

UNIVERSIDAD DEL BÍO - BÍO
ESCUELA DE PEDAGOGÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
CHILLÁN-CHILE

EL MÉTODO DE GODUNOV

Memoria para optar al título de
Profesor de Educación Media en Educación Matemática,
presentado por

Paulo Antonio Flores Mardones

Profesor Guía:
Aníbal Coronel Pérez

FACULTAD DE EDUCACIÓN Y HUMANIDADES
2008

Agradecimientos

A Dios por haberme dado la fuerza necesaria para cumplir la meta.

A mis padres por haberme apoyado en todo momento.

A mi novia por darme la energía necesaria para soportar cada dificultad que tuve que enfrentar.

Al profesor Anibal Coronel por su apoyo incondicional, por su tiempo, por su colaboración, y por sobre todo, por su conocimiento brindado.

A todos aquellos que de alguna u otra forma permitieron hacer realidad esta memoria.

Al Proyecto Fondecyt de Iniciación 11060400.

Resumen

En esta Memoria se estudia los variados problemas no lineales, fundamentalmente las ondas de choque, rarefacción y ondas de contacto, asociados a la ecuación de Euler para la dinámica de los gases. Este estudio se enfoca desde el punto de vista numérico utilizando el método de Godunov. Se comienza con la presentación de las nociones básicas de los sistemas de leyes de conservación, a través de una motivación física. Se muestra la solución analítica para los sistemas lineales. Se define un sistema hiperbólico general y se presenta la ecuación de Euler unidimensional. Se define el problema de Riemann y se caracteriza su solución, así como también, se proporciona de manera sistemática una solución analítica en el caso de los gases ideales. Se describe el método de Godunov, se muestran las dos versiones que existen de este método y se explica detalladamente cómo puede aplicarse al caso lineal. Finalmente, se muestran algunos ejemplos numéricos y se realizan algunas conclusiones generales.

Abstract

In this work we study the nonlinear behaviour, mainly the formation of shock waves, rarefaction waves and contact discontinuities, arising in the gas dynamics Euler equation. We focus on the numerical aspects of Godunov Method. We present a physical motivation and we introduce some basic notation for systems of conservation laws. We define a general hyperbolic system, which includes the Euler equation as a particular case. We solve analytically the Riemann problem in the particular case of ideal gases. We present systematically two versions of Godunov Method. In addition, we show some numerical simulations and make some general conclusions.

Índice general

Introducción	ii
1. Sistemas de leyes de conservación	1
1.1. Motivación y definiciones básicas	1
1.2. Sistema hiperbólico lineal	5
1.3. La Ecuación de Euler unidimensional	9
1.4. Problema de Riemann	12
1.4.1. Problema de Riemann para un sistema lineal	12
1.4.2. Problema de Riemann para un sistema no lineal	15
1.5. Algunos aspectos teóricos de las leyes de conservación	18
2. El problema de Riemann para las ecuaciones de Euler	23
2.1. Introducción	23
2.2. Solución general del problema de Riemann para las ecuaciones de Euler	25
2.3. Solución del problema de Riemann para el caso de los gases ideales	35
2.3.1. Función f_L para un choque Izquierdo	40
2.3.2. Función f_L para la rarefacción Izquierda	42
2.3.3. Función f_R para un choque Derecho	43
2.3.4. Función f_R para la rarefacción Derecha	44
2.4. Ejemplos numéricos	45
3. El método de Godunov	56
3.1. Notación y generalidades de los métodos numéricos	56
3.2. Descripción general del método	58
3.3. El esquema de Godunov	61
3.3.1. Primera versión del esquema de Godunov	61

<i>Introducción</i>	I
<hr/>	
3.3.2. Segunda versión del esquema de Godunov	62
3.4. Algunos ejemplos numéricos	68
Conclusiones	72

Introducción

En variadas ciencias aplicadas se utilizan modelos matemáticos para entender, explicar y predecir el comportamiento de fenómenos, donde existen cantidades cuantificables. Particularmente, en la mecánica de fluidos se utilizan como modelos matemáticos ecuaciones diferenciales (ordinarias o parciales) lineales o no lineales con condiciones iniciales y de frontera específicas. Uno de tales problemas es el modelamiento de la dinámica de los fluidos compresibles.

