UNIVERSIDAD DEL BÍO-BÍO
PEDAGOGÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
FACULTAD DE EDUCACIÓN Y HUMANIDADES.
CAMPUS LA CASTILLA.

DIFICULTADES QUE PRESENTAN LOS ESTUDIANTES DE PRIMER AÑO DE ENSEÑANZA MEDIA EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS QUE INVOLUCREN ECUACIONES DE PRIMER GRADO

AUTOR(ES): BARRÍA BOBADILLA, ALEJANDRA ELIZABETH
CHAVARRÍA LARA, MAGNOLE IVON

PROFESORGUÍA: RODRIGUEZ ALVEAL FRANCISCO

SEMINARIO PARA OPTAR AL TÍTULO DE PROFESOR EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

CHILLÁN, DICIEMBRE 2010

A mi madre por su apoyo incondicional.
A mi padre por su exigencia constante.
A mi familia por su preocupación y ánimos.
A mi mejor amiga Magno, por compartir
tantos momentos y este Seminario.
Alejandra Barría Bobadilla

A mis padres por sus palabras de aliento.
A mi esposo por su amor infinito,
y su apoyo incondicional.
A la tía Eliana, por acogerme y
entregarme los consejos más asertivos.
A Alejandra, mi mejor amiga y mi
compañera de tesis, por su eficiencia.
Magnole Chavarría Lara

Al profesor Francisco Rodríguez por su
sabiduría, ayuda y rigurosidad para
guiarnos en la realización de nuestra tesis.

Índice

Introducción

En Chile, la enseñanza de la matemática ha sido una preocupación constante a nivel ministerial por los bajos puntajes que los alumnos han logrado en las pruebas nacionales (SIMCE) e internacionales (TIMSS), debido al deficiente dominio que tienen de esta disciplina los estudiantes del sistema escolar en particular.

Asimismo, el primer año de enseñanza media para muchos estudiantes es un periodo crítico, ya que se cierra un ciclo con el término de la educación general básica para comenzar uno nuevo. En la asignatura de matemática, el rendimiento escolar se ve afectado por el cambio de pasar de la aritmética a un nivel mayor de abstracción con la introducción del álgebra, lo que es respaldado por (Esquinas, 2008, pág. 3) quien señala que "el álgebra supone para los alumnos una herramienta nueva, tremendamente poderosa, que deben aprender a usar para continuar con su aprendizaje matemático, pero también un lenguaje novedoso y complejo, distinto a todos los conocidos hasta el momento, que deben llegar a dominar. Esta doble función del álgebra, como herramienta y como lenguaje, a menudo crea un conflicto en los alumnos que, si no es oportunamente resuelto, puede degenerar en fracaso escolar en el aprendizaje de las matemáticas."

Si bien el álgebra como rama de la matemática se incorpora al currículo escolar, según los ajustes curriculares, desde quinto básico; es en la unidad Lenguaje Algebraico de primero medio, en contenidos como "Planteo y resolución de problemas que involucren ecuaciones de primer grado con una incógnita" que se enfatiza que el estudiante sea capaz de generalizar situaciones y proponer modelos matemáticos. Pero muchas veces el aprendizaje de este contenido que exige a los estudiantes relacionar su conocimiento aritmético y algebraico es de gran dificultad para ellos, lo que se manifiesta en soluciones erróneas; entonces "El aprendizaje del álgebra al comienzo de la enseñanza media involucra una gama de condiciones que lo transforma en un desafío de interés pedagógico y didáctico" Olfos (2004), por lo que como parte de nuestra formación docente resulta interesante conocer estas dificultades y su causa, así como la praxis pedagógica de los docentes, en lo que se refiere al tratamiento de dichas dificultades, para ayudar a los estudiantes a remediar sus errores y superar aquellas dificultades que no les permiten resolver correctamente los problemas que involucren ecuaciones de primer grado.

El presente seminario constará de cuatro capítulos, estructurados de la siguiente forma:

Capítulo I: corresponde al planteamiento del problema de investigación que abarca la justificación del problema, pregunta y objetivos de la investigación.

En el capítulo II se exponen los fundamentos teóricos que respaldan la investigación, tanto de la aritmética como del álgebra.

El capítulo III contiene el diseño metodológico de la investigación que implica el tipo de investigación, la unidad y sujetos de estudio, los instrumentos para recoger la información, la presentación y análisis de los datos.

Y el capítulo IV contempla las conclusiones derivadas de la investigación.

Finalmente se indican las referencias bibliográficas que respaldan la investigación y se incluyen los anexos, tales como: cronograma de actividades, instrumento evaluativo y encuesta.

1 Planteamiento del problema de Investigación

Las dificultades más frecuentes que presentan los estudiantes de primer año de enseñanza media en la resolución de problemas que involucren ecuaciones de primer grado.

1.1 Justificación del problema

La matemática es una de las asignaturas que presenta mayor grado dificultad en los estudiantes en Chile, lo cual es avalado por los resultados deficientes en distintas pruebas de medición, tanto nacionales como internacionales, que establecen que los estudiantes tienen escaso dominio de los contenidos de la asignatura. Según los resultados de la prueba TIMSS 2003 de matemática, Chile con 387 puntos tiene un rendimiento más bajo que el promedio internacional que son 467 puntos y un rendimiento más bajo que 38 países participantes. Además álgebra y geometría son las subáreas en que Chile aparece más débil en relación con los demás países comparados, según este informe.

Booth (1988, pág. 170), su libro "Iniciación al álgebra", en el capítulo Enseñanza-aprendizaje del álgebra, se comenta que "el álgebra es una fuente de confusión considerable y de actitudes negativas en los alumnos". Por lo que se establece que el álgebra persigue cambiar la mentalidad de los estudiantes con respecto a lo que hasta ahora había sido la matemática, debido al trabajo con letras, variables, entre otros. Es así como se tiende a pensar que se produce un rechazo hacia la asignatura, por parte de los alumnos, debido a la abstracción de ésta.

Esta rama de la matemática se estudia en Primer año de Enseñanza Media, con el nombre de *Lenguaje Algebraico*, donde se plantean contenidos tales como:

1. Sentido, notación y uso de las letras en el lenguaje algebraico.
2. Potencias de base positiva y exponente entero. Multiplicación de potencias.
3. Operatoria algebraica. Generalización de la operatoria aritmética a través del uso de símbolos. Convención de uso de los paréntesis. Reducción de términos semejantes. Sintaxis del lenguaje algebraico.

4. Demostración de propiedades asociadas a los conceptos de múltiplos, factores y divisibilidad.

5. Planteo y resolución de problemas que involucren ecuaciones de primer grado con una incógnita. Análisis de los datos, las soluciones y su pertinencia.

6. Resolución de ecuaciones de primer grado con una incógnita.

Particularmente el contenido de planteo y resolución de problemas que involucren ecuaciones de primer grado con una incógnita produce gran complejidad a los estudiantes, ya que los problemas de aplicación exigen un mayor dominio del álgebra y la aritmética, como también de un mayor razonamiento matemático. Asimismo, Velázquez (2001) dice que "El paso de la Aritmética al Álgebra es uno de los tránsitos más difíciles dentro del desarrollo gradual de los contenidos matemáticos" pues coincide con el paso de las operaciones concretas (7-11/12 años) a operaciones formales (11/12-14-/15 años) según los estadios de desarrollo cognitivo establecidos por Piaget.

Respecto a las dificultades que presentan los estudiantes de primer año de enseñanza media en la resolución de problemas que involucren ecuaciones de primer grado, Socas (2000, pág. 132) señala que en general, no se pueden evitar ya que forman parte del proceso normal de construcción del conocimiento matemático, pero los profesores tienen que conocerlas y reflexionar sobre ellas para facilitar su explicitación por parte de los alumnos. Si se quedan implícitas, es muy difícil incorporar otro saber nuevo.

Por lo anterior se puede establecer que las dificultades son reales, y es normal que sucedan, pero la tarea está en los maestros, ya que son ellos quienes deben asumir la responsabilidad de enseñar matemática, y de esta forma garantizar el aprendizaje de sus estudiantes. Es así como resulta interesante conocer cuáles son las dificultades y/o errores más frecuentes que realizan los estudiantes en el álgebra.

1.2 Pregunta de Investigación

¿Cuáles son las dificultades más frecuentes que presentan los estudiantes de Primero Medio en la resolución de problemas que involucren ecuaciones de primer grado?

1.3 Objetivos de la investigación

1.3.1 Objetivos Generales

1. Evidenciar el tipo de dificultades que presentan los estudiantes de Primero Medio en la resolución de problemas que involucren ecuaciones de primer grado.

2. Conocer la praxis curricular y didáctica utilizada en general por los docentes de Matemática para enseñar a los estudiantes de Primero Medio el contenido resolución de problemas que involucren ecuaciones de primer grado.

1.3.2 Objetivos Específicos

1. Clasificar los errores que presentan los estudiantes de Primero Medio al resolver problemas que involucren ecuaciones de primer grado.

2. Conocer la praxis curricular utilizada por los docentes de Matemática para enseñar a los estudiantes de Primero Medio el contenido resolución de problemas que involucren ecuaciones de primer grado.

3. Conocer la praxis didáctica utilizada por los docentes de Matemática para enseñar a los estudiantes de Primero Medio el contenido resolución de problemas que involucren ecuaciones de primer grado.

2 Marco Teórico

A partir del primer ciclo NB1 los niños aprenden operaciones elementales tales como adición, sustracción, multiplicación y división como también planteamientos de situaciones problemáticas. Es en esta etapa en donde los estudiantes se ven enfrentados por primera vez de manera implícita a ejercicios y problemas donde intervienen ecuaciones de primer grado, como por ejemplo , $100 + [\quad] = 150$ donde la tarea de los alumnos es buscar el "número faltante" de modo que la suma sea 150, lo anterior podría estar relacionado con alguna situación problemática.

Durante los 8 años de Educación Básica en Chile, se puede observar en los Planes y Programas, que el currículum escolar en Educación Matemática se basa fuertemente en el estudio de la aritmética y aunque el álgebra se encuentre implícita durante este periodo, su estudio como rama de la matemática comienza en la actualidad desde el Primer Año Medio, lo cual está dado en el Decreto Ley Nº 220 en el NM1. Concretamente en la Unidad de Lenguaje Algebraico se establece como contenido el *Planteo y resolución de problemas que involucren ecuaciones de primer grado con una incógnita*.

Dentro de este contenido y en base a la experiencia como estudiantes y docentes, se puede establecer que los estudiantes presentan dificultades tanto en la resolución de estos problemas como en el planteamiento de una ecuación de primer grado que lo represente.

Según Kieran, (1989, pág. 229-230) "Los adolescentes, al comenzar el estudio del álgebra, traen consigo las nociones y los enfoques que usaban en aritmética. Sin embargo, el álgebra no es simplemente una generalización de la aritmética. Aprender álgebra no es meramente hacer explícito lo que estaba implícito en la aritmética. El álgebra requiere un cambio en el pensamiento del estudiante de las situaciones numéricas concretas a proposiciones más generales sobre números y operaciones. La transición desde lo que puede considerarse como un modo informal de representación y de resolver problemas, a uno formal resulta ser difícil para muchos de los que comienzan a estudiar álgebra.”

Por lo anteriormente mencionado es que se pretende abordar esta investigación desde el estudio de la aritmética hasta las dificultades que se presentan en Álgebra en Primer año de Enseñanza Media.

2.1 Las operaciones simples de la matemática

Según Martínez y Varela (2006) en el artículo La introducción al álgebra para los estudiantes de primero medio que forma parte del proyecto “Web en apoyo al estudio de las matemáticas” de la Universidad de Antofagasta plantean que: Para los estudiantes de primero medio la operación matemática 7 + 2, que es la suma, les resulta fácil de entender, y aún más fácil es su ejecución. De esta forma asocian la idea natural que teniendo **siete** objetos le agregamos **dos** objetos, para obtener un total de **nueve** objetos. Lo mismo sucede con la resta de dos números naturales.

