UNIVERSIDAD DEL BÍO BÍO
FACULTAD DE EDUCACIÓN Y HUMANIDADES
PEDAGOGÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
CHILLÁN

Los Teoremas de la Función Implícita y de la Función Inversa

Profesor Guía: Luis Friz Roa

Integrantes:

Gissela Andaur Muñoz

Carmen Monsalve González

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE PROFESOR DE ENSEÑANZA MEDIA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Agradecimientos

Queremos comenzar agradeciendo a nuestro profesor guía Luis Friz Roa por su preocupación y dedicación que tuvo con nosotras durante el trabajo que realizamos, así como el tiempo para enseñarnos a trabajar con el programa latex en el que está escrita nuestra memoria.

También a nuestras familias, compañeros y profesores que también fueron parte importante de este proceso.

Finalmente y gracias a quien fué posible la realización de esta memoria, al Proyecto FONDECYT 1090510, investigador responsable Dr. Luiz Friz Roa.

Índice general

Capítulo 1

Preliminares

1. Introducción

Hablamos de una función implícita cuando tenemos una ecuación de la forma $f(x, y) = 0$, donde no se muestra claramente cómo despejar y en función de x ni x en función de y. Donde una ecuación explícita tiene la forma

$$y = g(x) \text{ o } x = h(y)$$

Cualquiera de estas dos ecuaciones es preferible a la implícita puesto que siempre una ecuación explícita puede transformase en una implícita de manera trivial

$$f(x, y) = y - g(x)x - h(y)$$

según corresponda. Nuestra pregunta es ahora entonces: *Cuándo es posible encontrar una función que describa explícitamente y en función de x o x en función de y en un entorno de* (a, b)*?*. Justamente aquí radica la importancia de este teorema pues existe la posibilidad de calcular la diferencial en un punto (a, b) de una función sin conocerla explícitamente, lo que nos permitirá por ejemplo, obtener una evaluación aproximada de la función en el punto. Además, este problema toma una forma más general cuando se considera un sistema de varias ecuaciones en las que intervienen varias variables, y nos preguntamos si se pueden resolver dichas ecuaciones para algunas de esas variables en función de las restantes variables. Para obtener una respuesta tenemos que, bajo condiciones bastantes generales, siempre existe una solución, la cual es proporcionada por el teorema de la función implícita con una descripción de las condiciones y ciertas conclusiones acerca de la solución. El estudio de las funciones implícitas no es sólo abstracto, de hecho, las soluciones de muchas ecuaciones diferenciales ordinarias es una ecuación que relaciona las variables x e y de manera implícita.

Ahora bien, el teorema de la Funcin Inversa está intrínsicamente conectado con el teorema anterior pues viene siendo un caso especial de él, puesto que el teorema de las funciones implícitas se presentan comúnmente como una forma de describir la noción de una función inversa, y como son tan importantes será también nuestro objeto de estudio.

Para llevar a cabo nuestro objetivo y cumplir con lo anterior nos concentraremos en estudiar algunos contenidos insertos en los cursos de Análisis Matemático tales como: Topología en el espacio cartesiano, funciones, límites de funciones de varias variables y diferenciabilidad, los que son de gran ayuda para facilitar nuestro trabajo y de paso recordar los conocimientos previos que se debiesen tener.

2. Marco Teórico

El teorema de la función implícita es muy cercano al teorema de la función inversa y también uno de los más importantes y antiguos paradigmas en la matemática moderna. Los inicios de la idea del teorema de la función implícita lo podemos ver en los escritos de *Isaac Newton* (1642-1727) quien da las primeras ideas para analizar el comportamiento de la definición de función implícita en el contexto del cálculo. *Gottfried Leibniz* (1646-1716) tiene explícitamente en su trabajo un resultado de derivación implícita. Mientras que, *Joseph Louis Lagrange* (1736-1813) fundó un teorema que es esencialmente una versión del teorema de la función inversa y lo que puede ser el primer teorema de verdad de la función implícita pero que en su forma estaba estrechamente relacionado con el teorema de la función inversa. *Agustín Louis Cauchy* (1789-1857) fue quien se acercó al teorema de la función implícita y es también reconocido como el descubridor de dicho teorema.

Este teorema primero fue formulado en términos del análisis complejo y en series de potencias complejas. Luego, como el interés en la comprensión de análisis real creció, surgió la versión en variable real del teorema. El teorema de la funciń implćita fue formulado para funciones de dos variables reales y la hipótesis correspondiente a la matriz jacobiana que sea no singular era simplemente que una derivada parcial no sea nula. Finalmente, *Ulisse Dini* (1845-1918) matemático italiano, fue quien generalizo la versin de variables reales del teorema de la función implícita al contexto de funciones de cualquier número de variables reales, su contribución fue decisiva pues resolvió el asunto en forma moderna dentro de la teoría de funciones reales.

Una de las formas más poderosas del teorema de la función implícita es la que se atribuye a *John Nash* (1928 -) y *Jurgen Moser* (1928 - 1999). Esta técnica es en realidad un esquema de iteración infinita de los teoremas de la función implícita. *Jurgen Moser* aisla la técnica y la convirtió en una poderosa herramienta que es ahora parte de las ecuaciones en derivadas parciales, el análisis funcional, variables complejas y muchos otros campos.

Ahora bien, en cuanto a las aplicaciones del teorema de la función implícita hay muchas aplicaciones sofisticadas, mencionaremos entre ellas la deformación de estructuras complejas.

Finalmente es posible considerar el teorema de la función implícita como un diseño para resolver ecuaciones, las cuales pueden estar aplicadas a diferentes campos.

3. Formulación del Problema

El estudio de estos teoremas posee una importancia, pues nos permitirán conocer las distintas maneras de pensar a la hora de enfrentar un problema, tanto en la comprensión como en la necesidad de elaborar conceptos e ideas para alcanzar nuestro objetivo. Por tanto, formulamos la siguiente pregunta respecto a nuestra investigación: Cuándo es posible encontrar una función que describa explícitamente y en función x o x en función de y en un entorno de (a,b)?

4. Objetivos

1. General: investigar la formulación e importancia de los teoremas de la función inversa y de la función implícita, así como su utilidad y relevancia en la resolución de algunos problemas.
2. Específico: estudiar los conceptos de topología en el espacio cartesiano, funciones, límites de funciones de varias variables y diferenciabilidad.

5. Metodología

La metodología que estamos utilizando para la realización de la memoria son reuniones semanales junto con el profesor guía, acompañadas de estudio de los diferentes tópicos que están relacionados con el tema de nuestra investigación.

6. Cronograma

.

Capítulo 2

Topología

1. Norma

DEFINICIÓN 1. *Si V es un espacio vectorial, entonces una norma en V es una función en V denotada por $x \mapsto \|x\|$ satisfaciendo las siguientes propiedades:*

1. $\|x\| \geq 0$ *para todo* $x \epsilon V$
2. $\|x\| = 0$ *si y sólo si* $x = 0$
3. $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$ *para todo* $\alpha \epsilon \mathbb{R}$, $x \epsilon V$
4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *para todo* x, $y \epsilon V$

2. Conjunto abierto y conjunto cerrado

1. Conjunto abierto: un conjunto G en $\mathbb{R}^p$ se dice que es abierto en $\mathbb{R}^p$, si para cada punto x en G hay un número real $r > 0$ tal que cada punto y en $\mathbb{R}^p$ satisface $\|x - y\| < r$ que pertenece al conjunto G.

   Propiedades del conjunto abierto:
   - el conjunto vacío y el espacio $\mathbb{R}^p$ son abiertos en $\mathbb{R}^p$.
   - la intersección de dos conjuntos abiertos cualquieras es abierto en $\mathbb{R}^p$.
   - la unión de conjuntos abiertos cualesquieras es abierto en $\mathbb{R}^p$.

2. Conjunto cerrado: un conjunto F en $\mathbb{R}^p$ se dice que es cerrado en $\mathbb{R}^p$ en caso de que su complemento $c(F)$ sea abierto en $\mathbb{R}^p$

   Propiedades del conjunto cerrado:
   - el conjunto vacío y el espacio $\mathbb{R}^p$ son cerrados en $\mathbb{R}^p$.
   - la unión de dos conjuntos cerrados es cerrado en $\mathbb{R}^p$.
   - la intersección de conjuntos cerrados cualquieras es cerrado en $\mathbb{R}^p$.

Ahora introduciremos algunas nociones topológicas adicionales que serán de utilidad y nos permite caracterizar conjuntos abiertos y cerrados en otros términos.

DEFINICIÓN 2. *(I) Sea $x \in \mathbb{R}^p$. Cualquier conjunto que contiene un conjunto abierto que contiene a x se llama una vecindad o entorno.*

(II) Un punto $x \in \mathbb{R}^p$ es llamado un punto interior de un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^p$ si hay una vecindad de x que esta enteramente contenido en A.