El estudio del movimiento de los fluidos compresibles tiene problemas afines, los cuales también son de carácter no lineal y pueden ser planteados bajo el marco general de la teoría de ondas no lineales. Estos problemas aparecen no necesariamente en el seno de la Mecánica sino en otras áreas de la Ciencia, por ejemplo el flujo de transporte vehicular en el área de Optimización, el crecimiento poblacional en el área de la Ecología, el flujo de corrientes sanguíneas en el área de la Biología, etc.

Algunas características del movimiento de onda no lineal pueden ser descritas en términos generales y en comparación con el caso lineal. En el movimiento de onda lineal, tal como por ejemplo la velocidad del sonido, las perturbaciones son propagadas siempre con una velocidad definida (relativa al medio) que puede variar con el medio. En cambio, en el caso no lineal la velocidad de onda varía no solamente como función del medio sino que es influenciada también por las variables de estado. En el movimiento de onda lineal, cualquier discontinuidad inicial es preservada como una discontinuidad que se propaga con la velocidad de onda. En contraste, en el caso no lineal si existiese una discontinuidad inicial tal como por ejemplo: dos regiones a diferentes presiones, densidades y flujos de velocidades, entonces existen dos alternativas: o la discontinuidad inicial se pierde inmediatamente y la onda que se propaga resulta continua o la discontinuidad se propaga como una o dos ondas de choque. Otra diferencia importante entre el movimiento de on-

da lineal y no lineal es el relativo al problema de interacción: El principio de superposición vale para las ondas lineales, pero no para las ondas no lineales.

En consecuencia, el movimiento de onda lineal que era bien conocido y descrito adecuadamente por la teoría, no podía aplicarse directamente al caso no lineal y una teoría que explicara estos fenómenos fue requerida. El “laboratorio” para realizar los ensayos teóricos fue, y aún sigue siendo, la ecuación de Euler para la dinámica de los fluidos compresibles.

Por otro lado, debe mencionarse que el acelerado avance de la informática ha permitido simular, cada vez de manera más eficiente, los fenómenos. El problema del movimiento de onda no lineal no es la excepción y actualmente existe un área con crecimiento propio, denominada CFD (Computational Fluid Dynamics) que utiliza los métodos numéricos y algorítmicos para resolver y analizar problemas del flujo de fluidos. En esta rama de la mecánica tiene relevante preponderancia el método de Godunov y otros derivados de éste, conocidos como métodos de tipo Godunov.

El principio básico del método de Godunov es interpretar el problema de ondas no lineales de manera local y exacta. Al hacer esto, en vez de aproximar puntualmente como lo haría el método de diferencias finitas, aproxima las soluciones del sistema en pequeñas partes del dominio computacional, conocidos como celdas o volúmenes de control. Esto a su vez, representa un balance local de las cantidades conservadas del sistema y resuelve adecuadamente el problema de discontinuidades inherentes al problema continuo.

En esta monografía se estudiará de manera sistemática los variados problemas no lineales, fundamentalmente las ondas de choque y rarefacción, asociados a la ecuación de Euler para la dinámica de los fluidos compresibles. Este estudio se enfocará desde el punto de vista numérico utilizando el método de Godunov.

Las simulaciones numéricas están basadas en el Libro del Profesor Eleuterio Toro, ver [5]. En la monografía se tomaron los mismos datos numéricos de [5] y se implementó el método de Godunov en Matlab.

El contenido es presentado de la siguiente manera. En el capítulo 1 se hace una introducción de los aspectos fundamentales de la teoría de leyes de conservación no-lineales. En el capítulo 2 se estudia el problema de Riemann para las ecuaciones de Euler, en el caso de los gases ideales. Finalmente, en el capítulo 3 se presenta el método de Godunov y se muestran algunos ejemplos numéricos.

Capítulo 1

Sistemas de leyes de conservación

En este capítulo se presentan aspectos generales de las leyes de conservación. Se parte presentando una motivación física y los conceptos básicos de la teoría. Posteriormente, se presenta la solución analítica para los sistemas lineales. Se introduce el sistema de Euler unidimensional y se demuestra su hiperbolicidad. Se define el Problema de Riemann y se comenta acerca de su solución. Además, se realiza un resumen de conceptos relevantes de leyes de conservación no lineales.

