UNIVERSIDAD DEL BÍO-BÍO
FACULTAD DE EDUCACIÓN Y HUMANIDADES
PEDAGOGÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

MÉTODOS VARIACIONALES EN ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

AUTOR: Cisternas Sandoval Luis Alejandro

PROFESOR GUÍA: Friz Roa Luis Alberto

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE PROFESOR DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

2010

Índice general

Agradecimientos

Esta memoria representa la culminación de un proceso, el cual hubiese sido imposible concretar sin la ayuda y el apoyo permanente de mi familia, de Dios y mis profesores, que con su fe, sus palabras de apoyo y sus conocimientos me permitieron avanzar y superar cada uno de los desafios y dificultades que se presentaron a lo largo de éstos cinco años. Por esta razón les manifiesto y hago pública mi gratitud a través de éstas líneas.
Por último es importante mencionar que esta tesis fue financiada por el proyecto FONDECYT 1090510 a cargo del investigador responsable Dr. Luis Friz Roa.

Capítulo 1

Introducción

1.1. Introducción

La siguiente ecuación de primer grado, $ax + b = 0$ se puede resolver fácilmente suponiendo que x es una variable que asume valores reales y además, a y b son dos constantes que igualmente pertenecen a los reales. Pero por otro lado, dicho problema puede ser visto como la búsqueda de los valores en que la derivada de la función $f(x) = \frac{a}{2}x^2 + bx$ se anula. Aún más, podría ser planteado como la búsqueda de los valores de x que determinan un punto de máximo o de mímino o punto silla de esa función. Estos dos últimos procedimientos que requieren de un mayor dominio conceptual y procedimental, tienen la ventaja de que pueden generalizarse a otras situaciones en las cuales, tanto las variables como las constantes pueden ya no ser números reales.

El ejemplo anterior representa, a grandes rasgos, la realidad que se da en el análisis funcional, pues si bien, existen procedimientos que son más comodos de utilizar al momento de resolver un determinado problema, nos encontramos con situaciones en las cuales ya no es factible aplicarlos, generando por tanto la necesidad de buscar otros, más generales, que permitan ampliar el conjunto de soluciones.

Dentro de este contexto es que se enmarca la presente memoria, en la que se pretende estudiar los métodos variacionales aplicados a la búsqueda de soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias, realizando para ello un estudio de diversos conceptos, destacando entre ellos la integral de Lebesgue y los Espacios de Sobolev.

1.2. Antecedentes

En 1901 el matemático francés Charles Emile Picard (1856-1941) presentó ante la Académie des Sciences una nota de otro matemático francés llamado Henri Lebesgue (1875-1941), titulada *Sobre una generalización de la integral definida*. De dicha presentación se destaca el siguiente párrafo: *En el caso de las funciones continuas, hay identidad entre las nociones de integral y de función primitiva. Riemman ha definido la integral de ciertas funciones discontinuas, pero no todas las funciones derivadas son integrables, en el sentido de Riemman. El problema de la búsqueda de funciones primitivas entonces no es resuelto por la integración y podemos desear una definición de la integral que comprenda como caso particular a la de Riemann y que permita resolver el problema de las funciones primitivas.*

Es así como en 1902 en su Tesis doctoral titulada *Integrale, longueur, aire*, presentada en la Universidad de Nancy, Lebesgue presentó su contribución más grande para la Matemática, generalizando la Integral de Riemann a un clase más amplia de funciones. Las principales ventajas de esta nueva manera de concebir la Integral son; las funciones que son Riemann integrables, son también Lebesgue integrables; permite integrar en espacios más abstractos que $\mathbb{R}^n$ y además los teoremas relacionados con el intercambio del límite y la integral son también válidos.

Lebesgue decidió dejar de dedicarse a ésta área de estudio en el año 1910, pues a pesar de que su mayor aporte a la matemática fue una generalización, él era temeroso de ellas, pues pensaba que reducida esta ciencia a teorías generales carecería de sentido y moriría rapidamente.

No obstante, la Integral de Lebesgue permitió un gran avance en el análisis funcional a comienzos del siglo pasado, ejemplo de ésto, son los espacios L^p y el trabajo desarrollado por el matemático ruso Sergei Sobolev (1908-1989) quien introdujo nociones como las funciones generalizadas (hoy conocidas como distribuciones), expandió la noción clásica de diferenciación ampliando el campo de aplicación de las técnicas de Newton y Leibniz y definió los espacios de funciones que hoy llevan su nombre (Espacios de Sobolev), los que son reconocidos por Brézis en su libro *Análisis funcional Teoría y aplicaciones* (ver [1]) como la herramienta básica del enfoque variacional en la teoría de ecuaciones diferenciales.

1.3. Formulación del problema

Desde la generalización del concepto de Integral brindado por Lebesgue y dada la necesidad de responder a diversos problemas que involucran a las ecuaciones diferenciales ordinarias, y a la propia inquietud por el conocimiento, es relevante estudiar métodos que permitan encontrar soluciones más generales a dichas ecuaciones, pero que sin embargo en un cierto sentido posean características y propiedades similares a las funciones del espacio C^m

1.4. Objetivos

(a) **Objetivo General:**

Analizar los métodos variacionales como una herramienta para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias.

(b) **Objetivos Específicos:**

1. Estudiar la Integral de Lebesgue.
2. Estudiar los Espacios de Sobolev.
3. Aplicar los Métodos Variacionales a la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias.

1.5. Metodología

Para el desarrollo de esta memoria se seguirá la siguiente metodología:

(a) Recopilación de información relativa al tema en estudio.

(b) Análisis y selección de la información recopilada.

(c) Exposiciones y reuniones de trabajo semanales con el profesor guía.

(d) Entrega de informes de avances mensuales al profesor guía.