(III) Un punto $x \in \mathbb{R}^p$ es llamado punto frontera de un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^p$ si cada entorno de x contiene un punto de A y un punto de A^c.

(IV) Un punto $x \in \mathbb{R}^p$ es llamado un punto interior de un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^p$ si existe un entorno de x que esta enteramente contenido en A.

TEOREMA 3. *Si $B \subseteq \mathbb{R}^p$, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *B es abierto,*
2. *cada punto de B es un punto interior de B,*
3. *B es vecindad de cada uno de sus puntos.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que (1) es cierto y $x \in B$, entonces el conjunto abierto B es una vecindad de x y por lo tanto x es un punto interior de B.

Supongamos (3), entonces para cada $x \in B$, hay un conjunto abierto $G_x \subseteq B$ con $x \in G$. Por lo tanto $B = \cup\{G_x : x \in B\}$, de modo que sigue de las propiedades del conjunto abierto que B es abierto en $\mathbb{R}^p$. $\square$

TEOREMA 4. *Un conjunto $F \subseteq R^p$ es cerrado si y sólo si contiene todos sus puntos fronteras.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que F es cerrado y que x es un punto frontera de F. Si $x \notin F$, entonces el complemento de F, que es abierto, contiene a x y no a puntos de F, contrariamente a la hipótesis que x es punto frontera de F. Por lo tanto $x \in F$.

Recíprocamente, supongamos que F contiene todos sus puntos fronteras. Si $y \notin F$, entonces y no es punto frontera de F, por tanto éste es un punto exterior. Entonces, existe una vecindad M de y enteramente contenida en $c(F)$ (F^c). Si esto es verdadero para todo $y \notin F$, se infiere que F^c es abierto cuando F es cerrado en $\mathbb{R}^p$. $\square$

TEOREMA 5. *Un subconjunto de $\mathbb{R}$ es abierto si y sólo si es la unión de una colección numerable de intervalos abiertos.*

TEOREMA 6. *(Celdas anidadas): Sea $I_k$una sucesión de celdas cerradas no vacías en $\mathbb{R}^p$ que esta anidada de esta manera:*

$$I_1 \supseteq I_2 \supseteq \ldots \supseteq I_k \supseteq \ldots$$

Entonces, existe un punto en $\mathbb{R}^p$ que pertenece a todas las celdas.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que I_k es la celda

$$I_k = \{(x_1, ..., x_p) : a_{k1} \leq x_1 \leq b_{k1}, ..., a_{kp} \leq x_p \leq b_{kp}\}.$$

Es fácil de ver que las celdas $[a_{k1}, b_{k1}]$, $k \in \mathbb{N}$, forman una sucesión de celdas cerradas no vacías de números reales, y por lo tanto, por la completitud del sistema de números reales, existe un número real y_1 que pertenece a todas esas celdas. Aplicando este argumento para cada coordenada obtenemos un punto $y = (y_1, ..., y_p)$ de $\mathbb{R}^p$, tal que si j satisface $j = 1, 2, ..., p$ entonces y_1 pertenece a todas las celdas $\{[a_{kj}, p_{kj}] : k \in \mathbb{N}\}$, por lo tanto el punto y pertenece a todas las celdas y_k. □

TEOREMA 7. *Un conjunto $F \subseteq \mathbb{R}^p$ es cerrado si y sólo contiene todos sus puntos de acumulación.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que F es cerrado y que x es un punto de acumulación de F. Si $x \notin F$, entonces el complemento es una vecindad de x, más aún, contiene un punto de F. Pero esto es imposible, por lo tanto $x \in F$. Recíprocamente, si F contiene todos sus puntos de acumulación, mostremos que F^c es abierto. Si $y \in F^c$, entonces y no es punto de acumulación de F. Por tanto existe una vecindad V_y de y tal que $F \cap V_y = \emptyset$. Así, $V_y \subseteq F^c$. Esto es verdadero para cada $y \in F^c$. Por lo tanto F^c es abierto en $\mathbb{R}^p$.

□

TEOREMA 8. *(Bolzano-Weierstrass) Todo subconjunto acotado infinito de $\mathbb{R}^p$ tiene un punto de acumulación.*

TEOREMA 9. *(Heine-Borel) Un subconjunto de $\mathbb{R}^p$ es compacto si y sólo si es cerrado y acotado.*

TEOREMA 10. *(Del valor máximo) Si F es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y además es diferenciable, entonces F alcanza un máximo y un mínimo en ese intervalo.*

TEOREMA 11. *(Teorema de Rolle) Supongamos que f es continua en un intervalo cerrado $J = [a, b]$, que su derivada f' existe en el intervalo abierto (a, b), y que $f(a) = f(b) = 0$. Luego, existe un punto c en (a, b), tal que f ´(c)=0*

DEMOSTRACIÓN. Si f se anula en J , podemos tomar $c = \dfrac{(a+b)}{2}$. Supongamos que f no se anula; reemplazando f por $-f$, si es necesario, podemos suponer que f asume algunos valores positivos. Por el teorema del valor máximo, la función f alcanza el supremo $sup\{f(x) : x \in J\}$ en algún punto c de J. Desde $f(a) = f(b) = 0$, el punto c satisface que $a < c < b$. Por hipótesis f´(c) existe, y f tiene un punto máximo relativo en c, el teorema del máximo implica que f´(c)=0. □

Como consecuencia del teorema de Rolle se obtiene el teorema fundamental de valor medio.

TEOREMA 12. *(Teorema del valor medio) supongamos que f es continua en un intervalo cerrado $J = [a, b]$ y tiene una derivada en el intervalo abierto (a, b). Entonces existe un punto c en (a, b) tal que $f(b) - f(a) = f'(c)\,(b - a)$*

DEMOSTRACIÓN. Consideremos la función φ definida en J por

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

puesto que φ es la diferencia de f y la función cuya gráfica consiste en el segmento de recta que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$, se deduce de la hipótesis de que φ es continua en $J = [a, b]$ y es fácil de comprobar que φ tiene una derivada en (a, b). Además, tenemos $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. Aplicando el teorema de Rolle, existe un punto c en el interior de J tal que:

$$0 = \varphi´(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

.

□

Capítulo 3

Diferenciación en $\mathbb{R}^p$

Se define la derivada de una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a un punto $c \in \mathbb{R}$ como

$$L = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

cuando este límite existe.

Además, la definición de derivada de un número L es tal que:

$$\lim_{x \to c} \frac{|f(x) - f(c) - L(x - c)|}{|x - c|} = 0$$

Así, la derivada de una función f definida en una vecindad de un punto $c \in \mathbb{R}^p$ con valores en $\mathbb{R}^p$ será una función lineal $L : \mathbb{R}^p \mapsto \mathbb{R}^q$ tal que

$$\lim_{x \to c} \frac{\|f(x) - f(c) - L(x - c)\|}{\|x - c\|} = 0$$

1. La derivada en $\mathbb{R}^p$

DEFINICIÓN 13. *Sea f definida en un subconjunto A de $\mathbb{R}^p$ y tiene valores en $\mathbb{R}^q$, sea c un punto interior de A y sea u un punto en $\mathbb{R}^p$. Un vector $L_u \in \mathbb{R}^p$ se dice que es una derivada parcial f de c con respecto a u si para cada número $\varepsilon > 0$ existe un $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que para todo $t \in \mathbb{R}$ se satisface $0 < |t| < \delta(\varepsilon)$, donde $\left\| \frac{1}{t} \{f(c + tu) - f(c)\} - L_u \right\| < \varepsilon$. Se puede ver que la derivada parcial L_u es unívocamente determinada cuando existe. Alternativamente, se puede definir L_u como el límite $\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \{f(c + tu) - f(c)\}$.*

Se escribe $D_u f(c)$ o $f_u(c)$ la derivada parcial de L_u de f en c con respecto a u.

