{1}{4}\overline{X}^2(r) + \frac{3}{2}\overline{Y}^2(r) = (0.5 + 0.5r), \\ \frac{1}{4}\underline{X}^2(r) + \frac{3}{2}\underline{Y}^2(r) = (4 - r). \end{cases} \quad (3.23)$$

Para obtener la condición inicial, evaluamos el sistema (3.23) para  $r = 0$  y  $r = 1$ :

$$\begin{cases} \overline{X}^2(0) - \frac{1}{2}\underline{Y}^2(0) - 0.4 = 0, \\ \underline{X}^2(0) - \frac{1}{2}\overline{Y}^2(0) - 7 = 0, \\ \frac{1}{4}\overline{X}^2(0) + \frac{3}{2}\overline{Y}^2(0) - 0.5 = 0, \\ \frac{1}{4}\underline{X}^2(0) + \frac{3}{2}\underline{Y}^2(0) - 4 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \overline{X}^2(1) - \frac{1}{2}\underline{Y}^2(1) - 1 = 0, \\ \underline{X}^2(1) - \frac{1}{2}\overline{Y}^2(1) - 4 = 0, \\ \frac{1}{4}\overline{X}^2(1) + \frac{3}{2}\overline{Y}^2(1) - 1 = 0, \\ \frac{1}{4}\underline{X}^2(1) + \frac{3}{2}\underline{Y}^2(1) - 3 = 0, \end{cases}$$

obteniéndose  $\underline{X}(0) = -2.659197$ ,  $\overline{X}(0) = -1.069606$ ,  $\underline{Y}(0) = -1.219882$ ,  $\overline{Y}(0) = -0.3777$ ,  $\underline{X}(1) = -2.048366$ ,  $\overline{X}(1) = -1.284659$ ,  $\underline{Y}(1) = -1.140482$ ,  $\overline{Y}(1) = -0.625756$ . Por tanto

$$X_0 = (-2.048366, -1.284659, 0.610831, 0.215053), \quad Y_0 = (-1.140482, -0.625786, 0.0794, 0.248086).$$

Después de 2 iteraciones, obtenemos la solución de  $X$  e  $Y$  con un error máximo menor que  $2 \cdot 10^{-4}$ , (ver figura 3.6-3.7).

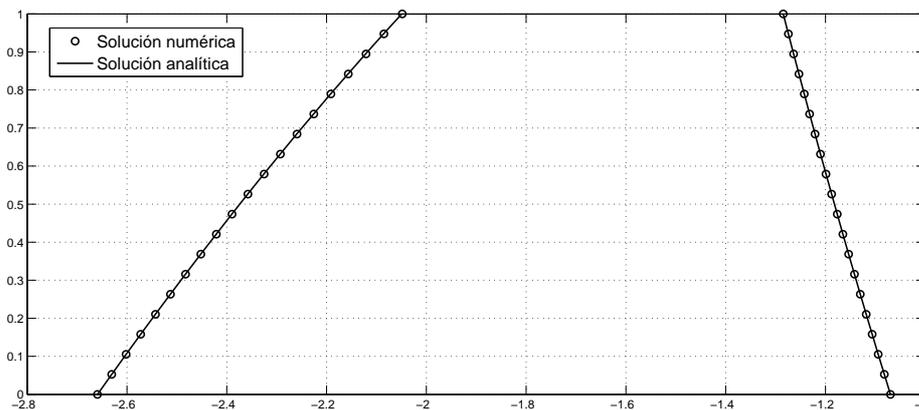


Figura 3.6: Gráfico de la solución numérica y analítica para  $X$  (suponiendo  $X, Y$  negativos)

Considerando que  $X$  es no positivo e  $Y$  es no negativo se construye el siguiente sistema paramétrico,

$$\begin{cases} \overline{X}^2(r) - \frac{1}{2}\overline{Y}^2(r) = (0.4 + 0.6r), \\ \underline{X}^2(r) - \frac{1}{2}\underline{Y}^2(r) = (7 - 3r), \\ \frac{1}{4}\overline{X}^2(r) + \frac{3}{2}\underline{Y}^2(r) = (0.5 + 0.5r), \\ \frac{1}{4}\underline{X}^2(r) + \frac{3}{2}\overline{Y}^2(r) = (4 - r). \end{cases} \quad (3.24)$$

