



UNIVERSIDAD DEL BÍO-BÍO

UNIVERSIDAD DEL BÍO-BÍO

FACULTAD DE EDUCACIÓN Y HUMANIDADES
ESCUELA DE PEDAGOGÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

INTEGRACIÓN NUMÉRICA DE FUNCIONES DIFUSAS

Autor: CARLOS ALONSO ANDRÉS GALLEGOS LASTRA
Profesores Guías: Dr. Marko Antonio Rojas Medar
Dr. Roberto Cabrales Cabrales

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE PROFESOR DE ENSEÑANZA MEDIA EN
EDUCACIÓN MATEMÁTICA.

Chillán, 2010

AGRADECIMIENTOS

Para la realización de esta investigación fue necesario mi esfuerzo y dedicación, sin embargo su realización no hubiese sido posible sin la cooperación desinteresada de todas y cada una de las personas y grupos que a continuación citaré.

A mi familia, en especial a mis padres, por el amor y comprensión que me han entregado a lo largo de mi vida, por acompañarme y apoyarme incondicionalmente en mis años de formación personal y profesional.

A mi director de tesis, el Dr. Marko Rojas Medar por incitarme a conocer nuevas teorías en matemática, por su motivación y sus consejos, por su apoyo incondicional cuando lo he necesitado.

A mi co-director de tesis, el Dr. Roberto Cabrales por guiarme en mi camino académico, por sus sabios consejos y los merecidos sermones, por su apoyo desinteresado, por ser tan solidario con sus conocimientos.

Un reconocimiento especial a los académicos del Grupo de Matemática Aplicada (GMA) del Departamento de Ciencias Básicas de la Universidad del Bío-Bío por la sólida formación en el área de Matemática, tanto en conocimientos como en actitudes, que me entregaron a lo largo de la carrera.

Esta investigación fue financiada con fondos del Proyecto Fondecyt número 1080628 coordinado por el Dr. Marko Rojas Medar, académico del Departamento de Ciencias Básicas de la Universidad del Bío-Bío

RESUMEN

El objetivo de esta memoria es presentar una compilación básica sobre los métodos numéricos usuales de integración, tales como los métodos de Newton-Côtes y las Cuadraturas Gaussianas, como también algunos conceptos básicos sobre teoría fuzzy que serán necesarios para aplicar los métodos de integración a integrales de funciones fuzzy. Finalmente se mostrarán algunas experiencias numéricas aplicando los nuevos métodos presentados en esta memoria y así verificar que se cumplen realmente las estimaciones de aproximación y error.

ABSTRACT

The purpose of this article is to present a basic compilation of usual numerical methods of integration, such as methods of Newton-Cotes and Gaussian quadratures, as well as some basic concepts about fuzzy theory that will be needed to implement the comprehensive integration methods fuzzy function. Finally we show some numerical experiments using the new methods presented in this article and verify compliance and actually approach and error estimates.

ÍNDICE GENERAL

Introducción	1
1. Métodos clásicos de integración numérica	4
1.1. Fórmulas de cuadratura. Orden	4
1.2. Fórmulas de cuadratura de tipo interpolatorio	5
1.3. Fórmulas de cuadratura de Newton-Côtes	9
1.4. Fórmulas de cuadratura de Gauss	14
2. Conceptos de la teoría Difusa	22
2.1. Conjuntos Difusos	22
2.2. Números Difusos	26
2.3. Aritmética, Funciones e Integrales Difusas	29
3. Métodos de Integración para Variable Difusa	32
3.1. Métodos de Newton-Cotes para integración de funciones fuzzy.	32
3.1.1. Representación del error de Peano	34
3.1.2. Regla de integración del trapecio	36
3.1.3. Regla de integración de Simpson	36
3.2. Cuadraturas Gaussianas para integración de funciones fuzzy	36
3.2.1. Regla de integración de Gauss-Legendre	38
3.2.2. Regla de integración de Gauss-Chebyshev	40
3.2.3. Regla de integración de Gauss-Laguerre	41
4. Ejemplos Numéricos	44
4.1. Métodos de Newton-Cotes	44
4.2. Cuadraturas Gaussianas	50
Conclusiones	61

ÍNDICE GENERAL

vii

Bibliografía

64

ÍNDICE GENERAL

INTRODUCCIÓN

La matemática es una ciencia en constante crecimiento, es por esto que día a día surgen nuevas teorías, nuevos problemas y nuevas soluciones. Sin embargo, existe el interés por aplicar las teorías y métodos de resolución conocidos a estas nuevas interrogantes.

Una de estas nuevas teorías son las que involucran lógica, conjuntos, números y funciones difusas las cuales fueron introducidas por Zadeh en la mitad de la década del 60 y han sido complementadas a lo largo del tiempo con aportes de investigadores como Mizumoto, Tanaka, Nahmias, Dubios, Prade, Ralescu, Sugeno, por nombrar algunos. Éste último fue quien sentó las bases para una teoría de medida e integración fuzzy, teoría que posteriormente permite establecer un modelo matemático para ser aplicado a procesos de evaluación, donde la subjetividad de las situaciones involucradas tienen un rol fundamental.

Por otro lado, es conocido que dentro del espacio de funciones, existen muchas que son integrables, pero es muy superior la cantidad de funciones que no son integrables por los métodos tradicionales. Es por este problema que surgen los métodos numéricos de integración de funciones con variable real (o compleja) dentro de los cuales podemos nombrar las *Fórmulas de Newton-Cotes* y los *Métodos de Cuadratura Gaussiana*. Si bien estos métodos sólo entregan aproximaciones numéricas de las integrales, dichas aproximaciones pueden ser tan cercanas como se quiera.

Considerando la teoría de aproximación, el problema de la integración juega un papel importante en diversas áreas, como matemáticas, física, estadística, ingeniería y ciencias sociales. Dado que en muchas aplicaciones por lo menos algunos de los parámetros y medidas de un sistema están representados por números difusos, es importante fomentar la integración difusa y resolverlos.

Además, la necesidad de resolver integrales difusas (u obtener una aproximación de ellas) está íntimamente ligada a la resolución de ecuaciones diferenciales difusas, las cuales modelan problemas aplicados a probabilidades, electrónica, electricidad, economía, ciencias sociales, entre otros.

Esta investigación busca dar solución a problemas de integración que involucran variables difusas mediante el uso de métodos numéricos ya conocidos y que se aplican a problemas que involucran variables usuales (números reales o complejos, vectores o matrices).

CAPÍTULO 1

MÉTODOS CLÁSICOS DE INTEGRACIÓN NUMÉRICA

El objetivo de este capítulo es aproximar numéricamente la integral definida de una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada en un intervalo $[a, b]$:

$$I(f) = \int_a^b f(x) dx \quad (1.1)$$

La justificación del estudio está, por ejemplo, en que la mayoría de integrales definidas no son calculables por la regla de Barrow, $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$ ya que el cálculo de forma directa de una primitiva F de f no es posible.

1.1. Fórmulas de cuadratura. Orden

Para aproximar la integral (1.1), usaremos fórmulas de cuadratura que definimos a continuación.

Definición 1.1. (Fórmula de cuadratura) Sean $\{x_0 < \dots < x_n\} \subset [a, b]$ $n + 1$ puntos distintos y $f \in C^0([a, b])$ una función dada. Una fórmula de cuadratura I_n con $n + 1$ nodos es de la forma

$$I_n(f) = \sum_{k=0}^n a_k f(x_k), \quad (1.2)$$

Los valores $a_k \in \mathbb{R}$ y $x_k \in [a, b], k = 0, \dots, n$ son los pesos y nodos asociados a $I_n(f)$, respectivamente.

Definición 1.2. (Error) Llamaremos $E(f) = I(f) - I_n(f)$ el error en una fórmula de cuadratura.

Definición 1.3. (Orden) Diremos que una fórmula de cuadratura es de orden $m \in \mathbb{N}$ si

$$\begin{cases} E(p) = 0 & \text{para cada } p \in \mathbb{P}_m[x] \text{ y} \\ E(q) \neq 0 & \text{para algún } q \in \mathbb{P}_{m+1}[x]. \end{cases} \quad (1.3)$$

Observemos que gracias a la linealidad de la integral (1.1) y a la linealidad de la suma (1.2) con respecto a f , tenemos que el error $E(\cdot)$ es también un funcional lineal. Luego, como $\mathbb{P}_m[x] = \langle 1, x, \dots, x^m \rangle$ podemos definir el orden de una fórmula de cuadratura de forma equivalente como sigue: Una fórmula de cuadratura es de orden $m \in \mathbb{N}$ si

$$\begin{cases} E(x^k) = 0 & \text{para } k = 0, \dots, m \text{ y} \\ E(x^{m+1}) \neq 0. \end{cases} \quad (1.4)$$

Nota 1.1. El concepto de orden de una fórmula de cuadratura no depende del intervalo $[a, b]$ de integración, ya que al hacer el cambio de variable afín de un intervalo $[a, b]$ a otro $[c, d]$, los polinomios no cambian de grado.

1.2. Fórmulas de cuadratura de tipo interpolatorio

La idea principal de este tipo de fórmulas es aproximar la integral de una función f en un cierto intervalo $[a, b]$ mediante la integral de un polinomio p de grado n sobre dicho intervalo. Expresado de otra forma, lo que se pretende es encontrar un polinomio p de tal forma que

$$\int_a^b f(x) dx \simeq \int_a^b p(x) dx$$

De aquí surge el siguiente problema

Problema 1.4. Dada una función $f \in C^0([a, b])$ y un soporte de $n+1$ puntos en $[a, b]$ ($n \geq 0$), $S = \{x_0 < x_1 < \dots < x_n\} \subset [a, b]$, consideramos el siguiente problema de interpolación:

$$\text{Hallar } p \in \mathbb{P}_n[x] \text{ tal que } p(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad (1.5)$$

donde $\mathbb{P}_n[x]$ denota el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que n .

Definición 1.5. Si p verifica (1.5), diremos que p es el polinomio de interpolación de Lagrange de la función f en los puntos $x_i, i = 0, 1, \dots, n$.

En ocasiones se usará la notación p_n , indicando con el subíndice n el grado del polinomio de interpolación.

Un punto importante en esto es que, como p_n es una aproximación de f en el intervalo $[a, b]$, existe un error de interpolación el cual es necesario tenerlo en cuenta. El siguiente teorema nos provee de una expresión de este error.

Teorema 1.1. *Sea $f \in C^{n+1}([a, b])$. Fijados un soporte de $n+1$ puntos distintos $S = (x_i)_{i=0}^n$ del intervalo $[a, b]$, los valores asociados $(f(x_i))_{i=0}^n$ y el polinomio de interpolación $p \in \mathbb{P}_n[x]$ tal que $p(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, \dots, n$, entonces para todo $x \in [a, b]$ existe $\xi_x \in (a, b)$ tal que*

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} w_S(x), \quad (1.6)$$

donde $w_S(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$.

Pero los polinomios de Lagrange no son los únicos que se utilizan para realizar una interpolación de una función f en un cierto intervalo. En algunos casos más específicos dependiendo del intervalo y de la función f a aproximar se hace necesario y más útil usar polinomios como los que veremos a continuación:

Definición 1.6. (Polinomios de Chebyshev) *A la sucesión de polinomios $\{T_n\}_{n \geq 0}$ definida por recurrencia como sigue:*

$$\begin{cases} T_0 = 1, T_1(x) = x, \\ T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \forall n \geq 1, \end{cases}$$

se le denomina sucesión de polinomios de Chebyshev.

Lemma 1.1. (Propiedades de los polinomios de Chebyshev) *Se tiene que*

- $T_n \in \mathbb{P}_n[x]$, con coeficiente principal 2^{n-1} , para cada $n \geq 1$.
- Para cada $x \in [-1, 1]$, $T_n(x) = \cos(n(\arccos x))$, para cada $n \geq 0$.
- T_n tiene n raíces reales y distintas en $(-1, 1)$ que son:

$$\hat{x}_k = \cos \frac{(2k+1)\pi}{2n}, \quad k = 0, \dots, n-1.$$

- T_n tiene $n-1$ puntos críticos en $(-1, 1)$, a saber,

$$\tilde{x} = \cos \frac{k\pi}{n}, \quad k = 1, \dots, n-1,$$

y los extremos del intervalo corresponden a $k = 0$ y $k = n$. Además para cada $k = 0, \dots, n$, $T_n(\tilde{x}_k) = (-1)^k$ y $\|T_n\|_{\infty, [-1, 1]} = 1$ para todo $n \geq 0$.

1.2 Fórmulas de cuadratura de tipo interpolatorio

Problema 1.7. Dada $f \in C^1([a, b])$ y un soporte $S = \{x_0 < x_1 < \dots < x_n\} \subset [a, b]$, consideramos el problema:

$$\begin{cases} \text{Hallar } p \in \mathbb{P}_{2n+1}[x] \text{ tal que} \\ p(x_i) = f(x_i), p'(x_i) = f'(x_i), i = 0, 1, \dots, n. \end{cases} \quad (1.7)$$

Definición 1.8. Si p verifica (1.7), diremos que p es el polinomio de interpolación de Hermite.

Teorema 1.2. Sea $f \in C^{2n+2}([a, b])$. Fijados un soporte de $n + 1$ puntos distintos $(x_i)_{i=0}^n$ de $[a, b]$, los valores asociados $(f(x_i))_{i=0}^n, (f'(x_i))_{i=0}^n$ y el polinomio de interpolación de Hermite $p \in \mathbb{P}_{2n+1}[x]$ tal que $p(x_i) = f(x_i)$ y $p'(x_i) = f'(x_i), i = 0, \dots, n$ entonces para todo $x \in [a, b]$ existe $\xi_x \in (a, b)$ tal que

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi_x)}{(2n+2)!} w_S(x)^2, \quad (1.8)$$

donde $w_S(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$.

Como hemos visto, podemos aproximar una función continua f mediante un polinomio de interpolación p_n . Además, hemos obtenido una expresión del error de esta interpolación. De esto se desprende el siguiente teorema.

Teorema 1.3. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua y $\epsilon > 0$. Entonces existe un polinomio p en $[a, b]$ tal que $|f - p| < \epsilon$

Definición 1.9. (Fórmula de cuadratura de tipo interpolatorio (f.c.t.i.)) Sean $f \in C^0([a, b])$, $S = \{x_0 < x_1 < \dots < x_n\} \subset [a, b]$ un soporte de puntos distintos y $p_n(x)$ el polinomio de interpolación asociado a f y a S . Diremos que una fórmula de cuadratura I_n con $n + 1$ nodos es de tipo interpolatorio si

$$I_n(f) \equiv I(p_n) = \int_a^b p_n(x) dx. \quad (1.9)$$

Los puntos de interpolación $x_k, k = 0, \dots, n$ son los nodos de la f.c.t.i. Veamos cómo se pueden calcular los pesos. El polinomio de interpolación p_n se puede expresar respecto de la base de Lagrange como sigue:

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n f(x_k) \int_a^b L_k(x), \quad (1.10)$$

donde los L_k vienen dados mediante el algoritmo de Lagrange. Luego, sustituyendo (1.10) en (1.9), deducimos que

$$I_n(f) = \int_a^b p_n(x) = \sum_{k=0}^n f(x_k) \int_a^b L_k(x),$$

en consecuencia, una f.c.t.i. es un caso particular de cuadratura asociada a los nodos de interpolación cuyos pesos son

$$a_k = \int_a^b L_k(x) dx, \quad k = 0, \dots, n. \quad (1.11)$$

Nota 1.2. En el razonamiento anterior se consideraron fórmulas de cuadratura que provienen al integrar el polinomio de interpolación de Lagrange. No obstante, la Definición 1.9 es de carácter general, es decir es posible también considerar f.c.t.i. que provienen al integrar otros polinomios de interpolación, por ejemplo el de Hermite, o bien el de Hermite general, o bien cualquier otro polinomio de tipo ortogonal.

Teorema 1.4. *Fijados cualesquiera $n + 1$ nodos distintos $(x_i)_{i=0}^n \subset [a, b]$, existe una única fórmula de cuadratura de orden $\geq n$, que es la correspondiente f.c.t.i.*

Definición 1.10. *Diremos que el error de la fórmula de cuadratura $I_n(h)$ respecto de la longitud del intervalo h es de orden m , $m \in \mathbb{N}$, si $E(h) = O(h^m)$. En este caso, diremos simplemente que el orden de dicha fórmula de cuadratura es $O(h^m)$.*

Teorema 1.5. *Fijados $n + 1$ nodos distintos en un intervalo de integración de longitud $h > 0$, existe una única fórmula de cuadratura con error $E(h)$ de orden $O(h^{n+2})$, que es la correspondiente fórmula de cuadratura de tipo interpolatorio (de orden $\geq n$).*

Además, la fórmula de cuadratura de tipo interpolatorio es de orden p (con $p \geq n$), si y sólo si $E(h) = O(h^{p+2})$ y $E(h) \neq O(h^{p+3})$.

Usando la expresión del Teorema 1.1 sobre el error de interpolación, podemos escribir

$$\begin{aligned} E(f) &= \int_a^b f(x) dx - \int_a^b p_n(x) dx \\ &= \int_a^b (f - p_n)(x) dx = \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} w_S(x) dx, \end{aligned} \quad (1.12)$$

luego el error de integración es la integral del error de interpolación. De aquí tenemos una primera acotación del error en las f.c.t.i.

Proposición 1.1. *Sea $f \in C^{n+1}([a, b])$, entonces*

$$|E(f)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \int_a^b |w_S(x)| dx, \quad \text{donde } M_{n+1} = \|f^{(n+1)}\|_{\infty, [a, b]}.$$

A continuación se mostrarán unos resultados de tipo valor medio que nos serán útiles más adelante:

Lemma 1.2. (Versión continua) Sean $f, g \in C^0([a, b])$ con $g > 0$ en $[a, b]$ salvo en un número finito de puntos (o bien $g < 0$ en $[a, b]$, salvo en un número finito de puntos). Entonces, existe $\eta \in (a, b)$ tal que

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = f(\eta) \int_a^b g(x) dx.$$

Demostración 1.2. : Supongamos, por ejemplo que $g > 0$ en $[a, b]$ salvo en un número finito de puntos. En particular, $\int_a^b g(x) dx > 0$.