1.6. Cronograma

Capítulo 2

Integral de Lebesgue y Espacios L^p

2.1. Medida de Lebesgue

2.1.1. Definición de Medida de Lebesgue

Definición 2.1.1. *La Medida de un intervalo limitado I de números reales, definido por dos extremos* a *y* b*, con* b *mayor o igual a* a *es la diferencia entre ellos y se representa por:*

$$m(I) = b - a.$$

Como consecuencia de la definición anterior se tiene que:
si $I = (a, b)$, $I' = (a, b]$, $I'' = [a, b)$, e $I''' = [a, b]$, entonces se satisface que sus medidas son iguales, es decir:

$$m(I) = m(I') = m(I'') = m(I''') = b - a.$$

Además, si se tiene una sucesión I_n de intervalos acotados y disjuntos de números reales contenidos en $[a, b]$, se puede calcular su medida total como la sumatoria de las medidas de cada intervalo, esto es;

$$m\left(\bigcup_n I_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m(I_n).$$

2.1.2. Conjunto de medida nula

La medida de Lebesgue permite tener una idea de la longitud de un intervalo, siendo entonces evidente preguntarnos si existen conjuntos de números cuya medida sea nula, diferentes al caso en que $a = b$. La respuesta es sí y su definición está dada en 2.1.3, pero para comprenderla es necesario primero dar la siguiente definición:

Definición 2.1.2. *Un conjunto S de puntos de $\mathbb{R}$ es cubierto por una sucesión de intervalos limitados I_n, si cada punto de S puede ser situado por lo menos en uno de dichos intervalos, en otros términos:*

$$S \subset \bigcup_n I_n.$$

Definición 2.1.3. *Si un conjunto S de puntos es cubierto por una sucesión de intervalos limitados cuya medida total puede ser hecha arbitrariamente pequeña, se dice que S es un conjunto de medida nula.*

2.2. Integral de Lebesgue

Para introducir el concepto de Integral de Lebesgue, es necesario, estudiar dos clases de funciones que nos permitirán tener las primeras definiciones y propiedades de dicha integral.

2.2.1. Función Característica

Definición 2.2.1. *Sea S un conjunto cualquiera de puntos de $\mathbb{R}$. La función característica de S denotada por X_S es una función que asume el valor 1 en todos los puntos de S y 0 en los demás puntos de $\mathbb{R}$, es decir:*

$$X_s = \begin{cases} 1 & si \quad x \in S \\ \\ 0 & si \quad x \in \mathbb{R} \setminus S. \end{cases}$$

Ejemplo 2.2.2. *Si se considera $S = [2,5]$, la función característica asociada a este intervalo es la siguiente:*

$$X_{[2,5]} = \begin{cases} 1 & si \quad x \in [2,5] \\ \\ 0 & si \quad x \in \mathbb{R} \setminus [2,5]. \end{cases}$$

El gráfico de esta función característica se presenta a continuación:

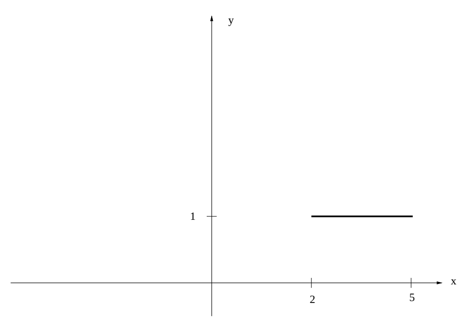

Figura 2.1: Gráfico función característica $X_{[2,5]}$.

2.2.2. Integral de Lebesgue de una Función Característica

La primera definición de integral de Lebesgue es dada para las funciones características de un intervalo limitado S. En este caso la integral es igual a la medida de S, lo que se expresa como:

Definición 2.2.3. *Sea S un conjunto cualquiera de puntos de $\mathbb{R}$ y X_S su respectiva función caraterística, entonces*

$$\int X_S = m(S).$$

Ejemplo 2.2.4. *Retomando 2.2.2 se puede determinar la integral de $X_{[2,5]}$, la cual queda expresada de la siguiente manera:*

$$\int X_{[2,5]} = m([2,5]) = 3.$$

Es decir, la integral de $X_{[2,5]}$ es el área del rectángulo determinado por el intervalo $[2,5]$ en el eje de las abscisas y la imagen 1 dada por la función en el eje de las ordenadas.

De forma natural se tiene que, esta primera definición de la Integral de Lebesgue coincide con la Integral de Riemann. Y al igual que en el caso de Riemann, se desea que la Integral de Lebesgue cumpla la propiedad de la linealidad. Para eso se requiere de una clase de funciones que constituya un espacio vectorial, lo que no ocurre con las funciones características.

2.2.3. Función Escalonada

Definición 2.2.5. *Una función ϕ de la forma:*

$$\phi = c_1 X_{I_1} + c_2 X_{I_2} + ... + c_k X_{I_k},$$

donde se tiene que I_k es una colección finita de intervalos limitados (incluídos, posiblemente, los reducidos a un punto), no necesariamente disjuntos, X_{I_k} es la función característica del k-ésimo intervalo y c_k son números reales, se denomina Función Escalonada.

Ejemplo 2.2.6. *Sea ϕ la función escalonada del gráfico de la figura 2.2. Se observa que ϕ puede ser representada como:*

$$\phi(x) = \frac{1}{2}X_{[0,\frac{1}{3})}(x) + \frac{2}{3}X_{[\frac{1}{3},\frac{2}{3})}(x) + \frac{1}{3}X_{[\frac{2}{3},1]}(x).$$

Ahora, es posible pensar que la representación anterior es única, sin embargo, ϕ puede ser igualmente expresada como:

$$\phi(x) = \frac{1}{2}X_{[0,\frac{1}{3})}(x) + \frac{2}{3}X_{[\frac{1}{3},\frac{1}{2})}(x) + \frac{2}{3}X_{[\frac{1}{2},\frac{2}{3})}(x) + \frac{1}{3}X_{[\frac{2}{3},1]}(x)$$

Por lo que se deduce que, en general, se pueden realizar diferentes particiones de los intervalos contemplados en una función escalonada ϕ cualquiera y de éste modo generar diferentes representaciones para la función dada.

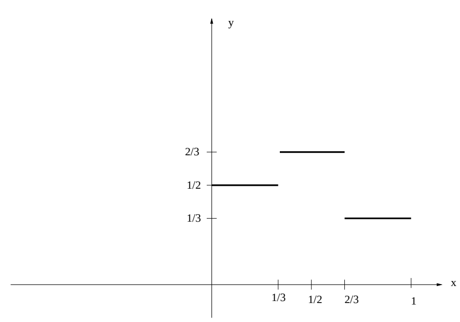

Figura 2.2: Gráfico función escalonada.