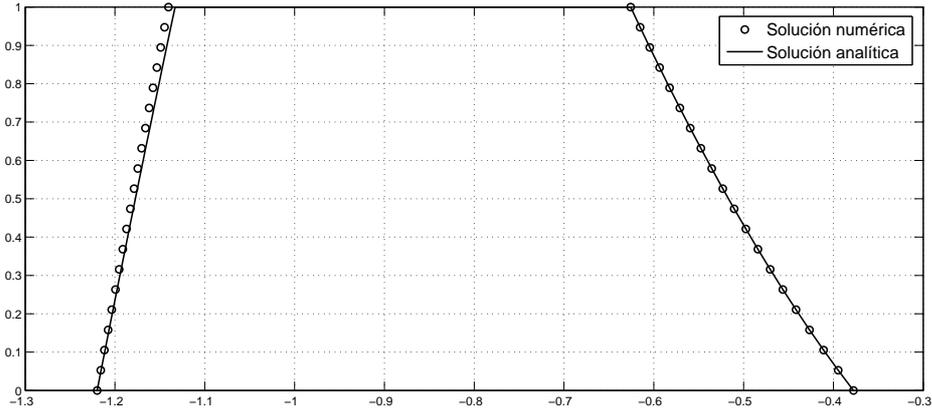


Figura 3.7: Gráfico de la solución numérica y analítica para  $Y$  (suponiendo  $X, Y$  negativos)

Con el objeto de obtener la condición inicial, se evalúa el sistema (3.24) para  $r = 0$  y  $r = 1$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{X}^2(0) - \frac{1}{2}\bar{Y}^2(0) - 0.4 = 0, \\ \underline{X}^2(0) - \frac{1}{2}\underline{Y}^2(0) - 7 = 0, \\ \frac{1}{4}\bar{X}^2(0) + \frac{3}{2}\bar{Y}^2(0) - 0.5 = 0, \\ \frac{1}{4}\underline{X}^2(0) + \frac{3}{2}\underline{Y}^2(0) - 4 = 0, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{X}^2(1) - \frac{1}{2}\bar{Y}^2(1) - 1 = 0, \\ \underline{X}^2(1) - \frac{1}{2}\underline{Y}^2(1) - 4 = 0, \\ \frac{1}{4}\bar{X}^2(1) + \frac{3}{2}\bar{Y}^2(1) - 1 = 0, \\ \frac{1}{4}\underline{X}^2(1) + \frac{3}{2}\underline{Y}^2(1) - 3 = 0, \end{array} \right.$$

obteniéndose  $\underline{X}(0) = 2.659197$ ,  $\bar{X}(0) = 1.069606$ ,  $\underline{Y}(0) = 0.3777$ ,  $\bar{Y}(0) = 1.219882$ ,  $\underline{X}(1) = 2.048366$ ,  $\bar{X}(1) = 1.284659$ ,  $\underline{Y}(1) = 0.625756$ ,  $\bar{Y}(1) = 1.140482$ . Por tanto el sistema no posee solución. Desarrollando un estudio similar, y considerando  $X$  no negativo e  $Y$  no positivo se obtiene la no existencia de solución.

**Ejemplo 3.2.5** Consideremos el sistema no lineal difuso

$$\left\{ \begin{array}{l} (2, 3, 4)X^2 + (2, 3, 1, 1)X + (3, 4, 5)Y^2 = (0.25, 1, 0.24, 2), \\ (4, 5, 7)X^2 + (3, 4, 1, 1)Y + (1, 3, 5)Y^2 = (0.5, 1.5, 0.499, 2.5). \end{array} \right.$$

Suponiendo que  $X$  e  $Y$  son positivos, entonces la forma paramétrica de este sistema es:

$$\left\{ \begin{array}{l} (2+r)\underline{X}^2(r) + (1+r)\underline{X}(r) + (3+r)\underline{Y}^2(r) = (0.01 + 0.24r), \\ (4-r)\bar{X}^2(r) + (4-r)\bar{X}(r) + (5-r)\bar{Y}^2(r) = (3 - 2r), \\ (4+r)\underline{X}^2(r) + (2+r)\underline{Y}(r) + (1+2r)\underline{Y}^2(r) = (0.001 + 0.499r), \\ (7-2r)\bar{X}^2(r) + (5-r)\bar{Y}(r) + (5-2r)\bar{Y}^2(r) = (4 - 2.5r). \end{array} \right. \quad (3.25)$$

Para obtener la condición inicial, evaluamos el sistema (3.25) para  $r = 0$  y  $r = 1$ :

$$\begin{cases} 2\underline{X}^2(0) + \underline{X}(0) + 3\underline{Y}^2(0) = 0.01, & \begin{cases} 3\underline{X}^2(1) + 2\underline{X}(1) + 4\underline{Y}^2(1) = 0.25, \\ 3\overline{X}^2(1) + 3\overline{X}(1) + 4\overline{Y}^2(1) = 1, \\ 5\underline{X}^2(1) + 3\underline{Y}(1) + 3\underline{Y}^2(1) = 0.5, \\ 5\overline{X}^2(1) + 4\overline{Y}(1) + 3\overline{Y}^2(1) = 1.5. \end{cases} \\ 4\overline{X}^2(0) + 4\overline{X}(0) + 5\overline{Y}^2(0) = 3, \\ 4\underline{X}^2(0) + 2\underline{Y}(0) + \underline{Y}^2(0) = 0.001, \\ 7\overline{X}^2(0) + 5\overline{Y}(0) + 5\overline{Y}^2(0) = 4, \end{cases}$$