DEFINICIÓN 14. *Sea f que tiene dominio A en $\mathbb{R}^p$ y rango en $\mathbb{R}^q$, y sea c un punto interior de A. Decimos que f es diferenciable en c si existe una función lineal $L : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ tal que para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que si $x \in \mathbb{R}^p$ es cualquier vector que satisface $\|x - c\| \leq \delta(\varepsilon)$, luego $x \in A$ y*

$$\|f(x) - f(c) - L(x - c)\| \leq \varepsilon \|x - c\|$$

Alternativamente, podemos reescribirla requiriendo que para cualquier $\varepsilon > 0$ *exista* $\delta(\varepsilon) > 0$ *tal que si* $u \in \mathbb{R}^p$ *y* $\|u\| \leq \delta(\varepsilon)$*, luego*

$$\|f(c + u) - f(c) - L(u)\| \leq \varepsilon \|u\|$$

y podemos expresarla más compactamente escribiendo

$$\lim_{\|u\| \to 0} \frac{\|f(c + u) - f(c) - L(u)\|}{\|u\|} = 0$$

Lema 15. *La función f tiene a lo más una derivada en un punto.*

Demostración. Supongamos que L_1 y L_2 son funciones lineales que van de $\mathbb{R}^p$ a $\mathbb{R}^q$ y satisface$\|f(c+u) - f(c) - L(u)\| \leq \epsilon \|u\|$ para $\|u\| \leq \delta(\varepsilon)$. Luego tenemos

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|L_1(u) - L_2(u)\| \\ &\leq \|f(c+u) - f(c) - L_1(u)\| + \|f(c+u) - f(c) - L_2(u)\| \\ &\leq 2\varepsilon \|u\| \end{aligned}$$

Por lo tanto, tenemos $0 \leq \|L_1(u) - L_2(u)\| \leq 2\varepsilon \|u\|$ para todo $u \in \mathbb{R}^p$ con $\|u\| \leq \delta(\varepsilon)$. Si $L_1 \neq L_2$, existe $z \in \mathbb{R}^p$ con $L_1(z) \neq L_2(z)$, donde $z \neq 0$. Ahora, sea $z_0 = \dfrac{\delta(\varepsilon)}{\|z\|} \cdot z$ por lo que tenemos $\|z_0\| = \delta(\varepsilon)$ entonces $0 \leq \|L_1(z_0) - L_2(z_0)\| \leq 2\varepsilon \|z_0\|$. Luego $\|L_1(z) - L_2(z)\| \leq 2\varepsilon \|z\|$ para todo $\varepsilon > 0$, entonces $L_1(z) = L_2(z)$, una contradicción. Por lo tanto $L_1 = L_2$. □

Lema 16. *Si $f : A \to \mathbb{R}^p$ es diferenciable en $c \in A$, entonces existe un número δ estrictamente positivo, K tal que si $\|x - c\| \leq \delta$, se tiene*

$$\|f(x) - f(c)\| \leq K \|x - c\|$$

en particular, se sigue que f es continua en $x = c$.

Demostración. Por definición 13 se sabe que existe $\delta > 0$ tal que si $0 < \|x - c\| \leq \delta$, a continuación $\|f(x) - f(c) - L(x - c)\| \leq \epsilon \|x - c\|$ se mantiene con $\varepsilon = 1$. Si usamos la desigualdad triangular, tenemos

$$\|f(x) - f(c)\| \leq \|L(x - c)\| + \|x - c\|$$

para $0 < \|x - c\| \leq \delta$. Además, tenemos que existe $B > 0$ tal que $\|L(x - c)\| \leq B \|x - c\|$ para todo $x \in \mathbb{R}^p$. Por lo tanto, si $0 < \|x - c\| \leq \delta$ obtenemos

$$\|f(x) - f(c)\| \leq (B + 1) \|x - c\|$$

esta desigualdad es verdadera para $x = c$. $\square$

Teorema 17. *Sea $A \subseteq \mathbb{R}^p$, si $f : A \to \mathbb{R}^q$ es diferenciable en un punto $c \in A$, y si u es cualquier elemento de $\mathbb{R}^p$, entonces la derivada parcial $D_u f(c)$ de f en c con respecto a u existe.*

$$D_u f(c) = Df(c)(u)$$

Demostración. Si f es diferenciable en c, sea $\varepsilon > 0$ entonces existe un $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que

$$\|f(c + tu) - f(c) - Df(c)(tu)\| \leq \varepsilon \|tu\|$$

proporcionando $\|tu\| \leq \delta(\varepsilon)$. Si $u = 0$, la derivada parcial con respecto a 0 es $0 = Df(c)(0)$. Supongamos entonces $u \neq 0$. Así, si $0 < |t| \leq \delta(\varepsilon) / \|u\|$, tenemos

$$\left\| \frac{f(c + tu) - f(c))}{t} - Df(c)(u) \right\| \leq \varepsilon \|u\|$$

Esto muestra que $Df(c)(u)$ es la derivada parcial de f en c con respecto a u, como afirmamos. $\square$

Ejemplo:

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Tiene derivadas parciales en $(0, 0)$ pero no es diferenciable en $(0, 0)$, más aún, no es continua en $(0, 0)$.

Observación 18. *(Existencia de la derivada) La existencia de la derivada en un punto implica la existencia de todas las derivadas parciales en un punto. Pero, la simple existencia de la derivada parcial no implica la existencia de la derivada. Veremos ahora que la continuidad de una derivada parcial en c es suficiente para la existencia de la diferencial en c.*

Teorema 19. *Sea $A \subseteq \mathbb{R}^p$, sea $f : A \to \mathbb{R}^q$, y sea c un punto interior de A. Si la derivada parcial $D_j f_i$ $(i = 1, ..., q; j = 1, ..., p)$ existe una vecindad de c y son continuas en c, luego f es diferenciable en c. Además $Df(c)$ es representada por la matriz $q \times p$.*

Demostración. Se mostrará en detalle el caso $q = 1$. Si $\varepsilon > 0$, sea $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que si $\|y - c\| \leq \delta(\varepsilon)$ y $j = 1, 2, ..., p$, luego

$$|D_j f(y) - D_j f(c)| < \varepsilon. \tag{1}$$

Si $x = (x_1, x_2, ..., x_p)$ y $c = (c_1, c_2, ..., c_p)$, sea $z_1, z_{2,...,z_{p-1}}$ denotado por lo puntos

$$z_1 = (c_1, x_2, ..., x_p), z_2 = (c_1, c_2, x_3, ..., x_p), ..., z_{p-1} = (c_1, c_2, ..., c_{p-1}, x_p)$$

y sea $z_0 = x$ y $z_p = c$. Si $\|x - c\| \leq \delta(\varepsilon)$, luego es fácil ver que $\|z_1 - c\| \leq \delta(\varepsilon)$ para $j = 0, 1, ..., p$. Escribiremos la diferencia como la siguiente suma:

$$f(x) - f(c) = \sum_{j=1}^{p} \{f(z_{j-1}) - f(z_j)\}$$

Si aplicamos el teorema del valor medio para los términos j-ésimos de esta suma, obtenemos un punto $\overline{z_j}$, perteneciendo al segmento de recta que une z_{j-1} y z_j, tal que

$$f(z_{j-1}) - f(z_j) = (x_j - c_j) D_j f(\overline{z_j})$$

Por lo tanto, se obtiene

$$f(x) - f(c) - \sum_{j=1}^{p} (x_j - c_j) D_j f(c) = \sum_{j=1}^{p} (x_j - c_j) \{D_j f(\overline{z_j}) - D_j f(c)\}$$

en vista de la desigualdad (1), la expresión entre corchetes en la última fórmula está acotada por ε. Aplicando la desigualdad de Schwarz a esta última suma, se obtiene la estimación

$$\left\| f(x) - f(c) - \sum_{j=1}^{p} (x_j - c_j) D_j f(c) \right\| \leq (\varepsilon\sqrt{p}) \|x - c\|$$

cada vez que $\|x - c\| \leq \delta(\varepsilon)$.

Hemos demostrado que f es diferenciable en c, y que su derivada $Df(c)$ es la función lineal de $\mathbb{R}^p$ a $\mathbb{R}$ propuesta por

$$u = (u_{1,\dots,u_p}) \longmapsto Df(c)(u) = \sum_{j=1}^{p} u_j D_j f(c)$$

En el caso donde f toma valores en $\mathbb{R}^q$ con $q > 1$, se aplica el mismo argumento para cada una de las funciones reales f_i, $i = 1, 2, \dots, q$, que corresponden a las coordenadas de la representación de la función f. $\square$

Capítulo 4

Teorema de la Función Implícita

Sea Ω un conjunto abierto en $\mathbb{R}^p$ y sea f una función con dominio Ω y rango en $\mathbb{R}^p$; a menos que se especifique lo contrario, no asumiremos que $p = q$. Veremos que, bajo ciertas hipótesis que asumiremos, el carácter local de f en un punto $c \in \Omega$ se relaciona con la aplicación lineal $Df(c)$. Algo más preciso, sería:

1. Si $p \leq q$ y $Df(c)$ es inyectiva, luego f es inyectiva en un vecindad pequeña de c.
2. Si $p \geq q$ y $Df(c)$ es sobreyectiva, luego la imagen f de una vecindad pequeña de c es una vecindad de c.
3. Si $p = q$ y $Df(c)$ es biyectiva, luego f una vecindad U de c de la forma uno a uno en una vecindad V de $f(c)$. En este caso hay una función definida en V que es inversa a la restricción de f a U.

Como consecuencia de estos teoremas obtendremos el Teorema de la Función Implícita, como uno de los teoremas fundamentales en análisis y geometría.