1.1. Motivación y definiciones básicas

Si se considera Ω una región bidimensional o tridimensional que contiene a un fluido, siguiendo los tres principios básicos o leyes de conservación de la mecánica de fluidos, es decir:

1. Conservación de masa: “La masa no se crea ni se destruye”,
2. Conservación de momento: “La razón de cambio del momento de una porción del fluido es igual a la fuerza aplicada a éste”,
3. Conservación de energía: “La energía no se crea ni se destruye”,

se puede describir el movimiento del fluido. En efecto, sea $\mathbf{x} \in \Omega$ un punto en Ω y considere la partícula del fluido moviéndose a través de \mathbf{x} en un tiempo t . Por ejemplo, imagínese una partícula de polvo suspendida en un fluido; esta

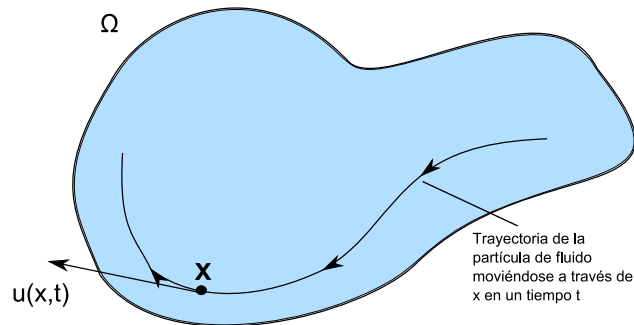


Figura 1.1: Región bidimensional conteniendo un fluido en movimiento.

partícula atravesará una trayectoria bien definida. Sea $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ la velocidad de la partícula del fluido moviéndose a través de \mathbf{x} en un tiempo t . De esta manera, para cada tiempo fijo, \mathbf{u} es un campo vectorial en Ω , ver Figura 1.1. Así, en el caso de configuraciones bidimensionales o tridimensionales a la velocidad \mathbf{u} se le llama, más precisamente, el campo vectorial de velocidades del fluido.

Por otro lado, se supone que para cada tiempo t el fluido tiene una densidad de masa bien definida y denotada por $\rho(\mathbf{x}, t)$. De esta manera, si Ω_1 es cualquier subregión de Ω , se asumirá que la masa del fluido en Ω_1 en un tiempo t es dada por

$$m(\Omega_1, t) = \int_{\Omega_1} \rho(\mathbf{x}, t) dV(\mathbf{x}),$$

donde dV es el diferencial de área en dos dimensiones y diferencial de volumen en tres dimensiones. Con esta notación, la razón de cambio de masa en Ω_1 es

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} m(\Omega_1, t) &= \frac{d}{dt} \int_{\Omega_1} \rho(\mathbf{x}, t) dV(\mathbf{x}) \\ &= \int_{\Omega_1} \frac{d\rho}{dt}(\mathbf{x}, t) dV(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (1.1)$$

Sea $\partial\Omega_1$ la frontera de la subregión Ω_1 que se supone suficientemente suave, sea ν la normal exterior unitaria sobre $\partial\Omega_1$ y sea dS el diferencial de superficie en $\partial\Omega_1$. La razón de flujo de volumen a través de $\partial\Omega_1$, por unidades de área, es $\mathbf{u} \cdot \nu$ y la razón de flujo de masa por unidades de área es $\rho \mathbf{u} \cdot \nu$, donde \cdot denota el producto interno euclideo, ver Figura 1.2. De

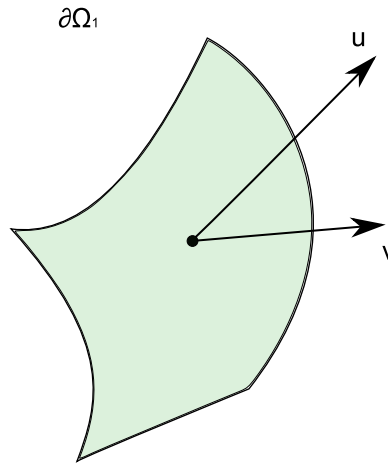


Figura 1.2: Frontera de una región tridimensional $\Omega_1 \subset \Omega$ al interior del fluido.

esta manera la razón de flujo de masa total a través de la frontera $\partial\Omega_1$ es la integral de superficie $\rho\mathbf{u}$ sobre $\partial\Omega_1$, es decir

$$\int_{\partial\Omega_1} \rho\mathbf{u} \cdot \nu dS = \begin{cases} \text{razón de cambio de masa a través} \\ \text{de } \partial\Omega_1 \text{ en la dirección exterior} \end{cases} \quad (1.2)$$