Como $f \in C^0([a, b])$, existen $m_1 = \min_{x \in [a, b]} f(x)$ y $m_2 = \max_{x \in [a, b]} f(x)$. Entonces tenemos

$$m_1g(x) \leq f(x)g(x) \leq m_2g(x), \quad \forall x \in [a, b],$$

siendo las desigualdades estrictas, salvo en un número finito de puntos. Entonces integrando en (a, b) obtenemos

$$m_1 < \frac{\int_a^b f(x)g(x) dx}{\int_a^b g(x) dx} < m_2.$$

Dado que f es continua en $[a, b]$, entonces el teorema del valor intermedio asegura que f alcanza cada valor entre su mínimo y su máximo. Por lo tanto permite deducir que debe alcanzar el valor $\frac{\int_a^b f(x)g(x) dx}{\int_a^b g(x) dx}$ en algún punto η del intervalo (a, b) . Dicho de otro modo, existe $\eta \in (a, b)$ tal que

$$\frac{\int_a^b f(x)g(x) dx}{\int_a^b g(x) dx} = f(\eta) \Rightarrow \int_a^b f(x)g(x) dx = f(\eta) \int_a^b g(x) dx$$

obteniendo así el resultado deseado. □

Lemma 1.3. (Versión Discreta) Sean $f \in C^0([a, b])$, $x_1, \dots, x_p \in [a, b]$ y $b_1, \dots, b_p > 0$ (o bien $b_1, \dots, b_p < 0$). Entonces, existe $\xi \in (a, b)$ tal que

$$\sum_{k=1}^p b_k f(x_k) = f(\xi) \sum_{k=1}^p b_k.$$

La demostración de este lema es análoga a la del Lema 1.2.

1.3. Fórmulas de cuadratura de Newton-Côtes

Las fórmulas de cuadratura de Newton-Côtes son f.c.t.i para soportes equidistantes de $[a, b]$. Dependiendo de que incluyan o no los extremos del intervalo $[a, b]$, tenemos las fórmulas cerradas o abiertas respectivamente. En este caso, sólo estudiaremos las fórmulas cerradas.

Definición 1.11. Sean $h = (b - a)/n$, $x_k = a + kh$, $k = 0, \dots, n$ y $[a, b] = [x_0, x_n]$. Una fórmula de cuadratura de Newton-Côtes con $n + 1$ nodos es de la forma

$$I_n(f) = \sum_{k=0}^n a_k f(x_k),$$

donde, según (1.11) los pesos a_k para cada $k = 0, \dots, n$ vienen dados por

$$a_k = \int_a^b L_k(x) dx = h \int_0^n l_k(t) dt = h \int_0^n \prod_{j=0, j \neq k}^n \frac{t - j}{k - j} dt,$$

de donde

$$a_k = (-1)^{n-k} \frac{h}{n!} \binom{n}{k} \int_0^n \prod_{j=0, j \neq k}^n t - j dt.$$

Teorema 1.6. (Error en fórmulas de Newton-Côtes cerradas)

Sea $I_n(f)$ una fórmula de cuadratura de Newton-Côtes cerrada con $n + 1$ nodos,

a) Si n es **par** y $f \in C^{n+2}([a, b])$, entonces existe $\xi \in (a, b)$ tal que

$$E(f) = \frac{f^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)!} \int_a^b x w_S(x) dx = h^{n+3} \frac{f^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)!} \int_0^n t \pi(t) dt,$$

donde $\pi(t) = t(t-1)\dots(t-n)$. Además, $\int_0^n t \pi(t) dt < 0$. En particular, el orden de fórmula de cuadratura es $n + 1$.

b) Si n es **impar** y $f \in C^{n+1}([a, b])$, entonces existe $\xi \in (a, b)$ tal que

$$E(f) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \int_a^b w_S(x) dx = h^{n+2} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \int_0^n \pi(t) dt,$$

donde $\pi(t) = t(t-1)\dots(t-n)$. Además, $\int_0^n \pi(t) dt < 0$. En particular, el orden de fórmula de cuadratura es n .

Ejemplo 1.12. Sea $f_k = f(x_k)$, $k = 0, \dots, n$ y $[a, b] = [x_{-1}, x_{n+1}]$. Tenemos las siguientes fórmulas de cuadratura de Newton-Côtes cerradas junto con el error que proporciona el

Teorema 1.6:

$$\begin{aligned}
 n = 0, \quad \int_{x_{-1}}^{x_1} f(x) dx &= 2hf_0 + \frac{h^3}{3}f^{(2)}(\xi), \quad \xi \in (x_{-1}, x_1) \\
 n = 1, \quad \int_{x_{-1}}^{x_2} f(x) dx &= \frac{3h}{2}(f_0 + f_1) + \frac{3h^3}{4}f^{(2)}(\xi), \quad \xi \in (x_{-1}, x_2) \\
 n = 2, \quad \int_{x_{-1}}^{x_3} f(x) dx &= \frac{4h}{3}(2f_0 - f_1 + 2f_2) - \frac{28h^5}{90}f^{(4)}(\xi), \quad \xi \in (x_{-1}, x_3) \\
 n = 3, \quad \int_{x_{-1}}^{x_4} f(x) dx &= \frac{5h}{24}(11f_0 + f_1 + f_2 + 11f_3) + \frac{95h^5}{144}f^{(4)}(\xi), \quad \xi \in (x_{-1}, x_4) \\
 n = 4, \quad \int_{x_{-1}}^{x_5} f(x) dx &= \frac{6h}{20}(11f_0 - 14f_1 + 26f_2 - 14f_3 + 11f_4) + \frac{41h^7}{140}f^{(6)}(\xi), \quad \xi \in (x_{-1}, x_5)
 \end{aligned}$$

Las f.c.t.i. simples con $n + 1$ nodos, para n grande implican la realización de muchas operaciones y, en particular, el cálculo de los pesos es muy costoso. Además, en general no se tiene garantizada convergencia, es decir, $I_n(f) \not\rightarrow I(f)$ cuando $n \rightarrow \infty$. Por esta razón, en la práctica, se usa la integración compuesta (o integración a trozos).

Fórmulas compuestas de Newton-Côtes La idea principal de la integración compuesta es la siguiente: se fija una partición principal $\mathcal{P} = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ del intervalo $[a, b]$ y se descompone la integral en $[a, b]$ en suma de integrales en los subintervalos $I_i = [x_{i-1}, x_i]$:

$$I(f) = \int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx.$$

Entonces, se aplican f.c.t.i. simples de $m + 1$ nodos, con m pequeño (en la práctica, $m = 1, 2, 3$) en cada subintervalo $I_i, i = 1, \dots, n$. Llamando $h = \max_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{i-1})$ al diámetro de la partición \mathcal{P} , se trata de aproximar $I(f)$ haciendo $h \rightarrow 0$. Más concretamente, en cada subintervalo $I_i = [x_i - x_{i-1}], i = 1, \dots, n$, elegimos un soporte de $m + 1$ puntos:

$$S_m^i = \{x_0^{(i)} < x_1^{(i)} < \dots < x_m^{(i)}\} \subseteq I_i.$$

Consideramos una fórmula de cuadratura simple asociada a este soporte

$$I_m(f) = \sum_{k=0}^m a_k^{(i)} f(x_k^{(i)}),$$

y llamamos $E_m^{(i)}(f) = \int_{I_i} f(x) dx - I_m(f), i = 1, \dots, n$ al error en dicha f.c.t.i. Entonces, la fórmula de cuadratura compuesta que se obtiene a partir de la fórmula de cuadratura simple

elegida, junto con el error, se escribe como sigue:

$$\begin{aligned}
 I(f) &= \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx = \sum_{i=1}^n \sum_{k=0}^m a_k^{(i)} f(x_k^{(i)}) + \sum_{i=1}^n E_m^{(i)} \\
 &:= I_{n,m}(f) + E_{n,m}(f).
 \end{aligned}$$

Nota 1.3.

1. En caso de usar una partición uniforme (con puntos equiespaciados) y para una fórmula de cuadratura de Newton-Côtes, los pesos $a_k^{(i)}$ no dependen de i , porque

$$a_k^{(i)} = \int_{I_i} L_k^{(i)}(x) dx = \frac{h}{m} \int_0^m l_k(t) dt,$$

donde

$$l_k(t) = \prod_{j=0, j \neq k}^m \frac{t-j}{k-j}, \quad k = 0, \dots, m,$$

para todo $i = 0, \dots, n$. Además, los $a_k^{(i)}$ son simétricos, es decir, $a_k^{(i)} = a_{n-k}^{(i)}$, puesto que por la propiedad de simetría de los números combinatorios, se tiene que $l_k(t) = l_{n-k}(n-t)$.

2. Cuando necesitamos obtener una fórmula de cuadratura compuesta y usamos las fórmulas de cuadratura simples de Newton-Côtes cerradas, los extremos de los subintervalos I_i son nodos repetidos.

Ejemplo 1.13. Vamos a obtener la fórmula de cuadratura del trapecio compuesta. Para ello, consideramos una partición uniforme del intervalo $[a, b]$:

$$\mathcal{P} = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$$

siendo

$$x_i = a + ih, \quad i = 0, \dots, n, \quad h = \frac{b-a}{n}.$$

Luego,

$$I(f) = \sum_{i=1}^n \int_{I_i} f(x) dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx. \tag{1.13}$$

En cada I_i , $i = 1, \dots, n$, usamos la regla del trapecio (simple) junto con el error que, según el Ejemplo 1.12 (para $n = 1$), se escribe, suponiendo que $f \in C^2([a, b])$

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx = \frac{h}{2}(f(x_{i-1}) + f(x_i)) - \frac{h^3}{12}f''(\xi_i), \quad \xi_i \in (x_{i-1}, x_i).$$

En consecuencia, usando esta fórmula junto con el Lema 1.3 en (1.13), llegamos a que existe $\xi \in (a, b)$ tal que

$$\begin{aligned} I(f) &= \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx = \frac{h}{2} \sum_{i=1}^n (f(x_{i-1}) + f(x_i)) - \frac{h^3}{12} \sum_{i=1}^n f''(\xi_i) \\ &= \frac{h}{2} \left(f(a) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b) \right) - \frac{h^3}{12} n f''(\xi) \\ &= \frac{h}{2} \left(f(a) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b) \right) - \frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(\xi). \end{aligned} \quad (1.14)$$

La fórmula obtenida es la fórmula de cuadratura del trapecio compuesta. Obsérvese que cuando $n \rightarrow +\infty$ (o bien $h \rightarrow 0$) el error en (1.14) tiende a cero como $1/n^2$ (o bien como h^2). En particular, la fórmula de cuadratura compuesta es convergente.

Como consecuencia del Teorema 1.6 se presentará un resultado sobre el error y la convergencia de las fórmulas de cuadratura compuestas, para cuya demostración basta usar que

$$h = \frac{b-a}{nm}$$

y aplicar el Lema 1.3.

Corolario 1.7. (Error en las fórmulas cerradas compuestas) Sea $I_{n,m}(f)$ una fórmula de cuadratura de Newton-Côtes cerrada compuesta. Se verifica:

a) Si m es par y $f \in C^{m+2}([a, b])$, entonces existe $\xi \in (a, b)$ tal que

$$\begin{aligned} E_{n,m}(f) &= \frac{n \left(\frac{h}{m}\right)^{m+3} f^{(m+2)}(\xi)}{(m+2)!} \int_0^m t \pi(t) dt \\ &= \frac{1}{n^{m+2}} \frac{f^{(m+2)}(\xi)}{(m+2)!} \left(\frac{b-a}{m}\right)^{m+3} \int_0^m t \pi(t) dt, \end{aligned}$$

donde $\pi(t) = t(t-1)\dots(t-m)$.

Además, $\int_0^m t \pi(t) dt < 0$ y en particular, $E_{n,m}(f) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow +\infty$, como $O(1/n^{m+2}) \equiv O(h^{m+2})$.

b) Si m es impar y $f \in C^{m+1}([a, b])$, entonces existe $\xi \in (a, b)$ tal que

$$\begin{aligned} E_{n,m}(f) &= \frac{n \left(\frac{h}{m}\right)^{m+2} f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!} \int_0^m \pi(t) dt \\ &= \frac{1}{n^{m+1}} \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!} \left(\frac{b-a}{m}\right)^{m+2} \int_0^m \pi(t) dt, \end{aligned}$$

donde $\pi(t) = t(t - 1) \dots (t - m)$.

Además, $\int_0^m \pi(t) dt < 0$ y en particular, $E_{n,m}(f) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow +\infty$, como $O(1/n^{m+1}) \equiv O(h^{m+1})$.

1.4. Fórmulas de cuadratura de Gauss

Sean $f \in C^0([a, b])$ y consideramos $I(f) = \int_a^b f(x) dx$ la integral a aproximar. Fijados $n+1$ nodos distintos de $[a, b]$, sabemos que la f.c.t.i. asociada tiene pesos $a_k = \int_a^b L_k(x) dx$ y es de orden máximo, es decir de orden $\geq n$. Es natural preguntarse si podemos seleccionar los nodos de manera adecuada para que el orden de la f.c.t.i. sea mayor que n . Más concretamente, nos planteamos la siguiente cuestión.

¿Cómo elegir el soporte $S = \{x_0 < x_1 < \dots < x_n\}$ de $(n + 1)$ nodos de $[a, b]$, para que la f.c.t.i. asociada sea de orden máximo?

Teniendo en cuenta (1.3), el objetivo es elegir los $n + 1$ nodos distintos $x_i, i = 0, \dots, n$ tales que

$$E(q) = 0, \quad \forall q \in \mathbb{P}_{m+n+1}[x], \tag{1.15}$$

con $m \geq 0$ lo mayor posible.

Lemma 1.4. *La f.c.t.i. asociada a los $n + 1$ nodos $\{x_0 < \dots < x_n\}$ es de orden $\geq m + n + 1$, con $m \geq 0$ si y sólo si*

$$\text{orden} \geq n + 1 \Leftrightarrow \int_a^b w_S(x) dx = 0 \Leftrightarrow w_S \perp \mathbb{P}_0[x], \tag{1.16}$$

$$\text{orden} \geq n + 2 \Leftrightarrow \int_a^b x w_S(x) dx = 0 \Leftrightarrow w_S \perp \mathbb{P}_1[x], \tag{1.17}$$

...

$$\text{orden} \geq n + 1 + m \Leftrightarrow \int_a^b x^m w_S(x) dx = 0 \Leftrightarrow w_S \perp \mathbb{P}_m[x], \tag{1.18}$$

donde $w_S = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$.

Demostración 1.4. Sea $q \in \mathbb{P}_{m+n+1}[x]$ cualquier polinomio de grado igual a $m + n + 1, m \geq 0$. Sea $p \in \mathbb{P}_n[x]$ el polinomio de interpolación de q asociado a $n + 1$ nodos x_0, \dots, x_n . Luego, usando (1.15), se tiene para la f.c.t.i. que

$$\text{orden} \geq m + n + 1 \Leftrightarrow E(q) = \int_a^b (q(x) - p(x)) dx = 0. \tag{1.19}$$

Para $m = 0$ y sabiendo que el error de interpolación está dado por $f(x) - p(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} w_S(x)$, para algún $\xi_x \in (a, b)$, se tiene que

$$q(x) - p(x) = r(x)w_S(x), \text{ con } r \in \mathbb{P}_0[x]$$

y, por tanto, de (1.19) deducimos (1.16).

Para $m = 1$ y usando nuevamente el error de interpolación descrito anteriormente, tenemos

$$q(x) - p(x) = r(x)w_S(x), \text{ con } r \in \mathbb{P}_1[x] \text{ y de grado } 1$$

y, por tanto, de (1.19) y teniendo en cuenta (1.16), deducimos (1.17).

Razonando de esta forma, para q de grado $m + n + 1$ se llega a que

$$q(x) - p(x) = r(x)w_S(x), \text{ con } r \in \mathbb{P}_m[x] \text{ y de grado } m$$

luego (1.19) y lo anterior implican (1.18). \square

Lemma 1.5. (Cota superior del orden) *Se verifica que $w_S \notin \mathbb{P}_{n+1}[x]$. En consecuencia, el orden de una f.c.t.i. con $n + 1$ nodos es siempre menor que $2n + 1$.*

Demostración 1.5. Para $r(x) = w_S(x)$, $r \in \mathbb{P}_{n+1}[x]$ se tiene que

$$\int_a^b r(x)w_S(x) dx = \int_a^b w_S(x)^2 dx > 0,$$

luego, $w_S \notin \mathbb{P}_{n+1}[x]$. Entonces, aplicando el Lema 1.4, el orden de la f.c.t.i. es $m + n + 1 \leq n + n + 1 = 2n + 1$ \square

Obsérvese que en virtud de los Lemas 1.4 y 1.5 podemos afirmar que la f.c.t.i. asociada a los nodos $x_0 < \dots < x_n$ es de orden máximo $2n + 1$, si y sólo si el polinomio soporte $w_S \perp \mathbb{P}_n[x]$ (respecto al producto escalar $(f, g) = \int_a^b f(x)g(x) dx$). En lo que sigue, vamos a ver que, los únicos puntos $x_0 < \dots < x_n$ tales que $w_S \perp \mathbb{P}_n[x]$, son las raíces del correspondiente polinomio ortogonal de grado $n + 1$. Para ello, se necesitará el siguiente resultado de las propiedades de los polinomios ortogonales.

Lemma 1.6. (Propiedades de polinomios ortogonales) *Sea $\{p_0, p_1, \dots, p_n\}$ una base ortonormal en $L_2(a, b)$ de $\mathbb{P}_n[x]$ tal que $\text{grado}(p_k) = k$, para $k = 0, 1, \dots, n$. Se verifica que:*

1. p_k tiene exactamente k raíces reales distintas en (a, b) .
2. Si $p \perp \mathbb{P}_k[x]$ y $\text{grado}(p) = k + 1$, entonces $p(x) = \alpha p_{k+1}(x)$ para algún $\alpha \in \mathbb{R}$.

Demostración 1.6.

1. Veamos primero que p_k no tiene raíces fuera del intervalo (a, b) , lo que probaría que todas sus raíces se encuentran dentro de (a, b) . En efecto, sean x_1, \dots, x_n , con $r \leq k$ las raíces reales de p_k en (a, b) (eventualmente, $r = 0$ si no hubiera raíces de p_k en (a, b)). Definimos

$$q(x) = (x - x_1)^{m_1} \dots (x - x_r)^{m_r},$$

donde m_i es la multiplicidad de x_i , $i = 1, \dots, r$. Como $p_k(x) = q(x)d(x)$, con $d \neq 0$ en (a, b) (es decir, $d > 0$ o $d < 0$ en (a, b)). Entonces,

$$\int_a^b p_k(x)q(x) dx = \int_a^b d(x)q^2(x) dx \neq 0,$$

de donde $p_k \not\perp q$. Luego, $\text{grado}(q) \geq k$, pues p_k es ortogonal a todo polinomio de grado $\leq k - 1$. Por otra parte, $\text{grado}(q) \leq \text{grado}(p_k) = k$. Entonces, necesariamente se tiene que

$$\text{grado}(q) = k \text{ y } d \in \mathbb{P}_0[x],$$

luego p_k no tiene raíces reales fuera de (a, b) . Basta demostrar pues que todas las raíces de p_k son simples. Razonemos por reducción al absurdo. Supongamos que para algún i la raíz $x_i \in (a, b)$ es doble, es decir

$$p_k(x) = (x - x_i)^2 q_{k-2}(x) \text{ con } q_{k-2} \in \mathbb{P}_{k-2}[x].$$

Entonces

$$\int_a^b p_k(x)q_{k-2}(x) dx = \int_a^b (x - x_i)^2 q_{k-2}(x)^2 dx > 0,$$

lo que es absurdo, ya que $p_k \perp \mathbb{P}_{k-2}[x]$.