Observación 2.2.7. *Siempre es posible suponer que los intervalos I_n de la definición 2.2.8 son disjuntos dos a dos. Más aún, si consideramos dos funciones escalonadas, es posible suponer que los intervalos I_n son los mismos para ambas funciones, subdividiendo los intervalos de ser necesario.*

Proposición 2.2.8. *Las funciones escalonadas forman un espacio vectorial con la suma y multiplicación por escalar definidas de la manera usual.*

Demostración 2.2.9. *Considere ϕ_1, ϕ_2 y ϕ_3 funciones escalonadas, definidas como sigue:*

$$\phi_1 = \sum_{n=1}^{k} a_n X_{I_n},\ \phi_2 = \sum_{n=1}^{k} b_n X_{I_n},\ \phi_3 = \sum_{n=1}^{k} c_n X_{I_n}.$$

donde I_n es una sucesión de intervalos limitados de $\mathbb{R}$ y a_n , b_n y c_n son escaleres reales.

Primero se verifican las propiedades para la Adición, esto es:

Clausura:

Al hacer la suma de ϕ_1 y ϕ_2 se tiene el siguiente resultado:

$$\phi_1 + \phi_2 = \sum_{n=1}^{k} a_n X_{I_n} + \sum_{n=1}^{k} b_n X_{I_n},$$

$$\phi_1 + \phi_2 = \sum_{n=1}^{k} (a_n + b_n) X_{I_n},$$

$$\phi_1 + \phi_2 = \sum_{n=1}^{k} \alpha_n X_{I_n},$$

la cual es en efecto otra función escalonada, tomando $\alpha_n = a_n + b_n$*, con* $n = 1, ..., k$*, por lo que se verifica la propiedad de clausura*

Asociativa:

Observe que:

$$(\phi_1 + \phi_2) + \phi_3 = \left(\sum_{n=1}^{k} a_n X_{I_n} + \sum_{n=1}^{k} b_n X_{I_n} \right) + \sum_{n=1}^{k} c_n X_{I_n}$$

$$(\phi_1 + \phi_2) + \phi_3 = \sum_{n=1}^{k} (a_n + b_n) X_{I_n} + \sum_{n=1}^{k} c_n X_{I_n}$$

$$(\phi_1 + \phi_2) + \phi_3 = \sum_{n=1}^{k} [(a_n + b_n) + c_n] X_{I_n}$$

$$(\phi_1 + \phi_2) + \phi_3 = \sum_{n=1}^{k} [a_n + (b_n + c_n)] X_{I_n}$$

$$(\phi_1 + \phi_2) + \phi_3 = \sum_{n=1}^{k} a_n X_{I_n} + \left(\sum_{n=1}^{k} b_n X_{I_n} + \sum_{n=1}^{k} c_n X_{I_n} \right)$$

$$(\phi_1 + \phi_2) + \phi_3 = \phi_1 + (\phi_2 + \phi_3)$$

De lo anterior se concluye que se satisface la asociatividad.

Elemento Neutro:

Considere la función escalonada ϕ_0 *definida de la siguiente manera:*

$$\phi_0 = \sum_{n=1}^{k} d_n X_{I_n},$$

con $d_n = 0$ *para* $n = 1, ..., k$. *Además sea* ϕ_1 *la función definida anteriormente. Entonces al hacer la suma entre ellas se obtiene el siguiente resultado:*

$$\phi_1 + \phi_0 = \sum_{n=1}^{k} a_n X_{I_n} + \sum_{n=1}^{k} d_n X_{I_n}$$

$$\phi_1 + \phi_0 = \sum_{n=1}^{k} (a_n + d_n) X_{I_n}$$

$$\phi_1 + \phi_0 = \sum_{n=1}^{k} a_n X_{I_n}$$

$$\phi_1 + \phi_0 = \phi_1$$

Por lo tanto, ϕ_0 *es el elemento neutro.*

Elemento Inverso:

Sea ϕ_1 *la función ya definida y* Ψ *su inverso aditivo. Por lo que se obtiene que:*

$$\phi_1 + \Psi = 0$$

$$a_1 X_{I_1} + ... + a_k X_{I_k} + \Psi = 0$$

$$\Psi = -a_1 X_{I_1} + ... + -a_k X_{I_k}$$

$$\Psi = \sum_{n=1}^{k} -a_n X_{I_n}.$$

Por lo tanto, Ψ es una función escalonada, es decir existe elemento inverso.

Conmutatividad:

Sean ϕ_1 y ϕ_2 las funciones antes definidas, al hacer su suma observe que:

$$\phi_1 \, + \, \phi_2 \, = \, \sum_{n=1}^{k}(a_n + b_n)X_{I_n}$$

$$\phi_1 \, + \, \phi_2 \, = \, \sum_{n=1}^{k}(b_n + a_n)X_{I_n}$$

$$\phi_1 \, + \, \phi_2 \, = \, \sum_{n=1}^{k} b_n X_{I_n} + \sum_{n=1}^{k} a_n X_{I_n}$$

$$\phi_1 \, + \, \phi_2 \, = \, \phi_2 \, + \, \phi_1$$

Por lo que se satisface la conmutatividad.

Ahora verificamos las propiedades para el Producto por Escalar:

Asociatividad:

Sean α_1, α_2 pertenecientes a $\mathbb{R}$ y la función escalonada ϕ_1, observe que:

$$\alpha_1(\alpha_2\phi_1) \, = \, \alpha_1 \left[\sum_{n=1}^{k} \alpha_2 a_n X_{I_n}\right]$$

$$\alpha_1(\alpha_2\phi_1) \, = \, \alpha_1 \left[\alpha_2 a_1 X_{I_1} + ... + \alpha_2 a_k X_{I_k}\right]$$

$$\alpha_1(\alpha_2\phi_1) \, = \, \alpha_1\alpha_2 a_1 X_{I_1} + ... + \alpha_1\alpha_2 a_k X_{I_k}$$

$$\alpha_1(\alpha_2\phi_1) \, = \, \alpha_2 \left[\alpha_1 a_1 X_{I_1} + ... + \alpha_1 a_k X_{I_k}\right]$$

$$\alpha_1(\alpha_2\phi_1) \;=\; \alpha_2\left[\sum_{n=1}^{k}\alpha_1 a_n X_{I_n}\right]$$

$$\alpha_1(\alpha_2\phi_1) \;=\; \alpha_2(\alpha_1\phi_1)$$

Por lo que se cumple la propiedad de asociatividad.