El principio de conservación de masa puede ser más precisamente formulado como: La razón de cambio de masa en Ω_1 es igual a la razón con que la masa atraviesa la frontera $\partial\Omega_1$ en la dirección interior. Esto, en virtud de las relaciones (1.1) y (1.2) implica

$$\int_{\Omega_1} \frac{d}{dt} \rho dV = - \int_{\partial\Omega_1} \rho\mathbf{u} \cdot \nu dS,$$

donde el signo negativo es debido a que es en la dirección interior. Por el teorema de divergencia, esta ecuación es equivalente a

$$\int_{\Omega_1} \left(\frac{\partial\rho}{\partial t} + \text{div}(\rho\mathbf{u}) \right) dV = 0, \quad (1.3)$$

la cual es conocida como la forma integral de la conservación de masa. Ahora, puesto que esta expresión es válida para toda región Ω_1 , por el teorema de localización, se deduce que

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \text{div}(\rho\mathbf{u}) = 0, \quad (1.4)$$

que es conocida como la forma diferencial de la conservación de masa y también denominada la ecuación de continuidad.

Las ecuaciones diferenciales de la forma (1.4) son llamadas leyes de conservación y constituyen el tema general que motiva el estudio de la presente monografía. La ecuación (1.4) no puede ser resuelta directamente, salvo para los casos en los cuales se conoce la relación entre la velocidad y la densidad. Esto implica que se tenga que introducir ecuaciones adicionales y finalmente formar un sistema de ecuaciones, para mayores detalles ver [1].

En un ambiente muy general, en los modelos matemáticos de leyes de conservación se desea encontrar una función vectorial de la forma

$$U = U(x, t) = (U^1(x, t), \dots, U^m(x, t)) \quad (x \in \mathbb{R}^n, t \geq 0),$$

cuyas componentes son las densidades de varias cantidades conservadas de algún sistema físico en investigación; y el flujo, a través de la frontera, estaría gobernado por $F(U) \cdot \nu$, donde $F: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{m \times n}$ es una función suficientemente suave. Así, el problema de Cauchy para un sistema general de leyes de conservación se define como:

$$\begin{cases} U_t + \operatorname{div} F(U) = 0 & \text{en } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ U = U_0 & \text{en } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}, \end{cases} \quad (1.5)$$

donde la función dada $U_0 = (U_0^1, \dots, U_0^m)$ describe la distribución inicial de $U = (U^1, \dots, U^m)$ y es llamada, naturalmente, la condición inicial del sistema. Es conveniente, observar que m es la notación para el número de ecuaciones y n es la dimensión de la variable espacial. Si $m = 1$ se llama escalar y si $m > 1$ se llama sistema. En cambio si $n = 1$ se llama unidimensional y si $n > 1$ se llama multidimensional. Así, si $m = 1$ y $n = 1$ se llama ecuación escalar unidimensional; si $m = 1$ y $n > 1$ se llama ecuación escalar multidimensional; si $m > 1$ y $n = 1$ se llama sistema unidimensional; y en el caso que $m > 1$ y $n > 1$ se llama sistema multidimensional.

El caso en el cual se enfoca el estudio en la presente monografía es un sistema de ecuaciones unidimensional con $m = 3$ y $n = 1$, pero en general se adoptará la siguiente notación

$$U_t + F(U)_x = 0, \quad (1.6)$$

donde las cantidades conservadas son $U : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}^m$ y el flujo es $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$. Además, se usa la notación $A(U)$ para el jacobiano del flujo, es

decir,

$$A_{ij}(U) = \frac{\partial f_i(U)}{\partial u_j}, \quad i, j = 1, \dots, m$$

y las notaciones $\lambda_i(U)$ and $r_i(U)$ con $i = 1, \dots, m$ para los autovalores y autovectores asociados de A e indirectamente asociados con F .

Definición 1.1.1. *Un sistema es llamado hiperbólico si la matriz $A(U)$ tiene autovalores reales para todo U . Y un sistema es llamado estrictamente hiperbólico si los autovalores son distintos. En otras palabras, un sistema de la forma 1.5 es hiperbólico si $\lambda_1(U) \leq \dots \leq \lambda_m(U)$ para todo U y estrictamente hiperbólico si $\lambda_1(U) < \dots < \lambda_m(U)$ para todo U .*

Existen varios ejemplos de sistemas hiperbólicos, para algunos de estos ver [2] y [3].