Consecuentemente  $\underline{X}(0) = 0.009807$ ,  $\overline{X}(0) = 0.383708$ ,  $\underline{Y}(0) = 0.000308$ ,  $\overline{Y}(0) = 0.418627$ ,  $\underline{X}(1) = 0.078009$ ,  $\overline{X}(1) = 0.196468$ ,  $\underline{Y}(1) = 0.137593$ ,  $\overline{Y}(1) = 0.271476$ . Por tanto:

$$X_0 = (0.078009, 0.196468, 0.068202, 0.18724), \quad Y_0 = (0.137593, 0.271476, 0.134513, 0.147151).$$

Después de 100 iteraciones como máximo, obtenemos la solución de  $X$  e  $Y$  con un error máximo menor que  $2 \cdot 10^{-3}$ , (ver figura 3.8-3.9).

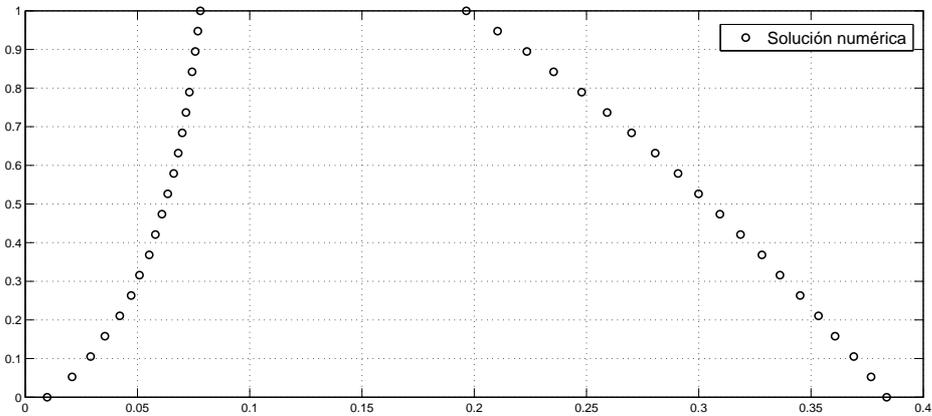


Figura 3.8: Gráfico de la solución numérica para  $X$  (suponiendo  $X, Y$  positivos)

En este ejemplo vemos que el método de Newton no es tan eficiente como en los ejemplos anteriores, lo cual motiva el estudio de variantes del método anterior, de manera de mejorar la convergencia del mismo.

Ahora considerando  $X$  e  $Y$  negativos, se obtiene:

$$\begin{cases} (2+r)\overline{X}^2(r) + (4-r)\underline{X}(r) + (3+r)\overline{Y}^2(r) = (0.01 + 0.24r), \\ (4-r)\underline{X}^2(r) + (1+r)\overline{X}(r) + (5-r)\underline{Y}^2(r) = (3 - 2r), \\ (4+r)\overline{X}^2(r) + (5-r)\underline{Y}(r) + (1+2r)\overline{Y}^2(r) = (0.001 + 0.499r), \\ (7-2r)\underline{X}^2(r) + (2+r)\overline{Y}(r) + (5-2r)\underline{Y}^2(r) = (4 - 2.5r). \end{cases} \quad (3.26)$$

Resolviendo el sistema (3.26) para  $r = 0$ :

$$\begin{cases} 2\overline{X}^2(0) + 4\underline{X}(0) + 3\overline{Y}^2(0) = 0.01, \\ 4\underline{X}^2(0) + \overline{X}(0) + 5\underline{Y}^2(0) = 3, \\ 4\overline{X}^2(0) + 5\underline{Y}(0) + \underline{Y}(0) = 0.001, \\ 7\underline{X}^2(0) + 2\overline{Y}(0) + 5\underline{Y}^2(0) = 4. \end{cases}$$

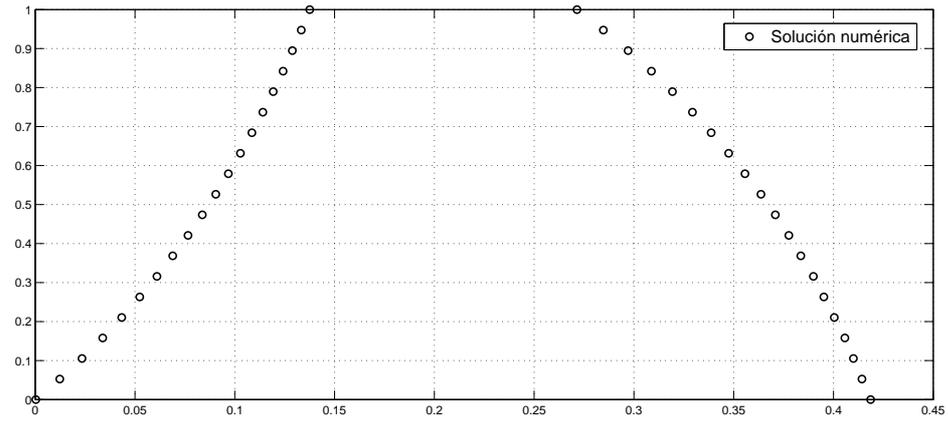


Figura 3.9: Gráfico de la solución numérica para Y (suponiendo X, Y positivos)