Distributiva:

Sea α perteneciente a $\mathbb{R}$ y las funciones escalonadas ϕ_1 y ϕ_2, considere el siguiente resultado:

$$\alpha(\phi_1 \,+\, \phi_2) \;=\; \alpha\left[\sum_{n=1}^{k}(a_n + b_n)X_{I_n}\right]$$

$$\alpha(\phi_1 \,+\, \phi_2) \;=\; \left[\sum_{n=1}^{k}\alpha(a_n + b_n)X_{I_n}\right]$$

$$\alpha(\phi_1 \,+\, \phi_2) \;=\; \left[\sum_{n=1}^{k}\alpha a_n X_{I_n}\right] + \left[\sum_{n=1}^{k}\alpha b_n X_{I_n}\right]$$

$$\alpha(\phi_1 \,+\, \phi_2) \;=\; \alpha\phi_1 \,+\, \alpha\phi_2$$

Por lo tanto,se verifica la propiedad de distributividad.

Elemento Neutro:

Basta observar que considerando $\alpha = 1$ y ϕ una función escalonada cualquiera, se tiene que; $1(\phi) = (\phi)1 = \phi$. Por lo que en efecto $\alpha = 1$ es el elemento neutro.

Clausura:

Considere α un número real y ϕ_1 la función escalonada definida al inicio de la demostración. Luego:

$$\alpha(\phi_1) \;=\; \sum_{n=1}^{k}\alpha a_n X_{I_n}.$$

Que es de hecho otra función escalonada. Por lo tanto finalmente se verifica la propiedad de clausura. Así se han demostrado todas las propiedades necesarias, por lo que podemos decir que la proposición 2.2.8 es verdadera.

2.2.4. Integral de Lebesgue de una Función Escalonada

La segunda definición de Integral de Lebesgue, es dada para las funciones escalonadas. En este caso:

Definición 2.2.10. *Sea ϕ una función escalonada, definida sobre la sucesión de intervalos limitados I_k y c_k constantes. Entonces la integral de lebesgue de ϕ es:*

$$\int \phi = \sum_{i=1}^{k} c_i m(I_i).$$

Ejemplo 2.2.11. *Considere ϕ de 2.2.6 definida por su primera representación, es decir:*

$$\phi(x) = \frac{1}{2}X_{[0,\frac{1}{3})}(x) + \frac{2}{3}X_{[\frac{1}{3},\frac{2}{3})}(x) + \frac{1}{3}X_{[\frac{2}{3},1]}(x)$$

Así la integral de ϕ es:

$$\int \phi(x) = \frac{1}{2}m\left(\left[0,\frac{1}{3}\right)\right) + \frac{2}{3}m\left(\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)\right) + \frac{1}{3}m\left(\left[\frac{2}{3},1\right]\right)$$

$$\int \phi(x) = \frac{1}{2}$$

Proposición 2.2.12. *La integral definida en 2.2.10 es lineal.*

Demostración 2.2.13. *Para demostrar la Proposición 2.2.12 considere* ϕ_1 *y* ϕ_2 *dos funciones escalonadas. Así, por un lado:*

$$\int \phi_1 = \sum_{i=1}^{k} a_i m(I_i)$$

$$\int \phi_2 = \sum_{i=1}^{k} b_i m(I_i).$$

Luego:

$$\int \phi_1 + \int \phi_2 = \sum_{i=1}^{k} a_i m(I_i) + \sum_{i=1}^{k} b_i m(I_i)$$

$$\int \phi_1 + \int \phi_2 = \sum_{i=1}^{k} (a_i + b_i) m(I_i).$$

Por otro lado,

$$\int (\phi_1 + \phi_2) = \sum_{i=1}^{k} (a_i + b_i) m(I_i).$$

Por lo que se obtiene la igualdad deseada, es decir:

$$\int (\phi_1 + \phi_2) = \int \phi_1 + \int \phi_2.$$

Ahora si se considera α *un escalar y* ϕ *una función escalonada, entonces se verifica que:*

$$\int \alpha\phi_1 = \int \sum_{i=1}^{k} (\alpha a_i) X(I_i),$$

$$\int \alpha\phi_1 = \sum_{i=1}^{k} (\alpha a_i) m(I_i),$$

$$\int \alpha\phi_1 \;=\; \alpha \sum_{i=1}^{k} a_i m(I_i),$$

$$\int \alpha\phi_1 \;=\; \alpha \int \phi_1.$$

Por lo que, en efecto, la integral de lebesgue de una función escalonada es lineal.

Teorema 2.2.14. *Si ϕ es una función escalonada, entonces el valor de su integral es el mismo para cualquier representación. ([5], pág. 8)*

Ejemplo 2.2.15. *Por ejemplo si se consideran las representaciones de 2.2.6. Se tiene que por un lado al calcular la integral de la primera representación dada para la función ϕ, es decir, para*

$$\phi(x) = \frac{1}{2}X_{[0,\frac{1}{3})}(x) + \frac{2}{3}X_{[\frac{1}{3},\frac{2}{3})}(x) + \frac{1}{3}X_{[\frac{2}{3},1]}(x),$$

se obtiene el resultado que se desarrolla a continuación:

$$\int \phi(x) \;=\; \frac{1}{2}m\left(\left[0,\frac{1}{3}\right)\right) + \frac{2}{3}m\left(\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)\right) + \frac{1}{3}m\left(\left[\frac{2}{3},1\right]\right) \;=\; \frac{1}{2}.$$

Por otro lado, si se calcula la integral de ϕ utilizando su segunda representación, se tendrá

$$\phi(x) = \frac{1}{2}X_{[0,\frac{1}{3})}(x) + \frac{2}{3}X_{[\frac{1}{3},\frac{1}{2})}(x) + \frac{2}{3}X_{[\frac{1}{2},\frac{2}{3})}(x) + \frac{1}{3}X_{[\frac{2}{3},1]}(x),$$

luego se tiene que

$$\int \phi(x) \;=\; \frac{1}{2}m\left(\left[0,\frac{1}{3}\right)\right) + \frac{2}{3}m\left(\left[\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)\right) + \frac{2}{3}m\left(\left[\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right)\right) + \frac{1}{3}m\left(\left[\frac{2}{3},1\right]\right) \;=\; \frac{1}{2}.$$

Por lo tanto, la integral de ϕ es igual para cualquiera de esas dos representaciones. Análogamente se puede comprobar la veracidad de 2.2.14 para cualquier otra función escalonada.

2.2.5. Integral de Lebesgue de una sucesión de funciones

Las funciones escalonadas definidas sobre un intervalo I de extremos a y b $(a \geq b)$ forman un espacio vectorial, con la adición y multiplicación escalar definidas de la manera usual para funciones. Dicho espacio se denota por $D(I)$.