1.2. Sistema hiperbólico lineal

En esta sección se empieza el estudio de los sistemas de leyes de conservación, repasando la teoría de un coeficiente constante en un sistema hiperbólico lineal. Aquí se puede resolver las ecuaciones explícitamente transformando el sistema a variables características.

A fin de fijar ideas, se considera el siguiente sistema lineal

$$\begin{aligned} U_t + AU_x &= 0, \\ U(x, 0) &= U_0(x), \end{aligned} \tag{1.7}$$

donde $U: \mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}^m$ es la incógnita y $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ es una matriz que no depende de U , siendo el caso más simple aquel en el cual A es constante. Este es un sistema de leyes de conservación de la forma (1.6) con la función de flujo lineal $F(U) = AU$. En el caso escalar, es decir $m = 1$, el problema de Cauchy (1.7) se puede resolver analíticamente y la solución corresponde a una traslación de la condición inicial, es decir, $u(x, t) = u_0(x - at)$. Esta solución se obtiene utilizando el método de las características, para mayor detalles consultar [2, 4]. En el caso de sistemas, es decir $m > 1$, se puede utilizar esta información para introducir soluciones analíticas sin necesidad de utilizar el método de las características directamente. En efecto, el hecho que el sistema sea hiperbólico implica que A sea diagonalizable (ver definición 1.1.1) y por ende que se puede descomponer de la siguiente forma

$$A = K\Lambda K^{-1}, \tag{1.8}$$

donde $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ es la matriz diagonal de los autovalores y $K = [k_1 | k_2 | \dots | k_m]$ es la matriz de autovectores por la derecha, es decir, $\Lambda K = K \Lambda$ o más específicamente

$$\Lambda k_p = \lambda_p k_p \quad \text{para } p = 1, 2, \dots, m. \quad (1.9)$$

Introduciendo el cambio de variable a las denominadas *variables características*, definidas del siguiente modo

$$V = K^{-1}U, \quad (1.10)$$

se puede resolver (1.7). Multiplicando (1.7) a la derecha por K^{-1} y usando el hecho que $K^{-1}\Lambda = \Lambda K^{-1}$ nos da

$$K^{-1}U_t + \Lambda K^{-1}U_x = 0. \quad (1.11)$$

Como K^{-1} es constante, por (1.10) se sigue que

$$V_t + \Lambda V_x = 0. \quad (1.12)$$

La matriz Λ es diagonal, lo cual implica que (1.12) se puede desacoplar en m ecuaciones escalares independientes

$$(V_p)_t + \lambda_p (V_p)_x = 0 \quad p = 1, 2, \dots, m, \quad (1.13)$$

cada uno de las cuales tiene como solución a

$$V_p(x, t) = V_p(x - \lambda_p t, 0). \quad (1.14)$$

Dado que, $V = K^{-1}U$, la información inicial para V_p es simplemente la componente p -ésima del vector.

$$V(x, 0) = K^{-1}U_0(x). \quad (1.15)$$

Finalmente, la solución del sistema original es recuperada a través de (1.10):

$$U(x, t) = KV(x, t). \quad (1.16)$$

Al observar que el vector $V_p(x, t)$ es el coeficiente de k_p en una expansión en términos de los autovectores del vector $U(x, t)$. Por lo tanto, (1.16) puede ser escrita como

$$U(x, t) = \sum_{p=1}^m V_p(x, t) k_p. \quad (1.17)$$

Combinando esto con las soluciones de (1.14), del desacoplamiento de las ecuaciones escalares, se obtiene

$$U(x, t) = \sum_{p=1}^m V_p(x - \lambda_p t, 0) k_p. \quad (1.18)$$

Observar que $U(x, t)$ depende sólo de la información inicial de los m puntos $x - \lambda_p t$, cuyo dominio de dependencia esta dado por el conjunto $\mathcal{D}(\bar{x}, \bar{t}) = \{x = \bar{x} - \lambda_p \bar{t}, p = 1, 2, \dots, m\}$

Las curvas $x = x_0 + \lambda_p t$ que satisfacen $x'(t) = \lambda_p$ son “la familia de las p -ésimas características” o simplemente “ p -características”. Estas son líneas rectas en el caso de un sistema con coeficientes constantes. Observar que para un sistema estrictamente hiperbólico, las m distintas curvas características pasan a través de cada punto del plano x - t . El coeficiente $V_p(x, t)$ del autovector k_p en la expansión del autovector (1.17) de $U(x, t)$ es constante a lo largo de cualquier característica.