Se tiene  $\underline{X}(0) = -0.580506$ ,  $\overline{X}(0) = -0.917871$ ,  $\underline{Y}(0) = -0.716927$ ,  $\overline{Y}(0) = -0.464417$ . Por tanto el sistema no posee solución negativa.

Examinando los casos de signos opuestos de las variables difusas X, Y se obtiene la no existencia de solución para el sistema.

---

## CONCLUSIONES

Se ha desarrollado un estudio tanto teórico como numérico del método de Newton clásico, examinado con ello aspectos generales sobre la convergencia del proceso, existencia de las raíces, rapidez de convergencia, unicidad de la solución, entre otras características. Además se ha propuesto una adaptación del clásico método de Newton para la resolución de ecuaciones no lineales difusas, estudiando en este contexto esencialmente algunos aspectos teóricos e ilustraciones numéricas. Cabe señalar que en este contexto difuso el método numérico permite resolver la forma paramétrica asociada a la ecuación o sistema no lineal difuso propuesto (para cada  $0 \leq r \leq 1$ ). Sin embargo, a partir de los ejemplos desarrollados en esta memoria, hemos observado que no basta resolver la forma paramétrica para encontrar la solución al problema difuso original, puesto que la solución de la forma paramétrica debe cumplir ciertos requisitos para ser la parametrización de un número difuso.

En este sentido, existen variados estudios por realizar:

1. Determinar condiciones generales de existencia de soluciones de la ecuación no lineal difusa  $F(x) = 0$ , o al menos dar estas condiciones para ecuaciones difusas polinomiales.
2. Analizar sistemas de ecuaciones no lineales difusos, sin supuestos sobre el signo de la solución.
3. Extender el método de Newton con el objeto de obtener un orden de convergencia superior. Por ejemplo, utilizar métodos de tipo cuasi-Newton aplicados a la resolución de sistemas de ecuaciones no lineales difusos.

---



---

## APÉNDICE A

---

# VALOR ABSOLUTO Y NORMA DE UNA MATRIZ

La desigualdad

$$A \leq B \tag{A.1}$$

entre dos matrices  $A = [a_{ij}]$  y  $B = [b_{ij}]$  de las mismas dimensiones, denota que:

$$a_{ij} \leq b_{ij}. \tag{A.2}$$

En este sentido, dos matrices cualquiera no son siempre comparables.

Utilizaremos el término *valor absoluto* (módulo) de una matriz  $A = [a_{ij}]$  para señalar la matriz

$$|A| = [|a_{ij}|],$$

donde  $|a_{ij}|$  son los módulos de los coeficientes de  $A$ .

Sean  $A$  y  $B$  matrices para las cuales tiene sentido las operaciones  $A + B$  y  $AB$ , entonces:

1.  $|A + B| \leq |A| + |B|$ ,
2.  $|AB| \leq |A| \cdot |B|$ ,
3.  $|\alpha A| \leq |\alpha| |A|$

donde  $\alpha$  es un escalar.

En particular, se tiene

$$|A^p| \leq |A|^p$$

donde  $p \in \mathbb{N}$ .

Por *norma* de una matriz  $A = [a_{ij}]$  se entiende como un número real  $\|A\|$  que satisface las siguientes condiciones:

- (a)  $\|A\| \geq 0$  con  $\|A\| = 0$  si y sólo si  $A = 0$ ,
- (b)  $\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|$  ( $\alpha$  un escalar) y, en particular,  $\|-A\| = \|A\|$ ,

(c)  $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|,$

(d)  $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$

( $A$  y  $B$  son matrices para las cuales las operaciones correspondientes tienen sentido). Como ejemplo particular, para la matriz cuadrada tenemos

$$\|A^p\| \leq \|A\|^p$$

donde  $p \in \mathbb{N}$ .

Observamos una desigualdad más importante entre las normas de matrices  $A$  y  $B$  de las mismas dimensiones. Empleando la condición (c), obtenemos

$$\|B\| = \|A + (B - A)\| \leq \|A\| + \|B - A\|$$

de aquí que

$$\|A - B\| = \|B - A\| \geq \|B\| - \|A\|.$$

Análogamente

$$\|A - B\| \geq \|A\| - \|B\|$$

por tanto

$$\|A - B\| \geq |||B\| - \|A\|||.$$

Se dice que las normas son *canónicas* si se cumplen simultáneamente ambas condiciones:

(e) Si  $A = [a_{ij}]$ , entonces

$$|a_{ij}| \leq \|A\|$$

y la matriz escalar  $A = [a_{11}]$  tenemos  $\|A\| = |a_{11}|$ ,

(f) De la desigualdad  $|A| \leq |B|$  ( $A$  y  $B$  matrices) se tiene la desigualdad

$$\|A\| \leq \|B\|.$$

En particular,  $\|A\| \leq |||A\|||$ .