Definición 2.2.16. *Si se tiene una sucesión ϕ_n de funciones de $D(I)$ que tienden para una función límite f y suponiendo que $\int \phi_n$ converja. Se define la integral de f como:*

$$\int_I f = \lim_{n\to\infty} \int_I \phi_n.$$

Ejemplo 2.2.17. *Si se considera $f(x) = x$, con $x \in I = [0,1]$, es fácil comprobar que su integral es*

$$\int_I f(x)dx = \frac{1}{2}.$$

En efecto, si se define, $K = \{k \in \mathbb{N} / x < \frac{k}{n}\}$, donde n es un número natural fijo, $k = 1, ..., n$ y además, al menor elemento de K se le denomina k^*, entonces se verifica la siguiente desigualdad:

$$\frac{k^*-1}{n} \leq x < \frac{k^*}{n}$$

De donde se deduce que:

$$\frac{k-1}{n} \leq x < \frac{k}{n}.$$

Luego, si se considera ϕ_n definida como:

$$\phi_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2n} X_{\left[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}\right)},$$

donde $X_{\left[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}\right)}$ *es la función característica del intervalo* $\left[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}\right)$ *y si se realiza la diferencia entre* $f(x)$ *y* ϕ_n *se obtiene que:*

$$|f(x)-\phi_n| < \frac{1}{n}$$

Por lo que se puede concluir que ϕ_n *converge uniformemente a* $f(x)$*.*

Finalmente, es necesario, desarrollar el siguiente límite:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\int_I \phi_n &= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2n}\frac{1}{n}\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2n^2}\sum_{k=1}^{n}(2k-1)\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2n^2}[n(n+1)-n]\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2n^2}[n(n+1)-n]\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2n^2}n^2\right) = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Por lo que se verifica para este ejemplo la definición dada en 2.2.16

2.3. Espacios L^p

Las funciones Lebesgue-integrables en el sentido propuesto en 2.2.16 definen espacios vectoriales, siendo el primero de ellos el espacio de funciones tales que $\int_I f < \infty$, denotado $L^1(I)$. De un modo similar se puede dar la siguiente definición:

Definición 2.3.1. *Se definen los espacios L^p como, espacios de funciones cuya p-ésima potencia es lebesgue integrable, con $1 \leq p < \infty$, es decir:*

$$L^p = \{\phi\,;\ \int |\phi|^p < \infty\}$$

De estos espacios, es de nuestro principal interés L^2 el cual es un espacio de Hilbert con el producto escalar difinido de la siguiente manera $(f,g) = \int_I fg$. Cabe recordar que los espacios de Hilbert, son espacios de Banach cuya norma proviene de un producto escalar y que los espacios de Banach son espacios normados y completos.

Capítulo 3

Espacios de Sobolev

3.1. Espacios de Sobolev

Los espacios de Sobolev, destacados por Brézis y Ruas como elementos importantes dentro del estudio de las ecuaciones diferenciales y especialmente en el análisis variacional, surgen como una extensión de los espacios L^p, quedando definidos como se detalla en 3.1.2, pero previamente es necesario recordar la siguiente definición:

Definición 3.1.1. *u' es la derivada débil de una función u si verifica la siguiente igualdad:*

$$\int_a^b u\phi' dx = -\int_a^b u'\phi dx.$$

Para toda función ϕ de clase $C^\infty(\mathbb{R})$ con soporte compacto.

Definición 3.1.2. *Los espacios de Sobolev, denotados por $H^m(a,b)$ se definen como el conjunto de funciones v definidas sobre un intervalo $[a,b]$ tales* *que los cuadrados de v y el de sus derivadas en un sentido débil, hasta la de orden m son integrables. Es decir:*

$$H^m(a,b) = \{v; v \in L^2(a,b), v' \in L^2(a,b), ..., v^m \in L^2(a,b)\}.$$

Teorema 3.1.3. *Si v pertenece a $H^m(a,b)$, entonces todas su derivadas en casi todo punto, hasta la de orden m, existen y son iguales en casi todo punto a las derivadas débiles respectivas.*

Como consecuencia de 3.1.3 se puede deducir dos condiciones necesarisas y suficientes para que una función esté en $H^m(a,b)$, dichas condiciones son las siguientes:

Observación 3.1.4. *Una Función pertenece a $H^m(a,b)$ cuando:*

1. *Todas sus derivadas en casi todo punto, hasta la de orden m, existen y sus cuadrados son integrables.*

2. *Todas sus derivadas en casi todo punto coinciden con las respectivas derivadas débiles.*

Si una de las condiciones descritas en 3.1.4 no se cumple, entonces la función v no pertenece a $H^m(a,b)$.

Ejemplo 3.1.5. *Verifiquemos que la función $v = x^{-\frac{1}{4}}$ no pertenece a $H^1(0,1)$. En efecto:*

$$\int_0^1 v^2 = \int_0^1 (x^{-\frac{1}{4}})^2 = 2\sqrt{x}|_0^1 = 2.$$

Pero la derivaba en casi todo punto de v es $v' = x^{-\frac{5}{4}}$. Luego se tiene que:

$$\int_0^1 (v')^2 = \int_0^1 (x^{-\frac{5}{4}})^2 = -\frac{2}{3} x^{\frac{-3}{2}}|_0^1 = \infty.$$

Por lo que el cuadrado de su primera derivada en casi todo punto no es integrable, por lo tanto no se satisface la primera condición presentada en 3.1.4.

Otra consecuencia de 3.1.3 es dada en la siguiente proposición:

Proposición 3.1.6. *Si v pertenece a $H^m(a,b)$ entonces v pertenece a $C^{m-1}[a,b]$.*

Demostración 3.1.7. *Considere $m = 1$ y $v \in H^1(a,b)$. Luego por 3.1.3, si todas las derivadas débiles de v son también derivadas en casi todo punto, se tiene que:*
v es primitiva de $v' \in L^1(a,b)$ así $v \in C^0[a,b]$,
v' es primitiva de $v'' \in L^1(a,b)$ así $v' \in C^0[a,b]$,
del mismo modo; $v^{(m-1)}$ es primitiva de $v^{(m)}$, así $v^{(m-1)} \in C^0[a,b]$,
por lo tanto; $v \in C^0[a,b]$.
Análogamente se puede demostrar para diferentes valores de m.