Esta situación la podemos abordar con naturalidad y basándonos en la experiencia debido a que en la época de estudiantes de Primero Medio resultaba fácil realizar operaciones con números naturales.

El artículo también señala que las operaciones anteriores por lo general tienen una interpretación en la vida cotidiana, es decir, a la operación 6+2 le podemos asociar una situación como por ejemplo: si tengo 6 caramelos y me regalan dos, lo que tengo en total son 8 caramelos.

Además se menciona que lo que puede resultar complicado, tanto del punto de vista del cálculo matemático, como la interpretación en la cotidianidad es la siguiente operación matemática: 5 - 9. Cinco menos nueve. Ya no es tan evidente que el resultado de esta operación sea - 4 (y se lee menos cuatro). A continuación se muestran dos ejemplos extraídos del documento de esta sección, en los cuales se desarrollan actividades del diario vivir.

Ejemplo1: Suponga usted que tiene 5 billetes de mil pesos, y usted debe al almacén de la esquina 9 billetes de mil pesos (por lo menos es lo que me ocurre con mi casera). Si decidimos pagarle, entonces le quedará debiendo 4 billetes de mil pesos, es decir le quedará en su cuenta personal una deuda (con el almacén) de 4 mil pesos. Y eso se pone en términos matemáticos como 5 - 9 = - 4. Digamos que, para este ejemplo, la cantidad negativa representa una deuda, o algo que falta y que hay que considerarla a futuro para llevar bien las cuentas. ¿Qué otra interpretación puede tener la expresión matemática 5 - 9?

Ejemplo 2: Supongamos que tenemos 9 trabajadores que necesitan, obviamente, nueve puestos de trabajos, y sin embargo la municipalidad solamente ofrece 5 puestos de trabajo. Es decir faltan 9 puestos de trabajo (- 9) y la municipalidad ofrece 5 puestos de trabajo (+5), por lo tanto el problema se reduce a que ahora faltan 4 puestos de trabajo, es decir "-4".

En resumen se puede concluir que la matemática en enseñanza básica resulta ser simple, pues solo se trata de operar con números tanto negativos como positivos, es decir, se reduce al estudio de la aritmética.

2.2 Un nuevo lenguaje

Cuando los estudiantes cursan Primer año medio se enfrentan a una rama de la matemática, el Álgebra, que se caracteriza por ser una herramienta y un lenguaje simbólico-formal que permite modelar situaciones a través de generalidades literales.

También en el documento de Martínez y Varela se expone que el álgebra, consiste en asociar a los números las unidades que representa y que por ejemplo, si son los billetes de mil pesos que podamos tener o no tener, que podamos sumar o restar entre cantidades de billetes de mil pesos, podemos abreviar la expresión "tengo siete billetes de mil pesos" por 7m, donde la letra m representa a "un billete de mil pesos". De manera que la expresión algebraica 7m +5m significa, tener 12m. De igual manera, es posible que la letra m represente la expresión "un CD de rock", de manera que 7m +5m está representando que tengo 12m (doce CD de música rock). Asimismo se expresa que este nuevo lenguaje nos permite operar matemáticamente con distintas unidades y por ejemplo, qué interpretación le podríamos dar a la expresión 7a + 5b + 2a - 3b. En primer lugar, que tenemos "unidades distintas" de cosas, que hay objetos de la clase "a", y objetos de la clase "b", donde por ejemplo "a" represente "un disco de CD de música rock" y "b" represente "un billete de mil pesos", de manera que la expresión 7a + 5b + 2a - 3b puede significar que, en total tengo 9a (nueve discos CD de música rock) y 2b (dos billetes de mil pesos). Observe que cada una de las operaciones efectuadas, la suma de los términos en "a", y la suma de los términos en "b", tienen su respectiva interpretación. Sumar o restar los términos que tienen la misma letra (la misma unidad diremos nosotros) es lo que los profesores de matemáticas llamamos "reducir los términos semejantes". Entonces a veces, uno olvida lo que cada letra representa, y nos ponemos a operar con los términos que son semejantes.

De lo antes mencionado podemos decir que, si bien el primer paso al álgebra es utilizar las letras para generalizar situaciones, los estudiantes en una primera instancia no comprenden la finalidad de la utilización de estas, convirtiendo la reducción de términos semejantes en un trabajo mecánico.

2.3 El estudio del lenguaje algebraico en estudiantes de Primero Medio

Según el programa de estudio de Primer año medio, en este nivel se estudia la unidad “Lenguaje Algebraico” en donde se tratan tres temas:

1. Operatoria algebraica. Generalización de la operatoria aritmética a través del uso de símbolos. Convención de uso de los paréntesis. Reducción de términos semejantes. Sintaxis del lenguaje algebraico.

2. Demostración de propiedades asociadas a los conceptos de múltiplos, factores y divisibilidad.

3. Planteo y resolución de problemas que involucren ecuaciones de primer grado con una incógnita.

Es al contenido “Planteo y resolución de problemas que involucren ecuaciones de primer grado con una incógnita” al que se quiere abocar, para dejar en evidencia las dificultades que presentan los estudiantes de primero medio en este contenido.

2.4 Dificultades en la resolución de problemas con ecuaciones de primer grado

Cuando hablamos de dificultad en matemática, nos referimos al hecho de no poder realizar algún tipo de ejercicio o problema matemático, ya sea por no contar con las herramientas necesarias para hacerlo o por no tener claro la materia que involucra este contenido.

Esquinas (2008, pág. 148) en lo que se refiere a las dificultades en la resolución de problemas con ecuaciones de primer grado señala que "los primeros problemas contextualizados que suelen plantearse para su resolución con ecuaciones son tan sencillos que son fácilmente resolubles a través de la aritmética, por lo que el alumno no comprende la necesidad de este nuevo método. El álgebra no aparece, de esta manera, como una herramienta útil sino como un método impuesto por el profesor que sólo puede cobrar sentido a largo plazo, con la desmotivación que ello supone para el alumno. La introducción de ecuaciones con letras en ambos miembros de la igualdad plantea un problema desde esta perspectiva de iniciación al álgebra ya que requiere la interiorización de un procedimiento sin un sentido operativo real para el alumno".

Se puede establecer con lo anterior que como el alumno se encuentra demasiado familiarizado con la aritmética, le resulta incomprensible la utilidad del álgebra hasta ahora, por lo que la asume sólo como un método que utiliza el profesor para complejizar los contenidos de matemática.

De esta forma resulta interesante estudiar las dificultades que presentan los estudiantes de primer año medio para resolver problemas que involucren ecuaciones de primer grado.

2.4.1 El paso de la aritmética al álgebra

El aprendizaje del álgebra complica a los estudiantes porque siguen usando los métodos que les servían en aritmética en la resolución de problemas que requieren del álgebra. Por esto como expone Olfos (2004, pág. 3); si bien la mayor parte de las expresiones y manipulaciones algebraicas pueden ser explicadas a partir de las expresiones y manipulaciones aritméticas, es necesario reconocer una variedad de discontinuidades entre la aritmética y el álgebra que da origen a una gama de dificultades en el aprendizaje de los alumnos. Estas dificultades se entienden en el marco de la teoría de los obstáculos didácticos. Un obstáculo se define, no como una ausencia de conocimiento, sino como un conocimiento previo que no admite generalización a un nuevo ámbito de generalización y por ende induce a error. En este sentido en el mismo documento plantea los siguientes obstáculos didácticos:

(a) La notación algebraica referida al producto: El producto se indica con una cruz o con un punto en aritmética. En álgebra muchas veces el signo se omite, lo cual entra en conflicto con la notación de los números mixtos que corresponden a una omisión del signo de adición.

(b) La notación de las potencias de polinomios: Las potencias entre polinomios se indican con un exponente al lado superior derecho, actuando el exponente en toda la expresión. En este caso, el exponente no distribuye con los elementos que están dentro del paréntesis, lo cual entra en contradicción con la forma que hasta el momento usaba el alumno para eliminar paréntesis de una expresión aritmética y también algebraica.

(c) El uso de letras como variables: Los alumnos hasta el momento han usado las letras para representar unidades de medida (m para metros) o constantes (PI), o como abreviación (2L +3L podría ser la suma de lápices). Al usar la letra como variable tiene sentido el producto $2x \cdot 3y = 6xy$, lo cual no funciona de igual manera para la suma: $2x + 3y$.

(d) Fallas en la utilización de signos de agrupación (paréntesis, llaves, corchetes): Los estudiantes no consideran que los paréntesis sean necesarios para denotar el orden en que se efectúan las operaciones.

Para superar estos obstáculos es necesario que los docentes sean conscientes de ellos y formulen estrategias que permitan una mejor comprensión del álgebra para facilitar el aprendizaje de los estudiantes y para garantizar el aprendizaje de estos.

2.4.2 La traducción del lenguaje natural al lenguaje algebraico

Otra de las dificultades para los estudiantes en matemática, recae en la formulación del planteamiento matemático para resolver una situación problemática, sobre todo cuando involucra un enunciado literal escrito en lenguaje natural o cotidiano, porque no identifican las operaciones y relaciones que deben establecer para encontrar la solución. Tal como propusieron (expusieron) Camarena, P y Olazábal, M en el **Congreso de La asociación nacional de profesores de matemáticas (ANPM)** realizado en México el año (2004, pág. 3) bajo el tema **Categorías en la traducción del lenguaje natural al lenguaje algebraico de la matemática en contexto**, ellas plantean que: "A través de la instrumentación de la fase didáctica se ha detectado la problemática que tienen los estudiantes para obtener el modelo matemático del problema. Hay varias causales por las que el alumno no puede o le cuesta trabajo llegar a esta etapa de la metodología de contextualización. Una de éstas es el obstáculo que se refiere a hacer la traducción del lenguaje natural al lenguaje algebraico". Por lo mismo manifiestan que: "Es claro que si el alumno no puede llevar a cabo la traducción del lenguaje natural al lenguaje algebraico, menos podrá llegar al modelo matemático que representa al problema, es decir, la traducción es una de las habilidades básicas en el proceso de contextualizar".

2.4.3 El Lenguaje Algebraico

La matemática tuvo la necesidad de crear su propio lenguaje, que incluye el uso de nuevas palabras y reglas, para representar aquello que en el lenguaje habitual no es posible decir. De esta manera surge el "Lenguaje Algebraico".

Socas (2004, pág. 97) plantea que "el mayor cambio conceptual en el aprendizaje del álgebra se centra alrededor de su diferencia con la aritmética: significado de los símbolos e interpretaciones de las letras". Esto genera una dificultad para asimilar el concepto de variable tanto en su uso como en su significado.

Küchemann (1981, pág. 28-31) también citado en el libro mencionado anteriormente, describe seis categorías diferentes de interpretación y uso de las letras, las que producen dificultades a los estudiantes:

1) Letras evaluadas: A las letras se les asigna un valor numérico desde el principio.

   Contexto: Puede tratarse de cualquier operación matemática, ya sea suma, resta, multiplicación etc., por ejemplo a + 5 = 8, en donde la letra a tiene un valor específico.

2) Letras ignoradas: Los alumnos ignoran las letras o a lo más reconocen su existencia, pero no le asignan ningún significado.

   Contexto: Si a + b = 43, ¿cuánto es a + b+ 2?

3) Letras como objeto: Las letras son vistas como un objeto concreto, eliminando así el significado abstracto de las letras por algo mas concreto y real.

   Contexto: Simplificar 2•x + 3•y + 4•x - y

4) Letras como incógnitas específicas: los alumnos consideran las letras como un número desconocido, pero específico y pueden operar sobre él directamente.