En consecuencia, para cualquier matriz  $A = [a_{ij}]$  de dimensiones arbitrarias consideraremos fundamentalmente tres normas que se calculan fácilmente:

1.  $\|A\|_m = \max_i \sum_j |a_{ij}|$  norma- $m$ ,

2.  $\|A\|_l = \max_j \sum_i |a_{ij}|$  norma-1,

3.  $\|A\|_k = \sqrt{\sum_{i,j} |a_{ij}|^2}$  norma- $k$ .

**Ejemplo A.0.6** Sea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

por tanto, se tiene:

$$\begin{aligned} \|A\|_m &= \max(1 + 2 + 3, 4 + 5 + 6, 7 + 8 + 9) = \max(6, 15, 24) = 24, \\ \|A\|_l &= \max(1 + 4 + 7, 2 + 5 + 8, 3 + 6 + 9) = \max(12, 15, 18) = 18, \\ \|A\|_k &= \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2} = \sqrt{285} \approx 16.9. \end{aligned}$$

En particular, para el vector

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

estas normas tienen los valores siguientes:

$$\begin{aligned} \|x\|_m &= \max_i |x_i|, \\ \|x\|_l &= |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|, \\ \|x\|_k &= |x| = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots + |x_n|^2} \end{aligned}$$

(valor absoluto del vector). Si las componentes del vector son reales, se tiene entonces simplemente

$$\|x\|_k = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}.$$

Verifiquemos las condiciones (a) hasta (d) para las normas  $\|A\|_m$ ,  $\|A\|_l$  y  $\|A\|_k$ . Salta a la vista que las condiciones (a) y (b) se cumplen. Supongamos que la condición (c) se cumple también. Consideremos que  $A = [a_{ij}]$  y  $B = [b_{ij}]$ , son de las mismas dimensiones, entonces obtenemos

$$\begin{aligned} \|A + B\|_m &= \max_i \sum_j |a_{ij} + b_{ij}| \leq \max_i \left\{ \sum_j |a_{ij}| + \sum_j |b_{ij}| \right\} \\ &\leq \max_i \sum_j |a_{ij}| + \max_i \sum_j |b_{ij}| = \|A\|_m + \|B\|_m \end{aligned}$$

Análogamente

$$\|A + B\|_l \leq \|A\|_l + \|B\|_l.$$

Además

$$\|A + B\|_k = \sqrt{\sum_{i,j} |a_{ij} + b_{ij}|^2} \leq \sqrt{\sum_{i,j} |a_{ij}|^2 + \sum_{i,j} |b_{ij}|^2 + 2 \sum_{i,j} |a_{ij}| |b_{ij}|}$$

Aplicando la desigualdad de Cauchy:

$$\sum_{i,j} |a_{i,j}| |b_{i,j}| \leq \sqrt{\sum_{i,j} |a_{i,j}|^2} \cdot \sqrt{\sum_{i,j} |b_{i,j}|^2}$$

tenemos

$$\|A + B\|_k \leq \sqrt{\sum_{i,j} |a_{i,j}|^2} + \sqrt{\sum_{i,j} |b_{i,j}|^2} = \|A\|_k + \|B\|_k$$

La condición (c) se cumple, para las tres normas.

Verifiquemos ahora lo que ocurre para la condición (d). Supongamos que la matriz  $A = [a_{ij}]$  es de dimensiones  $m' \times n'$  y la matriz  $B = [b_{ij}]$  es de dimensión  $m'' \times n''$ . La condición de posibilidad de multiplicación de la primera matriz por la segunda, es que necesariamente  $m'' = n'$ , y que la matriz  $AB$  tenga las dimensiones  $m' \times n''$ .

Se tiene

$$\begin{aligned} \|AB\|_m &= \max_i \sum_{j=1}^{n''} \left| \sum_{s=1}^{n'} a_{is} b_{sj} \right| \\ &= \max_i \left\{ \sum_{j=1}^{n''} \sum_{s=1}^{n'} |a_{is}| |b_{sj}| \right\} \\ &= \max_i \left\{ \sum_{s=1}^{n'} |a_{is}| \cdot \sum_{j=1}^{n''} |b_{sj}| \right\} \\ &= \max_i \left\{ \sum_{s=1}^{n'} |a_{is}| \cdot \|B\|_m \right\} \\ &= \max_i \left\{ \sum_{s=1}^{n'} |a_{is}| \right\} \cdot \|B\|_m = \|A\|_m \cdot \|B\|_m. \end{aligned}$$