Teorema 3.1.8. *Si v pertenece a $C^m[a,b]$, entonces v pertenece a $H^m(a,b)$.*

Ahora para continuar con el desarrollo de este capítulo es necesario definir un conjunto de funciones que serán de utilidad para la demostración de la proposición 3.1.10 y otros resultados que se darán más adelante. Dicha definición se presenta a continuación:

Definición 3.1.9. *Definamos $\mathscr{D}(a,b)$ como el conjunto de funciones infinitamente diferenciables cuyo soporte es compacto y contendio en (a,b)*

Proposición 3.1.10. *Si v^m, derivada débil de orden m de v, pertenece a $L^2(a,b)$, entonces v pertenece a $H^m(a,b)$.*

Demostración 3.1.11. *Por hipótesis* $v^{(m)} \in L^2(a,b)$*, entonces* $v^{(m)} \in L^1(a,b)$*, luego,* $v^{(m)}$ *es una distribución regular, por lo que* $\forall \varphi \in \mathscr{D}(a,b)$ *se tiene que*

$$< v^{(m)}, \varphi > = \int_a^b v^{(m)} \varphi.$$

Además, por 3.1.6 se verifica que:

$$< v^{(m-1)}, \varphi' > = \int_a^b v^{(m-1)} \varphi',$$

luego al hacer integración por partes se obtiene el siguiente resultado:

$$\int_a^b v^{(m-1)} \varphi' \; = \; v^{(m-1)} \varphi|_a^b \; - \; \int_a^b v^{(m)} \varphi.$$

Y considerando que:

$$v^{(m-1)} \varphi|_a^b \; = \; 0,$$

se obtiene por tanto:

$$\int_a^b v^{(m-1)} \varphi' \; = \; - \int_a^b v^{(m)} \varphi.$$

Así:

$$< v^{(m-1)}, \varphi' > = - < v^{(m)}, \varphi > .$$

Luego como $v^{(m-1)}$ *es la derivada débil* $(m-1)$*-ésima de* v*, satisface la siguiente igualdad:*

$$< v^{(m-1)}, \varphi' > = < v^{(m)}, \varphi >,$$

por lo tanto tenemos que:

$$v^{(m-1)} \; = \; v^{(m-1)} \; + \; c,$$

Con c constante.

Así, como $v^{(m)} \in C^0(a,b)$, entonces $v^{(m-1)} \in L^2(a,b)$.

Del mismo modo se puede mostrar la pertenencia para las derivadas débiles de cualquier orden. Y finalmente como las deribadas débiles de v hasta la de orden m pertenecen a L^2 se verifica que $v \in H^m(a,b)$.

Observación 3.1.12. *La proposición 3.1.10 otorga una caracterización simplificada de los espacios $H^m(a,b)$.*

Ahora, surge la problemática de dotar de una norma a los espacios de Sobolev, para lo cual es necesario definir en primer lugar un producto escalar sobre éstos espacios.

Proposición 3.1.13.

$$(u,v)_m = \int_a^b (uv + u'v' + ... + u^{(m)}v^{(m)}),$$

es un producto escalar sobre $H^m(a,b)$

Demostración 3.1.14. *Es necesario verificar que dicho producto escalar satisface las siguientes condiciones:*

(1) $(u,u)_m \geq 0$.

(2) $(u,u)_m = 0$ *si y solo si* $u = 0$.

(3) $(u+v,z)_m = (u,z)_m + (v,z)_m$.

(4) $(\alpha u,v)_m = \alpha(u,v)_m$.

Primero observemos que si $u \in H^m(a,b)$ entonces por 3.1.6 se tiene que $u \in C^{m-1}[a,b]$, por lo tanto:

$$\int_a^b |u|^2 \geq \int_c^d |u|^2 \geq \alpha(d-c),$$

con $[c,d] \subset [a,b]$ y $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Del mismo modo se satisface la desigualdad anterior para las derivadas débiles hasta la de orden m de u, por lo tanto el producto escalar antes definido es positivo, o igual a cero en un conjunto finito de puntos.

Luego basta observar que si el producto escalar es cero, implica que la integral de la función u y la de sus derivadas débiles hasta la de orden m es cero y en consecuencia la función u debe ser identicamente cero.

Por otro lado al considerar el siguiente resultado:

$$(u,z) + (v,z) = \sum_{i=0}^{m} \int_a^b u^{(i)} z^{(i)} + \sum_{i=0}^{m} \int_a^b v^{(i)} z^{(i)},$$

$$= \sum_{i=0}^{m} \int_a^b (u^{(i)} + v^{(i)}) z^{(i)},$$

$$= (u+v,z).$$

Y por último se tiene que $(u,v)_m$ definido en 3.1.13 satisface la condición (4) *como consecuencia de las propiedades de la integral.*

Así, una vez verificado que $(u,v)_m$ es un producto escalar, se puede definir a partir de él una norma sobre $H^m(a,b)$, dicha definición está dada a continuación:

Definición 3.1.15. *Se define la siguiente norma sobre* $H^m(a,b)$*:*

$$||v||_{m,2} = \sum_{i=0}^{m} \int_a^b ||v^{(i)}||_2^2,$$

donde $||\cdot||_2$ *es la norma de* $L^2(a,b)$*.*

Teorema 3.1.16. $H^m(a,b)$ *es un espacio de Hilbert con el producto escalar definido en 3.1.13.*

Observación 3.1.17. *El teorema anterior nos permite deducir que* $H^m(a,b)$ *es un espacio completo con la norma definida en 3.1.15.*

Es sabido que $\mathscr{D}(a,b)$ no es completo para ninguna norma, por lo que, los límites de sucesiones de Cauchy de $\mathscr{D}(a,b)$ con cualquier norma convergen para un elemento de un espacio que sea completo para la norma utilizada y que a la vez contenga a $\mathscr{D}(a,b)$. Ahora bien, dentro de los espacios de Sobolev, es posible definir un conjunto de subespacios que serán de especial interés para el desarrollo de los problemas variacionales, dichos subespacios son denotados como $H_0^m(a,b)$, y se definen como sigue:

Definición 3.1.18. $H_0^m(a,b)$ *es un subespacio de* $H^m(a,b)$ *constituido por funciones límites de sucesiones de Cauchy de* $\mathscr{D}(a,b)$ *con la norma* $\|\cdot\|_{m,2}$*.*

Observación 3.1.19. *De la definición anterior se desprende que* $\mathscr{D}(a,b)$ *es denso en* $H_0^m(a,b)$*.*