   Contexto: ¿cuál es el resultado de añadir 4 a 3n? Esta cuestión parece una especie de puzzle para muchos alumnos. La respuesta parece muy simple, pero no es contestada por todos los alumnos.

5) Letras generalizando números: Los alumnos ven las letras como una representación, o al menos son capaces de deducirlo, de varios valores numéricos antes que de uno exactamente.

   Contexto: ¿qué valores toma c si c +d = 10 y c es inferior a 10?

6) Letras como variables: Las letras son consideradas como una representación de un conjunto de valores especificados, y se observa una relación sistemática entre dos conjuntos de valores.

El concepto de variable implica claramente el conocimiento de la incógnita y de sus posibles valores. Este concepto es difícil de encontrar con toda exactitud debido a que la mayoría de los ítems que puede dar idea de variable, a menudo son resueltos en un nivel de interpretación más bajo. Incluso dentro de la resolución de un mismo problema, el alumno cambia de interpretación, lo que genera gran dificultad no solamente al observador, sino también al mismo niño.

De lo anterior podemos rescatar que si el estudiante no comprende las múltiples funciones de las letras, probablemente cometerá errores que no le permitirán avanzar en su aprendizaje del álgebra.

2.4.4 Ecuaciones de primer grado

Ecuaciones de primer grado es un contenido que actualmente se estudia en Primer año medio, definiéndose como una igualdad que contiene un valor desconocido llamado incógnita, sin embargo con los nuevos ajustes curriculares se deberá enseñar desde séptimo año básico.

Generalmente los profesores tratan este contenido resolviendo una gran cantidad de ecuaciones de primer grado con sus estudiantes, ya sea mediante guías, tareas, ejercicios en el pizarrón, etc., generando en sus estudiantes un proceso de mecanización, situación que muchas veces los afecta directamente debido a que no comprenden que hay detrás de un despeje de una variable, o el por qué de el resultado. De esta forma y así como establece Mendoza (2006, pág. 1) en su artículo *Resolviendo las Ecuaciones Lineales con el uso de Modelos*, "El estudio de las ecuaciones de primer grado en la escuela elemental se basa en el aprendizaje mecánico de reglas para manejar los símbolos, carentes de significado y sin referentes concretas. La falta de modelos que aporten significado a los símbolos algebraicos, es uno de los impedimentos más serios que obstaculiza el proceso de enseñanza aprendizaje en la resolución de ecuaciones".

Resolver ecuaciones de primer grado muchas veces dificulta a los estudiantes, llevándolos a cometer errores que quizá también los cometían en aritmética y que nunca fueron superados o corregidos, por lo tanto se puede decir que si no se ha aprendido a resolver ecuaciones, o a despejar la variable, difícilmente se aprenderá a resolver problemas que involucren ecuaciones de primer grado.

Por lo anterior y tal como lo plantea Salazar (2006, pág. 1) uno de los problemas de las matemáticas es el aprendizaje de las ecuaciones de primer grado y la aplicación de éstas a problemas, ya que muchos de ellos están fuera de su entorno de conocimientos".

2.4.5 Los errores en la resolución de ecuaciones

Para ahondar en el estudio de los errores en la resolución de ecuaciones de primer grado, primero analicemos una definición de error.

El error debe ser considerado como la presencia en el alumno de un esquema cognitivo inadecuado y no sólo la consecuencia de una falta específica de conocimiento o una distracción Socas, (1997, pág. 125).

Es decir, en la resolución de problemas matemáticos, hablamos de error cuando el estudiante a pesar de tener el conocimiento matemático da una solución incorrecta, pues se apoya en sus intuiciones y concepciones.

Los errores que cometen los estudiantes en ecuaciones de primer grado como la siguiente $2x + 9 = 4x + 6$ han sido analizados por Francisco Rivero Mendoza, (2006, pág. 1) el cual afirma que los estudiantes presentan dificultades en el momento de trabajar con los símbolos para obtener la solución.

Por lo tanto encontrar errores en la resolución de ecuaciones es una realidad que aun afecta a estudiantes que se inician en el estudio de ellas. De esta manera, Rivero analiza los errores que provienen del desconocimiento de las propiedades de grupo de los números enteros. Estos pueden ser por ejemplo:

a. Eliminar (de la ecuación $2x + 9 = 4x + 6$) el 9 del lado izquierdo y colocar un nueve del lado derecho.

b. Otro tipo de error, aún más grave, ocurre cuando el estudiante no posee los elementos claves para establecer una diferencia clara entre la adición y la multiplicación, cuando, por ejemplo se elimina el 2 del lado izquierdo y se coloca un 2 del lado derecho.

González (2009, pág. 22) en cambio, analiza los tres errores más frecuentes en la resolución de ecuaciones:

a) Dificultad en el cambio del concepto del signo igual: Los alumnos manejan el signo igual como un mandato operacional. Ahora, cuando se encuentran con los dos miembros de una ecuación, ninguno de los cuales resulta de operar aritméticamente en otro, se les hace difícil aceptar el nuevo significado como un equilibrio que solo se mantiene para determinado valor de la letra.

b) Dificultad con los números racionales. Las fracciones y números racionales son fuente continua de errores a lo largo de los años.

c) Dificultad con el signo menos. Operativamente, el signo menos plantea, dificultades añadidas que se ponen de manifiesto en situaciones prealgebraicas, estas dificultades continúan con el paso de los años.

Olfos (2004, pág. 5), señala que para resolver ecuaciones, previamente el alumno debe aprender a trabajar con términos algebraicos, debe ser capaz de sumar términos semejantes, valorar expresiones, factorizar y multiplicar expresiones algebraicas. El alumno debe aprender a reconocer que una expresión algebraica puede tomar distintos significados y que de manera simultánea puede atender a distintos referentes, sean éstos geométricos o aritméticos.

2.5 Propuestas para la enseñanza del Algebra y la Resolución de Problemas que involucren ecuaciones de primer grado

El estudio del álgebra, en cualquier rincón del mundo, ha constituido un gran obstáculo para los estudiantes. Y por lo mismo Chile no queda ajeno a esto, puesto que los estudiantes al llegar a primero medio también se encuentran arraigados a la aritmética. Por ejemplo al plantearle a los estudiantes problemas como el siguiente: “Rosario le pregunta la edad a Carlos y este le plantea el siguiente acertijo, observa: El doble de mis años, más el triple de mis años menos 50, suman el cuádruple de años que tengo menos 34, estos comienzan a probar valores que satisfaga el problema anterior, dejando en evidencia el arraigo que existe con la aritmética”.

Para que los alumnos modifiquen la forma errónea de resolver ecuaciones o comprender los problemas que las involucren, resulta interesante analizar la propuesta de Polya (1965) establecida en su libro “Cómo plantear y resolver problemas” para proponerla como estrategia de resolución de los problemas que involucren ecuaciones de primer grado.

<u>I Propuesta</u>

Según Polya al resolver un problema se deben seguir cuatro grandes etapas:

1. Comprender el problema
2. Concebir un plan
3. Ejecución del plan
4. Visión retrospectiva

A continuación presentamos un breve resumen de cada uno de ellos, extraído del libro "Cómo Plantear y Resolver Problemas" de este autor.

Paso 1: Entender el Problema.

a) ¿Entiendes todo lo que dice?
b) ¿Puedes replantear el problema en tus propias palabras?

c) ¿Distingues cuáles son los datos?
d) ¿Sabes a qué quieres llegar?
e) ¿Hay suficiente información?
f) ¿Hay información extraña?
g) ¿Es este problema similar a algún otro que hayas resuelto antes?

Paso 2: Configurar un Plan.

a) Ensayo y Error (Conjeturar y probar la conjetura).
b) Usar una variable.
c) Buscar un Patrón.
d) Hacer una lista.
e) Resolver un problema similar más simple.
f) Hacer una figura.
g) Hacer un diagrama
h) Usar razonamiento directo.
i) Usar razonamiento indirecto
j) Usar las propiedades de los Números.
k) Resolver un problema equivalente.
l) Trabajar hacia atrás.
m) Usar casos
n) Resolver una ecuación
o) Buscar una fórmula.
p) Usar un modelo.
q) Usar análisis dimensional.
r) Identificar sub-metas.
s) Usar coordenadas.
t) Usar simetría

Paso 3: Ejecutar el Plan.

a) Implementar la o las estrategias que escogiste hasta solucionar completamente el problema o hasta que la misma acción te sugiera tomar nuevo curso.

b) Concédete un tiempo razonable para resolver el problema. Si no tienes éxito solicita una sugerencia o haz el problema a un lado por un momento (¡puede que "se te prenda el foco" cuando menos lo esperes!)

c) No tengas miedo de volver a empezar. Suele suceder que un comienzo fresco o una estrategia conducen al éxito.

Paso 4: Mirar hacia atrás.

a) ¿Es tu solución correcta? ¿Tu respuesta satisface lo establecido en el problema?

b) ¿Adviertes una solución más sencilla?

c) ¿Puedes ver como extender tu solución a un caso general?

II Propuesta

Resolución algebraica de problemas verbales Godino (2003, pág. 791-792)

Una técnica potente para modelizar y resolver algebraicamente los problemas verbales es el uso de letras para expresar cantidades desconocidas variables que pueden tomar un conjunto de valores posibles dentro de ciertos intervalos (funciones proposicionales con un determinado conjunto de validez). Uno de los objetivos más importantes de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, especialmente desde el comienzo de la enseñanza secundaria, es dominar dicha técnica.

Aunque la modelización algebraica no es algorítmica (no existe una máquina que resuelva automáticamente los problemas verbales), sin embargo, se pueden dar los siguientes consejos o heurísticas que pueden ayudar en dicho proceso:

1. Determinar lo que se pide hallar en el enunciado e introducir una variable para representar la cantidad desconocida. Algunas palabras claves como, qué, cuántos, y encontrar, señalan la cantidad desconocida.

2. Buscar relaciones matemáticas entre las cantidades conocidas y desconocidas.

3. Algunas palabras proporcionan claves lingüísticas de posibles igualdades y operaciones.

4. Escribir las relaciones mediante expresiones algebraicas.

5. Tratar de escribir alguna cantidad de dos maneras distintas, lo que producirá una ecuación.

6. Resolver la ecuación o inecuación usando las técnicas formales disponibles.

7. Traducir la solución matemática encontrada al lenguaje original del problema.

8. Evaluar la solución ¿Has encontrado lo que se pedía? ¿Tiene sentido la respuesta? Por ejemplo, si el problema era encontrar el área de un rectángulo, la respuesta -4 sería absurdo.

III. Tercera propuesta

Una de las propuestas interesantes de conocer, resulta ser "Algunas técnicas para enseñar a resolver problemas verbales con ecuaciones" realizada por Escareño (1997, pág. 45-49).

En ella señala que *generalmente, cuando se intenta enseñar a resolver problemas verbales mediante ecuaciones de primer grado, se parte de problemas ya formulados cuya solución se desconoce. Lo que aquí proponemos es una secuencia didáctica que invierte este proceso: que el alumno aprenda a simbolizar a partir de una situación numérica conocida.*

Es decir, primero se da a conocer alguna situación o problema con los valores ya conocidos, para luego generalizar y reconocer las variables de este problema.

Esta propuesta puede resultar útil para los docentes de matemática, específicamente cuando se comienza a enseñar álgebra, debido a que persigue encantar a los alumnos con esta rama, con la finalidad de conseguir resultados favorables en el aprendizaje de los estudiantes.

Es por ello que señala que: “Como maestros, debemos proponernos que nuestros alumnos logren concebir el álgebra como una valiosa herramienta que sirve para resolver problemas. Para alcanzar este propósito en la clase, pondremos a prueba una y otra vez el álgebra hasta que los alumnos empiecen a manifestar confianza en ella. Normalmente son suficientes dos situaciones como las que presentaremos en la siguiente secuencia didáctica”.