Análogamente

$$\begin{aligned} \|AB\|_l &= \max_j \sum_{i=1}^{m'} \left| \sum_{s=1}^{n'} a_{is} b_{sj} \right| \\ &= \max_j \left\{ \sum_{i=1}^{m'} \sum_{s=1}^{n'} |a_{is}| |b_{sj}| \right\} \\ &= \max_j \left\{ \sum_{s=1}^{n'} |b_{sj}| \sum_{i=1}^{m'} |a_{is}| \right\} \\ &= \max_j \left\{ \sum_{s=1}^{n'} |b_{sj}| \cdot \|A\|_l \right\} \\ &= \|A\|_l \max_j \sum_{s=1}^{n'} |b_{sj}| = \|A\|_l \cdot \|B\|_l \end{aligned}$$

Además

$$\|AB\|_k = \sqrt{\sum_{i=1}^{m'} \sum_{j=1}^{n''} \left| \sum_{s=1}^{n'} a_{is} b_{sj} \right|^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{m'} \sum_{j=1}^{n''} \left\{ \sum_{s=1}^{n'} |a_{is}| |b_{sj}| \right\}^2}$$

Aplicando la desigualdad de Cauchy y teniendo en cuenta que  $m'' = n'$ , obtenemos

$$\begin{aligned} \|AB\|_k &= \sqrt{\sum_{i=1}^{m'} \sum_{i=1}^{m'} \left\{ \sum_{s=1}^{n'} |a_{is}|^2 \cdot \sum_{t=1}^{m''} |b_{tj}|^2 \right\}} \\ &= \sqrt{\sum_{i=1}^{m'} \sum_{s=1}^{n'} |a_{is}|^2 \cdot \sum_{t=1}^{m''} \sum_{j=1}^{n''} |b_{tj}|^2} = \sqrt{\|A\|_k^2 \cdot \|B\|_k^2} = \|A\|_k \cdot \|B\|_k. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la condición (d) se cumple para las normas que se están considerando. Demostraremos ahora que las normas  $\|A\|_m$ ,  $\|A\|_l$  y  $\|A\|_k$  son canónicas.

Si  $a_{pq}$  es el mayor coeficiente, en módulo, de la matriz  $A = [a_{ij}]$  de dimensiones  $m' \times n'$ , tendremos entonces evidentemente

$$\begin{aligned} \|a\|_m &\geq |a_{p1}| + \cdots + |a_{pq}| + \cdots + |a_{pn'}| \geq |a_{pq}|, \\ \|A\|_l &\geq |a_{1q}| + \cdots + |a_{pq}| + \cdots + |a_{m'q}| \geq |a_{pq}| \end{aligned}$$

y

$$\|A\|_k = \sqrt{\sum_{i=1}^{m'} \sum_{j=1}^{n'} |a_{ij}|^2} \geq |a_{pq}|$$

Por tanto

$$|a_{ij}| \leq |a_{pq}| \leq \|A\|_s \quad (s = m, l, k)$$

Además, si  $A = [a_{11}]$ ,

$$\|A\|_m = \|A\|_l = \|A\|_k = |a_{11}|$$

Por otro lado, si  $|A| \leq |B|$ , donde  $A = [a_{ij}]$  y  $B = [b_{ij}]$ , entonces  $|a_{ij}| \leq |b_{ij}|$ . De la definición de las normas  $\|A\|_m$ ,  $\|A\|_l$  y  $\|A\|_k$  resulta evidente que se cumplen las desigualdades

$$\|A\|_s \leq \|B\|_s \quad (s = m, l, k)$$

También, para cualquiera de las normas se tiene:

$$\|A\|_s = \|\|A\|\|_s \quad (s = m, l, k)$$

De esta manera, se cumple también la condición (f).

Se ha demostrado de este modo que las normas  $\|A\|_m$ ,  $\|A\|_l$  y  $\|A\|_k$  son canónicas.

Téngase en cuenta que si la matriz  $E$  es una matriz unitaria de orden  $n$ , entonces

$$\|E\|_m = \|E\|_l = 1$$

y

$$\|E\|_k = \sqrt{n}$$

---



---

## APÉNDICE B

---

# ARITMÉTICA DE INTERVALOS DIFUSOS

La aritmética difusa esta basado en dos propiedades de números difusos:

1. Cada conjunto difuso, puede ser representado totalmente por sus  $r$ -cortes.
2. Los  $r$ -cortes de cada conjunto difuso son intervalos cerrados de números reales para cada  $r \in (0, 1]$ .

Estas propiedades permiten definir las operaciones aritméticas en los números difusos en términos de operaciones aritméticas en sus  $r$ -cortes, es decir, operaciones aritméticas en intervalos cerrados. Estas operaciones son un asunto de análisis de intervalos, una área bien fundamentada de la matemática clásica. Cabe señalar que un número real  $r \in \mathbb{R}$  también puede considerarse como un intervalo especial degenerado en  $[r, r]$ .