1. Clase C^1

La mera existencia de la derivada no es suficiente para nuestros propósitos; también necesitamos la continuidad de la derivada. Recordemos que si $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}^q$ es diferenciable en cada punto de $\Omega \subseteq \mathbb{R}^p$, entonces la función $x \to Df(x)$ es una función de Ω en la colección $\mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ de todas las funciones lineales de $\mathbb{R}^p$ a $\mathbb{R}^q$. Se observa que este conjunto $\mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ es un espacio vectorial y que este espacio es un espacio normado bajo la norma $\|L\|_{pq} = sup\{\|L(x)\| : x \in \mathbb{R}^p, \|x\| \leq 1\}$

$$\|L\|_{pq} = sup\{\|L(x)\| : x \in \backslash\mathbb{R}^p, \|x\| \leq 1\}$$

Definición 20. *Si Ω es abierto en $\mathbb{R}^p$ y $f : \Omega \to \mathbb{R}^q$, decimos que f pertenece a la clase $C^1(\Omega)$ si la derivada $Df(x)$ existe para todo $x \in \Omega$ y la función $x \mapsto Df(x)$ de Ω en $\mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$, es continua con la norma de este espacio.*

Recordamos que para cada $x \in \Omega$, $Df(x)$ puede ser representada por la matriz Jacobiana $[a_{ij}]_{q\times p}$ $[D_j f_i\,(x)]$. Por lo tanto, $Df(x) - Df(y)$ es representada por la matriz $q \times p$

$$[D_j f_i(x) - D_j f_i\,(y)]$$

Ahora se desprende de la desigualdad

$$\|Df(x) - Df(y)\|_{pq} \leq \left\{ \sum_{i=1}^{q} \sum_{j=1}^{p} |D_j f_i(x) - D_j f_i(y)|\, 2 \right\}^{1/2},$$

que la continuidad de cada una de las derivadas parciales $D_j f_i$ implica la continuidad de $x \mapsto Df(x)$.

TEOREMA 21. *Si $\Omega \subseteq \mathbb{R}^p$ es abierto y $f : \Omega \to \mathbb{R}^p$ es diferenciable en cada punto de Ω, luego f pertenece a la clase $C^1(\Omega)$ si y sólo si las derivadas parciales $D_j f_i$, $i = 1, ..., q$, $j = 1, ..., p$, de f son continuas en Ω.*

Necesitaremos el siguiente lema, que es una variante del teorema del valor medio.

LEMA 22. *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^p$ es un conjunto abierto y sea $f : \Omega \to \mathbb{R}^p$ diferenciable en Ω. Supongamos que Ω contiene los puntos a, b y el segmento de lnea S que los une, y sea $x_0 \in \Omega$. Entonces tenemos*

$$\|f(b) - f(a) - Df(x_0)(b - a)\| \leq \|b - a\| \sup_{x\in S} \left\{ \|Df(x) - Df(x_0)\|_{pq} \right\}$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $g : \Omega \to \mathbb{R}^q$ se define para $x \in \Omega$ por

$$g(x) = f(x) - Df(x_0)(x)$$

Ya que $Df(x_0)$ es lineal, se deduce que $Dg(x) = Df(x) - Df(x_0)$ para $x \in \Omega$. Si aplicamos el teorema del valor medio, se infiere que existe un punto $c \in S$ tal que

$$\begin{aligned} \|f(b) - f(a) - Df(x_0)(b - a)\| &= \|g(b) - g(a)\| \\ \leq \|Dg(c)(b - a)\| &= \|(Df(c) - Df(x_0))(b - a)\| \\ &\leq \|b - a\| \sup_{x\in S} \left\{ \|Df(x) - Df(x_0)\|_{pq} \right\} \end{aligned}$$

$\square$

El siguiente resultado es el lema clave para los Teoremas de Aplicaciones.

LEMA 23. *Lema de aproximación. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^p$ abierto y sea $f : \Omega \to \mathbb{R}^q$ que pertenece a la clase $C^1(\Omega)$. Si $x_0 \in \Omega$ y $\varepsilon > 0$, existe $\delta(\varepsilon)$ tal que si $\|x_k - x_0\| \leq \delta(\varepsilon)$, $k = 1, 2$, se tiene $x_k \in \Omega$ y*

$$\|f(x_1) - f(x_2) - Df(x_0)(x_1 - x_2)\| \leq \varepsilon \|x_1 - x_2\|$$

DEMOSTRACIÓN. Puesto que $x \mapsto Df(x)$ es continua en Ω en $\mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$,se sigue que, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta(\varepsilon > 0)$ tal que si $\|x - x_0\| < \delta(\varepsilon)$. Luego $x \in \Omega$ y $\|Df(x) - Df(x_0)\|_{pq} \leq \varepsilon$. Ahora sean x_1, x_2 satisfaciendo $\|x_k - x_0\| < \delta(\varepsilon)$, donde el segmento de recta que une x_1 y x_2 se encuentra dentro de la bola cerrada de centro x_0 y radio $\delta(\varepsilon)$, y por lo tanto en el interior de Ω. □

2. Teorema de la función Inyectiva

En el teorema de la función inyectiva vamos a demostrar que si f pertenece a la clase $C^1(\Omega)$ y si $Df(c)$ es inyectiva, entonces la restricción de f en una vecindad adecuada de c, es una inyección.

Un lector familiarizado con la noción de rango de una transformación lineal, recordará que $L : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ es inyectiva si y sólo si el rango $(L) = p \leq q$.

TEOREMA 24. *(de la Función Inyectiva). Supongamos que $\Omega \subseteq \mathbb{R}^p$ es abierto, que $f : \Omega \to \mathbb{R}^q$ pertenece a la clase $C^1(\Omega)$, y que $L = Df(c)$ es una inyección. Entonces existe un número $\delta > 0$ de tal manera que la restrición de f a $B_\delta = \{x \in \mathbb{R}^p : \|x - c\| \leq \delta\}$ es una inyección. Por otra parte, la inversa de la restrición f/B_δ es una función continua en $f(B_\delta) \subseteq \mathbb{R}^p$ para $B_\delta \subseteq \mathbb{R}$.*

DEMOSTRACIÓN. Puesto que la función lineal $L = Df(c)$ es una inyección, se sigue del corolario:

COROLARIO 25. *Sea f una función con $D(f) \subseteq \mathbb{R}^p$ a $\mathbb{R}^q$ y sea $K \subseteq D(f)$ compacto. Si f es continua en K, entonces existe un punto x^* y x_* en K tal que*

$$\|f(x^*)\| = sup\,\{\|f(x)\| : x \in K\}$$

$$\|f(x_*)\| = inf\,\{\|f(x)\| : x \in K\}$$

Se sigue del teorema: Si f es una función lineal con dominio en $\mathbb{R}^p$ y rango en $\mathbb{R}^q$ entonces hay pq números reales (c_{ij}) , $1 \leq i \leq q$, $1 \leq j \leq p$ tal que si $x = (x_1, x_2, ..., x_p)$ es un punto en $\mathbb{R}^p$, y si $y = (y_1, y_2, ..., y_q) = f(x)$ es una imagen de f, luego

$$
\begin{array}{lcl}
y_1 & = & c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + ... + c_{1p}x_p, \\
y_2 & = & c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + ... + c_{2p}x_p, \\
... & ... & .... \\
y_q & = & c_{q1}x_1 + c_{q2}x_2 + ... + c_{qp}x_p,
\end{array} \tag{2}
$$

Recíprocamente, si (c_{ij}) es un conjunto de números reales pq, entonces la función que asigna a x en $\mathbb{R}^p$ los elementos y en $\mathbb{R}^q$ de acuerdo a la ecuación (2) es una función lineal con dominio en $\mathbb{R}^p$ y rango en $\mathbb{R}^q$.

Si $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ es lineal, entonces existe una constante $m > 0$ tal que $\|f(x)\| \leq M\|x\|$ para todo $x \in \mathbb{R}^p$. Sin embargo, no siempre es verdadero que exista una constante $m > 0$ tal que $\|f(x)\| \geq m\|x\|$ para todo $x \in \mathbb{R}^p$.

que no existe un $r > 0$ de tal manera que $r\|u\| \leq \|Df(c)(u)\|$ para $u \in \mathbb{R}^p$.

Ahora aplicamos el Lema Aproximación con $\varepsilon = \frac{1}{2}r$ para obtener un número $\delta > 0$ de tal manera que si $\|f(x_k - c)\| \leq \delta$, $k = 1, 2$, entonces

$$\|f(x_1) - f(x_2) - L(x_1 - x_2)\| \leq \frac{1}{2}r\|x_1 - x_2\|$$

Si aplicamos la Desigualdad Triangular a la izquierda de esta desigualdad obtenemos:

$$\|L(x_1 - x_2)\| - \|f(x_1) - f(x_2)\| \leq \frac{1}{2}r\|x_1 - x_2\|$$

Si combinamos esto con $u = x_1 - x_2$, obtenemos $\frac{1}{2}r\|x_1 - x_2\| \leq \|f(x_1) - f(x_2)\|$ para $x_k \in B_\delta$. Esto prueba que la restricción de f a B_δ es una inyección; por lo tanto, esta restricción tiene una función inversa que designaremos por g.