<u>Primera situación</u>

1. Tenemos tres números cuya suma es 65. Estos números son:

9 29 27 65

2. Supondremos que ignoramos de qué número se trata, pero que sí conocemos las relaciones que existen entre ellos: el tercero es el triple del primero; el segundo es 2 unidades mayor que el tercero, y la suma de los tres es 65, ¿Podríamos hallar estos números usando el álgebra?

Veamos: si asignamos la x al primero, el tercero será 3x y el segundo será 2 unidades mayor que 3x, es decir, 3x + 2:

9	29	27	65
x	3x + 2	3x	65

El hecho de que la suma sea 65, nos permite establecer la siguiente ecuación:

$$x + 3x + 2 + 3x = 65$$

En la propuesta se manifiesta que: lo que pretendemos es lograr que nuestros alumnos lleguen a concebir el álgebra como una herramienta que les permita resolver problemas, para que ésta empiece a "inspirarles confianza", la solución de esta ecuación debe ser 9:

$$x + 3x + 2 + 3x = 65$$

$$7x+2 = 65$$

$$7x = 63$$

$$x = 9$$

Interpretemos esta solución: el primer número es 9; el tercero, que es el triple de éste, es 27, y el segundo es 2 unidades mayor que 27, o sea 29. Con esto, el álgebra nos ha conducido a los resultados que ya conocíamos.

La sometemos a prueba nuevamente. Si ahora asignamos la x al tercer número, el primero será $\frac{x}{3}$, y el segundo, x + 2:

9	29	27	65
x	3x + 2	3x	65
$\frac{x}{3}$	x + 2	x	65

Como la suma sigue siendo 65, podemos establecer una nueva ecuación:

$\frac{x}{3} + x + 2 + x = 65$ cuya solución debe ser 27. Comprobémoslo:

$$x + 3x + 6 + 3x = 195$$

$$7x + 6 = 195$$

$$7x = 189$$

$$x = 27$$

Si interpretamos esta solución veremos que, nuevamente, el primer número será 9, el segundo, 29, y el tercero, 27.

Pero sometámosla a prueba otra vez: asignemos la x al segundo número; el tercero será x - 2, y el primero, $\frac{(x-2)}{3}$:

9	29	27	65

x	3x + 2	3x	65
$\frac{x}{3}$	x + 2	x	65
$\frac{(x-2)}{3}$	x	x – 2	65

Como la suma sigue siendo 65, la ecuación ahora es:

$\frac{(x-2)}{3}$+ x + x- 2 = 65 cuya solución, como se esperaba, es 29. Al interpretar la solución, vemos que éste es el segundo número; por tanto, el tercero será 27, y el primero, 9.

La propuesta señala que, en este momento podemos preguntar a nuestros alumnos: "¿Confían ya en el álgebra? "¿No ha sido suficiente con las pruebas que ha pasado? "(¿Quieren más pruebas de fidelidad?". Pues continuemos con ellas. Hasta ahora hemos considerado únicamente relaciones multiplicativas entre los datos del problema; consideremos ahora sólo relaciones aditivas: si el primer número es x, el segundo será x + 20, y el tercero, x + 18:

9	29	27	65
x	x + 20	x + 18	65

Ahora la ecuación es:

x+x+20+x+18=65 cuya solución debe ser 9. La interpretación de esta solución nos conduce fácilmente a los resultados previstos.

Una prueba más: ahora asignamos la x al segundo número. Entonces, el primero será x - 20, y el tercero, x - 2:

9	29	27	65
x	x+20	x+ 18	65
x - 20	x	x – 2	65

La ecuación será:

$x - 20 + x + x - 2 = 65$ cuya solución es 29.

Una última prueba: si asignamos la x al tercer número, debemos asignar $x + 2$ al segundo y $x - 18$ al primero. Ahora la ecuación sería:

$x - 18 + x + 2 + x = 65$ cuya solución es 27.

3. A continuación, el documento indica algunas ventajas que nos brinda esta técnica:

• *Las letras representan números.* Esto permite evitar los errores que se señalaron al principio de este trabajo.

• *La ecuación es una herramienta para resolver el problema y no la solución del problema.* Muchos alumnos creen que con plantear y resolver la ecuación, han resuelto el problema. Cada una de las pruebas a que sometimos el álgebra nos permitió interpretar la solución de la ecuación como el valor de uno de los números involucrados y encontrar los otros dos números.

• *La técnica, por su carácter dinámico, ofrece muchas oportunidades para la simbolización.* Hemos simbolizado la situación de seis formas distintas**,** pero hay muchas más.

• *Al asignar la incógnita a números distintos, el alumno tiene la posibilidad de entender de qué modo se simbolizan las relaciones que se invierten.* En la situación que hemos considerado, por ejemplo, si el segundo número es 2 unidades mayor que el tercero, entonces, el tercero será dos unidades menor que el segundo.

• *Promueve el desarrollo de una habilidad muy importante: la flexibilidad del pensamiento. Si* cada vez que planteamos un problema dijéramos al alumno la forma de resolverlo, estaríamos promoviendo la rigidez del pensamiento; con la técnica que estamos utilizando, se trata de discutir en clase diversas formas de resolverlo, con lo que estamos promoviendo la flexibilidad del pensamiento.

4. Ahora, la propuesta considera problemas que aludan a contextos específicos. Con esto no se agregaría ninguna dificultad. La misma situación que estamos examinando nos puede servir para ese propósito: los números y sus relaciones pueden referirse a contextos de edades, dinero, objetos, etc. Por ejemplo:

Un padre de familia compró 65 canicas. El número de canicas que dio al hijo menor es un tercio de lo que le dio al mediano. El mayor recibió dos canicas más que el mediano. ¿Cuántas canicas recibió cada uno de los hijos?

Segunda situación

1. La situación problemática que examinamos anteriormente condujo a ecuaciones que contienen la incógnita sólo en el primer miembro. Si quisiéramos extender la técnica a ecuaciones que contienen la incógnita en ambos miembros, podríamos partir de una situación numérica como la siguiente:

$$8 \quad 6 \quad 9 \quad 1 \quad 24$$

$$\frac{24}{3} \quad \frac{24}{4} \quad 9 \quad 1 \quad 24$$

Luis tiene una bolsa de canicas. Un tercio de ellas son azules y un cuarto son rojas. Si además tiene 9 canicas verdes y una blanca, ¿cuántas canicas tiene en total?

Si asignamos la x al total, el número de canicas de cada color se representaría de la siguiente manera:

$$8 \quad 6 \quad 9 \quad 1 \quad 24$$

$$\frac{x}{3} \quad \frac{x}{4} \quad 9 \quad 1 \quad x$$

Y la ecuación sería:

$$\frac{x}{3} + \frac{x}{4} + 9 + 1 = x$$

2. El uso de esta técnica permite que el profesor proponga tareas que ofrezcan mayores posibilidades de que el alumno se acerque más al álgebra. Algunas de ellas son las siguientes:

Dados los siguientes tres números:

8 11 16 35

O plantear varias situaciones que representen esta situación.

Por ejemplo: $(x) + (x + 3) + (2x) = 35$

O bien: $\left(\frac{x}{2}\right) + (x - 5) + (x) = 35$

O redactar un problema para cada una de las ecuaciones del punto anterior.

Por ejemplo: "Alicia tiene tres hijos. El mayor tiene el doble de la edad del menor y el mediano es 3 años mayor que el menor. Si la suma de sus edades es 35, ¿qué edad tiene cada uno?"

O plantear varias ecuaciones, referidas a esta misma situación, que tengan la misma solución.

Por ejemplo: $(x) + (2x - 5) + (2x) = 35$

y, $(x) + (x + 3) + (x + 8) = 35$

• Redactar los problemas respectivos.

• Redactar un problema con contexto (aquí lo que cuenta es el humor y la creatividad).

Situaciones sobre edades

Utilizaremos ahora un esquema similar para plantear problemas sobre edades.

Un ejemplo: "Las edades de dos niños suman 16 años, y dentro de un año la edad de uno será el doble de la edad del otro. ¿Cuáles son las edades?"

	Antes	**Hoy**	**Después**
Niño mayor		x	x + 1
Niño menor		16 - x	16-x+ 1

Ecuación: $x + 1 = 2 (16 - x + 1)$

Otro ejemplo: "Un padre tiene 41 años, y su hijo 14. ¿Cuántos años hace que el padre tenía cuatro veces la edad de su hijo?

	Antes	**Hoy**	**Después**
Padre	41 - x	41	
Hijo	14 - x	14	

Ecuación: $41 - x = 4 (14 - x)$

Un último ejemplo: "Juan le dijo a Pedro: "Cuando transcurra la mitad de los años que yo tengo, tú tendrás el doble de mi edad actual. 'Sí -contestó Pedro-, pero hace 15 años mi edad era cuatro veces mayor que la tuya'. Calcula la edad actual de Juan".

	Antes	**Hoy**	**Después**
Juan	x - 15	x	$x + \frac{x}{2}$
Pedro	$2x - \frac{x}{2} - 15$	$2x - \frac{x}{2}$	2x

Ecuación: $4(x - 15) = 2x - \frac{x}{2} -15$

Las tres propuestas expuestas anteriormente, pretenden ser una ayuda para los docentes de matemática que traten el contenido “Resolver problemas que involucren ecuaciones de primer grado”. La primera nos entrega una estructura más bien general de resolver problemas, lo que facilitaría el orden de los pasos a seguir para resolver correctamente un problema que involucre ecuaciones de primer grado, su característica es que esta secuencia plantea ir revisando el proceso a través de preguntas en cada uno de los pasos a seguir. La segunda propuesta es más específica pues apunta a los problemas verbales, podríamos decir que es un caso particular de la propuesta de Polya (1965), ya que también plantea una estructura para resolver problemas pero de tipo algebraico. La tercera propuesta es aún más específica, y plantea invertir el proceso tradicional de la enseñanza de este contenido, pues la secuencia didáctica permite que el estudiante aprenda a simbolizar a partir de una situación numérica conocida, lo que promueve la comprensión de que mediante el lenguaje algebraico es posible plantear y resolver de distintas formas un problema, ya que las relaciones se simbolizarán a partir de cómo se defina la incógnita. Además la propuesta es posible extenderla a problemas que involucren situaciones de la vida cotidiana, que le da sentido y hace aún más necesario el aprendizaje del álgebra.

Las tres propuestas hacen énfasis en la importancia de dar respuesta a los problemas, ya que no basta solo con plantear la ecuación y resolverla, se debe evaluar la solución, su pertinencia y responder de acuerdo a la situación del problema.

2.6 El rol del profesor

El rol del profesor va más allá de pasar la materia, debe tener un profundo conocimiento tanto de la disciplina que enseña como de los conocimientos netamente vinculados al ámbito docente, esto es, conocer el currículo (Objetivos Fundamentales Verticales, Objetivos Fundamentales Transversales, Contenidos Mínimos Obligatorias, entre otros) para planificar su clase. Asimismo el docente debe conocer las características de sus estudiantes para poder contextualizar el aprendizaje y así en la práctica darle sentido.

Tal como plantea Olfos (2004, pág. 4), “El profesor no se puede quedar con lo que “él aprendió” ya que los tiempos han cambiado y los alumnos de hoy requieren de una educación que los prepare para vivir en nuevos tiempos. La modelación ha tomado un rol más importante que la manipulación, ya que hoy se dispone de herramientas tecnológicas, como la calculadora y los procesadores simbólicos para computadores que hacen que las destrezas requeridas en las décadas pasadas hoy sean innecesarios. Ya no se requiere el manejo de tablas, ya no se requiere la precisión y rapidez en los cálculos que se requería una veintena de años atrás”. Sino que se requiere ser capaz de establecer los modelos que serán utilizados por las herramientas tecnológicas para resolver problemas.