Si  $*$  denota cualquiera de las cuatro operaciones aritméticas comunes en los intervalos cerrados:  $+$ ,  $-$ ,  $\cdot$ ,  $/$  (adición, sustracción, multiplicación, división). Entonces

$$[a, b] * [d, e] = \{f * g : a \leq f \leq b; d \leq g \leq e\}.$$

Es una propiedad general de todas las operaciones aritméticas en los intervalos cerrados, teniendo en cuenta la excepción del caso  $[a, b]/[d, e]$ , que no se define cuando  $0 \in [d, e]$ . Es decir, el resultado de una operación aritmética en un intervalo cerrado es un intervalo cerrado.

**Definición B.0.1** (*Operación Aritméticas Básicas*) Las cuatro operaciones aritméticas básicas definidas en intervalos cerrados se definen como sigue:

$$[a, b] + [d, e] = [a + d, b + e], \tag{B.1}$$

$$[a, b] - [d, e] = [a - e, b - d], \tag{B.2}$$

$$[a, b] \cdot [d, e] = [\text{mín}\{ad, ae, bd, be\}, \text{máx}\{ad, ae, bd, be\}], \tag{B.3}$$

$$\frac{[a, b]}{[d, e]} = \left[ \min \left\{ \frac{a}{d}, \frac{a}{e}, \frac{b}{d}, \frac{b}{e} \right\}, \max \left\{ \frac{a}{d}, \frac{a}{e}, \frac{b}{d}, \frac{b}{e} \right\} \right] \text{ siempre que } 0 \notin [d, e]. \quad (\text{B.4})$$

Cuando uno de los intervalos descritos en las ecuaciones de la definición B.0.1 es el intervalo degenerado, se obtienen las operaciones especiales; cuando dos de los intervalos se degeneran, se obtiene la aritmética normal de números reales, como sería de esperarse.

**Ejemplo B.0.7** *Desarrollar las siguientes operaciones entre los conjuntos, empleando para ello la definición B.0.1:*

- $[2, 5] + [1, 3] = [3, 8]$
- $[0, 1] + [-6, 5] = [-6, 6]$
- $[2, 5] - [1, 3] = [-1, 4]$
- $[0, 1] - [-6, 5] = [-5, 7]$
- $[-1, 1] \cdot [-2, -0.5] = [-2, 2]$
- $[3, 4] \cdot [2, 2] = [6, 8]$
- $\frac{[-1, 1]}{[-2, -0.5]} = [-2, 2]$
- $\frac{[4, 10]}{[1, 2]} = [2, 10]$ .

**Teorema B.0.1 (Propiedades de las operaciones aritméticas)** Sean  $A = [a_1, a_2], B = [b_1, b_2], C = [c_1, c_2], 0 = [0, 0], 1 = [1, 1]$ . Las propiedades de las operaciones aritméticas se definen como sigue:

**Conmutatividad:**  $A + B = B + A, A \cdot B = B \cdot A$

**Asociatividad:**  $(A + B) + C = A + (B + C), (A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$

**Identidad:**  $A = 0 + A = A + 0, A = 1 \cdot A = A \cdot 1$

**Subdistributiva:**  $A \cdot (B + C) \subseteq A \cdot B + A \cdot C$

**Distributiva:** Si  $b \cdot c \geq 0 \forall b \in B, c \in C \Rightarrow A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ . En el caso particular que  $A = [a, a]$ , entonces  $a \cdot (B + C) = a \cdot B + a \cdot C$ .