Teorema 3.1.20. *Si* $v \in H_0^m(a,b)$ *entonces:*

$$v(a) = v(b) = 0$$

$$v'(a) = v'(b) = 0$$

$$\vdots$$

$$v^{(m-1)}(a) = v^{(m-1)}(b) = 0.$$

Observación 3.1.21. *Considerando lo propuesto en 3.1.20 se tiene que* $H_0^m(a,b)$ *se puede caracterizar como el subespacio de funciones* v *de* $H^m(a,b)$ *tales que:*

$$v^{(i)}(a) = v^{(i)}(b) = 0 \quad i = 0, 1, ..., m-1.$$

Una propiedad interesante de los subespacios $H_0^m(a,b)$ es que es posible definir una norma más simple que la norma definida en 3.1.15 sobre $H^m(a,b)$, esta nueva norma es:

Definición 3.1.22. *Se define la norma* $|\cdot|_{m,2}$ *sobre* $H_0^m(a,b)$ *como*

$$|v|_{m,2} \ = \ \left[\int_a^b |v^{(m)}|^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Teorema 3.1.23. *Los subespacios* $H_0^m(a,b)$ *son espacios de Hilbert para la norma definida en 3.1.22.*

Ahora bien, si se considera $m = 1$ para la definición 3.1.18, se obtiene el subespacio $H_0^1(a,b)$, para el cual se tiene el Teorema de Poincaré, que nos brinda la siguiente desigualdad:

Proposición 3.1.24. *(Teorema de Poincaré) Si $v \in H_0^1(a,b)$, se verifica la siguiente desigualdad:*

$$\|v\|_2 \leq C(a,b)\ \|v'\|_2,$$

donde $C(a,b) = 2(b-a)$.

Observación 3.1.25. *La demostración de ésta proposición puede encontrarse en [5] página 104.*

Como consecuencia de la desigualdad dada en 3.1.24 se puede obtener un resultado de suma relevancia dentro de espacios más familiares como $\mathbb{R}^n$. Dicho resultado guarda relación con la equivalencia de las normas y se detalla en la siguiente proposición:

Proposición 3.1.26. *Sobre $H_0^1(a,b)$ las normas $|\cdot|_2$ y $\|\cdot\|_2$ son equivalentes.*

Demostración 3.1.27. *Se debe verificar que existen dos constantes c_m y C_m estrictamente positivas tales que:*

$$c_m||v||_{m,2} \leq |v|_{m,2} \leq C_{m,2}||v||_{m,2}.$$

Observe que $|v|_{m,2}$ es una parte de $||v||_{m,2}$, por lo que se tiene

$$|v|_{m,2} \leq ||v||_{m,2},$$

de donde se deduce que $C_m = 1$*. Por lo tanto solo falta determinar* c_m*.*
Como $v^{(i)} \in H_0^1$ *con* $i = 0, 1, ..., m-1$ *se tiene por 3.1.24 que*

$$||v^{(i)}||_2 \leq 2(b-a)||v^{(i+1)}||_2,$$
$$||v^{(i+1)}||_2 \leq 2(b-a)||v^{(i+2)}||_2,$$
$$\vdots$$
$$||v^{(m-1)}||_2 \leq 2(b-a)||v^{(m)}||_2.$$

Luego multiplicando miembro a miembro, se obtiene

$$||v^{(i)}||_2 \leq 2(b-a)^{m-1}||v^{(m)}||_2,$$

con $i = 0, 1, ..., m-1$*.*
Como
$||v||_{m,2} = \left[\sum_{i=0}^{m} ||v^{(i)}||_2^2\right]^{\frac{1}{2}}$ *y* $||v^{(m)}||_2 = |v|_{m,2}$*.*
Se tiene que:

$$||v||_{m,2} = \left[\sum_{i=0}^{m} |2(b-a)|^{2(m-i)}\right]^{\frac{1}{2}} |v|_{m,2} \ \forall v \in H_0^m(a,b).$$

Es decir:

$$c_m = \left[\sum_{i=0}^{m} (2(b-a))^{2(m-i)}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Por lo tanto se ha probado que existen las dos constantes que se buscaban y en consecuencia se ha demostrado 3.1.26.

Capítulo 4

Formulación Variacional

4.1. Formulación Variacional

Para avanzar en el desarrollo de este capítulo, es necesario conocer la definición del espacio dual de $H^1(a,b)$ dada a continuación.

Definición 4.1.1. *El dual de* $H^1(a,b)$*, denotado por* $(H^1(a,b))^*$*, es el espacio de todas las transformaciones lineales y continuas definidas de* $H^1(a,b)$ *a valores en* $\mathbb{R}$*, es decir,*

$$(H^1(a,b))^* = \{L(v) \in \mathscr{L}(H^1(a,b),\mathbb{R}) \ ; \ L(v) \ \textit{es continua} \ \},$$

donde $\mathscr{L}(H^1(a,b),\mathbb{R})$ *es el espacio de todas las transformaciones lineales de* $H^1(a,b)$ *a valores en* $\mathbb{R}$*.*

Ahora bien, la siguiente definición brindará una caracerización de las funciones $L(v)$ que pertenecen al dual de $H^1(a,b)$.

Definición 4.1.2. *La condición necesaria y suficiente para que $L(v) \in (H^1(a,b))^*$ es que $L(v)$ pueda ser expresada como:*

$$L(v) = \int_a^b v f_0 + \int_a^b v' f_1 \quad \forall\,, v \in H^1(a,b)$$

donde $f_0\,,\ f_1 \in L^2$

Observación 4.1.3. *La justificación de la caracterización anterior puede ser vista en [5] página 106.*

Observación 4.1.4. *Si se tiene a definida como*

$$a : V \times V \to \mathbb{R}$$

$$(u,v) \to a(u,v)$$

Entonces si a es lineal respecto de cada una de las variables, u y v, se dice que a es una forma bilineal.

4.1.1. Problemas Variacionales

Observación 4.1.5. *(Problema) En términos generales, ahora, se desea determinar una función u de un espacio V de funciones que satisfacen la siguiente condición:*

$$a(u,v) = L(v), \quad \forall\, v \in H^1(a,b),$$

donde $L(v)$ es un funcional lineal definido sobre V y a es una forma bilineal definida sobre $V \times V$.

En relación al problema recién planteado, el siguiente teorema da las condiciones suficientes para que tenga solución única.