3 Diseño Metodológico

3.1 Tipo de investigación

La investigación se adscribe a un paradigma mixto cuantitativo-cualitativo de carácter descriptivo pues se pretende evidenciar las dificultades que presentan los estudiantes de primero medio para resolver problemas que involucren ecuaciones de primer grado, y además mostrar la praxis pedagógica de los docentes para enseñar este contenido del currículo.

3.2 Unidad y sujetos de estudio

La unidad de estudio corresponde a estudiantes de establecimientos educacionales particulares subvencionados de la ciudad de Chillán. Los sujetos de estudio corresponden a 95 estudiantes de primer año de enseñanza media y a docentes de primer año medio de matemática de establecimientos educacionales de la ciudad de Chillán.

3.3 Instrumentos para recoger la información

La recolección de la información se realizará mediante un instrumento de evaluación (ver anexo 1) que será aplicado a los estudiantes de primero medio de los establecimientos educacionales considerados para la investigación con el fin de determinar los errores y dificultades que presentan al resolver problemas que involucren ecuaciones de primer grado. El instrumento consistirá en una prueba compuesta por dos ítems, con preguntas tipo SIMCE. El primer ítem consiste en 8 preguntas en donde se debe plantear una ecuación que represente el enunciado y responder al problema mientras el segundo ítem son 8 preguntas de selección múltiple.

Además se aplicará una encuesta (ver anexo 2) a los docentes de matemática de los establecimientos, para determinar aspectos relevantes de su praxis pedagógica, en lo que se refiere al tratamiento de las dificultades que presentan los estudiantes para resolver problemas que involucren ecuaciones de primer grado. La encuesta, consta de dos ítems: en el primero, preguntas cerradas; en el segundo, una escala de apreciación en donde se debe marcar con una "X" su preferencia, según una escala de frecuencia.

3.4 Presentación y análisis de datos

La información será analizada mediante métodos gráficos (gráficos de caja) y numéricos tales como media, desviación estándar y porcentajes. La información se procesará en el software estadístico SPSS versión 13 para Windows.

Con el instrumento evaluativo, se pretende evidenciar los errores más frecuentes que cometen los estudiantes de primero año medio al resolver problemas que involucren ecuaciones de primer grado. Y con la encuesta realizada a los docentes se quiere conocer la praxis curricular y didáctica, para establecer el grado de responsabilidad y su compromiso para contribuir a que los estudiantes superen las dificultades que les genera este contenido.

3.4.1 Resultados Instrumento Evaluativo Ítem 1

La muestra en estudio estuvo constituida por 95 estudiantes de dos establecimientos educacionales particulares subvencionados de la ciudad de Chillán.

En la siguiente tabla se muestra el porcentaje promedio de logro obtenido por los estudiantes en el ítem I. Se puede apreciar que los estudiantes del Colegio 1 presentan un porcentaje de logro promedio de un 16,14% siendo relativamente homogéneos en relación al colegio 2, pero los alumnos del Colegio 2 responden alrededor de un 34,30% con una mayor variabilidad en relación al porcentaje de logro.

Colegios	Mínimo	Máximo	Prom± D.E
Colegio 1	12,5%	50,0%	16,14±7,86
Colegio 2	25,0%	75,0%	34,30±17,61
Total	12,5%	75,0%	23,67±15,60

Tabla 1: Estadísticas básicas de porcentaje de logro en relación al planteamiento y solución correcta del problema.

Al analizar la variabilidad de los resultados según los colegios, se puede observar que ésta es 7,86% en el colegio 1 y 17,61% en el colegio 2, dejando en evidencia que los resultados del colegio 1 presentan más homogeneidad que los del colegio 2, en relación a la media, sin embargo el logro promedio es relativamente insuficiente.

En relación a la distribución de los porcentajes de logros, del planteamiento y resolución de los problemas, en el gráfico 1 se muestra su distribución, en el cual se puede observar que el colegio 1 presenta menor variabilidad que el colegio 2 y en ambos la distribución de los porcentajes de logros es positiva, lo cual evidencia porcentajes de logros bajos siendo menor en el colegio 1 que en el colegio 2, es decir los alumnos del colegio 2 presentan mayores habilidades en el planteamiento y la resolución de problemas que involucren ecuaciones de primer grado.

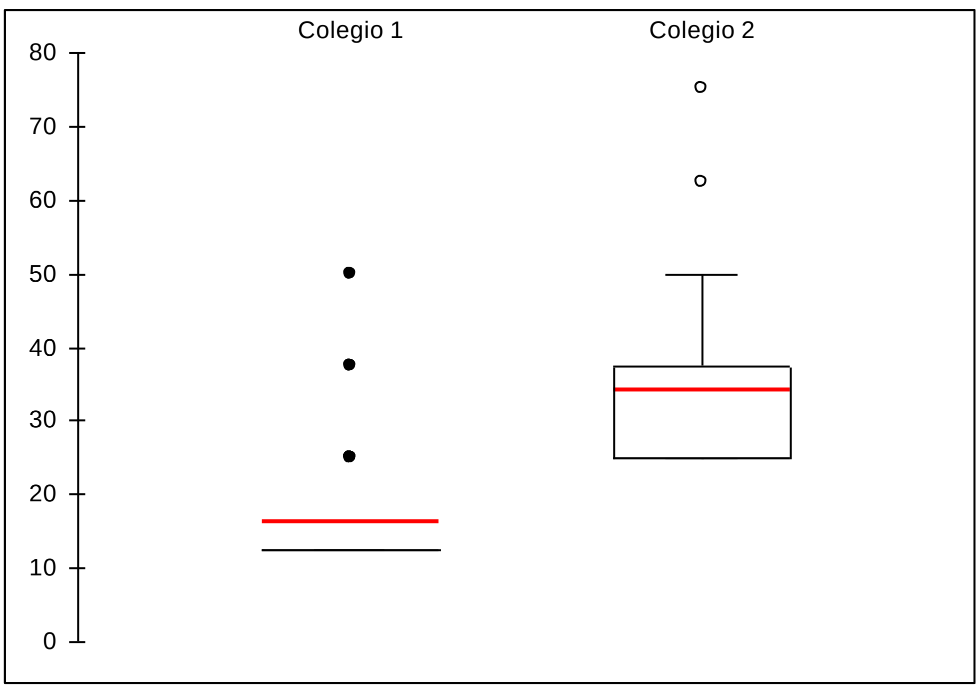


Figura 1: Distribución de los porcentajes de logros del planteamiento y resolución de los problemas.

En el colegio 2 existen dos alumnos que presentan un comportamiento atípico en relación a la totalidad de los estudiantes que respondieron el ítem.

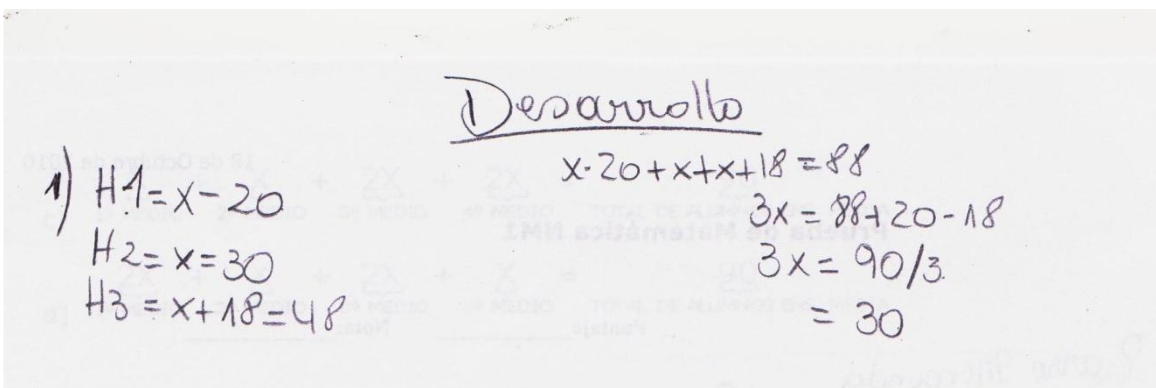
En el colegio 1 también se evidencian datos atípicos pero sin embargo se encuentran más descendidos que en el colegio 2.

3.4.2 Algunos errores tipo presentados por los alumnos en relación a la resolución de problemas que involucren ecuaciones de primer grado

A continuación se muestran los errores más frecuentes que presentan los estudiantes encuestados en relación a la resolución de problemas donde intervienen ecuaciones de primer grado:

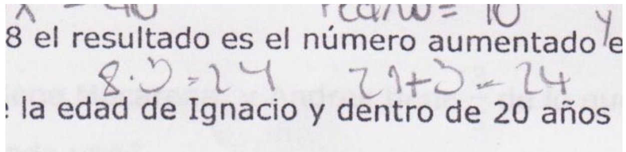
Algunos ejercicios frecuentes al cual están enfrentados los alumnos son los siguientes:

1) La suma de las tres edades de tres personas es 88. La mayor tiene 20 años más que la menor y la del medio 18 años menos que la mayor. Hallar las edades respectivas.



En este ejercicio, se puede observar que el estudiante no plantea de manera correcta las relaciones entre las tres edades, es decir, no sabe expresar las relaciones existentes entre las variables, lo que conlleva a plantear una ecuación errónea. Aunque las edades que encuentra sumen 88 años, estas no concuerdan con las condiciones entregadas en el enunciado, lo que evidencia que una de las dificultades más frecuentes es la traducción del lenguaje natural al lenguaje algebraico.

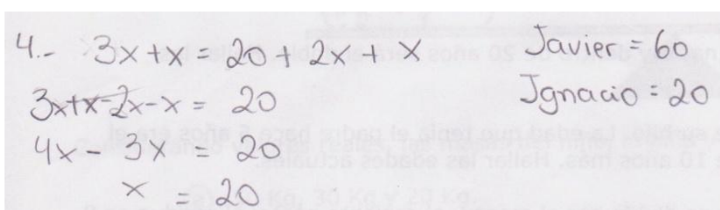
2) Ejercicio: Si un número se multiplica por 8 el resultado es el número aumentado en 21. Hallar el número.



Se puede constatar que, los estudiantes dan solución al ejercicio utilizando la técnica del “tanteo”, es decir, prueban valores hasta llegar a la solución, prefiriendo utilizar la aritmética como medio para resolver el problema. Cabe destacar que esta técnica no es la indicada porque en problemas que involucren cantidades más grandes se hace engorroso el trabajo, lo que demuestra la importancia de por qué es necesario aprender álgebra.

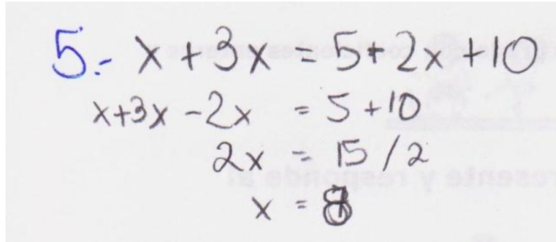
De esta manera queda en evidencia otra dificultad, la que se refiere al paso de la aritmética al álgebra.

3) Ejercicio: La edad de Javier es el triple de la edad de Ignacio y dentro de 20 años será el doble. Hallar las edades actuales.



En general los estudiantes obtienen la respuesta de manera correcta al problema, sin embargo, la ecuación planteada por ellos no es la indicada y el error radica en interpretar el enunciado de manera literal, con lo cual no se expresan de manera correcta las relaciones entre las variables (edades).

4) Ejercicio: La edad de un padre es el triple de la edad de su hijo. La edad que tenía el padre hace 5 años era el duplo de la edad que tendrá su hijo dentro de 10 años más. Hallar las edades actuales.