2. Sea $p \perp \mathbb{P}_k[x]$, $p \in \mathbb{P}_{k+1}[x]$ con $\text{grado}(p) = k + 1$. Como $\mathbb{P}_{k+1}[x] = \langle p_0, p_1, \dots, p_k, p_{k+1} \rangle$, tenemos $p(x) = \sum_{l=0}^{k+1} a_l p_l(x)$, de donde deducimos, multiplicando escalarmente por p_j , que $a_j = (p, p_j)$. Entonces $p(x) = \sum_{j=0}^{k+1} (p, p_j) p_j(x)$. Usando que $p \perp \mathbb{P}_k[x]$ todos los coeficientes $(p, p_j) = 0$ para $j = 0, 1, \dots, k$. Por tanto, $p(x) = (p, p_{k+1}) p_{k+1}(x)$. Basta tomar $\alpha = (p, p_{k+1})$ para concluir la demostración de este teorema. □

Teorema 1.8. (Existencia y unicidad) Existe una única f.c.t.i. de orden (máximo) $2n + 1$ que corresponde al soporte $S = \{x_0 < \dots < x_n\} \subset (a, b)$ formado por las $n + 1$ raíces de p_{n+1} , el $(n + 1)$ -ésimo polinomio ortogonal en $L^2(a, b)$. Además, los pesos correspondientes son todos positivos.

Demostración 1.8.

- Existencia: Sea $p_{n+1} \in \mathbb{P}_{n+1}[x]$ con $\text{grado}(p_{n+1}) = n + 1$ el $(n + 1)$ -ésimo polinomio ortogonal en $L^2(a, b)$. Tomemos $w_S(x) = \frac{1}{a_{n+1}} p_{n+1}(x)$, siendo a_{n+1} el coeficiente principal de p_{n+1} . Por el Lema 1.6, $w_S(x) \in \mathbb{P}_{n+1}[x]$ (mónico) con x_0, \dots, x_n , las $n + 1$ raíces reales y distintas pertenecientes al intervalo (a, b) y además $w_S \perp \mathbb{P}_n[x]$. Luego, de (1.16) y del Lema 1.5 deducimos que la f.c.t.i asociada a estos nodos es de orden $2n + 1$.
- Unicidad: Si existe otro soporte \bar{S} de $n + 1$ nodos tal que la f.c.t.i. asociada tiene orden $2n + 1$, entonces $w_{\bar{S}} \perp \mathbb{P}_n[x]$. Como $w_{\bar{S}}$ tiene grado $n + 1$, por el Lema 1.6 tenemos $w_{\bar{S}} = \alpha p_{n+1}$, luego necesariamente este soporte \bar{S} está formado por las únicas raíces de p_{n+1} . Entonces $\bar{S} = S$.
- Pesos positivos: Supongamos que la fórmula de cuadratura de Gauss se escribe como $I_n(f) = \sum_{k=0}^n \alpha_k f(x_k)$. Se trata de ver que $\alpha_k > 0$ para todo $k = 0, \dots, n$. En efecto, para cada $j = 0, \dots, n$, sea

$$q_j(x) = \frac{w_S(x)^2}{(x - x_j)^2} = (x - x_0)^2 \dots (x - x_{j-1})^2 (x - x_{j+1})^2 \dots (x - x_n)^2.$$

Tenemos que $q_j \in \mathbb{P}_{2n}[x]$ y $q_j \geq 0$ en (a, b) . Como la f.c.t.i. de Gauss es exacta para polinomios de grado $\leq 2n + 1$ (ya que es de orden $2n + 1$), deducimos que el error

$$E(q_j) = 0,$$

es decir

$$I(q_j) = I_n(q_j).$$

En consecuencia,

$$0 < \int_a^b q_j(x) dx = \sum_{k=0}^n \alpha_k q_j(x_k) = \alpha_j q_j(x_j),$$

ya que $q_j(x_k) = 0$ si $k \neq j$. Como $q_j(x_j) > 0$, entonces $\alpha_j > 0$.

□

Nota 1.4. Una manera cómoda de calcular los nodos de Gauss, es sobre un intervalo centrado en el origen, por ejemplo $[-1, 1]$, y considerando una distribución simétrica de nodos respecto al origen. Por ejemplo, en el caso de 2 nodos, se escribe

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \alpha f(-\sqrt{a}) + \beta f(\sqrt{a}),$$

con $a \in (0, 1)$ tal que la fórmula de cuadratura sea de orden máximo, que en este caso es 3. Para ello, hay que demostrar que existe un valor de a tal que el polinomio soporte $w(x) = (x + \sqrt{a})(x - \sqrt{a}) = x^2 - a$ verifique

$$\int_{-1}^1 w(x) dx = 0 \text{ y } \int_{-1}^1 w(x)x dx = 0.$$

En efecto,

$$\int_{-1}^1 (x^2 - a) dx = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{3} - 2a = 0 \Leftrightarrow a = \frac{1}{3}.$$

Además $\int_{-1}^1 (x^2 - a)x dx = 0$, porque es un polinomio con potencias impares. En consecuencia, los nodos de Gauss en $[-1, 1]$ son $\pm 1/\sqrt{3}$.

En el caso de determinar los 3 nodos de Gauss en $[-1, 1]$, hay que realizar un cálculo muy parecido, considerando la fórmula de cuadratura

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \alpha f(-\sqrt{a}) + \beta f(0) + \gamma f(\sqrt{a}),$$

con $a \in (0, 1)$ tal que la fórmula de cuadratura sea de orden máximo, que en este caso es 3. Ahora $w(x) = (x^2 - a)x$, luego $\int_{-1}^1 w(x) dx = \int_{-1}^1 w(x)x^2 dx = 0$. Basta calcular a tal que $\int_{-1}^1 w(x)x dx = 0$ es decir, $a = 3/5$. Luego, los 3 nodos de Gauss en $[-1, 1]$ son $\{0, \pm\sqrt{3/5}\}$.

Del mismo modo se pueden determinar los cuatro nodos de Gauss en $[-1, 1]$ y, en general, los n nodos de Gauss en $[-1, 1]$

Teorema 1.9. (Error en las fórmulas de Gauss) Supongamos que $f \in C^{2n+2}([a, b])$, I_n es la fórmula de cuadratura de Gauss con $n + 1$ puntos y $E(f) = I(f) - I_n(f)$ es el error. Entonces existe $\xi \in (a, b)$ tal que

$$E(f) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n + 2)!} \int_a^b w_S(x)^2 dx$$

Demostración 1.9. Sean $S = \{x_0, \dots, x_n\}$ el soporte formado por las $n + 1$ raíces de p_{n+1} (el $(n + 1)$ -ésimo polinomio ortogonal en $L^2(a, b)$) y $q \in \mathbb{P}_{2n+1}[x]$ el polinomio de interpolación de Hermite asociado a f y S . Entonces, aplicando el Teorema 1.2 sobre el error de interpolación de Hermite, obtenemos que existe $\xi_x \in (a, b)$ tal que para cada $x \in [a, b]$,

$$f(x) - q(x) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi_x)}{(2n + 2)!} w_S(x)^2 = G(x)w_S(x)^2,$$

donde $w_S(x) = (x - x_0) \dots (x - x_n)$ y

$$G(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - q(x)}{w_S(x)^2}, & \text{si } x \neq x_0, \dots, x_n; \\ \lim_{x \rightarrow x_k} \frac{f(x) - q(x)}{w_S(x)^2} = \frac{f''(x) - q''(x)}{(w_S(x)^2)''|_{x=x_k}}, & \text{si } x = x_k, k = 0, \dots, n, \end{cases}$$

donde se ha aplicado dos veces la regla de L'Hôpital. Obsérvese que

$$G(x) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi_x)}{(2n+2)!} \quad \text{para cada } x \neq S \text{ con } \xi_x \in (a, b). \quad (1.20)$$

Gracias a la linealidad de la función error E , a que $E(q) = 0$ (puesto que $q \in \mathbb{P}_{2n+1}[x]$ y el orden de la fórmula de cuadratura de Gauss para $n+1$ puntos es $2n+1$), y aplicando el Lema 1.2, tenemos que existen $\xi_0 \in (a, x_0)$, $\xi_1 \in (x_0, x_1)$, \dots , $\xi_{n+1} \in (x_n, b)$ tales que

$$\begin{aligned} E(f) &= E(f - q) = \int_a^b (f(x) - q(x)) dx - \sum_{k=0}^n \alpha_k (f - q)(x_k) \\ &= \int_a^b G(x) w_S(x)^2 dx \\ &= \int_a^{x_0} G(x) w_S(x)^2 dx + \dots + \int_{x_n}^b G(x) w_S(x)^2 dx \\ &= G(\xi_0) \int_a^{x_0} w_S(x)^2 dx + \dots + G(\xi_{n+1}) \int_{x_n}^b w_S(x)^2 dx. \end{aligned}$$

Usando ahora (1.20) y aplicando el Lema 1.3 (pues $w^2 > 0$ en cada uno de los intervalos (a, x_0) , (x_0, x_1) , \dots , (x_n, b)), obtenemos

$$\begin{aligned} E(f) &= \frac{f^{(2n+2)}(\eta_0)}{(2n+2)!} \int_a^{x_0} w_S(x)^2 dx + \dots + \frac{f^{(2n+2)}(\eta_{n+1})}{(2n+2)!} \int_{x_n}^b w_S(x)^2 dx \\ &= \frac{f^{(2n+2)}(\xi_x)}{(2n+2)!} \int_a^b w_S(x)^2 dx. \end{aligned}$$

obteniendo así el resultado deseado. □

Fórmulas de Gauss con una función peso Se pueden generalizar los resultados anteriores para fórmulas de cuadratura de Gauss con una *función peso*. Concretamente, sea una función peso

$$\rho \in C^0(a, b), \rho(x) > 0 \text{ en } (a, b) \text{ y } \int_a^b \rho(x) dx < \infty,$$

nos planteamos el problema de encontrar $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ y los nodos $x_0 < \dots < x_n$ tales que la fórmula de cuadratura de tipo interpolatorio

$$\int_a^b \rho(x) f(x) dx \approx \sum_{k=0}^n \alpha_k f(x_k),$$

sea de orden máximo. Los resultados vistos hasta ahora con $\rho(x) \equiv 1$ sobre la existencia, unicidad y expresión del error siguen siendo válidos y es posible alcanzar el orden $2n+1$

eligiendo como nodos los ceros del $(n + 1)$ -ésimo polinomio ortogonal respecto al producto escalar con peso

$$(f, g)_\rho = \int_a^b \rho(x) f(x) g(x) dx.$$

Dependiendo del peso ρ y del intervalo considerado, tenemos fórmulas de cuadratura de Gauss con nombres específicos. Por ejemplo,

- Para $\rho(x) = 1$ y $[a, b] = [-1, 1]$ tenemos la fórmula de cuadratura de *Gauss-Legendre* (los polinomios ortogonales en este caso se llaman polinomios de Legendre).
- Para $\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ y $[a, b] = [-1, 1]$ se trata de la fórmula de cuadratura de *Gauss-Chebyshev* (los polinomios ortogonales en este caso se llaman polinomios de Chebyshev). Se observa que, aunque el peso se hace infinito para $x = \pm 1$, su integral es finita ya que $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \left[\arcsin x \right]_{x=-1}^{x=1} = \pi$.
- Para $\rho(x) = e^{-x}$ y $[a, b] = [0, \infty)$ se trata de la fórmula de cuadratura de *Gauss-Laguerre* (los polinomios ortogonales en este caso se llaman polinomios de Laguerre).

CAPÍTULO 2

CONCEPTOS DE LA TEORÍA DIFUSA

En este Capítulo podemos encontrar un resumen sobre algunos conceptos de la teoría difusa los cuales nos ayudarán a entender de qué trata y el porqué de su estudio e importancia. Además, nos entregarán los conocimientos y herramientas necesarias para entender las aplicaciones que se realizarán posteriormente.

Nota 2.1. Más adelante, en ocasiones nos referiremos a algo difuso por su traducción al inglés *fuzzy*

2.1. Conjuntos Difusos

El concepto de conjunto difuso (*fuzzy*) fue introducido por Zadeh en la mitad de la década del 60 y se ha considerado como un modelo matemático adecuado para representar situaciones en donde el grado de subjetividad juega un papel fundamental en el contexto considerado. De esta manera, un modelo concebido en estos términos puede ser usado cuando los modelos determinísticos no reflejan una fiel descripción de la situación en estudio.

La característica esencial de los conjuntos *fuzzy*, a diferencia de los conjuntos clásicos, es la propiedad de pertenencia de un elemento a un determinado conjunto, ésta se describe por medio de una función de pertenencia la cual puede variar entre 0 y 1; Por ejemplo, sea A un subconjunto del espacio Ω . Podemos definir la función $s_A : \Omega \rightarrow \{0, 1\}$ tal que

$$s_A(x) = \begin{cases} 0, & x \notin A \\ 1, & x \in A \end{cases}$$

en el aspecto clásico, la propiedad de un objeto de pertenecer a un conjunto es V o F y por convenio se le asignan los valores extremos 0 y 1, pero no hay valores intermedios.

Si tenemos en cuenta, como ejemplo práctico de un conjunto clásico, el conjunto universal Ω continuo y no contable de una temperatura exterior x en grados Celsius, podemos usar la teoría de conjuntos clásicos y definir el conjunto A de temperaturas bajo cero por

$$A = \{x \in X | x \leq 0\}$$

o alternativamente por la función característica

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{para } x \leq 0 \\ 0, & \text{para } x > 0 \end{cases}, x \in \Omega$$

Por lo tanto, la propiedad

$$\mathcal{A}(x) = \text{“}x \text{ es una temperatura bajo cero”}$$

permite una definición no ambigua del conjunto A , esto es, permite una clara distinción entre los elementos que pertenecen a A y los que no. La función característica $\mu_A(x)$ del conjunto A de las “temperaturas bajo cero” está graficada en la Figura 2.1.

Como una extensión del ejemplo anterior, consideremos el siguiente problema: ¿Cómo se vería el conjunto \tilde{A} de “bajas temperaturas”? A pesar de que la clasificación de las temperaturas, por supuesto, depende en gran medida la percepción personal de “baja temperatura”, o “frío”, respectivamente, es evidente que una división clara del conjunto universo en elementos que definitivamente pertenecen al conjunto y aquellos que están completamente excluidos, ya no tiene sentido. La noción de una propiedad fuzzy

$$\tilde{A}(x) = \text{“}x \text{ es una temperatura baja”}$$

para el conjunto \tilde{A} requiere una extensión de la teoría de conjuntos clásica hacia una teoría de conjuntos generalizada, donde además de pertenencia y exclusión también exista la posibilidad de otorgar gradaciones entre los dos grupos.

En este contexto, los conjuntos fuzzy pueden introducirse como una generalización de conjuntos convencionales al permitir que los elementos de un conjunto universo no sólo pertenecer por completo, o no pertenecer a un grupo específico, sino también de pertenecer al conjunto a un cierto grado.

La función de pertenencia ($\mu_{\tilde{A}} : \Omega \rightarrow [0, 1]$) se interpreta como el grado en que un elemento dado cumple con ciertas especificaciones que definen a los elementos del conjunto

en cuestión. Por ejemplo, si se tiene que un cierto elemento x es tal que $\mu_{\tilde{A}}(x) = 0,8$ significa que cumple según nuestro criterio el 80 % de las especificaciones que definen los elementos del conjunto. La función de pertenencia se relaciona con vaguedad y subjetividad (como algunos procesos de evaluación). De esta manera, mediante la extensión de la función de pertenencia se dirá que, por abuso de lenguaje, $\tilde{A} \subseteq \Omega$, con la función de pertenencia $\mu_{\tilde{A}}$, es un conjunto fuzzy. Así en particular todo conjunto usual es un conjunto fuzzy.

Es así, que en el contexto fuzzy, existe una transición continua entre lo falso y verdadero, entre la pertenencia y no pertenencia a un conjunto dado, que mediante principios matemáticos puede servir para modelar información basada en grados de pertenencia. Un conjunto fuzzy no tiene límites bien definidos.

Retomando el ejemplo introductorio del conjunto fuzzy \tilde{A} de “bajas temperaturas”, una posible función de pertenencia podría estar dada por

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \frac{1}{1 + e^{x-10}}, \quad x \in \Omega$$

la cual podemos ver en la Figura 2.1

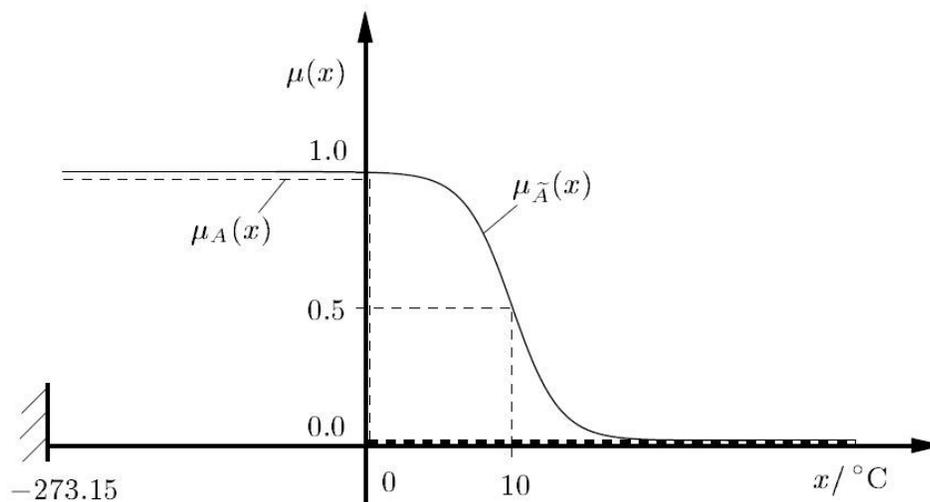


Figura 2.1: Solución mediante fórmula de *Función característica* $\mu_A(x)$ (línea punteada) y una posible función de pertenencia $\mu_{\tilde{A}}$ (línea continua)

Resumiendo, si Ω es algún conjunto, entonces un subconjunto fuzzy \tilde{A} de Ω se define por su función de pertenencia, denotada $\mu_{\tilde{A}}(x)$, la cual produce valores en $[0, 1]$ para todo x en Ω . Así, $\mu_{\tilde{A}}(x)$ es una función que va de Ω en $[0, 1]$. Si $\mu_{\tilde{A}}(x_0) = 1$, entonces decimos que x_0 pertenece a \tilde{A} , si $\mu_{\tilde{A}}(x_1) = 0$ decimos que x_1 no pertenece a \tilde{A} , y si $\mu_{\tilde{A}}(x_2) = 0.6$

decimos que el valor de pertenencia de x_2 en \tilde{A} es 0.6. Cuando $\mu_{\tilde{A}}(x)$ es siempre uno o cero, obtenemos un subconjunto *Crisp* de Ω . El término “Crisp” quiere decir “no difuso”. Un conjunto Crisp es un conjunto clásico. Un número Crisp es un número real. Una matriz (vector) Crisp tiene números reales como elementos. Una función Crisp es una función que va de los reales (vectores reales) en números reales. Una solución Crisp a un problema es una solución que involucra conjuntos Crisps, números Crisps, funciones Crisps.