Example 1. Considerese el siguiente sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial t} + \rho_0 c_0^2 \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \end{cases} \quad (1.19)$$

Este sistema describe la propagación de ondas acústicas planas (de pequeñas perturbaciones) en un medio en reposo. Aquí u es la velocidad del medio perturbado y p , la presión de este medio. Las constantes ρ_0 , c_0 están relacionadas con las propiedades del medio en reposo: ρ_0 es su densidad, y c_0 , una constante que caracteriza su compresibilidad. Las ecuaciones del sistema se llaman también ecuaciones de la acústica.

Veamos si el sistema es hiperbólico, es decir, si la matriz constante es diagonalizable con autovalores reales. En efecto, el sistema anterior lo podemos escribir como sigue

$$\begin{pmatrix} u \\ p \end{pmatrix}_t + \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\rho_0} \\ \rho_0 c_0^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u \\ p \end{pmatrix}_x = 0,$$

es decir, el sistema (1.19) se puede escribir en la forma (1.7) con

$$U = \begin{pmatrix} u \\ p \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\rho_0} \\ \rho_0 c_0^2 & 0 \end{bmatrix}.$$

En seguida, se observa que el polinomio característico $P(\lambda) = |A - \lambda I|$ es

$$P(\lambda) = \left| \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\rho_0} \\ \rho_0 c_0^2 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right| = \left| \begin{bmatrix} -\lambda & \frac{1}{\rho_0} \\ \rho_0 c_0^2 & -\lambda \end{bmatrix} \right| = \lambda^2 - c_0^2,$$

el cual tiene raíces reales distintas, dado que

$$\Delta = 0^2 - 4 \cdot 1 \cdot -c_0^2 = 4c_0^2 > 0.$$

Por consiguiente, el sistema (1.19) es estrictamente hiperbólico.

Example 2. Considerese el siguiente sistema de ecuaciones de Cauchy Riemann

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \end{cases} \quad (1.20)$$

Este sistema surge de manera natural al estudiar las condiciones de diferenciabilidad de una función de variable compleja. A continuación se analiza si el sistema es hiperbólico, es decir, si la matriz constante es diagonalizable con autovalores reales. El sistema (1.20) se puede reescribir como sigue

$$\begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix}_t + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix}_x = 0,$$

entonces es un sistema de la forma (1.7) con

$$U = \begin{pmatrix} u \\ p \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sin embargo, en este caso el polinomio característico esta dado por

$$P(\lambda) = \left| \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right| = \left| \begin{bmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix} \right| = \lambda^2 + 1,$$

el cual tiene raíces complejas, dado que el discriminante está dado por

$$\Delta = 0^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -4 < 0.$$

y por lo tanto el sistema (1.20) no es hiperbólico.

1.3. La Ecuación de Euler unidimensional

En esta sección se presentará el sistema de ecuaciones de Euler unidimensionales, el cual consiste de 3 ecuaciones en derivadas parciales y una ecuación algebraica llamada ecuación de estado, utilizada para cerrar el sistema, dado que las variables que se buscan son 4. Existen en la literatura, formulaciones multidimensionales de este sistema, para mayores detalles consultar [3, 5, 4]. Sin embargo, esto escapa a los intréses de la presente monografía.

En la sección 1.1 se presento una deducción detallada de la ecuación de continuidad. La deducción de las otras ecuaciones del sistema requieren de varias suposiciones adicionales y para un detalle de esto se debe consultar [1]. En lo que sigue, simplemente recordamos que la formulación conservativa de la ecuación de Euler, en forma diferencial, ver (1.6), donde U y $F(U)$ son los vectores de las variables conservativas y flujo, dados respectivamente por

$$U = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ E \end{bmatrix}, \quad F(U) = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ u(E + p) \end{bmatrix}. \quad (1.21)$$