**Contención con respecto a las operaciones** Considerando  $A \subseteq E, B \subseteq F$ , entonces:

$$A + B \subseteq E + F \quad (\text{B.5})$$

$$A - B \subseteq E - F \quad (\text{B.6})$$

$$A \cdot B \subseteq E \cdot F \quad (\text{B.7})$$

$$\frac{A}{B} \subseteq \frac{E}{F} \quad (\text{B.8})$$

---

## BIBLIOGRAFÍA

- [1] Abbasbandy, S., Asady, B., and Alavi, M. *Fuzzy general linear systems*. Elsevier Inc. 169 (2005) pp.34-40.
- [2] Abbasbandy, S., and Asady, B. *Newton method for solving fuzzy nonlinear equations*. Elsevier Inc. 159 (2004) pp.349-356.
- [3] Abbasbandy, S., and Ezzati, R. *Newton method for solving a system of fuzzy nonlinear equations*. Elsevier Inc. 175 (2006) pp.1189-1199.
- [4] Abbasbandy, S., Nieto, J.J., Ezzati, R., and Rodríguez-López, R. *Newton method for solving quadratic fuzzy equations*. *Advances in Theoretical and Applied Mathematics*, 1 (2006) pp.1-8.
- [5] Abbasbandy, S., and Jafarian, A. *Steepest descent method for solving fuzzy nonlinear equations*. Elsevier Inc. 174 (2006) pp.669-675.
- [6] Abbasbandy, S., and Jafarian, A. *Steepest descent method for system of fuzzy linear equations*. Elsevier Inc. 175 (2006) pp.823-833.
- [7] Buckley, J.J., Eslami, E., and Feuring, T. *Fuzzy Mathematics in economics and Engineering*. Physica-Verlag Heidelberg, alemania (2005).
- [8] Buckley, J.J. and Qu, Y. *Solving linear and quadratic fuzzy equations*. *Fuzzy Sets and System*. 38 (1990) pp.43-59.
- [9] Buckley, J.J. and Qu, Y. *Solving fuzzy equations: A new solution concept*. *Fuzzy Sets and System*. 39 (1991) pp.291-301.
- [10] Buckley, J.J. and Qu, Y. *Solving systems of linear fuzzy equations*. *Fuzzy Sets and System*. 43 (1991) pp.33-43.
- [11] Castaing, C. and Valadier, M., *Convex Analysis and Measurable Multifunctions*, Springer-Verlag, Berlin (1977).

- [12] Chalco-Cano Y., Román-Flores, H., Rojas-Medar, M.A. and Jiménez-Gamero, M.D., *An approximation to the extension principle using decomposition of fuzzy intervals*. Fuzzy Sets and Systems, 159 (2008) pp.3245-3258.
- [13] Changbum C. and Beny Neta., *Some modifications of Newton's methods by the methods of undetermined coefficients*. Computers and mathematics with applications, 56 (2008) pp.2528-2538.
- [14] Demidovich, B.P., and Maron, I.A. *Cálculo numérico fundamental*. Paraninfo, impreso en Madrid, España (1988).
- [15] Diamond, P. and Kloeden, P., *Metric Spaces of Fuzzy Sets*, World Scientific, Singapore (1994).
- [16] Dieudonné, J., *Cálculo infinitesimal*. Edición Omega, España-Barcelona. (1971).
- [17] Fontini, M. and Sormani, E. *Some variants of Newton's method with third-order convergence*. Appl. Math. Comp. 140 (2003) pp.419-426.
- [18] Goetschel, R. and Voxman, W., *Topological properties of fuzzy numbers*, Fuzzy Sets and Systems 10 (1983), pp.87-99.
- [19] H.H.H. Honmeier., *A modified Newton's method for rootfinding with cubic convergence*. J. Coput. Appl. Math. 157 (2003) pp.227-230.
- [20] H.H.H. Honmeier., *On Newton-type methods with cubic convergence*. J. Coput. Appl. Math. 176 (2005) pp.425-432.
- [21] H.Mathews, J. and D.Fink, Kurtis., *Métodos Numéricos con MATLAB*. madrid: Pearson educación, S.A. (2000).
- [22] Ioannis K.A., *Convergence and applications of Newton-type iterations*. Springer. (2008).
- [23] J.J. Nieto and R. Rodríguez-López. *Existence of extremal solutions for quadratic fuzzy equations*. Fixed Point Theory and Applications. (2005) pp.321-342.
- [24] Kantorovich L.V. *On Newton's Method*. Rusia (1949).
- [25] Lakshmikantham V. and Mohapatra R.N. Fuzzy Sets. *Theory of Fuzzy Differential Equations and Inclusions*. Taylor & Francis Group (2003) pp.1-21.
- [26] Negoita, C.V. and Ralescu, D.A., *Applications of fuzzy sets to systems analysis*. Wiley, New York. (1975).
- [27] Ostrowski, A., *Sur la convergence et l'estimation des erreurs dans quelques procédés de résolution des équations numériques*. (1940).
- [28] Pedrycz, W. and Gomide, F., *An Introduction to Fuzzy Sets, Analysis and Design*. (1998).
- [29] Rådstrom, W., *An embedding theorem for spaces of convex sets*, Proc. Amer. Math. Soc. (1952), pp.165-169.

- 
- [30] Rojas-Medar, M., Bassanezi, R.C. and Román-Flores, H. *A generalization of the Minkowski embedding theorem and applications* Fuzzy Sets and Systems. 102 (1999), no. 2, pp.263-269.
- [31] Shokri, J., *Solving fuzzy Nonlinear Equations in Banach Spaces*. Int. J. comtemp. Math. 3 (2008) pp.635-644.
- [32] Wang, Z. and Klir, G.J., *Fuzzy Measure Theory*. Plenum Press, New York, (2000).
- [33] Weerakoon, S. and Fernando, G.I., *Some variants of Newton's method with accelerated third-order convergence*. Applied Mathematical letters. 13 (2000),issue 8. pp.87-93.
- [34] Zadeh, L.A., *Fuzzy sets, Information and Control*. 8 (1965) pp.338-353.