Definición 2.1. (Conjunto potencia fuzzy)

El conjunto potencia $\tilde{\mathcal{P}}(A)$ de un conjunto clásico A es el conjunto de todos los posibles subconjuntos fuzzy \tilde{T} de A . Podemos escribir

$$\tilde{\mathcal{P}}(A) = \{\tilde{T} | \tilde{T} \subseteq A\}$$

Definición 2.2. (Altura de un conjunto fuzzy) La altura $hgt(\tilde{A}) = h(\tilde{A})$ de un conjunto fuzzy $\tilde{A} \in \tilde{\mathcal{P}}(\Omega)$ es el supremo (o el máximo, cuando el conjunto universo Ω es finito) de la función de pertenencia $\mu_{\tilde{A}}(x)$:

$$hgt(\tilde{A}) = h(\tilde{A}) = \sup_{x \in \Omega} \mu_{\tilde{A}}(x).$$

Si $hgt(\tilde{A}) = 1$, \tilde{A} es llamado normal; en otro caso, es llamado subnormal.

Definición 2.3. (Núcleo de un conjunto fuzzy) El núcleo $core(\tilde{A}) = C(\tilde{A})$ de un conjunto fuzzy $\tilde{A} \in \tilde{\mathcal{P}}(\Omega)$ es el conjunto clásico de todos los elementos $x \in \Omega$ tales que tienen un grado de pertenencia igual a la unidad:

$$core(\tilde{A}) = C(\tilde{A}) = \{x \in \Omega | \mu_{\tilde{A}}(x) = 1\}$$

Definición 2.4. (Soporte de un conjunto fuzzy) El soporte $supp(\tilde{A}) = S(\tilde{A})$ de un conjunto fuzzy $\tilde{A} \in \tilde{\mathcal{P}}(\Omega)$ es el conjunto clásico de todos los elementos $x \in \Omega$ tales que tienen un grado de pertenencia no nulo:

$$supp(\tilde{A}) = S(\tilde{A}) = \{x \in \Omega | \mu_{\tilde{A}}(x) > 0\}$$

Definición 2.5. (α -corte de un conjunto fuzzy) El α -corte $cut_{\alpha}(\tilde{A}) = A_{\alpha}$ de un conjunto fuzzy $\tilde{A} \in \tilde{\mathcal{P}}(\Omega)$ es el conjunto clásico de todos los elementos $x \in \Omega$ tales que pertenecen al conjunto fuzzy \tilde{A} al menos en el grado $\alpha \in [0, 1]$;

$$cut_{\alpha}(\tilde{A}) = A_{\alpha} = \{x \in \Omega | \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\}$$

El conjunto $A_{\alpha+}$ con

$$cut_{\alpha+}(\tilde{A}) = A_{\alpha+} = \{x \in \Omega \mid \mu_{\tilde{A}}(x) > \alpha\}$$

es llamado α -corte fuerte del conjunto fuzzy \tilde{A} .

Como consecuencia de las definiciones anteriores se tiene que

$$\begin{aligned} cut_{0+}(\tilde{A}) &= supp(\tilde{A}) \\ cut_1(\tilde{A}) &= core(\tilde{A}) \\ cut_1(\tilde{A}) \neq \emptyset &\Leftrightarrow hgt(\tilde{A}) = 1 \\ \alpha_1 < \alpha_2 &\Rightarrow cut_{\alpha_2}(\tilde{A}) \subset cut_{\alpha_1}(\tilde{A}) \end{aligned}$$

Además, cada conjunto fuzzy \tilde{A} puede ser representado únicamente por la secuencia de sus α -cortes asociados a través de la fórmula

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \sup_{\alpha \in [0,1]} \alpha \mu_{cut_{\alpha}(\tilde{A})}(x) = \sup_{\alpha \in [0,1]} \alpha \mu_{cut_{\alpha+}(\tilde{A})}(x).$$

La ecuación anterior es generalmente conocida como el *Teorema de descomposición de los conjuntos fuzzy* y establece una conexión importante entre los conjuntos fuzzy y conjuntos clásicos. Esta conexión nos proporciona el criterio para la generalización de las propiedades de los conjuntos clásicos a sus homólogos fuzzy. Además, es de enorme importancia para la definición de la aritmética fuzzy, la cual puede ser reducida a aritmética de intervalos, cuando los números fuzzy son descompuestos en α -cortes.

Las propiedades fundamentales de conjuntos fuzzy, tales como altura, núcleo, soporte y α -cortes, están ilustradas para un conjunto fuzzy \tilde{A} como ejemplo en la Figura 2.2

2.2. Números Difusos

Entre los diversos tipos de conjuntos fuzzy, los que se definen en el conjunto universo \mathbb{R} de los números reales son de especial importancia. Estos conjuntos pueden, bajo ciertas condiciones, ser vistos como números fuzzy, que reflejan la percepción humana de cuantificación numérica incierta.

A continuación veremos una definición más formal de número fuzzy.

Definición 2.6. *Números fuzzy (o difusos)* Un conjunto fuzzy $\tilde{P} \in \tilde{\mathcal{P}}(\mathbb{R})$ es llamado un número fuzzy \tilde{p} si satisface las siguientes condiciones:

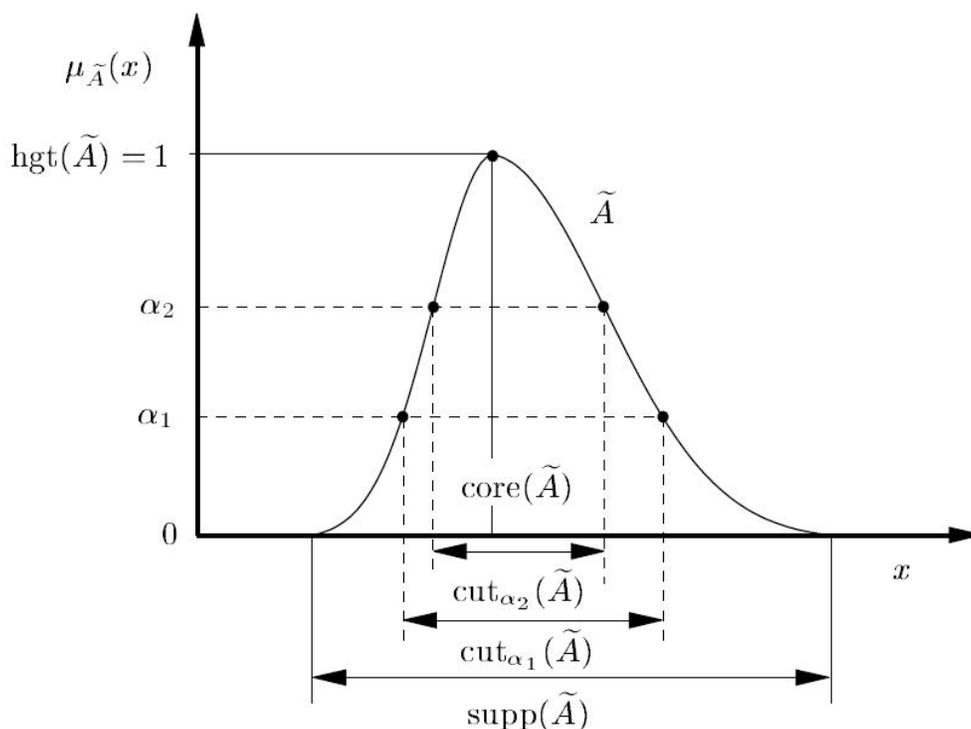


Figura 2.2: Un conjunto difuso \tilde{A} con la caracterización de las propiedades de altura, núcleo, conjunto soporte y α -cortes.

1. \tilde{P} es normal, es decir, $\text{hgt}(\tilde{P}) = 1$.
2. \tilde{P} es convexo.
3. Hay exactamente un $\bar{x} \in \mathbb{R}$ con $\mu_{\tilde{P}}(\bar{x}) = 1$, es decir, $\text{core}(\tilde{P}) = \bar{x}$.
4. La función de pertenencia $\mu_{\tilde{P}}(x)$, $x \in \mathbb{R}$ es por lo menos continua por partes.

El valor $\bar{x} = \text{core}(\tilde{p})$ el cual muestra el máximo grado de pertenencia $\mu_{\tilde{p}}(\bar{x}) = 1$ es llamado valor modal del número difuso \tilde{p} . El dato modal también puede ser llamado como valor máximo, valor central, o valor medio, donde las últimas dos expresiones son preferentemente usadas para números difusos simétricos.

El conjunto de todos los posibles números difusos \tilde{p} puede ser llamado el *conjunto potencia de números difusos* $\tilde{\mathcal{P}}'(\mathbb{R}) \subset \tilde{\mathcal{P}}(\mathbb{R})$. Algunos autores, al conjunto de números difusos le llaman simplemente E^1

Un número difuso $\tilde{p} \in \tilde{\mathcal{P}}'(\mathbb{R})$ es llamado *simétrico* si su función de pertenencia $\mu_{\tilde{p}}(x)$ satisface la condición

$$\mu_{\tilde{p}}(\bar{x} + x) = \mu_{\tilde{p}}(\bar{x} - x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Un número difuso $\tilde{p} \in \tilde{\mathcal{P}}'(\mathbb{R})$ es llamado (*estrictamente*) *positivo*, simbolizado por $\tilde{p} > 0$ o $\text{sgn}(\tilde{p}) = +1$, si

$$\text{supp}(\tilde{p}) \subseteq]0, \infty[,$$

o (*estrictamente*) *negativo*, simbolizado por $\tilde{p} < 0$ o $\text{sgn}(\tilde{p}) = -1$, si

$$\text{supp}(\tilde{p}) \subseteq]-\infty, 0[.$$

Un número difuso $\tilde{p} \in \tilde{\mathcal{P}}'(\mathbb{R})$ puede ser llamado (*fuzzy*) *cero*, simbolizado por $\text{sgn}(\tilde{p}) = 0$, si no es ni negativo ni positivo, esto es, si

$$0 \in \text{supp}(\tilde{p}).$$

Otra forma de representar un número arbitrario difuso es por medio de un par ordenado de funciones. La idea fundamental de esta representación de un número difuso, llamada comúnmente **representación L-R**, es dividir la función de pertenencia $\mu_{\tilde{p}}(x)$ de un número difuso \tilde{p} , en dos curvas $\mu_l(x)$ y $\mu_r(x)$, a la izquierda y derecha del valor modal \bar{x} , quedando como

$$\mu_{\tilde{p}}(x) = \begin{cases} \mu_l(x) & \text{para } x < \bar{x} \\ \mu_r(x) & \text{para } x > \bar{x} \end{cases}$$

Luego, si realizamos una parametrización de las funciones $\mu_l(x)$ y $\mu_r(x)$ tendríamos que \tilde{p} podríamos representarlo como $\tilde{p} = (\underline{p}(r), \bar{p}(r))$, $0 \leq r \leq 1$, donde $\underline{p}(r)$ y $\bar{p}(r)$ son las parametrizaciones de $\mu_l(x)$ y $\mu_r(x)$ respectivamente. Además, dichas funciones parametrizadas satisfacen las siguientes condiciones:

1. $\underline{p}(r)$ es una función acotada por la izquierda, continua y no decreciente sobre $[0, 1]$
2. $\bar{p}(r)$ es una función acotada por la izquierda, continua y no decreciente sobre $[0, 1]$

Nota 2.2. *Esta forma parametrizada será la que utilizaremos para estudiar los métodos de integración del Capítulo 3 y para resolver las integrales fuzzy en el Capítulo 4.*

Entre el infinito número de posibles conjuntos fuzzy en $\tilde{p} \in \tilde{\mathcal{P}}'(\mathbb{R})$ que califican como números difusos, algunos tipos de funciones de pertenencia $\mu_{\tilde{p}}(x)$ son de particular importancia, especialmente respecto al uso de números difusos en la aritmética fuzzy aplicada.

Debido a su función de pertenencia bastante simple del tipo lineal, el *número difuso triangular* o *número difuso lineal* es uno de los más frecuentemente usados números fuzzy. Como una forma abreviada, podemos introducir la notación

$$\tilde{p} = (\bar{x}, \alpha, \beta),$$

para definir un número difuso triangular $\tilde{p} \in \tilde{\mathcal{P}}'(\mathbb{R})$ con la función de pertenencia

$$\mu_{\tilde{p}}(x) = \begin{cases} \frac{x-\bar{x}}{\alpha} + 1, & \bar{x} - \alpha \leq x \leq \bar{x}, \\ \frac{\bar{x}-x}{\beta} + 1, & \bar{x} \leq x \leq \bar{x} + \beta, \\ 0, & \text{otro valor} \end{cases}$$

Su forma paramétrica es

$$\underline{p}(r) = \bar{x} + \alpha(r - 1), \quad \bar{p}(r) = \bar{x} + \beta(1 - r).$$

Definición 2.7. Un número Crisp α es simplemente representado por $\underline{u}(r) = \bar{u}(r) = \alpha$, $0 \leq r \leq 1$.

2.3. Aritmética, Funciones e Integrales Difusas

A continuación se presentan algunas definiciones de conceptos y operatoria que serán necesarias tener presente en los siguientes capítulos.

Sean $\tilde{u}, \tilde{v} \in E^1$ y sea s un número real. Entonces, para $0 \leq r \leq 1$

- $\tilde{u} = \tilde{v}$ si y sólo si $\underline{u}(r) = \underline{v}(r)$ y $\bar{u}(r) = \bar{v}(r)$,
- $\tilde{v} + \tilde{w} = (\underline{v}(r) + \underline{w}(r), \bar{v}(r) + \bar{w}(r))$,
- $\tilde{v} - \tilde{w} = (\underline{v}(r) - \bar{w}(r), \bar{v}(r) - \underline{w}(r))$,
- $\tilde{v} \cdot \tilde{w} = (\min\{\underline{v}(r) \cdot \underline{w}(r), \underline{v}(r) \cdot \bar{w}(r), \bar{v}(r) \cdot \underline{w}(r), \bar{v}(r) \cdot \bar{w}(r)\}, \max\{\underline{v}(r) \cdot \underline{w}(r), \underline{v}(r) \cdot \bar{w}(r), \bar{v}(r) \cdot \underline{w}(r), \bar{v}(r) \cdot \bar{w}(r)\})$,
- $sv = s(\underline{v}(r), \bar{v}(r))$

Definición 2.8. Para números difusos arbitrarios $\tilde{u} = (\underline{u}, \bar{u})$ y $\tilde{v} = (\underline{v}, \bar{v})$, la cantidad

$$D(\tilde{u}, \tilde{v}) = \sup_{0 \leq r \leq 1} \{\max[|\underline{u}(r) - \underline{v}(r)|, |\bar{u}(r) - \bar{v}(r)|]\}$$

es la distancia entre \tilde{u} y \tilde{v}

Con esta definición de distancia es posible mostrar que E^1 es un espacio métrico completo

Definición 2.9. Una función $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow E^1$ es llamada una función difusa.

Definición 2.10. Sea \tilde{f} una función difusa. Si para un punto fijo arbitrario t_0 en \mathbb{R} y $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ es tal que

$$|t - t_0| < \delta \Rightarrow D[\tilde{f}(t), \tilde{f}(t_0)] < \epsilon,$$

se dice que \tilde{f} es continua.

Definición 2.11. Sea $\tilde{f} : [a, b] \rightarrow E^1$ una función difusa. Para cada partición $P = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ de $[a, b]$ y para un arbitrario $\xi_i : t_{i-1} \leq \xi_i \leq t_i$, $1 \leq i \leq n$, sea

$$R_P = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(t_i - t_{i-1})$$

La integral definida de $f(t)$ sobre $[a, b]$ es

$$\int_a^b f(t) dt = \lim R_P, \max_{1 \leq i \leq n} |t_i - t_{i-1}| \rightarrow 0$$

siempre que este límite exista en la métrica D

Si la función difusa $f(t)$ es continua en la métrica D , su integral definida existe. Además,

$$\left(\int_a^b f(t; r) dt \right) = \int_a^b \underline{f}(t; r) dt$$

$$\left(\int_a^b \overline{f}(t; r) dt \right) = \int_a^b \overline{f}(t; r) dt$$

CAPÍTULO 3

MÉTODOS DE INTEGRACIÓN PARA VARIABLE DIFUSA

En este capítulo aplicaremos los métodos de integración numérica revisados en el Capítulo 1 para resolver una integral definida de una función difusa de la forma

$$\int_a^b f(t) dt, \quad \text{con } f : [a, b] \rightarrow E^1 \text{ una función difusa,}$$

la cual está definida paramétricamente como

$$\int_a^b f(t) dt = \left(\int_a^b \underline{f}(t; r) dt, \overline{\int_a^b f(t; r) dt} \right) = \left(\int_a^b \underline{f}(t; r) dt, \int_a^b \bar{f}(t; r) dt \right),$$

donde $(\underline{f}(t; r), \bar{f}(t; r))$ es la forma parametrizada de la función difusa $f(t)$.

Gracias a este resultado, resolver la integral de una función difusa se convierte en un problema de integración de las funciones $\underline{f}(t; r)$ y $\bar{f}(t; r)$.

A continuación se mostrarán las aplicaciones de los métodos estudiados anteriormente a la integral definida de una función difusa.

3.1. Métodos de Newton-Cotes para integración de funciones fuzzy.

Sea f una función fuzzy. Para cualquier número n natural, las fórmulas de Newton-Cotes

$$\int_a^b f(x) dx = h \sum_{i=1}^n f_i \alpha_i + E, \quad \text{con, } f_i = f(a + ih), \quad h = \frac{b-a}{n},$$

provee valores aproximados de $\int_a^b f(x) dx$. La forma paramétrica de esta fórmula es la siguiente:

$$\int_a^b \underline{f}(x; r) dx = h \sum_{i=1}^n \alpha_i \underline{f}(x_i; r) + E(\underline{f}; r),$$

$$\int_a^b \bar{f}(x; r) dx = h \sum_{i=1}^n \alpha_i \bar{f}(x_i; r) + E(\bar{f}; r), 0 \leq r \leq 1$$
(3.1)

Los pesos α_i , $i = 1, \dots, n$. son números racionales con la propiedad $\sum_{i=1}^n \alpha_i = n$. Esto se deduce cuando se aplica a (3.1) $\underline{f}(x; r) = \bar{f}(x; r) = 1$. Se puede mostrar que la aproximación del error podría ser expresado como sigue:

$$E(\underline{f}; r) = h^{p+1} \cdot K \cdot \underline{f}^{(p)}(\underline{\xi}; r), \underline{\xi} \in (a, b)$$

$$E(\bar{f}; r) = h^{p+1} \cdot K \cdot \bar{f}^{(p)}(\bar{\xi}; r), \bar{\xi} \in (a, b), 0 \leq r \leq 1.$$
(3.2)

Aquí, (a, b) representa un intervalo abierto de a a b . Los valores de p y K dependen sólo de n pero no del integrando f . Para n grande, algunos de los valores de α_i se vuelven negativos y las fórmulas correspondientes se vuelven inadecuadas para propósitos numéricos debido a las cancelaciones que tienden a ocurrir en el cálculo de las sumas. Sea

$$Q(\underline{f}; r) = h \sum_{i=1}^n \alpha_i \underline{f}(x_i; r),$$

$$Q(\bar{f}; r) = h \sum_{i=1}^n \alpha_i \bar{f}(x_i; r), 0 \leq r \leq 1$$
(3.3)

De aquí tenemos

$$I(\underline{f}; r) = \int_a^b \underline{f}(x; r) dx = Q(\underline{f}; r) + E(\underline{f}; r),$$

$$I(\bar{f}; r) = \int_a^b \bar{f}(x; r) dx = Q(\bar{f}; r) + E(\bar{f}; r), 0 \leq r \leq 1$$
(3.4)

Cabe preguntarse si estas aproximaciones de $\int_a^b f(x) dx$ se acercan tanto como uno quisiera al valor real de dicha integral. En otras palabras, ¿será que $Q(\underline{f}; r), Q(\bar{f}; r)$ convergen a $I(\underline{f}; r), I(\bar{f}; r)$ respectivamente?.