Teorema 4.1.6. *(Teorema de Lax-Milgram) Sea V un espacio de Hilbert con norma $\|\cdot\|$ y producto escalar $(.,.)$, y V^* su dual. Si la forma bilineal a satisface las condiciones:*

(1) a es continua en el sentido que: $\exists\, M > 0$, constante tal que:

$$| \, a(u,v) \, | \leq M\|u\|\|v\| \ \forall\, u, v \in V.$$

(2) a es coerciva, es decir, $\exists\, \alpha > 0$ tal que:

$$a(v,v) \geq \alpha\|v\|^2 \ \forall\, v \in V.$$

Y si además de ésto, la forma bilineal L es continua, esto es, $L \in V^*$, entonces el problema de buscar $u \in V$, tal que:

$$a(u,v) = L(v), \quad \forall\, v \in V,$$

tiene solución única.

Observación 4.1.7. *El teorema anterior y su demostracion pueden ser vistos en [5] página 117.*

4.1.2. Ejemplos

Ejemplo 4.1.8. *Sea $V = H_0^1(0,1)$ y:*

$$a(u,v) = \int_0^1 u'v',$$

$$L(v) = \int_0^1 fv \ \ \forall\, f \in L^2.$$

Verifiquemos que en este caso 4.1.5 tiene solución única.

Considere la norma:

$$\|v\| = \|v\|_{1,2} = \left[\int_0^1 |v|^2 + \int_0^1 |v'|^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

Por la equivalencia de las normas en $H_0^1(0,1)$ *se deduce que:*

$$|v|_{1,2} \geq c_1\|v\|_{1,2}.$$

Así, considerando $c_1 = \alpha$ *se tiene que* a *es coerciva pues*

$$a(v,v) \geq \alpha\|v\|^2, \ \forall\, v \in V.$$

Por otro lado, se tiene que:

$$|L(v)| = \left|\int_0^1 fv\right| \leq \left[\int_0^1 f^2\right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_0^1 v^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$|L(v)| \leq \left[\int_0^1 f^2\right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_0^1 (|v|^2 + |v'|^2)\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Esto es;

$$|L(v)| \leq C\|v\|,$$

con $C = \left[\int_0^1 f^2\right]^{\frac{1}{2}} < \infty$

Por lo anterior se concluye que $L(v)$ *es continua.*

En consecuencia se verifican todas las hipótesis del Teorema de Lax-Milgram.

Por lo tanto, el problema tiene solución única.

Observación 4.1.9. *Ahora, para 4.1.8, si se toma ϕ una función de clase $C^\infty(0,1)$ soporte compacto. Se tiene que*

$$\int_0^1 u'\phi = \int_0^1 f\phi, \ \ \forall\, \phi \in C^\infty(0,1).$$

Luego

$$< \phi', u' > = < \phi, f >,$$

$$- < \phi, u'' > = < \phi, f > .$$

De lo que se deduce que:

$$u'' = f,$$

y como se tiene que $f \in L^2$, se puede deducir que $u \in H^2(a,b)$.
De esta manera se concluye que el problema variacional tiene la siguiente interpretación:

$$\begin{cases} -u'' = f \text{ en } L^2(0,1) \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

Ejemplo 4.1.10. *Sea $V = H^2(0,1) \bigcap H_0^1(0,1)$, $a(u,v) = \int_0^1 u''v''$ y $L(v) = \int_0^1 fv$ con $f \in L^2(0,1)$.*
Y se desea verificar que en este caso 4.1.5 también tiene solución única.
Se debe probar entonces que a es coerciva, en efecto, al probar que existe $C > 0$; $|v|_{2,2} \geq C||v||_{2,2}$, se tiene lo siguiente:

$$\int_0^1 |v'|^2 = vv'|_0^1 - \int_0^1 v''v = -\int_0^1 vv'', \ \forall v \in V$$

luego por la desigualdad de Schwartz:

$$||v'||_2^2 \leq ||v||_2||v''||_2.$$

Ahora por 3.1.24:

$$\int_0^1 |v|^2 \leq 4 \int_0^1 |v'|^2.$$

Donde:

$$||v||_2^2 \leq 4||v'||_2^2 \leq 4||v||_2||v''||_2.$$

Luego, tenemos que:

$$||v||_2 \leq 4||v''||_2,$$
$$||v'||_2 \leq 2||v''||_2.$$

Lo que nos da:

$$||v||_{2,2}^2 = ||v||_2^2 + ||v'||_2^2 + ||v''||_2^2 \leq 21||v''||_2^2,$$

de donde se obtiene que $C = \frac{1}{\sqrt{21}}$. *Por lo que considerando* $\alpha = \frac{1}{21}$ *se verifica que a es coerciva.*

Así, la interpretación del problema variacional se da ahora como:

$$< \varphi'', u'' > = < \varphi, f >,$$

$\forall \varphi \in \mathscr{D}(a,b)$ *,y donde* $u^{iv} = f \in L^2(0,1)$. *Con las condiciones de contorno* $u(0) = u(1) = 0$.

No obstante, al comparar el problema inicial con el que se ha rehecho partiendo de la ecuación de Euler, tenemos:

$$\int_0^1 u^{iv} v = \int_0^1 fv, \ \ \forall v \in V$$

entonces,

$$u'''v|_0^1 - u''v'|_0^1 + \int_0^1 u''v'' = \int_0^1 fv, \ \ \forall v \in V$$

de donde se sabe que el primer término de la integral es nulo, sin embargo, el segundo lo será solo sí $u''(0) = u''(1) = 0$*. Estas condiciones serán las condiciones de contorno complementarias.*

Finalmente el problema tiene la siguiente interpretación:

$$\begin{cases} u^{iv} = f \text{ en } L^2(0,1) \\ u(0) = u(1) = 0. \\ u''(0) = u''(1) = 0 \end{cases}$$

4.1.3. Proyecciones

Las proyecciones de esta memoria apuntan hacia la aplicación de los métodos variacionales a la resolución de problemas de ecuaciones diferenciales ordinarias con mayor profundización. Además, de buscar y entregar información respecto de su aplicación en problemas concretos y de mayor interés práctico.

Bibliografía

[1] BRÉZIS, HAIM. *Análisis Funcional Teoría y aplicaciones*. Madrid, España 1984.

[2] GALAZ, FERNANDO. *Definiciones Originales de la integral y medida de Lebesgue* Maryland, U.S.A. 2007.

[3] FERNÁNDEZ, LEONARDO. *Espacios de Hilbert* 2002.

[4] QUEZADA, ROBERTO. *Introducción a la integral de Lebesgue* U.A.M.

[5] RUAS, VITORIANO. *Introducción a los problemas variacionales* Rio de Janeiro, Brasil. 1979.

[6] UNIVERSIDAD NACIONAL DE ROSARIO. *Teoría de la medida e integral de Lebesgue* Rosario, Argentina. 2003.