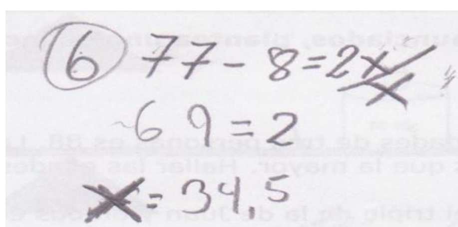


Así como en el ejercicio anterior, también se evidencian las dificultades en el uso de las letras, ya que los estudiantes interpretan el enunciado de manera literal, con lo cual no expresan de forma correcta las relaciones entre las variables (edades).

Además ambos ejercicios dan cuenta de las dificultades que presentan los estudiantes para abordar aquellos problemas que involucren diferencia de edades, las cuales deben cumplir ciertas condiciones con el transcurso de los años, por lo que la traducción del lenguaje natural al lenguaje algebraico no la realizan de manera correcta.

5) Ejercicio: La suma de dos números es 77, y si el mayor se divide por el menor, el cociente es 2 y el residuo es 8. Hallar los números.

Este ejercicio es enfrentado de la siguiente manera por los estudiantes:



En el cual se evidencia que los estudiantes no presentan competencias en algoritmos propios de enseñanza básica, como el de la división y por lo tanto los estudiantes no los relacionan con los nuevos contenidos. Asimismo, al no saber operaciones básicas de la aritmética se les dificulta establecer la ecuación que permite dar respuesta al problema.

3.4.3 Resultados Instrumento Evaluativo Ítem 2

La siguiente tabla muestra el análisis de los porcentajes de logro que los estudiantes, obtuvieron en el ítem 2.

	Mínimo	Máximo	Prom± D.E
Colegio 1	12,5%	100,0%	82,5±17,11
Colegio 2	12,5%	100,0%	63,13±26,85
Total	12,5%	100,0%	74,34±23,66

Tabla 2: Estadísticas básicas del porcentaje de logro según establecimiento con respecto a la identificación de expresión algebraica.

De la tabla anterior se tiene que con respecto al colegio 1, existen alumnos que contestaron correctamente sólo el 12, 5% de las peguntas del segundo ítem, lo que resulta ser un bajo porcentaje en relación a los alumnos que contestaron correctamente la totalidad del ítem, pues la tabla entrega como porcentaje máximo el 100%. Como se trata de un ítem de alternativas, en donde se debe elegir una de ellas, no se puede apreciar con exactitud si los estudiantes identifican una expresión algebraica que representa algún enunciado debido a que existe la posibilidad que estos hayan contestado las preguntas al azar. La misma situación se puede apreciar en el colegio 2, debido a que tanto el porcentaje máximo como mínimo en relación a lo que contestó cada estudiante, son idénticos.

Con respecto al promedio de los porcentajes de cada alumno que respondió las preguntas del segundo ítem, se puede estimar que la media del primer colegio corresponde al 82,5%, mientras que el colegio 2 tiene media 63,13%, por lo que el colegio 1 tiene más alumnos que respondieron correctamente. En relación a la desviación estándar de cada colegio, el primero tiene un desviación de 17,11% en relación al 26,85% del segundo colegio por lo que el colegio 1 tiene porcentajes con una tendencia a variar, mucho menor que el colegio 2.

En relación a la distribución de los porcentajes de logros, en el siguiente gráfico se muestra su distribución en el cual se puede observar que en ambos colegios los resultados presentan una distribución asimétrica negativa, no obstante en el colegio 1 dicha asimetría es mayor.

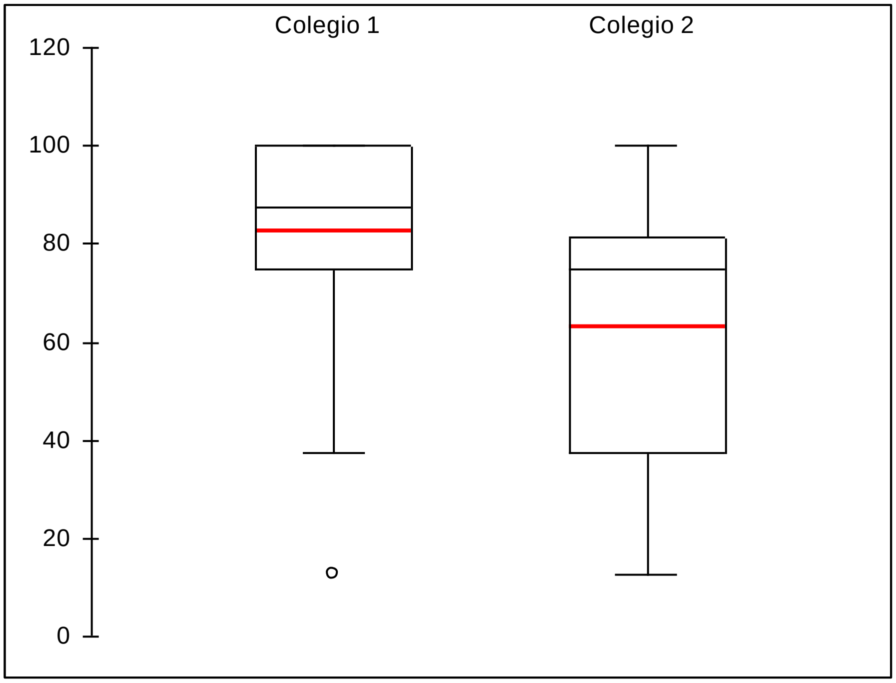


Figura 2: Distribución de los porcentajes de logros en el ítem II

Cabe notar que el colegio 1 presenta una mayor curtosis que en el colegio 2, lo cual evidencia que hay aproximadamente un 75% de alumnos cuyos puntajes son inferiores a 80% de acierto, en cambio en el colegio 2 su distribución a pesar de ser negativa tiende a ser simétrica.

3.4.4 Resultados Encuesta Docentes

Otro factor de interés es conocer la praxis curricular y didáctica utilizada por los docentes en relación al tema de la enseñanza del contenido “Planteo y resolución de problemas que involucren ecuaciones de primer grado con una incógnita”, para tal efecto se encuestó a 10 docentes de distintos establecimientos de la ciudad de Chillán, de los cuales el 60% son de género femenino y el 40% masculino, los años cuales presentan entre 3 y 37 años de servicio docente, siendo su promedio 23,00 años (D.E = 10,72 años) .

En relación a la praxis curricular, es de interés conocer el tipo de planificación que frecuentemente utilizan los docentes para identificar su metodología de enseñanza y si ésta es efectiva para lograr el aprendizaje.

En la siguiente tabla se muestra el tipo de planificación que los profesores realizan usualmente:

Tipo de planificación	**n**	**Porcentaje (%)**
En sábana	3	30
En T	0	0
En trayecto	1	10
Heurística	2	20
No responde	4	40
TOTAL	10	100

Tabla 3: Tendencia del tipo de planificación según modelo pedagógico

En esta tabla se observa que un 40% de los docentes no indica que tipo de planificación utiliza, según modelo pedagógico; sin embargo un 30% manifiesta utilizar Planificación en sábana, que corresponde a un modelo pedagógico tradicional o academicista que no indica cómo se abordarán los contenidos y tampoco el rol del estudiante. Un 20% indica utilizar la Planificación heurística, que corresponde a un modelo pedagógico cognitivo, donde se potencia la unión de la teoría con la práctica, pues la clase se estructura alrededor de una pregunta central para desarrollar los contenidos y actividades. Mientras que un 10% utiliza la Planificación en trayecto, que corresponde a un modelo pedagógico cognitivo-constructivista, es un tipo de planificación que contempla los contenidos, aprendizajes esperados, las actividades y la evaluación que se realizará, por tanto, es el tipo de planificación que se ajusta a los programas de estudio establecidos por el Ministerio de Educación.

El ítem II fue subdividido en tres partes, en la siguiente tabla se considera aquellas preguntas relacionadas a los elementos de la praxis pedagógica curricular, en la segunda tabla a los elementos de la praxis pedagógica didáctica, mientras que la tercera tabla considera las preguntas que se enfocan a la enseñanza del contenido “Resolver problemas que involucren ecuaciones de primer grado”. Categorías: siempre – a veces – casi nunca – nunca.

	Categorías	**n (%)**[1]
Utiliza como referente las orientaciones didácticas estipuladas por el Ministerio de Educación.	Siempre	3 (30)
	A veces	6 (60)
	Casi nunca	1 (10)
	Nunca	0
Utiliza el libro del Ministerio de Educación para realizar sus clases.	Siempre	2 (20)
	A veces	4 (40)
	Casi nunca	3 (30)
	Nunca	1 (10)
Planifica sus clases con anterioridad.	Siempre	8 (80)
	A veces	1 (10)
	Casi nunca	0
	Nunca	1 (10)

Tabla 4: Análisis de la práctica pedagógica curricular.

En esta tabla se puede determinar que en general la mayoría de los docentes prefiere regirse por los planes y programas estipulados por el MINEDUC, sin realizar modificaciones.

Aunque la mayoría manifiesta utilizar el libro de matemática entregado por el Ministerio de Educación, el 40% manifiesta que casi nunca o nunca lo ha utilizado, lo que evidencia que los recursos materiales entregados por el ministerio, que además son gratis, no son aprovechados por los profesores y tampoco por los alumnos.

También se evidencia que la mayoría de los profesores se preocupa de organizar sus clases, es decir, de planificarlas, para no tener que improvisar.

Si bien, los docentes planifican sus clases utilizando los planes y programas del Ministerio de Educación y además de los libros gratuitos que estos entregan, las dificultades en el álgebra existen y persisten, por lo que sería necesario que los profesores buscaran otras estrategias de enseñanza para facilitar y motivar a sus estudiantes en el aprendizaje de este contenido.

	Categorías	n (%)
Realiza sus clases con recursos tecnológicos.	Siempre	1(10)
	A veces	5(50)
	Casi nunca	4(40)
	Nunca	0
Realiza trabajo colaborativo con los docentes de otras asignaturas.	Siempre	0
	A veces	7(70)
	Casi nunca	2(20)
	Nunca	1(10)
Detecta dificultades en su asignatura.	Siempre	4(40)
	A veces	6(60)
	Casi nunca	0
	Nunca	0
Aborda los conocimientos previos de los estudiantes para introducir un nuevo contenido.	Siempre	9(90)
	A veces	0
	Casi nunca	1(10)
	Nunca	0
Se anticipa a los posibles problemas conceptuales de los estudiantes.	Siempre	7(70)
	A veces	3(30)
	Casi nunca	0
	Nunca	0
Crea las instancias de corrección y repaso de contenidos.	Siempre	9(90)
	A veces	1(10)
	Casi nunca	0
	Nunca	0
Su metodología aborda de forma adecuada los problemas de aprendizaje de los estudiantes.	Siempre	5(50)
	A veces	5(50)
	Casi nunca	0
	Nunca	0

Tabla 5: Análisis de la práctica pedagógica didáctica.

En lo que se refiere a la praxis didáctica, la mayoría de los docentes incorpora en sus clases recursos tecnológicos, pero también un alto porcentaje (40%) manifiesta casi nunca utilizarlos, lo que deja en evidencia que los docentes no aprovechan las ventajas de la tecnología para desarrollar las clases de algunos contenidos que tal vez lo ameritan.

Además es necesario aumentar el trabajo colaborativo con profesores de otras asignaturas, pues un 30% manifiesta que casi nunca o nunca lo realiza, lo que evidencia una desunión que provoca que los estudiantes no relacionen los contenidos de los distintos ramos.

Si bien el 90% de los profesores aborda los conocimientos previos de los estudiantes para introducir un nuevo contenido, un 10% manifiesta casi nunca hacerlo, y es aceptado que esta etapa es fundamental para el aprendizaje de un contenido.