El siguiente teorema responderá a esta interrogante.

Teorema 3.1. Si $f(x)$ es continua (en la métrica D). La convergencia de $Q(\underline{f}; r), Q(\bar{f}; r)$ a $I(\underline{f}; r), I(\bar{f}; r)$ es uniforme en r .

Demostración 3.1. La continuidad de $f(x)$ garantiza la existencia de la integral definida de $f(x)$. En consecuencia, R_p en la Definición 2.11 converge a esta integral en la métrica D cuando

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\max_{1 \leq i \leq n} (t_i - t_{i-1}) \right] = 0 \quad (3.5)$$

Es fácil ver que las fórmulas (3.3) pueden ser representadas en la forma R_p descrita en la Definición 2.11. Para arbitrarios $R_p = (\underline{R}_p, \overline{R}_p)$ y $I(f) = (I(\underline{f}; r), I(\overline{f}; r))$ tenemos

$$D(R_p, f) = \sup_{0 \leq r \leq 1} \left\{ \max \left[|\underline{R}_p(r) - I(\underline{f}; r)|, |I(\overline{f}; r) - \overline{R}_p(r)| \right] \right\}$$

y dado que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D(R_p, I(f)) = 0, \quad \max_{1 \leq i \leq n} (t_i - t_{i-1}) \rightarrow 0,$$

tenemos que $\underline{R}_p, \overline{R}_p$ convergen uniformemente a $I(\underline{f}; r), I(\overline{f}; r)$ respectivamente. Consecuentemente $Q(\underline{f}; r), Q(\overline{f}; r)$ (las cuales son casos particulares de $\underline{R}_p, \overline{R}_p$, para $(t_i - t_{i-1}) := h\alpha_i, i = 1, \dots, n$) convergen uniformemente a $I(\underline{f}; r), I(\overline{f}; r)$ también. Esto concluye la prueba del Teorema 3.1. \square

3.1.1. Representación del error de Peano

De (3.1) tenemos

$$E(\underline{f}; r) = I(\underline{f}; r) - Q(\underline{f}; r),$$

$$E(\overline{f}; r) = I(\overline{f}; r) - Q(\overline{f}; r), \quad 0 \leq r \leq 1,$$

El error de integración $E(f)$ es un operador lineal en la forma paramétrica

$$E(\alpha \underline{f}(r) + \underline{g}(r)) = \alpha E(\underline{f}; r) + E(\underline{g}; r),$$

$$E(\alpha \overline{f}(r) + \overline{g}(r)) = \alpha E(\overline{f}; r) + E(\overline{g}; r), \quad 0 \leq r \leq 1,$$

para $f, g \in \tilde{V}, \alpha \in \mathbb{R}$ en algún espacio de funciones lineales difusas \tilde{V} .

La siguiente integral difusa representación del error $E(f)$ es un resultado clásico de Peano.

Teorema 3.2. *Suponga que $E(p) = 0$ se cumple para todo $p \in \mathbb{P}_n$, esto es, cada polinomio cuyo grado no exceda a n es integrado exactamente. Luego, para toda función difusa en la forma paramétrica $\underline{f}(r), \bar{f}(r) \in C^{n+1}[a, b]$, $0 \leq r \leq 1$,*

$$\begin{aligned} E(\underline{f}; r) &= \int_a^b \underline{f}^{n+1}(t; r) K(t) dt, \\ E(\bar{f}; r) &= \int_a^b \bar{f}^{n+1}(t; r) K(t) dt, \quad 0 \leq r \leq 1, \end{aligned} \quad (3.6)$$

donde

$$K(t) := \frac{1}{n!} E_x[(x-t)_+^n], \quad (x-t)_+^n := \begin{cases} (x-t)^n, & x \geq t, \\ 0, & x < t \end{cases}$$

y $E_x[(x-t)_+^n]$ cuando esto último es considerado como una función de x .

Demostración 3.2. Considere la expansión de Taylor de $f(x)$, $x \in [a, b]$ en a , en la forma paramétrica:

$$\begin{aligned} \underline{f}(x; r) &= \underline{f}(a; r) + \underline{f}'(a; r)(x-a) + \dots + \frac{\underline{f}^{(n)}(a; r)}{n!} (x-a)^n + \underline{M}_n(x; r), \\ \bar{f}(x; r) &= \bar{f}(a; r) + \bar{f}'(a; r)(x-a) + \dots + \frac{\bar{f}^{(n)}(a; r)}{n!} (x-a)^n + \bar{M}_n(x; r), \quad 0 \leq r \leq 1, \end{aligned} \quad (3.7)$$

Su término residual puede ser expresado en la forma

$$\begin{aligned} \underline{M}_n(x; r) &= \frac{1}{n!} \int_a^x \underline{f}^{n+1}(t; r) (x-t)^n dt = \frac{1}{n!} \int_a^b \underline{f}^{n+1}(t; r) (x-t)_+^n dt, \\ E(\bar{f}; r) &= \frac{1}{n!} \int_a^x \bar{f}^{n+1}(t; r) (x-t)^n dt = \frac{1}{n!} \int_a^b \bar{f}^{n+1}(t; r) (x-t)_+^n dt, \quad 0 \leq r \leq 1, \end{aligned}$$

Aplicando el operador lineal E a (3.7) tenemos

$$\begin{aligned} E(\underline{f}; r) &= E(\underline{M}_n; r) = \frac{1}{n!} E_x \left(\int_a^b \underline{f}^{n+1}(t; r) (x-t)_+^n dt \right), \\ E(\bar{f}; r) &= E(\bar{M}_n; r) = \frac{1}{n!} E_x \left(\int_a^b \bar{f}^{n+1}(t; r) (x-t)_+^n dt \right), \quad 0 \leq r \leq 1, \end{aligned}$$

Dado que $E(p) = 0$ para $p \in \mathbb{P}_n$. Para cualquier $0 \leq r \leq 1$, el operador E_x entero conmuta con la integración y así obtenemos el resultado deseado (3.6) \square

3.1.2. Regla de integración del trapecio

De (3.1) tenemos:

$$I(\underline{f}; r) = h \left[\frac{1}{2} \underline{f}(x_0; r) + \sum_{i=1}^{n-1} \underline{f}(x_i; r) + \frac{1}{2} \underline{f}(x_n; r) \right] + E(\underline{f}; r),$$

$$I(\bar{f}; r) = h \left[\frac{1}{2} \bar{f}(x_0; r) + \sum_{i=1}^{n-1} \bar{f}(x_i; r) + \frac{1}{2} \bar{f}(x_n; r) \right] + E(\bar{f}; r), \quad 0 \leq r \leq 1,$$

donde,

$$E(\underline{f}; r) = -\frac{h^2}{12}(b-a)\underline{f}^{(2)}(\underline{\xi}; r),$$

$$E(\bar{f}; r) = -\frac{h^2}{12}(b-a)\bar{f}^{(2)}(\bar{\xi}; r), \quad \xi \in [x_0, x_n], \quad 0 \leq r \leq 1.$$

3.1.3. Regla de integración de Simpson

De (3.1) tenemos:

$$I(\underline{f}; r) = h \left[\frac{1}{3} \underline{f}(x_0; r) + \frac{4}{3} \sum_{i=0}^{n-1} \underline{f}(x_{2i+1}; r) + \frac{2}{3} \sum_{i=1}^n \underline{f}(x_{2i}; r) + \frac{1}{3} \underline{f}(x_n; r) \right] + E(\underline{f}; r),$$

$$I(\bar{f}; r) = h \left[\frac{1}{3} \bar{f}(x_0; r) + \frac{4}{3} \sum_{i=0}^{n-1} \bar{f}(x_{2i+1}; r) + \frac{2}{3} \sum_{i=1}^n \bar{f}(x_{2i}; r) + \frac{1}{3} \bar{f}(x_n; r) \right] + E(\bar{f}; r), \quad 0 \leq r \leq 1,$$

donde,

$$E(\underline{f}; r) = -\frac{h^4}{180}(b-a)\underline{f}^{(4)}(\underline{\xi}; r),$$

$$E(\bar{f}; r) = -\frac{h^4}{180}(b-a)\bar{f}^{(4)}(\bar{\xi}; r), \quad \xi, \bar{\xi} \in [x_0, x_n], \quad 0 \leq r \leq 1.$$

3.2. Cuadraturas Gaussianas para integración de funciones fuzzy

Sea f una función fuzzy. Para cualquier número n natural, las fórmulas Gaussianas son

$$\int_a^b f(x)w(x) dx = \sum_{i=0}^n A_i f_i + E, \quad \text{para } i = 0, \dots, n \quad (3.8)$$

las cuales proveen valores aproximados de $\int_a^b f(x)w(x) dx$. La forma paramétrica de esta fórmula es la siguiente:

$$\int_a^b \underline{f}(x; r)w(x) dx = \sum_{i=0}^n A_i \underline{f}(x_i; r) + E(\underline{f}; r),$$

$$\int_a^b \overline{f}(x; r)w(x) dx = \sum_{i=0}^n A_i \overline{f}(x_i; r) + E(\overline{f}; r), \quad 0 \leq r \leq 1$$
(3.9)

Los pesos A_i , $i = 0, \dots, n$. son números reales con la propiedad $\sum_{i=0}^n A_i = \int_a^b w(x) dx$. Esto se sigue de (3.9) cuando aplicamos que $\underline{f}(x; r) = \overline{f}(x; r) = 1$.

Sea

$$Q(\underline{f}; r) = \sum_{i=0}^n A_i \underline{f}(x_i; r),$$

$$Q(\overline{f}; r) = \sum_{i=0}^n A_i \overline{f}(x_i; r), \quad 0 \leq r \leq 1$$
(3.10)

Luego, de (3.9) tenemos

$$I(\underline{f}; r) = \int_a^b \underline{f}(x; r)w(x) dx = Q(\underline{f}; r) + E(\underline{f}; r),$$

$$I(\overline{f}; r) = \int_a^b \overline{f}(x; r)w(x) dx = Q(\overline{f}; r) + E(\overline{f}; r), \quad 0 \leq r \leq 1$$
(3.11)

Sean $\underline{f}, \overline{f} \in C^{2n}[a, b]$. Se puede mostrar que el error de aproximación puede ser expresado como sigue:

$$E(\underline{f}; r) = \frac{\underline{f}^{(2n)}(\underline{\eta}; r)}{(2n)!} \int_a^b w(x)q^2(x) dx = K \underline{f}^{(2n)}(\underline{\eta}; r), \quad \underline{\eta} \in (a, b),$$

$$E(\overline{f}; r) = \frac{\overline{f}^{(2n)}(\overline{\eta}; r)}{(2n)!} \int_a^b w(x)q^2(x) dx = K \overline{f}^{(2n)}(\overline{\eta}; r), \quad \overline{\eta} \in (a, b), \quad 0 \leq r \leq 1$$
(3.12)

donde $K = \frac{1}{(2n)!} \int_a^b w(x)q^2(x) dx$ y $q(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i)$ tal que x_i , $i = 0, \dots, n$ son las raíces de polinomios de Legendre, Chebyshev o Laguerre.

Al igual que en la sección anterior, es importante verificar la convergencia de $Q(\underline{f}; r), Q(\overline{f}; r)$ a $I(\underline{f}; r), I(\overline{f}; r)$ respectivamente. El siguiente teorema nos muestra dicha convergencia.

Teorema 3.3. *Si $f(x)$ es continua (en la métrica D). La convergencia de $Q(\underline{f}; r), Q(\overline{f}; r)$ a $I(\underline{f}; r), I(\overline{f}; r)$ es uniforme en r .*

Demostración 3.3. Sea $\epsilon > 0$ y p un polinomio definido en E^1 tal que $\frac{\partial^{2n} \underline{p}(x;r)}{\partial^{2n} x} = \frac{\partial^{2n} \bar{p}(x;r)}{\partial^{2n} x} = 0$ y por el Teorema 1.3 $D(\underline{f}, \underline{p}) < \epsilon$, $D(\bar{f}, \bar{p}) < \epsilon$. De (3.10) tenemos

$$\begin{aligned} Q(\underline{p}; r) - Q(\underline{f}; r) &= \sum_{i=0}^n A_i \underline{p}(x_i; r) - \sum_{i=0}^n A_i \underline{f}(x_i; r) \\ &= \sum_{i=0}^n A_i (\underline{p}(x_i; r) - \underline{f}(x_i; r)), \\ Q(\bar{p}; r) - Q(\bar{f}; r) &= \sum_{i=0}^n A_i \bar{p}(x_i; r) - \sum_{i=0}^n A_i \bar{f}(x_i; r) \\ &= \sum_{i=0}^n A_i (\bar{p}(x_i; r) - \bar{f}(x_i; r)), \end{aligned}$$

Dado que $I(p) = Q(p)$,

$$\begin{aligned} D(I(f), Q(f)) &\leq D(I(f), I(p)) + D(Q(p), Q(f)) \\ &= \sup_{0 \leq r \leq 1} \{ \max[|I(\underline{f}; r) - I(\underline{p}; r)|, |I(\bar{f}; r) - I(\bar{p}; r)|] \} \\ &\quad + \sup_{0 \leq r \leq 1} \{ \max[|Q(\underline{f}; r) - Q(\underline{p}; r)|, |Q(\bar{f}; r) - Q(\bar{p}; r)|] \} \\ &\leq \epsilon \int_a^b w(x) dx + \epsilon \sum_{i=0}^n A_i = 2\epsilon \int_a^b w(x) dx, \end{aligned}$$

Esto concluye la prueba del Teorema 3.3. □

3.2.1. Regla de integración de Gauss-Legendre

En esta regla, tenemos que $w(x) = 1$, $[a, b] = [-1, 1]$. Por lo tanto (3.9) queda como

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \underline{f}(x; r) dx &= \sum_{i=0}^n A_i \underline{f}(x_i; r) + E(\underline{f}; r), \\ \int_{-1}^1 \bar{f}(x; r) dx &= \sum_{i=0}^n A_i \bar{f}(x_i; r) + E(\bar{f}; r), \quad 0 \leq r \leq 1, \end{aligned} \tag{3.13}$$

donde

$$E(\underline{f}; r) = \frac{\underline{f}^{(2n)}(\underline{\eta}; r)}{(2n)!} \int_{-1}^1 q^2(x) dx, \underline{\eta} \in (-1, 1),$$

$$E(\overline{f}; r) = \frac{\overline{f}^{(2n)}(\overline{\eta}; r)}{(2n)!} \int_{-1}^1 q^2(x) dx, \overline{\eta} \in (-1, 1), 0 \leq r \leq 1,$$

con $q(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i)$, tal que $x_i, i = 0, \dots, n$ son las raíces de polinomios de Legendre. En este método, $\sum_{i=1}^n A_i = 2$

Regla de integración de Gauss-Legendre de un punto

$$I(\underline{f}; r) = \underline{f}(0; r) + E(\underline{f}; r),$$

$$I(\overline{f}; r) = \overline{f}(0; r) + E(\overline{f}; r), 0 \leq r \leq 1,$$

donde

$$E(\underline{f}; r) = \frac{1}{3} \underline{f}^{(2)}(\underline{\eta}; r),$$

$$E(\overline{f}; r) = \frac{1}{3} \overline{f}^{(2)}(\overline{\eta}; r), 0 \leq r \leq 1, \underline{\eta}, \overline{\eta} \in (-1, 1)$$

Regla de integración de Gauss-Legendre de dos puntos

$$I(\underline{f}; r) = \underline{f}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}; r\right) + \underline{f}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}; r\right) + E(\underline{f}; r),$$

$$I(\overline{f}; r) = \overline{f}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}; r\right) + \overline{f}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}; r\right) + E(\overline{f}; r), 0 \leq r \leq 1,$$

donde

$$E(\underline{f}; r) = \frac{1}{135} \underline{f}^{(4)}(\underline{\eta}; r),$$

$$E(\overline{f}; r) = \frac{1}{135} \overline{f}^{(4)}(\overline{\eta}; r), 0 \leq r \leq 1, \underline{\eta}, \overline{\eta} \in (-1, 1)$$

Regla de integración de Gauss-Legendre de tres puntos

$$I(\underline{f}; r) = \frac{5}{9}\underline{f}\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}; r\right) + \frac{8}{9}\underline{f}(0; r) + \frac{5}{9}\underline{f}\left(\sqrt{\frac{3}{5}}; r\right) + E(\underline{f}; r),$$

$$I(\bar{f}; r) = \frac{5}{9}\bar{f}\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}; r\right) + \frac{8}{9}\bar{f}(0; r) + \frac{5}{9}\bar{f}\left(\sqrt{\frac{3}{5}}; r\right) + E(\bar{f}; r), \quad 0 \leq r \leq 1,$$

donde

$$E(\underline{f}; r) = \frac{1}{15750}\underline{f}^{(6)}(\underline{\eta}; r),$$

$$E(\bar{f}; r) = \frac{1}{15750}\bar{f}^{(6)}(\bar{\eta}; r), \quad 0 \leq r \leq 1, \quad \underline{\eta}, \bar{\eta} \in (-1, 1)$$

3.2.2. Regla de integración de Gauss-Chebyshev

En estas reglas, tenemos $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $[a, b] = [-1, 1]$. Entonces, de (3.9) tenemos

$$\int_{-1}^1 \frac{\underline{f}(x; r)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \sum_{i=1}^n A_i \underline{f}(x_i; r) + E(\underline{f}; r),$$

$$\int_{-1}^1 \frac{\bar{f}(x; r)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \sum_{i=1}^n A_i \bar{f}(x_i; r) + E(\bar{f}; r), \quad 0 \leq r \leq 1,$$

donde

$$E(\underline{f}; r) = \frac{\underline{f}^{(2n)}(\underline{\eta}; r)}{(2n)!} \int_{-1}^1 \frac{q^2(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx, \quad \underline{\eta} \in (-1, 1),$$

$$E(\bar{f}; r) = \frac{\bar{f}^{(2n)}(\bar{\eta}; r)}{(2n)!} \int_{-1}^1 \frac{q^2(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx, \quad \bar{\eta} \in (-1, 1), \quad 0 \leq r \leq 1,$$

con $q(x) = \prod_{i=1}^n (x - x_i)$, tal que x_i , $i = 0, \dots, n$ son las raíces de polinomios de Chebyshev.