Si $Y_k \in f(B_\delta)$, entonces existe un único punto $x_k = g(y_k)$ en B_δ de tal manera que $y_k = f(x_k)$. Se sigue que:

$$\|g(y_1) - g(y_2)\| \leq \frac{2}{r}\|y_1 - y_2\|$$

donde se sigue que $g = (f|B_\delta)^{-1}$ es uniformemente continua en $f(B_\delta)$ en $\mathbb{R}^p$.

$\square$

3. Teorema de la Funcíon Sobreyectiva

El resultado siguiente es compañero con el teorema de la función inyectiva. Este teorema, que se debe a L. M. Graves, afirma que si f es una clase $C^1(\Omega)$ y si por alguna $c \in \Omega$, la aplicación lineal $Df(c)$ es una sobreyectiva de $\mathbb{R}^p$ en $\mathbb{R}^q$, entonces funciones f de una vecindad adecuada de c para una vecindad de $f(c)$. Por lo tanto, todos los puntos de $\mathbb{R}^q$ que es lo suficientemente cerca de $f(c)$ es la imagen bajo f de un punto cerca de c. Un lector familiarizado con la noción de la base de una transformacińn lineal recordará que $L : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ es sobreyectiva si y sólo si rango $(L) = q \leq p$.

Teorema 26. *(de la Función Sobreyectiva). Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^p$ abierto y sea $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^q$ que pertenece a la clase $C^1(\Omega)$. Supongamos que para algún $c \in \Omega$, la función lineal $L = Df(c)$ es una sobreyectividad de $\mathbb{R}^p$ en $\mathbb{R}^q$. Entonces existen números de $m > 0$ y $\alpha > 0$ tal que si $y \in \mathbb{R}^q$ y $\|y - f(c)\| \leq \alpha/2m$, entonces existe un $x \in \Omega$ tal que $\|x - c\| \leq \alpha$ y $f(x) = y$.*

Demostración. Ya que L es sobreyectiva, cada una de las bases canónicas $e_1 = (1, 0, ..., 0)$, $e_2 = (0, 1, ..., 0)$,...,$e_q = (0, 0, ..., q)$ en $\mathbb{R}^q$ es la imagen en L de algunos vectores en $\mathbb{R}^p$, por ejemplo $u_1, u_2, ..., u_q$. Ahora sea $M : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^p$ la asignación de función lineal e_j en u_j de $j =, 1, 2, ..., q$, que es

$$M\left(\sum_{i=1}^{q} a_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{q} a_i u_i$$

De ello se deduce que $L \circ M$ es la función identidad en $\mathbb{R}^q$, es decir, $L \circ M(y) = y$ y para todo $y \in \mathbb{R}^q$. Si dejamos que

$$m = \left\{\sum_{i=1}^{q} \|u_j\|^2\right\}^{1/2}$$

a continuación, la aplicación de la desigualdad triángular y de Schwarz implica que si

$$\|M(y)\| \leq \sum_{i=1}^{q} |a_1| \, \|u_i\|$$

$$\leq \left\{\sum_{i=1}^{q} |a_i|^2\right\}^{1/2} \left\{\sum_{i=1}^{q} \|u_i\|^2\right\}^{1/2}$$

$$= m \, \|y\|$$

Por el lema de aproximación, existe un número $\alpha > 0$ tal que si $\|x_k - c\| \leq \alpha$, $k = 1, 2$, luego $x_k \in \Omega$ y

$$\|f(x_1) - f(x_2) - L(x_1 - x_2)\| \leq \frac{1}{2m} \|x_1 - x_2\|$$

Ahora sea $B_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^p : \|x - c\| \leq \alpha\}$ y supongamos que $y \in \mathbb{R}^q$ tal que $\|y - f(c)\| \leq \alpha/2m$. Vamos a demostrar que existe un vector x con $x \in B_\alpha$ tal que $y = f(x)$. Sea $x_0 = c$ y sea $x_1 = x_0 + M(y - f(c))$ de manera que $\|x_1 - x_0\| \leq m \|y - f(c)\| \leq \frac{\alpha}{2}$, donde $\|x_1 - x_0\| \leq \frac{\alpha}{2}$ y $\|x_1 - c\| \leq \left(1 - \frac{1}{2}\right) \alpha$.

Supongamos que $c = x_0, x_1, ..., x_n$ han sido elegidos por inducción en $\mathbb{R}^p$ tal que

(3) $\|x_k - x_{k-1}\| \leq \alpha/2^k, \quad \|x_k - c\| \leq \left(1 - 1/2^k\right) \alpha$ para $k = 1, n$.

Ahora definimos $x_{n+1} (n \geq 1)$ por

$$x_{n+1} = x_n - M\left[f(x_n) - f(x_{n-1}) - L(x_n - x_{n-1})\right]$$

se desprende que

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq m \|f(x_n) - f(x_{n-1}) - L(x_n - x_{n-1})\| \leq \frac{1}{2} \|x_n - x_{n-1}\|$$

de donde se deduce que

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq \frac{1}{2}(\alpha/2^n) = \alpha/2^{n+1}$$

y

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - c\| &\leq \|x_{n+1} - x_n\| + \|x_n - c\| \\ &\leq (\alpha/2^{n+1}) + (1 - 1/2^n)\alpha \\ &= (1 - 1/2^{n+1})\alpha \end{aligned}$$

Por lo que se establece para $k = n + 1$. Por lo tanto, podemos construir una sucesión de (x_n) en B_α, de esta manera. Si $m \geq n$, entonces tenemos

$$\begin{aligned} \|x_n - x_m\| &\leq \|x_n - x_{n+1}\| + \|x_{n+1} - x_{n+2}\| + ... + \|x_{m-1} - x_m\| \\ &\leq \frac{\alpha}{2^{n+1}} + \frac{\alpha}{2^{n+2}} + ... + \frac{\alpha}{2^m} \leq \frac{\alpha}{2^n} \end{aligned}$$

De ello se deduce que (x_n) es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}^p$ y por lo tanto converge a un elemento x. Desde $\|x_n - c\| \leq (1 - 1/2^n)\alpha$, se deduce que $\|x - c\| \leq \alpha$ de manera que $x \in B_\alpha$. Desde $x_1 - x_0 = M(y - f(c))$, se deduce que

$$L(x_1 - x_0) = L \circ M(y - f(c)) = y - f(x_0)$$

Por otra parte

$$L(x_{n+1} - x_n) = -L \circ M\,[f(x_n) - f(x_{n-1}) - L(x_n - x_{n-1})]$$

$$= -\{f(x_n) - f(x_{n-1}) - L(x_n - x_{n-1})\} = L(x_n - x_{n-1}) - [f(x_n) - f(x_{n-1})].$$

Por inducción, encontramos que

$$L(x_{n+1} - x_n) = y - f(x_n)$$

de donde se sigue que $y = lim f(x_n) = f(x)$. Por lo tanto, cada punto y satisface $\|y - f(c)\| \leq \alpha/2m$ que es la imagen bajo f de un punto $x \in \Omega$ con $\|x - c\| \leq \alpha$.

□

TEOREMA 27. *(Teorema de la función abierta) Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^p$ abierto y sea $f : \Omega \to \mathbb{R}^p$ que pertenece a la clase $C^1(\Omega)$. Si para cada $x \in \Omega$ la derivada $Df(x)$ es sobreyectiva, y si $G \subseteq \Omega$ es abierto, luego $f(G)$ es abierto en $\mathbb{R}^q$.*

DEMOSTRACIÓN. Si $b \in f(G)$, entonces existe un punto $c \in G$ tal que $f(c) = b$. Se desprende del teorema de la aplicación sobreyectiva (3) aplicado a $f \mid G$ existe $\beta > 0$ tal que si $\|y - b\| \leq \beta$ entonces existe un $x \in G$ tal que $y = f(x)$. Por lo tanto $f(G)$ es abierto en $\mathbb{R}^q$.

□

4. Teorema de Inversión

Vamos a combinar nuestros dos teoremas de aplicación en el caso $p = q$. Aquí la derivada $Df(c)$ se supone que es una biyección. Este es el caso si y sólo si la derivada $Df(c)$ tiene una inversa que, a su vez, es verdadero si y sólo si el determinante jacobiano es diferente de cero. El lector familiarizado con la noción de rango de una transformación lineal recordará que $L : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ es biyectiva si y sólo si el rango $(L) = p = q$. Se desprende de la continuidad de las derivadas parciales y del determinante que si $Df(a)$ es invertible, entonces $Df(x)$ es invertible para x lo suficientemente cerca de c.

TEOREMA 28. *(de Inversión) Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ un abierto y supongamos que $f : \Omega \to \mathbb{R}$ pertenece a la clase $C^1(\Omega)$. Si $c \in \Omega$ es tal que $Df(c)$ es una biyección, entonces existe una vecindad U de c tal que $V = f(U)$ es una vecindad abierta de $f(c)$ y la restricción de f a U es una biyección en V con g inversa continua. Por otra parte, g pertenece a la clase $C^1(V)$ y $D_g(c) = [Df(g(y))]^{-1}$ para $y \in V$.*

DEMOSTRACIÓN. Por hipótesis $L = Df(c)$ es inyectiva; por lo tanto, el corolario (25) implica que existe un $r > 0$ tal que $2r\|z\| \leq \|Df(c)(z)\|$ para $z \in \mathbb{R}^p$.