Se hace evidente que los estudiantes tienen dificultades en la asignatura de matemática, ya que la totalidad de los docentes encuestados lo confirma. Pero, asimismo, manifiestan anticiparse a los posibles problemas conceptuales de los estudiantes, lo que les permitiría abordar aquellas dificultades de mejor manera. Además, todos los docentes realizan evaluaciones formativas del logro de aprendizajes, pues crean las instancias de corrección y repaso de contenidos.

Igualmente, el 100% de los docentes encuestados manifiesta que, a través de su metodología abordan de forma adecuada los problemas de aprendizaje de los estudiantes, pero de ser así, las dificultades de aprendizaje no persistirían, por lo que en definitiva, la praxis didáctica no está siendo la más adecuada.

	Categorías	**n (%)**
Los estudiantes presentan dificultades en el aprendizaje del álgebra.	Siempre	2(20)
	A veces	8(80)
	Casi nunca	0
	Nunca	0
La incorporación de variables dificulta el aprendizaje del álgebra.	Siempre	2(20)
	A veces	6(60)
	Casi nunca	1(10)
	Nunca	0
Aprecia las mismas dificultades en los distintos niveles que enseña álgebra.	Siempre	3(30)
	A veces	6(60)
	Casi nunca	0
	Nunca	1(10)
Relaciona los problemas que involucren ecuaciones de primer grado con situaciones aprendidas en cursos anteriores.	Siempre	5(50)
	A veces	4(40)
	Casi nunca	1(10)
	Nunca	0
Utiliza la formalidad matemática para resolver ecuaciones de primer grado.	Siempre	6(60)
	A veces	3(30)
	Casi nunca	0
	Nunca	0
Incluye problemas de aplicación que resulten de interés para los estudiantes.	Siempre	6(60)
	A veces	4(40)
	Casi nunca	0
	Nunca	0
Se apoya en otras formas de representación para resolver un problema.	Siempre	2(20)
	A veces	7(70)
	Casi nunca	1(10)
	Nunca	0

Tabla 5: Enseñanza del contenido Resolver problemas que involucren ecuaciones de primer grado.

De la tabla anterior, referida a la enseñanza y aprendizaje del contenido “Resolver problemas que involucren ecuaciones de primer grado”, todos los profesores encuestados manifiestan que los estudiantes presentan dificultades en el aprendizaje del álgebra, es decir, es un problema transversal en la asignatura de matemática.

El 80% de los docentes encuestados expresan que la incorporación de variables es una de las dificultades en el aprendizaje del álgebra. Y la mayoría manifiesta que las dificultades trascienden a todos los niveles de escolaridad.

El 90% de los docentes manifiesta relacionar los problemas que involucren ecuaciones de primer grado con situaciones aprendidas en cursos anteriores, es decir, existe relación de este contenido con los vistos anteriormente, lo que permite cierta continuidad de los aprendizajes. Además expresan utilizar en sus clases la formalidad matemática para resolver las ecuaciones de primer grado, lo que permitiría una mayor rigurosidad de conceptos, definiciones y propiedades matemáticas que se utilizan en su desarrollo.

También se evidencia que los docentes incluyen en la enseñanza del contenido “Resolver problemas que involucren ecuaciones de primer grado”, problemas que resulten de interés para los estudiantes, es decir, se apoyan en la contextualización para motivar su aprendizaje.

Asimismo, la mayoría de los profesores (90%) manifiesta apoyarse en otras formas de representación para resolver un problema, pero un 10% manifiesta no hacerlo. Teniendo en cuenta que un problema puede resolverse mediante distintos registros, los docentes, debido a su formación pedagógica, deben ser capaces de desarrollar distintas alternativas para la resolución de un problema y así facilitar, de acuerdo a las características de sus estudiantes, el aprendizaje.

4 Conclusiones y consideraciones finales

El álgebra es y seguirá siendo una herramienta que permite resolver variados ejercicios o problemas en matemática. Es en el contenido "Resolver problemas que involucren ecuaciones de primer grado" que queda en evidencia su utilidad ya que el álgebra permite desarrollarlos y encontrar su solución, esto es mediante el planteamiento de una ecuación de primer grado.

La investigación realizada pudo detectar las falencias que existen en los estudiantes para resolver problemas mediante el planteamiento de una ecuación, debido a que tienen ciertas dificultades para plantear la ecuación que represente el enunciando del problema. Por lo que, los estudiantes no resuelven de forma correcta los problemas sobre todo cuando se trata de enunciados más complejos, por ejemplo cuando deben considerar el paso de los años para plantear correctamente la ecuación. Lo que se evidenció mediante la aplicación del instrumento evaluativo en dos establecimientos educacionales de la comuna de Chillán, y donde se pudo observar esta situación, es decir, que no se trata de un colegio en particular, sino que las dificultades existen independientes del establecimiento educacional y los errores resultan ser muy similares.

Entre las dificultades que presentan los estudiantes de Primer año medio al resolver problemas que involucren ecuaciones de primer grado, se puede evidenciar que estas no recaen en las operaciones aritméticas aunque existen estudiantes que como no comprenden que el álgebra es una herramienta que les sirve para resolver problemas que involucren ecuaciones de primer grado, optan por olvidarse de las letras y utilizar sólo números para encontrar la respuesta al enunciado, sin considerar que puede ser demoroso aunque en muchas ocasiones puede coincidir el número con alguna de las características que menciona el enunciando, no necesariamente siempre es así. Lo que manifiesta la dificultad del paso de la aritmética al álgebra.

Otra dificultad que se puede observar a lo largo del estudio es que los alumnos no establecen las relaciones que existen dentro de un mismo enunciado con la variable, por ejemplo, cuando se les pregunta ejercicios en donde deben considerar las edades actuales de ciertas personas pero a su vez deben considerar el paso del tiempo por ejemplo para poder plantearse la ecuación correcta, los estudiantes no asimilan que con el paso del tiempo, las edades ya no son las mismas, y por ende las variables se deben modificar. En definitiva los alumnos tienen dificultades para interpretar los enunciados más complejos, que involucran un pensamiento cognitivo más avanzado. Además, si los estudiantes no han aprendido a resolver ecuaciones de primer grado, ya sea con fracciones o con números, difícilmente podrán plantear una ecuación representativa ante un enunciado en particular.

En lo que respecta a los errores cometidos por los estudiantes de Primer año medio al resolver problemas que impliquen planteamiento de una ecuación de primer grado, se puede decir que existe una tendencia a reescribir el enunciado en lenguaje natural al algebraico literalmente, esto es, sin considerar las relaciones existentes entre las variables.

Otro error que cometen los estudiantes es que no saben interpretar cuando una cantidad dentro de un enunciado es negativa o positiva; por ejemplo, si el enunciando dice hace 10 años, o dentro de 10 años, los alumnos se confunden y no hacen la diferencia al momento de plantearse alguna ecuación por lo que muchas veces incluso, los lleva a encontrar cantidades o específicamente edades negativas, es decir, no se tiene en cuenta la pertinencia de la solución.

En lo referido al rol del docente dentro del proceso de enseñanza-aprendizaje, es posible establecer, a través de esta investigación que los profesores son conscientes de la dificultad que representa para los estudiantes la asignatura de matemática, lo que se verificó mediante las encuestas, asimismo, aunque consideran en la planificación de sus clases las orientaciones didácticas estipuladas por el Ministerio de educación, estas resultan no ser suficientes para la enseñanza de los contenidos, por lo que se debería considerar reformularlas, ya que aún el sistema educativo chileno es deficiente, lo que se refleja en los malos resultados obtenidos tanto en pruebas de medición nacionales como internacionales.

Además, se estableció que el tipo de planificación que más utilizan los docentes, es la tradicional o academicista, donde el estudiante no tiene mayor participación en el proceso de construcción del conocimiento, sino que es el docente el protagonista, lo que puede ser una de las causas de los pésimos resultados en matemática, ya que la clase no se organiza teniendo en cuenta las necesidades ni capacidades de los estudiantes.

Ahora bien, centrándose en el contenido “Resolver problemas que involucren ecuaciones de primer grado”, los profesores manifiestan que las dificultades en el aprendizaje y aplicación del álgebra son reales y que trascienden a todos los niveles de escolaridad, porque si bien saben resolver ecuaciones de primer grado, es la interpretación de los enunciados, en los problemas, donde hay que pone mayor énfasis. Puesto que, aunque los docentes expresan anticiparse a estas dificultades, resulta no ser suficiente la metodología que utilizan, porque los problemas persisten, lo que se refleja en los bajos rendimientos. Entonces es necesario que los docentes asuman una mayor responsabilidad y busquen nuevas formas de innovar en estrategias para enseñar este contenido, por ejemplo teniendo en cuenta la Propuesta III que se expuso en la investigación, en la cual se invierte el proceso haciendo que el estudiante aprenda a simbolizar a partir de situaciones numéricas conocidas; pues el objetivo es motivar a los estudiantes en su aprendizaje, y para ello este contenido no se debe reducir, como lo hace la mayoría de los docentes, a solo traducir del lenguaje cotidiano al algebraico.

Bibliografía

[1] Cardona, M., M. (2007). Desarrollando el pensamiento algebraico en alumnos de octavo grado del CIIE a través de la resolución de problemas. Tesis para obtener el título de máster en Matemática Educativa. Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán. Tegucigalpa. Honduras.

[2] Escareño S., F. (1997). Algunas técnicas para enseñar a resolver problemas verbales con ecuaciones. Educar. Revista de Educación. Enseñanza de las matemáticas. Nueva Época Nº 2 p 45-49.

[3] Esquinas S., A. (2008). Dificultades de Aprendizaje del lenguaje algebraico: Del símbolo a la formalización algebraica: Aplicación a la práctica docente. Memoria para optar al grado de doctor bajo la dirección del doctor Félix E. González Jiménez. Madrid, España.

[4] Godino, J., D. y Vicenç F. (2003). Matemáticas y su Didáctica para Maestros, Manual para el Estudiante. Impresión: ReproDigital. C/ Baza, 6. La Mediana Polígono Juncaril. Albolote. 18220-Granada. Proyecto Edumat-Maestros Director: Juan D. Godino. Razonamiento algebraico y su didáctica para maestros.

[5] González, M. (2009) Algebra y sus aplicaciones. Tesina para optar el título de profesor de matemáticas. Revista argentina de psicopedagogía, ISSN 1514-5603, Nº 62, Buenos Aires Argentina.

[6] Kieran, C. y Filloy Yague, E. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. Investigación y experiencias didácticas. Université de Québec. Montréal, Canadá. Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN, México.

University of London, Institute of Education. Inglaterra. Enseñanza De Las Ciencias, Pág. 229-240.

[7] Martínez H., E. y Varela V., H. (2006). Introducción al álgebra para los estudiantes de primero medio. Proyecto "Web en apoyo al estudio de las matemáticas", Universidad de Antofagasta, Revisada el 29 de Diciembre 2010.

[8] Matemática Programa de Estudio, Primer Año Medio, Formación General Educación Media, Unidad de Currículum y Evaluación.

[9] Mendoza R., F. (2006). Resolviendo las Ecuaciones Lineales con el uso de Modelos. Universidad de Los Andes Departamento de Matemática. Editor: Saber Ula. Mérida Venezuela.

[10] Olfos A. Raimundo (2004) Aportes de la Investigación a la Enseñanza del Álgebra Elemental. Universidad Católica de Valparaíso. Valparaíso, Chile.

[11] Polya, G. (1965). Cómo Plantear y resolver problemas. Trillas México.

[12] Portal Educativo, Educar Chile. Recuperado en septiembre 15, 2010. Disponible en http://www.educarchile.cl/Portal.Base/Web/verContenido.aspx?ID=197949&PT=12

[13] Salazar, L (2006). Ecuaciones y problemas de primer grado. Primer congreso internacional de innovación educativa. CFIE-IPN. México.