En este método, $\sum_{i=1}^n A_i = \pi$

Regla de integración de Gauss-Chebyshev de un punto

$$I(\underline{f}; r) = \pi \underline{f}(0; r) + E(\underline{f}; r),$$

$$I(\bar{f}; r) = \pi \bar{f}(0; r) + E(\bar{f}; r), \quad 0 \leq r \leq 1,$$

donde

$$E(\underline{f}; r) = \frac{1}{2} \underline{f}^{(2)}(\underline{\eta}; r) \int_{-1}^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx,$$

$$E(\bar{f}; r) = \frac{1}{2} \bar{f}^{(2)}(\bar{\eta}; r) \int_{-1}^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx, \quad 0 \leq r \leq 1, \quad \underline{\eta}, \bar{\eta} \in (-1, 1)$$

Regla de integración de Gauss-Chebyshev de dos puntos

$$I(\underline{f}; r) = \frac{\pi}{2} \underline{f} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; r \right) + \frac{\pi}{2} \underline{f} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; r \right) + E(\underline{f}; r),$$

$$I(\bar{f}; r) = \frac{\pi}{2} \bar{f} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; r \right) + \frac{\pi}{2} \bar{f} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; r \right) + E(\bar{f}; r), \quad 0 \leq r \leq 1,$$

donde

$$E(\underline{f}; r) = \frac{\underline{f}^{(4)}(\underline{\eta}; r)}{4!} \int_{-1}^1 \frac{(x^2 - \frac{1}{2})^2}{\sqrt{1-x^2}} dx,$$

$$E(\bar{f}; r) = \frac{\bar{f}^{(4)}(\bar{\eta}; r)}{4!} \int_{-1}^1 \frac{(x^2 - \frac{1}{2})^2}{\sqrt{1-x^2}} dx, \quad 0 \leq r \leq 1, \quad \underline{\eta}, \bar{\eta} \in (-1, 1)$$

3.2.3. Regla de integración de Gauss-Laguerre

En estas reglas, tenemos que $w(x) = e^{-x}$, $[a, b] = [0, \infty)$. De (3.9) se tiene que

$$\int_0^\infty \underline{f}(x; r) e^{-x} dx = \sum_{i=0}^n A_i \underline{f}(x_i; r) + E(\underline{f}; r),$$

$$\int_0^\infty \bar{f}(x; r) e^{-x} dx = \sum_{i=0}^n A_i \bar{f}(x_i; r) + E(\bar{f}; r), \quad 0 \leq r \leq 1,$$

donde

$$E(\underline{f}; r) = \frac{\underline{f}^{(2n)}(\underline{\eta}; r)}{(2n)!} \int_0^\infty q^2(x) e^{-x} dx, \quad \underline{\eta} \in (0, \infty),$$

$$E(\bar{f}; r) = \frac{\bar{f}^{(2n)}(\bar{\eta}; r)}{(2n)!} \int_0^\infty q^2(x) e^{-x} dx, \quad \bar{\eta} \in (0, \infty), \quad 0 \leq r \leq 1,$$

con $q(x) = \prod_{i=1}^n (x - x_i)$, tal que $x_i, i = 0, \dots, n$ son las raíces de polinomios de Laguerre.

En este método, $\sum_{i=0}^n A_i = 1$

Regla de integración de Gauss-Laguerre de un punto

$$I(\underline{f}; r) = \underline{f}(1; r) + E(\underline{f}; r),$$

$$I(\bar{f}; r) = \bar{f}(1; r) + E(\bar{f}; r), \quad 0 \leq r \leq 1,$$

donde

$$E(\underline{f}; r) = \frac{1}{2} \underline{f}^{(2)}(\underline{\eta}; r) \int_0^\infty (x - 1)^2 e^{-x} dx,$$

$$E(\bar{f}; r) = \frac{1}{2} \bar{f}^{(2)}(\bar{\eta}; r) \int_0^\infty (x - 1)^2 e^{-x} dx, \quad 0 \leq r \leq 1, \quad \underline{\eta}, \bar{\eta} \in (0, \infty)$$

Regla de integración de Gauss-Laguerre de dos puntos

$$I(\underline{f}; r) = 0,853553390593 \underline{f}(x_0; r) + 0,146446609407 \underline{f}(x_1; r) + E(\underline{f}; r),$$

$$I(\bar{f}; r) = 0,853553390593 \bar{f}(x_0; r) + 0,146446609407 \bar{f}(x_1; r) + E(\bar{f}; r), \quad 0 \leq r \leq 1,$$

donde $x_0 = 0,585786437627$ y $x_1 = 3,414213562373$

donde

$$E(\underline{f}; r) = \frac{\underline{f}^{(4)}(\underline{\eta}; r)}{4!} \int_0^\infty (x - x_0)^2 (x - x_1)^2 e^{-x} dx,$$

$$E(\bar{f}; r) = \frac{\bar{f}^{(4)}(\bar{\eta}; r)}{4!} \int_0^\infty (x - x_0)^2 (x - x_1)^2 e^{-x} dx, \quad 0 \leq r \leq 1, \quad \underline{\eta}, \bar{\eta} \in (0, \infty)$$

En general se puede adaptar el método de Gauss utilizando polinomios ortogonales como por ejemplo los polinomios de Hermite, Bessel, etc.

CAPÍTULO 4

EJEMPLOS NUMÉRICOS

En este capítulo se mostrarán los resultados obtenidos usando Matlab para simular los métodos numéricos de integración aplicados a funciones difusas, descritos anteriormente en el Capítulo 3. Además, cuantificaremos el error en cada caso y se verificará que las ecuaciones que describen el error para cada método entregan el mismo resultado que en nuestros ejemplos.

4.1. Métodos de Newton-Cotes

A continuación veremos algunos ejemplos de integración fuzzy, sus resultados exactos y resultados numéricos empleando para ello las Reglas del *Trapezio compuesta* y las de *Simpson compuesta*.

Ejemplo 4.1. Considere la siguiente integral fuzzy:

$$\int_0^1 \tilde{k}x^2 dx, \quad \tilde{k} = (r - 1, 1 - r), \quad (4.1)$$

Recordemos que la integral de una función fuzzy es un número fuzzy, de hecho tenemos que si f es una función fuzzy

$$\int_a^b f(x; r) dx = \left(\underbrace{\int_a^b f(x; r) dx}, \overline{\int_a^b f(x; r) dx} \right) = \left(\int_a^b \underline{f}(x; r) dx, \int_a^b \overline{f}(x; r) dx \right),$$

luego, la solución exacta de (4.1) es

$$\begin{aligned} \left(\int_0^1 x^2(r-1) dx, \int_0^1 x^2(1-r) dx \right) &= \left((r-1) \frac{x^3}{3} \Big|_{x=0}^{x=1}, (1-r) \frac{x^3}{3} \Big|_{x=0}^{x=1} \right) \\ &= \left(\frac{1}{3}(r-1), \frac{1}{3}(1-r) \right) \\ &= \frac{1}{3}(r-1, 1-r) \end{aligned}$$

En esta ocasión el intervalo $[a, b] = [0, 1]$ y considerando un sólo nodo, es decir, $n = 1$, tenemos que $h = \frac{b-a}{n} = 1$. Bajo estas condiciones, de la Regla del Trapecio (véase pp. 36) tenemos que

$$\begin{aligned} Q(\underline{f}; r) &= \frac{1}{2}(r-1), & Q(\bar{f}; r) &= \frac{1}{2}(1-r), \\ \underline{f}^{(2)} &= 2(r-1), & \bar{f}^{(2)} &= 2(1-r), \text{ luego,} \\ E(\underline{f}; r) &= -\frac{1}{6}(r-1), & E(\bar{f}; r) &= -\frac{1}{6}(1-r), \end{aligned}$$

Es claro que estos resultados satisfacen las ecuaciones del método descrito en el Capítulo 3.

La solución exacta y la solución mediante la fórmula del trapecio con $h = 1$ están graficadas en la Figura 4.1

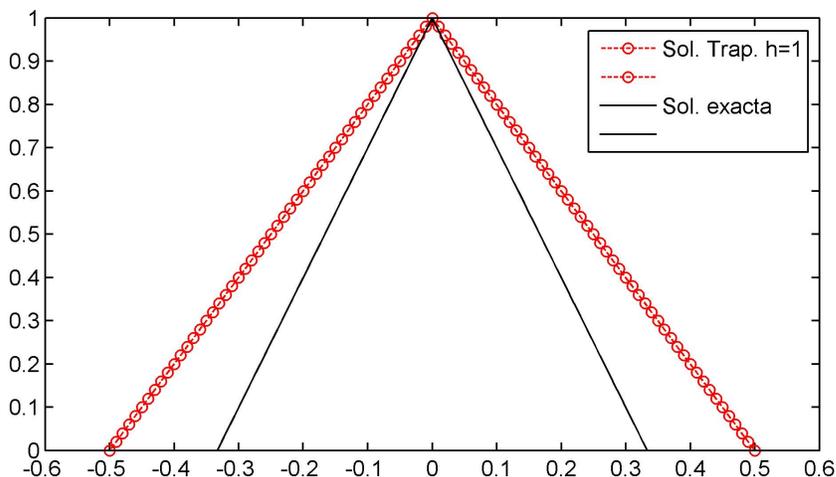


Figura 4.1: Solución para $h = 1$

Ahora considerando 2 nodos, es decir para $h = \frac{1}{2}$ tenemos:

$$Q(\underline{f}; r) = \frac{3}{8}(r - 1), \quad Q(\bar{f}; r) = \frac{3}{8}(1 - r),$$

$$E(\underline{f}; r) = -\frac{1}{24}(r - 1), \quad E(\bar{f}; r) = -\frac{1}{24}(1 - r).$$

Podemos ver que estos resultados satisfacen también las ecuaciones del método.

Las gráficas de las soluciones exacta y numérica podemos observarlas en la Figura 4.2

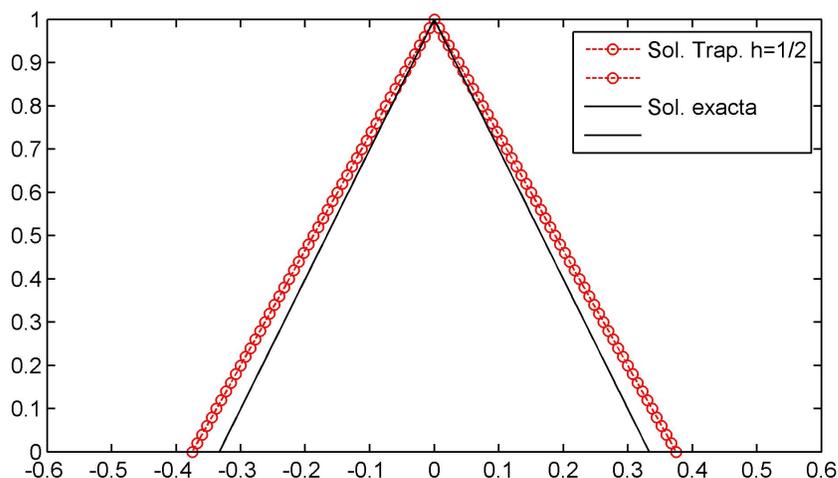


Figura 4.2: Solución para $h = \frac{1}{2}$

Ahora, aplicando la regla de Simpson, para $h = \frac{1}{2}$ tenemos que

$$Q(\underline{f}; r) = \frac{1}{3}(r - 1), \quad Q(\bar{f}; r) = \frac{1}{3}(1 - r),$$

$$\underline{f}^{(4)} = 0, \quad \bar{f}^{(4)} = 0,$$

$$E(\underline{f}; r) = 0, \quad E(\bar{f}; r) = 0.$$

lo cual se muestra en la Figura 4.3

Ejemplo 4.2. Considere la siguiente integral fuzzy:

$$\int_0^1 \tilde{k}x^4 dx, \quad \tilde{k} = (r, 2 - r), \tag{4.2}$$

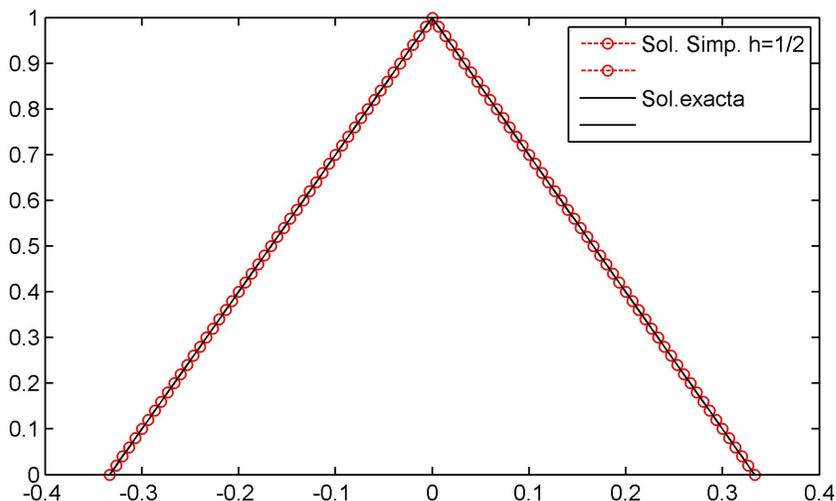


Figura 4.3: Solución para $h = \frac{1}{2}$

cuya solución exacta es

$$\begin{aligned} \left(\int_0^1 x^4(r) dx, \int_0^1 x^4(2-r) dx \right) &= \left((r) \frac{x^5}{5} \Big|_{x=0}^{x=1}, (2-r) \frac{x^5}{5} \Big|_{x=0}^{x=1} \right) \\ &= \left(\frac{1}{5}(r), \frac{1}{5}(2-r) \right) \\ &= \frac{1}{5}(r, 2-r) \end{aligned}$$

Al igual que en el ejemplo anterior, el intervalo $[a, b] = [0, 1]$ y considerando un sólo nodo tenemos que $h = 1$. Bajo estas condiciones, de la regla del trapecio tenemos que

$$\begin{aligned} Q(\underline{f}; r) &= \frac{1}{2}(r), & Q(\bar{f}; r) &= \frac{1}{2}(2-r), \\ \underline{f}^{(2)} &= 12x^2(r), & \bar{f}^{(2)} &= 12x^2(2-r), \text{ luego,} \\ E(\underline{f}; r) &= -\frac{3}{10}(r), & E(\bar{f}; r) &= -\frac{3}{10}(2-r), \end{aligned}$$

Es claro que estos resultados satisfacen las ecuaciones del método descrito en el Capítulo 3, específicamente las del error, para $\underline{\xi} = \bar{\xi} = \sqrt{3/10} \in (0, 1)$

La solución exacta y la solución mediante la fórmula del trapecio con $h = 1$ están graficadas en la Figura 4.4

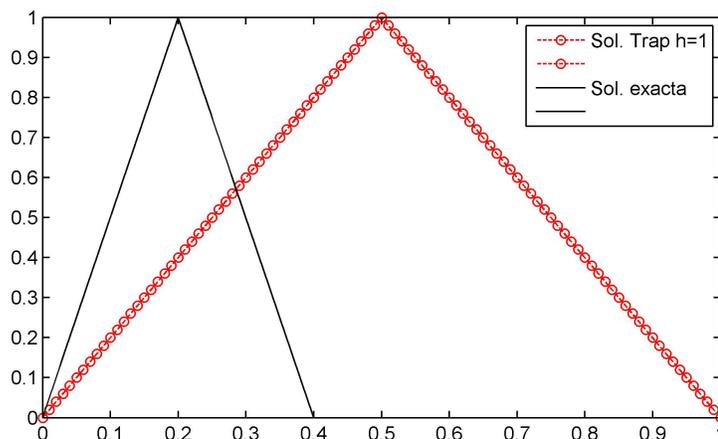


Figura 4.4: Solución para $h = 1$

Ahora considerando 2 nodos, es decir para $h = \frac{1}{2}$ tenemos:

$$Q(\underline{f}; r) = \frac{9}{32}(r), \quad Q(\bar{f}; r) = \frac{9}{32}(2 - r),$$

$$E(\underline{f}; r) = -\frac{13}{160}(r), \quad E(\bar{f}; r) = -\frac{13}{160}(2 - r).$$

Podemos ver que estos resultados satisfacen también las ecuaciones del error del método, para $\xi = \bar{\xi} = \sqrt{72/160}$.

Las gráficas de las soluciones exacta y numérica podemos observarlas en la Figura 4.5

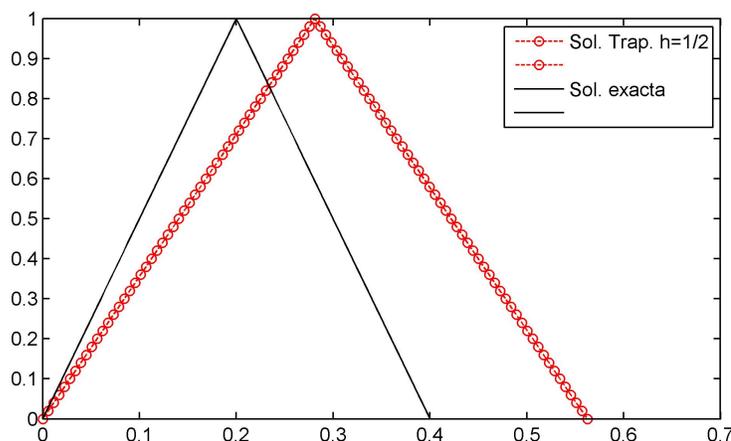


Figura 4.5: Solución para $h = \frac{1}{2}$

Ahora, aplicando la regla de Simpson, para $h = \frac{1}{2}$ tenemos que

$$\begin{aligned} Q(\underline{f}; r) &= \frac{5}{24}(r), & Q(\bar{f}; r) &= \frac{5}{24}(2 - r), \\ \underline{f}^{(4)} &= 24r, & \bar{f}^{(4)} &= 24(2 - r), \\ E(\underline{f}; r) &= -\frac{1}{120}r, & E(\bar{f}; r) &= -\frac{1}{120}(2 - r). \end{aligned}$$

lo cual se muestra en la Figura 4.6

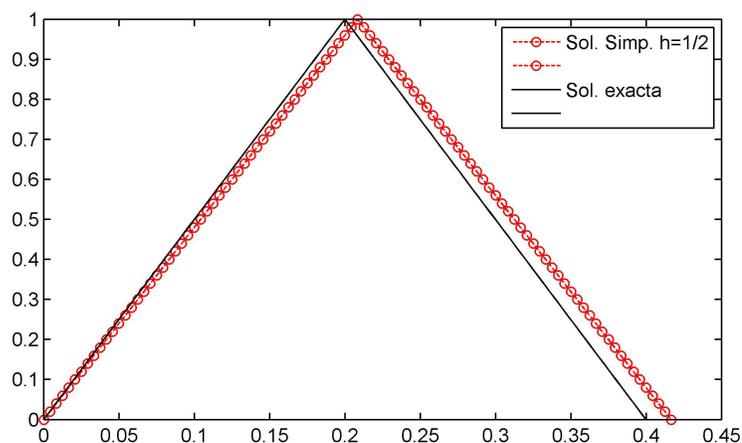


Figura 4.6: Solución para $h = \frac{1}{2}$

4.2. Cuadraturas Gaussianas

A continuación veremos algunos ejemplos de integrales difusas, sus resultados exactos y resultados numéricos empleando para ello las fórmulas de cuadratura de *Gauss-Legendre*, *Gauss-Chebyshev* y las de *Gauss-Laguerre*.