Ya que f está en la clase $C^1(\Omega)$, entonces es una vecindad de c en la que $Df(x)$ es invertible y satisface

$$r\|z\| \leq \|Df(x)(z)\| \tag{4}$$

Que restringen aún más la vecindad U de c en la que f es inyectiva y que esta contenida en una bola con centro c y radio α (como en el teorema de la función sobreyectiva). Luego, $V = f(U)$ es una vecindad de $f(c)$, y nosotros inferimos de los teoremas anteriores que la restricción $f \mid U$ tiene una función inversa continua $g : V \to \mathbb{R}^p$. Queda por demostrar que g es diferenciable en un punto arbitratio $y_1 \in V$. Sea $x_1 = g(y_1) \in U$; entonces f es diferenciable en x_1, se desprende que si $x \in U$, entonces $f(x) - f(x_1) - Df(x_1)(x - x_1) = \|x - x_1\| u(x)$ donde $\|u(x) \to 0\|$ cuando $x \to x_1$. Sea M_1 sea la inversa de la función lineal $Df(x_1)$, entonces $x - x_1 = M_1[Df(x_1)(x - x_1)] = M_1[f(x) - f(x_1) - \|x - x_1\| u(x)]$. Si $x \in U$, entonces $x = g(y)$ para algunos $y = f(x) \in U$; sin embargo $y_1 = f(x_1)$ por lo que esta ecuación podría ser escrita en la forma $g(y) - g(y_1) - M_1(y - y_1) = -\|x - x_1\| M_1(u(x))$.

Ya que $Df(x_1)$ es inyectiva, se desprende de la demostración del teorema de la función Inyectiva que $\|y - y_1\| = \|f(x) - f(x_1)\| \geq \frac{1}{2}r\|x - x_1\|$ y siempre es lo suficientemente cerca para y_1. Sin embargo, se desprende de (4) que $\|M_1(u)\| \leq \frac{1}{r}\|u\|$ para todo $u \in \mathbb{R}^p$. Por lo tanto, tenemos que $\|g(y) - g(y_1) - M_1(y - y_1)\| \leq (\frac{2}{r^2})\|u(x)\|\|y - y_1\|$. Ahora como $y \to y_1$, entonces $x = g(y) \to g(y_1)$ y así $\|u(x)\| \to 0$. Concluimos que, $Dg(y_1)$ existe y es igual a $M_1 = (Df(x_1))^{-1}$. Del hecho de que g pertenece a la Clase $C^1(V)$ se desprende la relación $Dg(y) = [Df(g(y))]^{-1}$ para $y \in V$, y la continuidad de las funciones $y \to g(y)$, $x \to Df(x)$, $L \to L^{-1}$ de $V \to U$, $U \to l(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^p)$, y $l(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ respectivamente.

□

5. Función Implícita

Supongamos que F es una función que está definida en un subconjunto de $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ en $\mathbb{R}^q$. (Si hacemos la identificación obvia de $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ con $\mathbb{R}^{p+q}$, entonces no es necesario definir lo que significa decir que F es continua, o es diferenciable en un punto, o en la clase C^1 en un conjunto). Podemos suponer que F tiene el punto $(a, b) = (0, 0)$ en el vector cero de $\mathbb{R}^q$. El problema de las funciones implícitas es resolver la ecuación

$$F(x, y) = 0$$

de un argumento (por ejemplo, y) en términos de la otra en el sentido de que nos encontramos con una función φ que se define en un subconjunto de $\mathbb{R}^p$ con valores en $\mathbb{R}^q$ tal que $b = \varphi(a)$ y

$$F(x, \varphi(x)) = 0$$

para todo x en el dominio de φ. Asumimos que F es continua en una vecindad de (a, b) y esperamos que a la conclusión de que la función solución φ es continua en una vecindad de a. Probablemente no será una sorpresa para el lector que supondremos que F pertenece a la clase C^1 en una vecindad de (a, b), sin embargo, aunque esta hipótesis no es suficiente para garantizar la existencia y unicidad de una función continua solución φ se define en un barrio de a.

De hecho si $p = q = 1$, entonces la función dada por $F(x, y) = x^2 - y^2$ tiene dos funciones con soluciones continuas $\varphi_1(x) = x$ y $\varphi_2(x) = -x$ correspondientes al punto $(0, 0)$. También tiene soluciones discontinuas, tales como

$$\varphi_3(c) = x, x\ racional$$

$$= -x, x\ irracional$$

La función $G(x, y) = x - y^2$ tiene dos funciones con soluciones continuas correspondientes a $(0, 0)$, pero ninguna de ellas se define en una vecindad del punto $x = 0$. Para dar un ejemplo más interesante, la función $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $H(x, y) = x,\ y = 0 = x - y^2 sin(\frac{1}{y}),\ y \neq 0$ pertenece a la clase C^1 en una vecindad de $(0, 0)$, pero no hay funciones con soluciones continuas definidas en una vecindad de $x = 0$. En todo lo que hay de estos ejemplos, la derivada parcial con respecto a y se anula en el punto que se tome. En el caso $p = q = 1$, la afirmación adicional necesaria para garantizar la existencia y unicidad de la función solución es que esta derivada parcial sea distinta de cero. En el caso general, se observa que $DF(a, b)$ es una función lineal continua en $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ a $\mathbb{R}^q$ y se induce una función lineal continua $L_2 : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^q$ definida por

$$L_2(v) = DF(a, b)(0, v)$$

para $v \in \mathbb{R}^q$. En un sentido muy razonable, L_2 es una derivada parcial de F con respecto a $y \in \mathbb{R}^q$ en el punto (a, b). La suposición adicional que impondremos es que L_2 es invertible. Ahora interpretaremos este problema en términos de coordenadas. Si $x = (x_1, ..., x_p)$ y $y = (y_1, ..., y_q)$, luego la ecuación $F(x, y) = 0$ va tomando la forma de q ecuaciones en $p + q$ argumentos $x_1, ..., x_p$, $y_1, ..., y_q$ dados por

$$f_1(x_1, ..., x_p, y_1, ..., y_q) = 0$$

$$.......................$$

$$f_q(x_1, ..., x_p, y_1, ..., y_q) = 0$$

Por conveniencia supongamos que $a = 0$ y $b = 0$ entonces estos sistemas se satisfacen para $x_1 = 0, ..., x_p = 0$, $y_1 = 0, ..., y_q = 0$, y se desea resolver para y_j en términos de x_i.

TEOREMA 29. *(de la Función Implícita) Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ abierto y sea $(a, b) \in \Omega$. Supongamos que $F : \Omega \to \mathbb{R}^q$ pertenece a la clase $C^1(\Omega)$, que $F(a, b) = 0$ y que la función lineal definida por $L_2(v) = DF(a, b)(0, v)$, $v \in \mathbb{R}^q$ es una biyección de $\mathbb{R}^q$ a $\mathbb{R}^q$.*

(a) Entonces existe una vecindad abierta W dea $\in \mathbb{R}^p$ y una única función $\varphi : W \to \mathbb{R}^p$ que pertenece a la clase $C^1(W)$ tal que $b = \varphi(a)$ y $F(x, \varphi(x)) = 0$ para todo $x \in W$.

(b) Entonces existe una vecindad abierta U de (a, b) en $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ tal que para cada par $(x, y) \in U$ satisface $F(x, y) = 0$ si y sólo si $y = \varphi(x)$ para $x \in W$.

DEMOSTRACIÓN. Sin perdida de generalidad, podemos suponer que $a = 0$ y $b = 0$. Sea $H : \Omega \to \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ definida por $H(x, y) = (x, F(x, y))$ para $(x, y) \in \Omega$. De ello se deduce fácilmente que H pertenece a la clase $C^1(\Omega)$ y que $DH(x, y)(u, v) = (u, DF(x, y)(u, v))$ $(x, y) \in \Omega$ y $(u, v) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$. Ahora sabemos que $DH(0, 0)$ es invertible en $\mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^q$.

De hecho, si dejamos que $L_1 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ definida por $L_1(u) = DF(0, 0)(u, 0)$ para $u \in \mathbb{R}^p$ entonces el hecho de que $DF(0, 0)(u, v) = L_1(u) + L_2(v)$ mostramos que la inversa de $DH(0, 0)$ es la aplicación lineal K en $\mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^q$ definida por $K(x, z) = (x, L_2^{-1}[z - L_1(x)])$.