[14] Socas, M. (2000). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Secundaria, Capítulo 5. En RICO, L., y otros: La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria. Madrid, Barcelona.

[15] Socas, M (1996). Iniciación al Algebra. Editorial Síntesis, S.A. España.

[16] Unidad de Curriculum y Evaluación Ministerio de Educación (2004). Chile y el aprendizaje de matemáticas y ciencias según TIMSS Resultados de los estudiantes chilenos de 8º básico en el Estudio Internacional de Tendencias en Matemáticas y Ciencias 2003. Santiago, Chile.

[17] Velázquez, F. (2001) Una propuesta de tránsito gradual de la aritmética al álgebra. X Jornadas Nacionales De Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas. Zaragoza, España.

Anexos

Anexo1 Instrumento Evaluativo

Prueba de Matemática NM1

Puntaje____________ Nota:_____________

Nombre:

Unidad: Lenguaje Algebraico

Objetivo: Planteo y resolución de problemas que involucren ecuaciones de primer grado con coeficientes enteros y fraccionarios.

I. En los siguientes enunciados, plantea una ecuación que lo represente y responde al problema.

1) La suma de las tres edades de tres personas es 88. La mayor tiene 20 años más que la menor y la del medio 18 años menos que la mayor. Hallar las edades respectivas.

2) La edad de Pedro es el triple de la de Juan y ambas edades suman 40 años. Hallar ambas edades.

3) Si un número se multiplica por 8 el resultado es el número aumentado en 21. Hallar el número.

4) La edad de Javier es el triple de la edad de Ignacio y dentro de 20 años será el doble. Hallar las edades actuales.

5) La edad de un padre es el triple de la edad de su hijo. La edad que tenía el padre hace 5 años era el duplo de la edad que tendrá su hijo dentro de 10 años más. Hallar las edades actuales.

6) La suma de dos números es 77, y si el mayor se divide por el menor, el cociente es 2 y el residuo es 8. Hallar los números.

7) En tres días un hombre ganó $185. Si cada día ganó los $\frac{3}{4}$ de lo que ganó el día anterior. ¿cuánto ganó en cada uno de los tres días?

8) Un padre tiene 40 años y su hijo 15. ¿dentro de cuantos años la edad del hijo será los $\frac{4}{9}$ de la del padre?

II. A continuación verás una serie de preguntas para las cuales tienes 4 respuestas distintas. Léelas todas y señala aquella que creas es la respuesta correcta, encerrándola en un círculo

9) Cristóbal tiene 15 años, su hermana 12 y su madre 40. ¿Cuál de las siguientes ecuaciones permite saber los años que han de transcurrir para que la suma de la edad de ambos hijos iguale la edad de la madre?

a) (15 - x)+(12-x)=40 – x
b) (15+x)+(12+x)=40+x
c) (15 - x)+(12+x)=40+x
d) (15+x)+(12 - x)=40+x

10) El rectángulo de la figura representa un jardín. La suma de las medidas de sus cuatro lados es igual a 80 metros. Si se sabe que el largo es 10 metros más que el ancho, ¿cuáles son las medidas del jardín?

a) largo = 30 m; ancho = 10 m.
b) largo = 20 m; ancho = 20 m.
c) largo = 15 m; ancho = 25 m.
d) largo = 25 m; ancho = 15 m.

11) *“Te daré una pista para que adivines mi edad”* , dice el abuelo a su nieto Ricardo. Luego agrega: *"Si al doble de ella le quitas el doble de la que tenía hace cuarenta años, obtendrás mi edad actual."*

¿Cuál de las siguientes expresiones algebraicas ayudará a Ricardo a descubrir la edad de su abuelo?

a) 3x-120=2x
b) 2x-3x-40
c) 2x-40=3x
d) 2x-2(x-40)=x

12) Cristián tiene $\frac{2}{3}$ del dinero que tiene Macarena, y Andrea tiene $\frac{3}{5}$ de lo que tiene Cristián. Si juntos tienen $24.800, ¿cuánto tiene cada uno?

a) Macarena = $8.000; Cristián = $12.000; Andrea = $4.800
b) Macarena = $12.000; Cristián = $4.800; Andrea = $8.000
c) Macarena = $4.800; Cristián = $12.000; Andrea = $8.000
d) Macarena = $12.000; Cristián = $8.000; Andrea = $4.800

13) Un pequeño agricultor ha destinado un pedazo de terreno de x m^2 para hacer una huerta. Si planta dos tercios del terreno con tomates, un quinto con repollos y le sobran 400 m^2, ¿cuál de las siguientes expresiones algebraicas representa la superficie total de la huerta?

a) $x = \frac{2}{3}x + \frac{x}{5} + 400$

b) $x = \frac{1}{3}x + \frac{4}{5}x + 400$

c) $x = \frac{2}{3}x + \frac{x}{5} - 400$

d) $x = \frac{1}{3}x + \frac{4}{5}x - 400$

14) Los 90 alumnos de la Enseñanza Media de un colegio se distribuyen de la siguiente forma: en Segundo hay el doble número de alumnos de los que hay en Tercero; en Primero hay la misma cantidad de estudiantes que hay en Segundo; Cuarto tiene la mitad de alumnos que Segundo. ¿Cuál de las siguientes opciones contiene el planteamiento correcto?

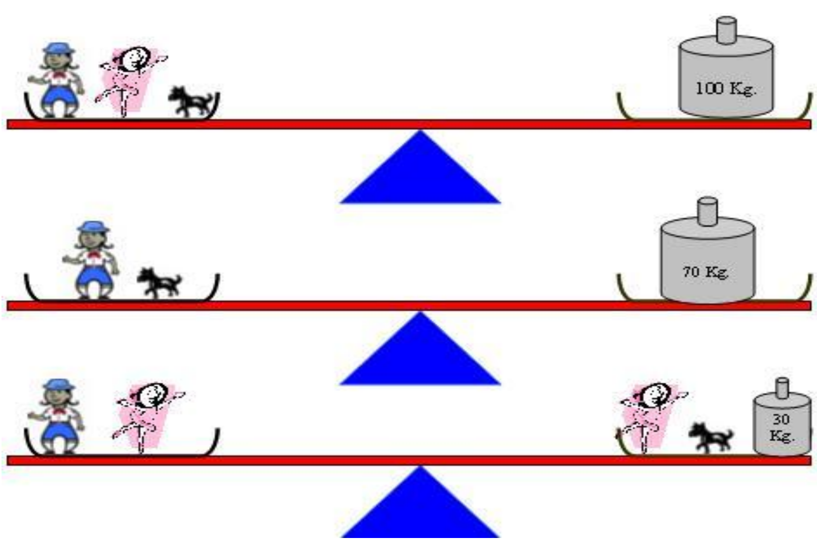
a) $\underbrace{2X}_{1^{o}\text{ MEDIO}} + \underbrace{2X}_{2^{o}\text{ MEDIO}} + \underbrace{X}_{3^{o}\text{ MEDIO}} + \underbrace{X}_{4^{o}\text{ MEDIO}} = \underbrace{90}_{\text{TOTAL DE ALUMNOS ENS. MEDIA}}$

b) $\underbrace{X}_{1^{o}\text{ MEDIO}} + \underbrace{2X}_{2^{o}\text{ MEDIO}} + \underbrace{X}_{3^{o}\text{ MEDIO}} + \underbrace{\frac{X}{2}}_{4^{o}\text{ MEDIO}} = \underbrace{90}_{\text{TOTAL DE ALUMNOS ENS. MEDIA}}$

c) $\underbrace{X}_{1^{o}\text{ MEDIO}} + \underbrace{X}_{2^{o}\text{ MEDIO}} + \underbrace{2X}_{3^{o}\text{ MEDIO}} + \underbrace{2X}_{4^{o}\text{ MEDIO}} = \underbrace{90}_{\text{TOTAL DE ALUMNOS ENS. MEDIA}}$

d) $\underbrace{2X}_{1^{o}\text{ MEDIO}} + \underbrace{X}_{2^{o}\text{ MEDIO}} + \underbrace{2X}_{3^{o}\text{ MEDIO}} + \underbrace{X}_{4^{o}\text{ MEDIO}} = \underbrace{90}_{\text{TOTAL DE ALUMNOS ENS. MEDIA}}$

15) De acuerdo a las situaciones que se presentan:



Considerando valores reales, las masas del niño, la niña y el perro son respectivamente:

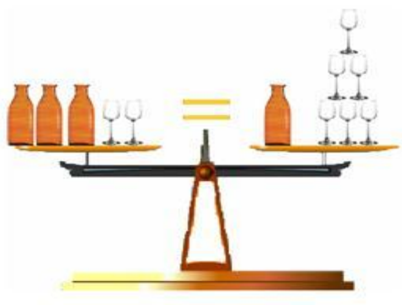
a) 50 Kg, 30 Kg y 20 Kg.

b) 50 Kg, 20 Kg y 30 Kg.

c) 20 Kg, 30 Kg y 50 Kg.

d) 30 Kg, 20 Kg y 50 Kg

16) Observa la figura:



¿Cuántas copas se necesitan para igualar el peso de una botella?

a) 2 copas

b) 3 copas

c) 4 copas

d) 6 copas

Anexo 2 Encuesta

ENCUESTA

Estimado Profesor o Profesora:

La presente encuesta forma parte de una investigación realizada por estudiantes tesistas de la carrera de Pedagogía en Educación Matemática de la Universidad del Bío-Bío, la cual tiene como objetivo conocer las estrategias didácticas utilizadas por los docentes, para que los estudiantes de primero medio aprendan a resolver problemas que involucren ecuaciones de primer grado.

Instrucciones: La siguiente encuesta, consta de dos ítems. En el primero, preguntas cerradas y en el segundo, una escala de apreciación en donde debe marcar con una "X" la preferencia que concuerde de mejor modo con lo que usted considera correcto, según una escala de frecuencia.

I.

1. ¿Cuántos años de experiencia laboral tiene? _______________
2. Sexo: ___F - ___M
3. ¿Cuál o cuáles de las siguientes planificaciones, según modelo pedagógico, utiliza frecuentemente para realizar sus clases?
   ___ Planificación "en Sábana" ___ Planificación en T
   ___ Planificación V Heurística ___ Planificación en Trayecto

II.

Escala de frecuencia

S: siempre; A (a veces); C/N: casi nunca; N: nunca

	S	A	C/N	N
1. Utiliza como referente las orientaciones didácticas estipuladas por el Ministerio de Educación.				
2. Utiliza el libro del Ministerio de Educación para realizar sus clases.				
3. Planifica sus clases con anterioridad.				
4. Realiza sus clases con recursos tecnológicos.				
5. Realiza trabajo colaborativo con los docentes de otras asignaturas.				
6. Detecta dificultades en su asignatura.				
7. Aborda los conocimientos previos de los estudiantes para introducir un nuevo contenido.				
8. Se anticipa a los posibles problemas conceptuales de los estudiantes.				
9. Crea las instancias de corrección y repaso de contenidos.				
10. Su metodología aborda de forma adecuada los problemas de aprendizaje de los estudiantes.				
11. Los estudiantes presentan dificultades en el aprendizaje del álgebra.				
12. La incorporación de variables dificulta el aprendizaje del álgebra.				
13. Aprecia las mismas dificultades en los distintos niveles que enseña álgebra				
14. Relaciona los problemas que involucren ecuaciones de primer grado con situaciones aprendidas en cursos anteriores				
15. Utiliza la formalidad matemática para resolver ecuaciones de primer grado.				
16. Incluye problemas de aplicación que resulten de interés para los estudiantes.				
17. Se apoya en otras formas de representación para resolver un problema.				