Ejemplo 4.3. Considere la siguiente integral fuzzy:

$$\int_0^1 \tilde{f}(x) dx, \quad \tilde{f} = (0, x^2, x^2), \quad (4.3)$$

Como podemos observar, debemos calcular la integral de una función fuzzy no parametrizada. Recordemos que si tenemos un número fuzzy triangular

$$u = (m, \alpha, \beta),$$

su forma parametrizada es

$$\underline{u}(r) = \bar{x} + \alpha(r - 1), \quad \bar{u}(r) = \bar{x} + \beta(1 - r).$$

Para este caso tenemos que $\bar{x} = 0, \alpha = x^2, \beta = x^2$, luego tenemos que

$$\tilde{f} = (0, x^2, x^2) = (x^2(r - 1), x^2(1 - r)),$$

por lo tanto

$$\int_0^1 (0, x^2, x^2) dx = \int_0^1 (x^2(r - 1), x^2(1 - r)) dx,$$

que es la misma integral del Ejemplo 4.1. Luego, la solución exacta de (4.3) es

$$\frac{1}{3} (r - 1, 1 - r)$$

En esta ocasión el intervalo $[a, b] = [0, 1]$, pero para emplear las fórmulas de cuadratura de *Gauss-Legendre* realizaremos un cambio en el intervalo de integración de manera que debamos aproximar la integral de una función en el intervalo $[-1, 1]$. Entonces tenemos que

$$\int_0^1 (x^2(r - 1), x^2(1 - r)) dx = \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{2} \left(\frac{x+1}{2} \right)^2 (r - 1), \frac{1}{2} \left(\frac{x+1}{2} \right)^2 (1 - r) \right) dx.$$

Ahora que tenemos una integral de la forma deseada, aplicamos la fórmula de *Gauss-Legendre de un punto* (véase pp. 39) y tenemos que

$$\begin{aligned} Q(\underline{f}; r) &= \frac{1}{4}(r - 1), & Q(\bar{f}; r) &= \frac{1}{4}(1 - r), \\ \underline{f}^{(2)} &= \frac{1}{4}(r - 1), & \bar{f}^{(2)} &= \frac{1}{4}(1 - r), \text{ luego,} \\ E(\underline{f}; r) &= \frac{1}{12}(r - 1), & E(\bar{f}; r) &= \frac{1}{12}(1 - r), \end{aligned}$$

Es claro que estos resultados satisfacen las ecuaciones del método descrito en el Capítulo 3.

La solución exacta y la solución mediante la fórmula de *Gauss-Legendre de un punto* están graficadas en la Figura 4.7

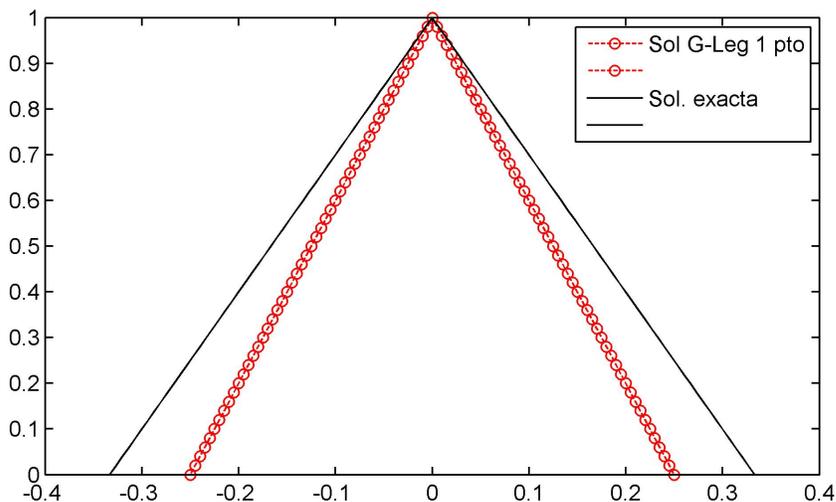


Figura 4.7: Solución mediante fórmula de *Gauss-Legendre de un punto*

Ahora aplicando la fórmula de *Gauss-Legendre de dos puntos* tenemos:

$$\begin{aligned}
 Q(\underline{f}; r) &= \frac{1}{3}(r - 1), & Q(\overline{f}; r) &= \frac{1}{3}(1 - r), \\
 \underline{f}^{(4)} &= 0, & \overline{f}^{(4)} &= 0, \text{ luego,} \\
 E(\underline{f}; r) &= 0, & E(\overline{f}; r) &= 0.
 \end{aligned}$$

Las gráficas de las soluciones exacta y numérica podemos observarlas en la Figura 4.8

Nota 4.1. Como se puede observar, la solución entregada por la fórmula de *Gauss-Legendre de dos puntos* es exacta. Comparando con la solución entregada en el Ejemplo 4.1 utilizando la *Regla del Trapecio* con $h = 1/2$, podemos ver que la cuadratura Gaussiana es más exacta.

Ejemplo 4.4. Considere la siguiente integral fuzzy:

$$\int_0^1 (x^4, x^4, x^4) dx, \tag{4.4}$$

Al igual que en el ejemplo anterior tenemos la integral de una función fuzzy no parametrizada, así que para calcularla lo primero que haremos será obtener la expresión parametrizada de

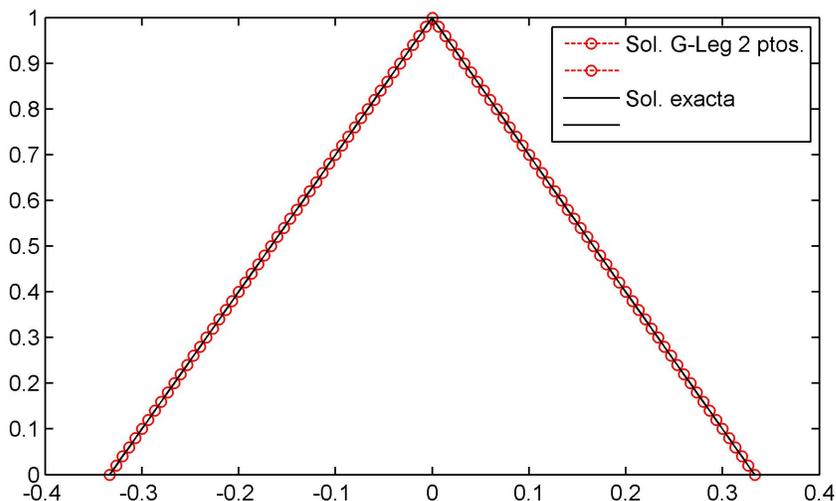


Figura 4.8: Solución mediante fórmula de *Gauss-Legendre de dos puntos*

(x^4, x^4, x^4) . Para este caso tenemos que $\bar{x} = x^4, \alpha = x^4, \beta = x^4$, luego

$$(x^4, x^4, x^4) = (x^4(r), x^4(2 - r)),$$

por lo tanto

$$\int_0^1 (x^4, x^4, x^4) dx = \int_0^1 (x^4(r), x^4(2 - r)) dx,$$

que es la misma integral del Ejemplo 4.2. Luego, la solución exacta de nuestra integral descrita en (4.4) es

$$\frac{1}{5}(r, 2 - r)$$

En esta ocasión el intervalo $[a, b] = [0, 1]$, pero para emplear las fórmulas de cuadratura de *Gauss-Legendre* realizaremos un cambio en el intervalo de integración de manera que debamos aproximar la integral de una función en el intervalo $[-1, 1]$. Entonces tenemos que

$$\int_0^1 (x^2(r), x^4(2 - r)) dx = \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{2} \left(\frac{x+1}{2} \right)^4 (r), \frac{1}{2} \left(\frac{x+1}{2} \right)^4 (2 - r) \right) dx.$$

Ahora que tenemos una integral de la forma deseada, aplicamos la fórmula de *Gauss-Legendre de un punto* (véase pp. 39) y tenemos que

$$\begin{aligned} Q(\underline{f}; r) &= \frac{1}{16}(r), & Q(\bar{f}; r) &= \frac{1}{16}(2 - r), \\ \underline{f}'' &= \frac{3}{8}(x+1)^2(r), & \bar{f}'' &= \frac{3}{8}(x+1)^2(2 - r), \text{ luego,} \\ E(\underline{f}; r) &= \frac{1}{3} \frac{3}{8}(\bar{\eta} + 1)^2(r) = \frac{11}{80}(r), & E(\bar{f}; r) &= \frac{1}{3} \frac{3}{8}(\bar{\eta} + 1)^2(2 - r) \frac{11}{80}(1 - r), \end{aligned}$$

con $\underline{\eta} = \bar{\eta} = -1 + \sqrt{11/10}$. Es claro que estos resultados satisfacen las ecuaciones del método descrito en el Capítulo 3.

La solución exacta y la solución mediante la fórmula de *Gauss-Legendre de un punto* están graficadas en la Figura 4.9

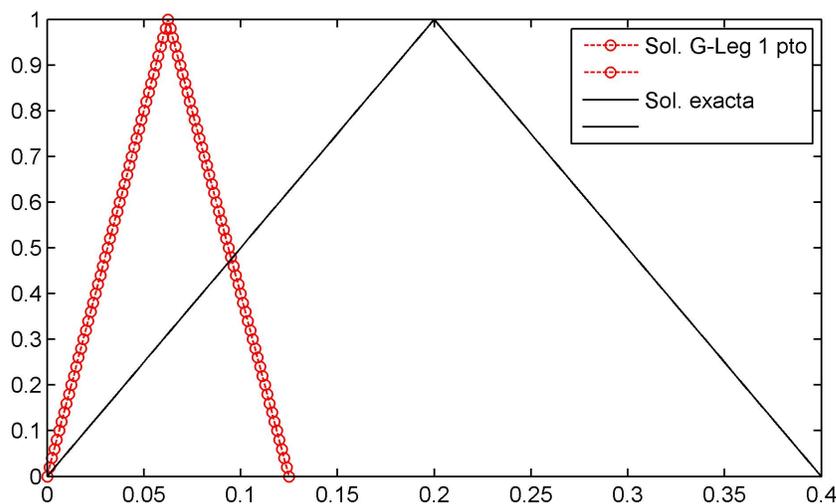


Figura 4.9: Solución mediante fórmula de *Gauss-Legendre de un punto*

Ahora aplicando la fórmula de *Gauss-Legendre de dos puntos* (véase pp. 39) tenemos:

$$\begin{aligned}
 Q(\underline{f}; r) &= \frac{7}{36}(r), & Q(\bar{f}; r) &= \frac{7}{36}(2-r), \\
 \underline{f}^{(4)} &= \frac{3}{4}, & \bar{f}^{(4)} &= \frac{3}{4}, \text{ luego,} \\
 E(\underline{f}; r) &= \frac{1}{135} \frac{3}{4} = \frac{1}{180}, & E(\bar{f}; r) &= \frac{1}{135} \frac{3}{4} = \frac{1}{180}.
 \end{aligned}$$

Las gráficas de las soluciones exacta y numérica podemos observarlas en la Figura 4.10

Veamos ahora los resultados que se obtienen si aplicamos el método de *Gauss-Legendre de tres puntos* (véase pp. 39) para resolver nuestra integral:

$$\begin{aligned}
 Q(\underline{f}; r) &= \frac{1}{5}(r), & Q(\bar{f}; r) &= \frac{1}{5}(2-r), \\
 \underline{f}^{(6)} &= 0, & \bar{f}^{(6)} &= 0, \text{ luego,} \\
 E(\underline{f}; r) &= 0, & E(\bar{f}; r) &= 0.
 \end{aligned}$$

Las gráficas de las soluciones exacta y numérica podemos observarlas en la Figura 4.11

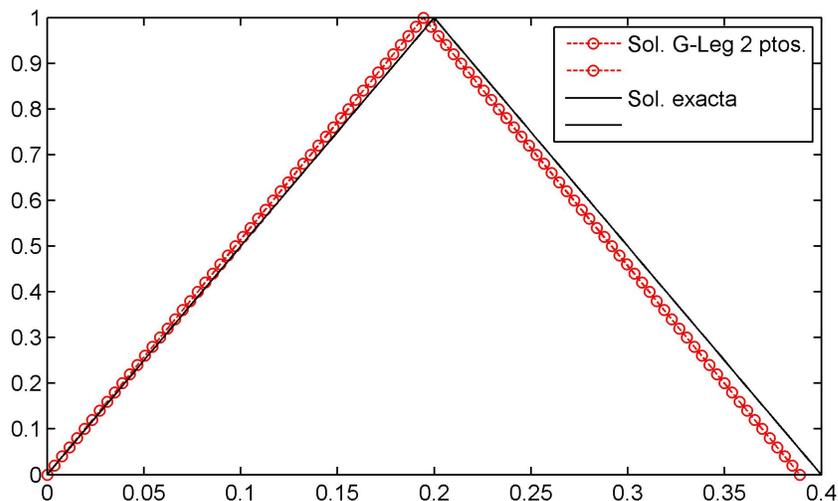


Figura 4.10: Solución mediante fórmula de *Gauss-Legendre de dos puntos*

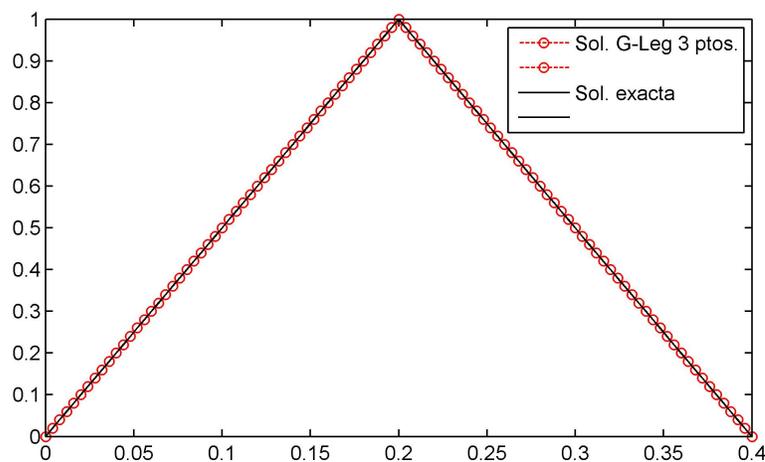


Figura 4.11: Solución mediante fórmula de *Gauss-Legendre de tres puntos*

Nota 4.2. Como se puede observar, la solución entregada por la fórmula de *Gauss-Legendre de tres puntos* es exacta. Comparando con la solución entregada en el Ejemplo 4.2 utilizando la *Regla de Simpson* con $h = 1/2$, podemos ver que la cuadratura Gaussiana es más exacta.

Ejemplo 4.5. Considere la siguiente integral fuzzy:

$$\int_{-1}^1 \frac{\tilde{k}x}{\sqrt{1-x^2}} dx, \quad \tilde{k} = (r, 2-r), \tag{4.5}$$

luego, la solución exacta es

$$\left(\int_{-1}^1 \frac{rx}{\sqrt{1-x^2}} dx, \int_{-1}^1 \frac{(2-r)x}{\sqrt{1-x^2}} dx \right) = (0, 0)$$

Ahora, aplicando la fórmula de *Gauss-Chebyshev de un punto* tenemos que

$$\begin{aligned} Q(\underline{f}; r) &= 0, & Q(\overline{f}; r) &= 0, \\ \underline{f}^{(2)} &= 0, & \overline{f}^{(2)} &= 0, \text{ luego,} \\ E(\underline{f}; r) &= 0, & E(\overline{f}; r) &= 0. \end{aligned}$$

Las gráficas de las soluciones exacta y numérica de (4.5) podemos observarlas en la Figura 4.12

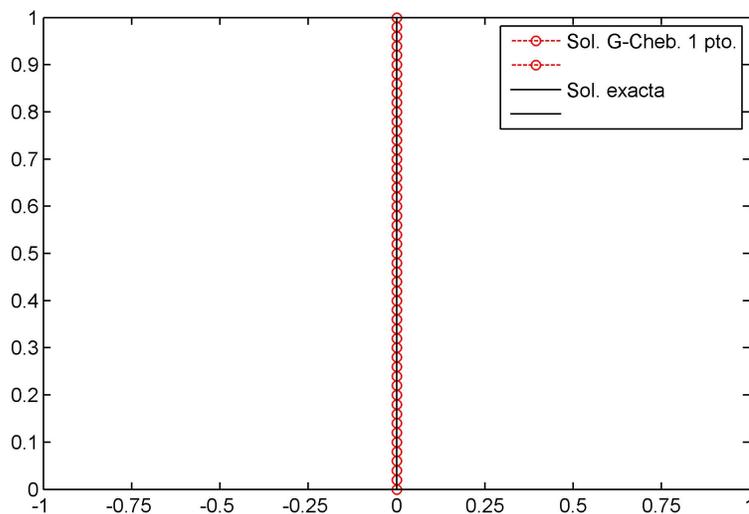


Figura 4.12: Solución mediante fórmula de *Gauss-Chebyshev de un punto*

Ejemplo 4.6. Considere la siguiente integral fuzzy:

$$\int_{-1}^1 \frac{\tilde{k}(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} dx, \quad \tilde{k} = (r-1, 1-r), \tag{4.6}$$

luego, la solución exacta es

$$\left(\int_{-1}^1 \frac{(r-1)(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} dx, \int_{-1}^1 \frac{(1-r)(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} dx \right) = \left(\frac{\pi}{2}(r-1), \frac{\pi}{2}(1-r) \right)$$

Aplicando la fórmula de *Gauss-Chebyshev de un punto* tenemos que

$$\begin{aligned} Q(\underline{f}; r) &= \pi(r-1), & Q(\overline{f}; r) &= \pi(1-r), \\ \underline{f}^{(2)} &= -2(r-1), & \overline{f}^{(2)} &= -2(1-r), \text{ luego,} \\ E(\underline{f}; r) &= \frac{1}{2}(-2(r-1)) \int_{-1}^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\frac{\pi}{2}(r-1), \\ E(\overline{f}; r) &= \frac{1}{2}(-2(1-r)) \int_{-1}^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\frac{\pi}{2}(1-r) \end{aligned}$$

Las gráficas de las soluciones exacta y numérica de (4.6) podemos observarlas en la Figura 4.13