Gracias al teorema de Inversión, se tiene una vecindad abierta U de $(0, 0) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ tal que $V = H(U)$ es una vecindad abierta de $(0, 0) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ y la restricción de H a U es una biyección en V con una inversa continua $\Phi : V \to U$ que pertenece a la clase $C^1(W)$ y con $\Phi(0, 0) = (0, 0)$. Ahora Φ tiene la forma $\Phi(x, z) = (\varphi_1(x, z), \varphi_2(x, z))$ para $(x, z) \in V$ donde $\varphi_1 : V \to \mathbb{R}^p$ y $\varphi_2 : V \to \mathbb{R}^q$. Luego $(x, z) = H \circ$

$\Phi(x,z) = H\left[\varphi_1(x,z), \varphi_2(x,z)\right]\left[\varphi_1(x,z), F(\varphi_1(x,z), \varphi_2(x,z))\right]$, Nosotros inferimos que $\varphi_1(x,z) = x$ para todo $(x,z) \in V$. Y por lo tanto, Φ toma la forma más simple $\Phi(x,z) = (x, \varphi_2(x,z))$ para $(x,z) \in V$.

Ahora si $P : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^q$ esta definida por $P(x,z) = z$, entonces P es lineal y continua y $\varphi_2 = P \circ \Phi$; sin embargo φ_2 pertenece a la clase $C^1(V)$ y nosotros tenemos que $z = F(x, \varphi_2(x,z))$ para $(x,z) \in V$. Ahora sea $W = \{x \in \mathbb{R}^p : (x,0) \in V\}$ tal que W es una vecindad abierta de 0 en $\mathbb{R}^p$, y definida $\varphi(x) = \varphi_2(x,0)$ para $x \in W$. Eventualmente $\varphi(0) = 0$ y se deduce de la fómula anterior que $F(x, \varphi(x)) = 0$ para $x \in W$.

Por otra parte, $D_\varphi(x)(u) = D_{\varphi_2}(x,0)(u,o)$ para $x \in W$, $u \in \mathbb{R}^p$, entonces concluimos que φ pertenece a la clase $C^1(W)$. Esto prueba la parte (a). Para completar la demostración de la parte (b), supongamos que $(x,y) \in U$ satisface $F(x,y) = 0$. Luego $H\,(x,y) = (x, F(x,y)) = (x,0) \in V$ donde se sigue que $x \in W$. Por otra parte, $(x,y) = \Phi(x,0) = (x, \varphi_2(x,0)) = (x, \varphi(x))$ tal que $y = \varphi(x)$. □

A veces es útil tener una fórmula explícita para la derivada de φ. Para darla es conveniente introducir la noción de derivadas parciales en bloque de F. Si $(x,y) \in \Omega$, el bloque de derivada parcial $D_1F(x,y)$ es la aplicación de la función lineal $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ propuesta por $D_{(1)}F(x,y)(u) = Df(x,y)(u,0)$ para $u \in \mathbb{R}^p$, y el bloque de derivada parcial $D_2F(x,y)$ es la aplicación de la función lineal $\mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^q$ propuesta por $D_{(2)}F(x,y)(v) = Df(x,y)(0,v)$ para $v \in \mathbb{R}^q$. Entones si $(u,v) = (u,0) + (0,v)$ esto es claro que

$$DF(x,y)(u,v) = D_{(1)}F(x,y)(u) + D_{(2)}F(x,y)(v).$$

Nota que al aplicar $L_{(1)}$ y $L_{(2)}$ que entró en la demostración anterior es respectivamente, $D_1F(0,0)$ y $D_2F(0,0)$.

COROLARIO 30. *Con la hipótesis del teorema , existe un $\gamma > 0$ tal que si $\|x - a\| < \gamma$, entonces la derivada de φ en x es el elemento de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ propuesta por*

$$D_\varphi(x) = -\left[D_{(2)}F(x, \varphi(x))\right]^{-1} \circ \left[D_{(1)}F(x, \varphi(x))\right] \tag{5}$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $K : W \to \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ definida por

$$K(x) = (x, \varphi(x)),\ para\ x \in W.$$

Luego de $F \circ K(x) = F(x, \varphi(x)) = 0$, obtenemos $F \circ K : W \to \mathbb{R}^q$ que es una función contante. Además, se puede ver que

$$DK(x)(u) = (u, D\varphi(x)(u))\ para\ u \in \mathbb{R}^p,$$

se sigue de la regla de la cadena aplicada a la función constante $F \circ K$ que

$$0 = D(F \circ K)(x) = DF(K(x)) \circ DK(x).$$

luego, obtenemos

$$DF(x, \varphi(x))(u, v) = D_{(1)}F(x, \varphi(x))(u) + D_{(2)}F(x, \varphi(x))(v).$$

Se sigue de esto que si $u \in \mathbb{R}^p$, luego

$$\begin{aligned} 0 = DF(x, \varphi(x))(u, v) &= D_{(1)}F(x, \varphi(x))(u) + D_{(2)}F(x, \varphi(x))(D\varphi(x)(u)) \\ &= D_{(1)}F(x, \varphi(x))(u) + \left[D_{(2)}F(x, \varphi(x)) \circ D\varphi(x)(u)\right]. \end{aligned}$$

Así, obtenemos

$$0 = D_{(1)}F(x, \varphi(x)) + D_{(2)}F(x, \varphi(x)) \circ D\varphi(x)$$

para $x \in W$. Por hipótesis, $L_2 = D_{(2)}F(a, b)$ es invertible. Si φ y F son continuas, existe un $\gamma > 0$ tal que si $\|x - a\| < \gamma$, luego $D_{(2)}F(x,)\varphi(x)$ es también invertible.

□

Puede ser útil interpretar la fórmula (5) en términos de matrices. Supongamos que tenemos un sistema de q ecuaciones en $p + q$ argumentos. Como hemos observado, la hipótesis del Teorema de la Función Implícita necesita que la matriz

$$\begin{bmatrix} f_{1,p+1} & \cdot & \cdot & \cdot & f_{1,p+q} \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ f_{q,p+1} & \cdot & \cdot & \cdot & f_{q,p+q} \end{bmatrix}$$

sea invertible en el punto (a, b). En este caso la derivada de la solución de la función φ en el punto x, esta dada por

$$-\begin{bmatrix} f_{1,p+1} & \cdot & \cdot & \cdot & f_{1,p+q} \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ f_{q,p+1} & \cdot & \cdot & \cdot & f_{q,p+q} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} f_{1,1} & \cdot & \cdot & \cdot & f_{1,p} \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ f_{q,1} & \cdot & \cdot & \cdot & f_{q,p} \end{bmatrix}$$

donde ambas matrices son evaluadas en el punto $(x, \varphi(x))$ cerca de (a, b).

Ejemplo:

La ecuación $3x - 2y = 4$ se puede escribir en la forma $F(x, y) = 0$, usando una función :

$$F(x, y) = 3x - 2y - 4$$

En cualquier caso esta ecuación permite despejar:

$$y(x) = \frac{3x - 4}{2}$$

En este caso es muy fácil obtener la relación entre x e y. Supongamos ahora que nos dan la ecuación:

$$e^x + x = sen(y - 3) + 2y - 6$$

De nuevo esta ecuación es de la forma $F(x, y) = 0$ para

$$F(x, y) = e^x + x - sen(y - 3) - 2y + 6$$

Como muestran ambos ejemplos, la forma $F(x, y) = 0$ es completamente general, y no limita el tipo de ecuaciones que podemos considerar. Seguramente, en el segundo ejemplo el lector no está ya tan dispuesto a intentar despejar y como función de x. Es más, puede que incluso se plantee la duda de si existe la solución y sea cual sea el valor de x. Pero si lo graficamos, la correspondencia $z \to x$ es biyectiva, y lo mismo sucede con la correspondencia $y \to z$. Por lo tanto, para cada x hay un valor de y y sólo uno: queda definida una función $y(x)$. Como muestra el ejemplo, las funciones $y(x)$ que estamos buscando no vienen dadas por una fórmula explícita que nos indique directamente las operaciones que debemos realizar con x para obtener el valor de y. Por eso empleamos el nombre función implícita para referirnos a una de estas funciones. Antes de dar la definición, profundicemos un poco en el ejemplo anterior.

Sea $y(x)$ la función implícita definida por la ecuación

$$e^x + x - sen(y - 3) - 2y + 6 = 0$$

del ejemplo que estamos analizando. Entonces, naturalmente, sea cual sea x, debe cumplirse:

$$e^x + x - sen(y(x) - 3) - 2y(x) + 6$$

Si usamos la función

$$F(x, y) = e^x + x - sen(y - 3) - 2y + 6$$

Entonces esto se traduce en que ha de ser:

$$F(x, y(x)) = 0$$

Observese que $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función de clase C^∞. Pues bien, no sabemos todavía nada sobre la función $y(x)$. Pero supongamos que $y(x)$ resulta ser una función derivable. Entonces, si consideramos la función compuesta $h(x) = F(x, y(x))$, sería una función derivable (regla de la cadena). Por otro lado, la expresión anterior asegura que esta función $h(x)$ es la función constante 0. Su derivada por lo tanto es cero; y según la regla de la cadena obtenemos:

$$0 = \frac{dh}{dx} = \frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy}\frac{dy}{dx}$$

El descubrimiento que hemos hecho es que podemos despejar:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dF}{dx}}{\frac{dF}{dy}} = -\frac{e^x + 1}{cos(y-3) - 2}$$

siempre que sea $\frac{dF}{dy} = cos(y-3) - 2 \neq 0$. Osea, que aunque no sabemos escribir una expresión explícita para $y(x)$, sí podemos calcular su derivada en un punto $(x_0, y(x_0))$ dado. De esa forma podremos aprovecharnos de toda la información que la derivada proporciona sobre $y(x)$. Este ejemplo nos muestra la cara optimista, las buenas noticias sobre el problema que estamos intentando resolver. Pero no siempre va a funcionar todo tan bien.

6. Teoremas de las Funciones Implícitas en Espacios de Banach

Antes de enunciar este teorema necesitaremos las siguientes definiciones.

DEFINICIÓN 31. *Sea f una aplicación diferenciable de un subconjunto abierto de A de un espacio de Banach E en un espacio de Banach F; Df es entonces una aplicación de A en $\mathcal{L}(E;F)$. Se dice que f es diferenciable con continuidad en A si Df es continua en A. Sea ahora $\|f(x)\| \geq m\,\|x\|$. Para cada punto $(a_1,a_2) \in A$ se pueden considerar las aplicaciones parciales $x_1 \to f(x_1,a_2)$ y $x_2 \to f(a_1,x_2)$ de subconjuntos abiertos de E_1 y E_2 respectivamente en F. Se dice que en (a_1, a_2) f es diferenciable respecto a la primera (o segunda) variable si la aplicación parcial $x_1 \to f(x_1,a_2)$ (o $x_2 \to f(a_1,x_2)$) es diferenciable en a_1 (en a_2 respectivamente); la derivada de esta aplicación, que es un elemento de $\mathcal{L}(E_1;F)$ (o de $\mathcal{L}(E_2;F)$) se denomina la derivada parcial de f en (a_1, a_2) respecto a la primera (o la segunda)variable, y se indica por $D_1 f(a_1, a_2)$ (o por $D_2 f(a_1, a_2)$ respectivamente).*

DEFINICIÓN 32. *Sean E, F dos espacios de Banach, U y V sendas bolas abiertas en E y F de centro 0 y radios α y β respectivamente. Sea v una aplicación continua de $U\times V$ en F, tal que $\|v(x,y_1)-v(x,y_2)\| \leq k\cdot\|y_1-y_2\|$ para $x\in U$, $y_1\in V$, $y_2\in V$, donde k es una constante tal que $0\leq k\leq 1$. Entonces, si $\|v(x,0)\|<\beta(1-k)$ para cada $x\in U$, existe una aplicación única f de U en V tal que*

$$f(x)=v(x,f(x))$$

para cada $x\in U$; y f es continua en U.

TEOREMA 33. *Sean E, F, G, tres espacios de Banach , f una aplicación diferenciable con continuidad (31) un subconjunto abierto A de $E\times F$ en G. Sea (x_0,y_0) un punto de A tal que $f(x_0,y_0)=0$ y que la derivada parcial $D_2f(x_0,y_0)$ sea un homeomorfismo lineal de F sobre G. Entonces, existe un entorno abierto U_0 de x_0 en E tal que, para cada entorno conexo abierto U de x_0, contenido en U_0 existe una aplicación continua única u de U en F tal que $u(x_0)=y_0$, $(x,u(x))\in A$, y $f(x,u(x))=0$ para cada $x\in U$. Además, u es diferenciable con continuidad en U, y su derivada está dada por*

$$u'(x)=-(D_2f(x,u(x)))^{-1}\circ(D_1f(x,u(x))).$$

Sea T_0 el homeomorfismo lineal $D_2f(x_0,y_0)$ de F sobre G, T_0^{-1} el homeomorfismo lineal inverso; se escribe la relación $f(x,y)=0$ en la forma equivalente

$$y=y-T_0^{-1}\cdot f(x,y)$$

indicando por $g(x,y)$ el segundo miembro de $y=y-T_0^{-1}\cdot f(x,y)$. Se trata de probar que es posible aplicar la proposición: Sean E,F dos espacios de Banach, U y V sendas bolas abiertas en E y F de centro 0 y radios α y β respectivamente. Sea v una aplicación continua de $U\times V$ en F, tal que $\|v(x,y_1)-v(x,y_2)\|\leq k\cdot\|y_1-y_2\|$ para $x\in U$, $y_1\in V$, $y_2\in V$, donde k es una constante talque $0\leq k\leq 1$. Entonces, si $\|v(x,0)\|<\beta(1-k)$ para cada $x\in U$, existe una aplicación única f de U en V tal que $f(x)=v(x,f(x))$ para cada $x\in U$; y f es continua en U.

$$(x',y')\to g(x_0+x',y_0+y')-y_0$$

de $E\times F$ en F, en un entorno de $(0,0)$ suficientemente pequeño. Puesto que $T_0^{-1}\circ T_0=1$ por definición, se puede escribir, para (x,y_1) y (x,y_2) en A,

$$g(x,y_1)-g(x,y_2)=T_0^{-1}\cdot(D_2f(x_0,y_0)\cdot(y_1-y_2)-(f(x,y_1)-f(x,y_2))).$$

Sea $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon \left\| T_0^{-1} \right\| \leq 1/2$; puesto que f es diferenciable con continuidad en A, se deduce de: Sean E, F dos espacios de Banach, f una aplicación diferenciable en F de un entorno abierto A de u segmento S que une dos puntos a, b. Entonces, para cada $x_0 \in A$, se tiene $\|f(b) - f(a) - f'(x_0) \cdot (b-a)\| \leq \|b-a\| \cdot \underset{x \in s}{sup} \|f'(x) - f'(x_0)\|$ y sea f una aplicación continua de un subconjunto abierto A de $E_1 \times E_2$ en F. Para que f sea diferenciable con continuidad en A, es condición necesaria y suficiente que f sea diferenciable en cada punto respecto a la primera y segunda variable, y que las aplicaciones $(x_1, x_2) \rightarrow D_1 f(x_1, x_2)$ y $(x_1, x_2) \rightarrow D_2 f(x_1, x_2)$ (de A en $\vartheta(E_1; F)$ y $\vartheta(E_2; F)$ respectivamente) sean continuas en A. Entonces en cada punto (x_1, x_2) de A, la derivada de f está dada por $Df(x_1, x_2) \cdot (t_1, t_2) = D_1 f(x_1, x_2) \cdot t_1 + D_2 f(x_1, x_2) \cdot t_2$ que existe una bola U_0 y otra V_0 de centros x_0 y y_0, y radios α y β en E y F respectivamente tales que, para $x \in U_0$, $y_1 \in V_0$, $y_2 \in V_0$, se tiene

$$\|f(x, y_1) - f(x, y_2) - D_2 f(x_0, y_0) \cdot (y_1 - y_2)\| \leq \varepsilon \|y_1 - y_2\|$$

por tanto

$$\|g(x, y_1) - g(x, y_2)\| \leq \varepsilon \left\| T_0^{-1} \right\| \cdot \|y_1 - y_2\| \leq \frac{1}{2} \|y_1 - y_2\|$$

para cada $x \in U_0$, $y_1 \in V_0$, $y_2 \in V_0$. Por otra parte, $g(x, y_0) - y_0 = -T_0^{-1} \cdot f(x, y_0)$; puesto que $f(x_0, y_0) = 0$ y f es continua, se puede suponer que ε se ha tomado suficientemente pequeño para que $\|g(x, y_0) - y_0\| \leq \beta/2$ para $x \in U_0$. Se puede entonces aplicar (32), que conduce a la existencia y unicidad de una aplicación u de U_0 en V_0, tal que $f(x, u(x)) = 0$ para cada $x \in U_0$; puesto que $f(x_0, y_0) = 0$, resulta en particular $u(x_0) = y_0$; finalmente u es continua en U_0.

Bibliografía

[1] BARTLE, Robert. The Elements of Real Analysis. Editorial John Wilileg & Sons (1976), New York, London, Sydney, Toronto.

[2] DIEUDONNE,Jean. Anlisis Moderno. Editorial Revert, S.A. (1996), Barcelona, Buenos Aires, Mxico.

[3] KRANTZ, Steven G. The Implicit Function Theorem. Birkhauser (2002). Boston.

[4] KRANTZ, Steven G. The Implicit Function Theorem. Birkhauser (2002). Boston.

[5] RUDIN, Walter. Principios de Anlisis Matemtico. Editorial McGraw-Hill (1966), Mxico.

[6] T.M FLEIT. Differential Analysis. EditorialCambridge University Press (1980), London, New York, Melbourne, Sydney.