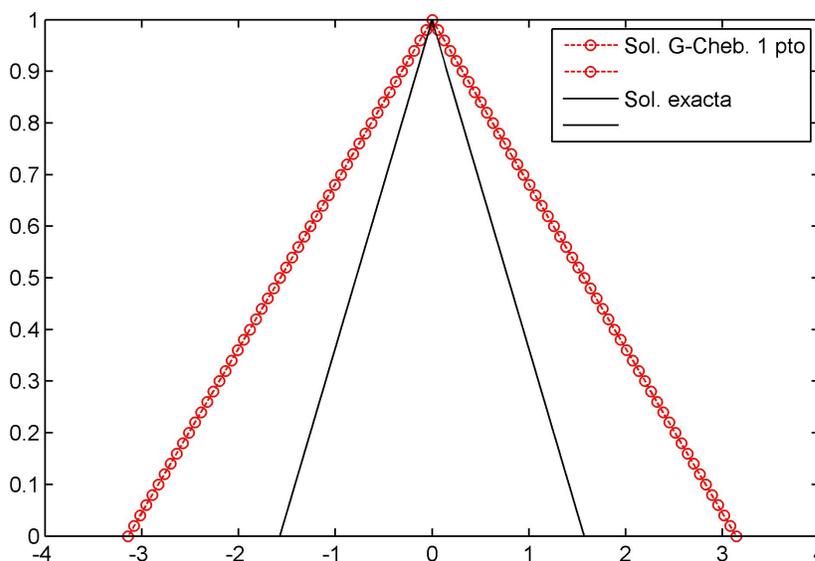


Figura 4.13: Solución mediante fórmula de *Gauss-Chebyshev de un punto*

Ahora, aplicando la fórmula de *Gauss-Chebyshev de dos puntos* tenemos que

$$Q(\underline{f}; r) = \frac{\pi}{2}(r - 1), \quad Q(\overline{f}; r) = \frac{\pi}{2}(1 - r),$$

$$\underline{f}^{(2)} = 0 \quad \overline{f}^{(2)} = 0, \text{ luego,}$$

$$E(\underline{f}; r) = 0, \quad E(\overline{f}; r) = 0$$

Las gráficas de las soluciones exacta y numérica de (4.6) podemos observarlas en la Figura 4.14

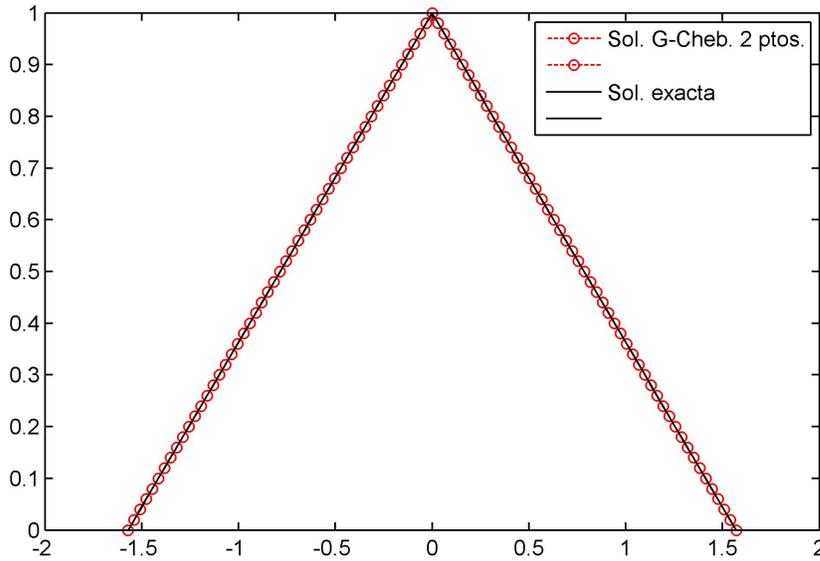


Figura 4.14: Solución mediante fórmula de *Gauss-Chebyshev de dos puntos*

Ejemplo 4.7. Considere la siguiente integral fuzzy:

$$\int_0^\infty \tilde{f}(x)e^{-x} dx, \quad \tilde{f} = (rx^2, 2x^2 - rx^2), \tag{4.7}$$

luego, la solución exacta es

$$\left(\int_0^\infty e^{-x}(rx^2) dx, \int_0^\infty e^{-x}(x^2(2 - r)) dx \right) = (2r, 4 - 2r)$$

Aplicando la fórmula de *Gauss-Laguerre de un punto* tenemos que

$$Q(\underline{f}; r) = r, \quad Q(\overline{f}; r) = (2 - r),$$

$$\underline{f}^{(2)} = 2r, \quad \overline{f}^{(2)} = 2(2 - r), \text{ luego,}$$

$$E(\underline{f}; r) = \frac{1}{2}(2(r)) \int_0^\infty (x - 1)^2 e^{-x} dx = r, \quad E(\overline{f}; r) = \frac{1}{2}(2(2 - r)) \int_0^\infty (x - 1)^2 e^{-x} dx = (2 - r)$$

Las gráficas de las soluciones exacta y numérica de (4.7) podemos observarlas en la Figura 4.15

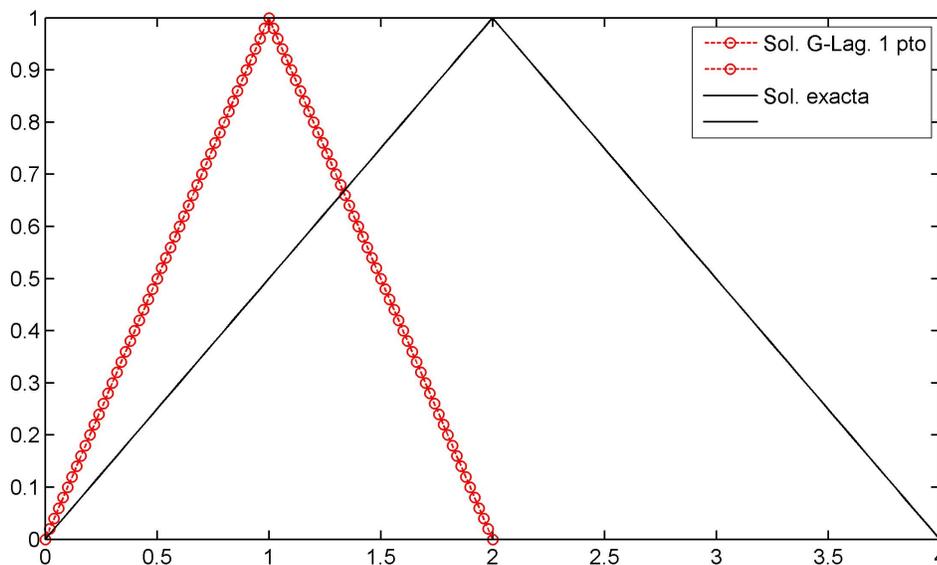


Figura 4.15: Solución mediante fórmula de Gauss-Laguerre de un punto

Ahora, aplicando la fórmula de Gauss-Laguerre de dos puntos tenemos que

$$\begin{aligned}
 Q(\underline{f}; r) &= 2,0000000000003097(r) \approx 2r, & Q(\bar{f}; r) &= 2,0000000000003097(2 - r) \approx 2(2 - r), \\
 \underline{f}^{(2)} &= 0 & \bar{f}^{(2)} &= 0, \text{ luego,} \\
 E(\underline{f}; r) &= 0, & E(\bar{f}; r) &= 0
 \end{aligned}$$

Las gráficas de las soluciones exacta y numérica de (4.7) podemos observarlas en la Figura 4.16

Ejemplo 4.8. Considere la siguiente integral fuzzy:

$$\int_0^\infty \tilde{f}(x)e^{-x} dx, \quad \tilde{f} = (s(x), t(x), u(x)), \tag{4.8}$$

con

$$s(x) = (x + 1)^2, \quad t(x) = \frac{x + 1}{4}, \quad u(x) = \frac{x + 1}{2},$$

Luego, su forma parametrizada es

$$\tilde{f} = (\underline{f}(x; r), \bar{f}(x; r)) = \left(\frac{1}{4}(x + 1)r + x^2 + \frac{7}{4}x + \frac{3}{4}, -\frac{1}{2}(x + 1)r + x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{3}{2} \right).$$

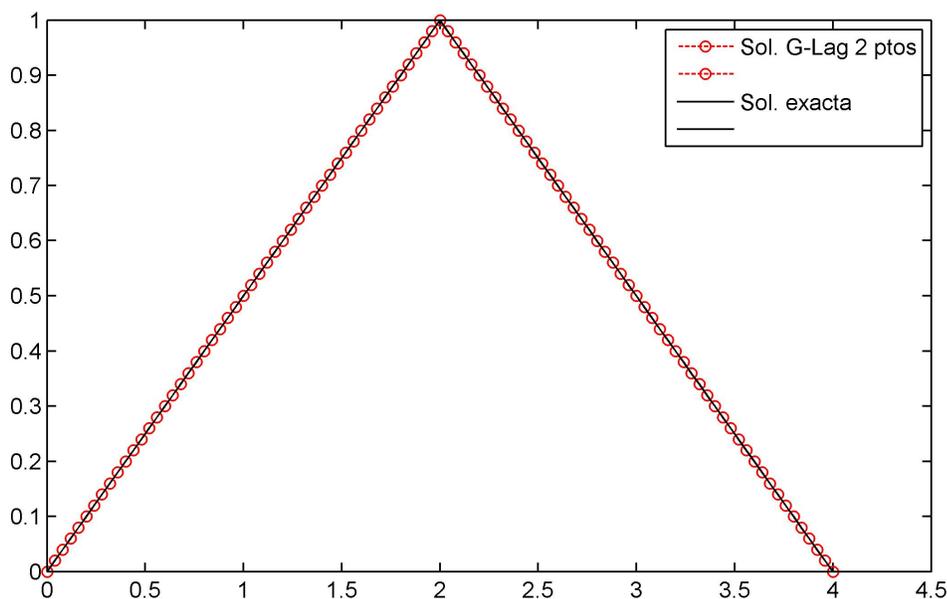


Figura 4.16: Solución mediante fórmula de *Gauss-Laguerre de dos puntos*

De aquí, tenemos que la solución exacta es

$$\left(\int_0^\infty e^{-x} \underline{f}(x; r) dx, \int_0^\infty e^{-x} \bar{f}(x; r) dx \right) = \left(\frac{r}{2} + \frac{9}{2}, 6 - r \right)$$

Aplicando la fórmula de *Gauss-Laguerre de un punto* tenemos que

$$Q(\underline{f}; r) = \frac{1}{2}r + \frac{7}{2}, \quad Q(\bar{f}; r) = 5 - r,$$

$$\underline{f}^{(2)} = 2, \quad \bar{f}^{(2)} = 2, \text{ luego,}$$

$$E(\underline{f}; r) = \frac{1}{2}(2) \int_0^\infty (x - 1)^2 e^{-x} dx = 1, \quad E(\bar{f}; r) = \frac{1}{2}(2) \int_0^\infty (x - 1)^2 e^{-x} dx = 1$$

Las gráficas de las soluciones exacta y numérica de (4.8) podemos observarlas en la Figura 4.17

Ahora, aplicando la fórmula de *Gauss-Laguerre de dos puntos* tenemos que

$$Q(\underline{f}; r) = 0,500000000000210(r) + 4,5000000000004570 \approx \frac{1}{2}r + \frac{9}{2},$$

$$Q(\bar{f}; r) = 6,0000000000005201 - 1,000000000000421(r) \approx 6 - r,$$

$$\underline{f}^{(2)} = 0, \quad \bar{f}^{(2)} = 0, \text{ luego,}$$

$$E(\underline{f}; r) = 0, \quad E(\bar{f}; r) = 0.$$

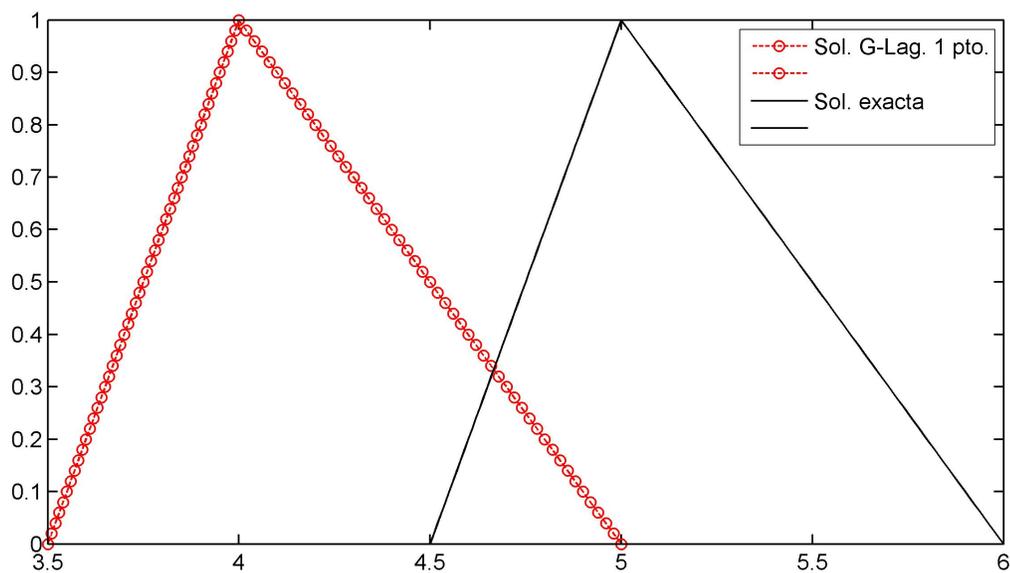


Figura 4.17: Solución mediante fórmula de *Gauss-Laguerre de un punto*

Las gráficas de las soluciones exacta y numérica de (4.8) podemos observarlas en la Figura 4.18

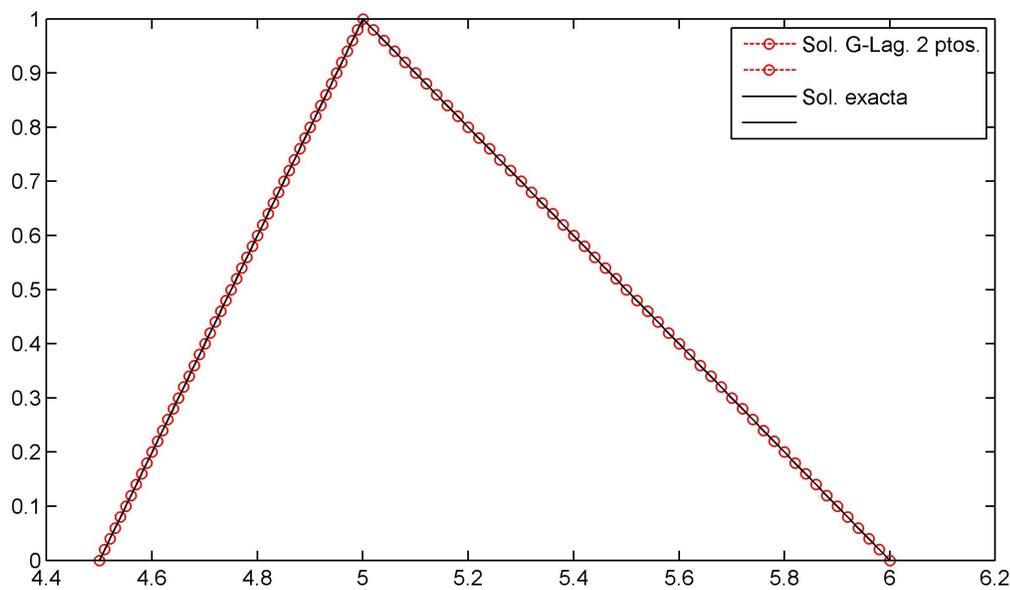


Figura 4.18: Solución mediante fórmula de *Gauss-Laguerre de dos puntos*

CONCLUSIONES

A lo largo de esta investigación hemos revisado una parte de teoría clásica sobre métodos de integración numérica los cuales, mediante una pequeña adaptación, han sido utilizados para la resolución numérica de integrales de funciones difusas. Esta adaptación se apoya en gran parte a la forma parametrizada de números, funciones e integrales difusas. Además, se ha mostrado que dichas adaptaciones de los métodos tienen una propiedad tan importante en cálculo numérico como lo es la convergencia de los resultados numéricos a la solución exacta.

En cuanto a los resultados obtenidos, es sabido en la teoría clásica que la integral definida de una función es un número real, sin embargo, se pudo observar que al calcular la integral definida de una función difusa el resultado era un número difuso. Al realizar los cálculos numéricos empleando los métodos, se pudo verificar que los resultados y errores obtenidos concordaban con lo que nos decía la teoría.

Por otro lado, según lo revisado en el Capítulo 2 sobre conceptos de la teoría difusa, podríamos decir que ésta es una extensión de lo que son las teorías clásicas de conjuntos, números, aritmética, etc., por lo que dentro de las futuras posibles investigaciones a realizar está verificar si es posible utilizar otros métodos numéricos clásicos (derivación, resolución de ecuaciones diferenciales, resolución de sistemas de ecuaciones, etc.) para aplicarlos en la teoría difusa (derivación de funciones difusas, resolución de ecuaciones diferenciales difusas, resolución de sistemas de ecuaciones difusas, etc.).

BIBLIOGRAFÍA

- [1] Buckley, J.J., Eslami, E., and Feuring, T. (2002). Fuzzy Mathematics in economics and Engineering. Editorial Physica-Verlag Heidelberg, Alemania.
- [2] Allahviranloo T., Otadi M. (2005). Gaussian quadratures for approximate of fuzzy integrals. Elsevier Inc. Applied Mathematics and Computation Volume 170, Issue 2, 15 November 2005, Pages 874-885
- [3] Allahviranloo T. (2005). Newton Cot's methods for integration of fuzzy functions. Elsevier Inc. Applied Mathematics and Computation Volume 166, Issue 2, 15 July 2005, Pages 339-348.
- [4] Zadeh L.. Fuzzy sets, Information & Control 8 (1965), Pages 338-353.
- [5] Diamond P., Kloeden P. Metric spaces of fuzzy sets, Singapore: World Scientific, 1994.
- [6] Mordeson J., Nair P. (2001). Fuzzy Mathematics. Editorial Physica-Verlag Heidelberg, Alemania.
- [7] Doubova A., Guillén González F. (2007). Un Curso de Cálculo Numérico: Interpolación, Aproximación, Integración y Resolución de Problemas Diferenciales. Universidad de Sevilla, Secretariado de Publicaciones, España.
- [8] Isaacson E., Keller, H. B. (1994). Analysis of Numerical Methods. Dover Editions, Nueva York, Estados Unidos

- [9] Demidovich B. P., Maron I. A. (1977). Cálculo Numérico Fundamental. Editorial VAAP. Impreso en Madrid, España.

- [10] Hanss, M. (2005). Applied Fuzzy Arithmetic, An Introduction with Engineering Applications. Springer-Verlag Berlin Heidelberg. Impreso en Holanda.