Aquí ρ es la densidad, p la presión, u velocidad del fluido y E es la energía total por unidad de volumen

$$E = \rho\left(\frac{1}{2}u^2 + e\right), \quad (1.22)$$

donde e es la energía interna específica dada por la ecuación de estado

$$e = e(\rho, p). \quad (1.23)$$

Para los gases ideales se tiene la siguiente expresión

$$e = e(\rho, p) = \frac{p}{(\gamma - 1)\rho}, \quad (1.24)$$

con $\gamma = c_p/c_v$ denotando la razón de calor específico. En algunos casos es necesario definir la velocidad del sonido, la cual está dada por

$$a = \sqrt{\frac{\left(\frac{p}{\rho^2} - e_p\right)}{e_p}} = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}. \quad (1.25)$$

Las ecuaciones de Euler, pueden ser escritas de una forma cuasi lineal, no conservativa,

$$U_t + A(U)U_x = 0, \quad (1.26)$$

donde $A(U)$ está dado por (1.27). Esta ecuación no es completamente equivalente a la ecuación, salvo para el caso en el que U sea suave, lo cual a menudo no sucede en leyes de conservación no lineales.

Proposición 1.3.1. *La matriz jacobiana del flujo de Euler, dado por la ecuación (1.21), en términos de las variables conservadas, esta dada por*

$$A(U) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2}(\gamma - 3)\left(\frac{u_2}{u_1}\right)^2 & (3 - \gamma)\left(\frac{u_2}{u_1}\right) & \gamma - 1 \\ -\frac{\gamma u_2 u_3}{u_1^2} + (\gamma - 1)\left(\frac{u_2}{u_1}\right)^3 & \frac{\gamma u_3}{u_1} - \frac{3}{2}(\gamma - 1)\left(\frac{u_2}{u_1}\right)^2 & \gamma\left(\frac{u_2}{u_1}\right) \end{bmatrix}. \quad (1.27)$$

Demostración. Expresando todas las componentes f_i del vector de flujo F en términos de las componentes u_i del vector de las variables conservativas U , es decir, $u_1 \equiv \rho$, $u_2 \equiv \rho u$ y $u_3 \equiv E$. Esto implica que $f_1 = u_2 \equiv \rho u$. Para encontrar f_2 y f_3 primero se necesita expresar la presión p en términos de las variables conservativas. De (1.22) y (1.24) se tiene

$$E = \rho \left(\frac{1}{2} u^2 + e \right), \quad e = \frac{p}{(\gamma - 1)\rho}.$$

Se sabe que

$$u_3 = E = \rho \left(\frac{1}{2} u^2 + e \right), \quad \rho = u_1$$

por lo tanto

$$u_3 = u_1 \left(\frac{1}{2} u^2 + \frac{p}{(\gamma - 1)u_1} \right) = \frac{1}{2} u^2 u_1 + \frac{p}{(\gamma - 1)}, \quad u = \frac{u_2}{u_1}$$

de lo cual se obtiene el valor de p en términos de las variables conservativas

$$p = (\gamma - 1) \left(u_3 - \frac{1}{2} \frac{u_2^2}{u_1} \right)$$

De esta manera el vector flujo F puede ser escrito como

$$F(U) = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} u_2 \\ \frac{1}{2}(3 - \gamma)\frac{u_2^2}{u_1} + (\gamma - 1)u_3 \\ \gamma\frac{u_2}{u_1}u_3 - \frac{1}{2}(\gamma - 1)\frac{u_2^3}{u_1^2} \end{bmatrix}$$

y por lo tanto su Jacobiano está dado por (1.27). \square

Otras formas de escribir la matriz jacobiana es por ejemplo, en términos de la velocidad del sonido y la velocidad del fluido:

$$A(U) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2}(\gamma - 3)u^2 & (3 - \gamma)u & \gamma - 1 \\ \frac{1}{2}(\gamma - 2)u^3 - \frac{a^2 u}{\gamma - 1} & \frac{3 - 2\gamma}{2}u^2 + \frac{a^2}{\gamma - 1} & \gamma u \end{bmatrix}, \quad (1.28)$$

o en términos de la entalpía total específica H y la velocidad del fluido:

$$A(U) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2}(\gamma - 3)u^2 & (3 - \gamma)u & \gamma - 1 \\ u \left[\frac{1}{2}(\gamma - 1)u^2 - H \right] & H - (\gamma - 1)u^2 & \gamma u \end{bmatrix}.$$

En este caso la entalpía total específica H y entalpía específica h se definen como

$$H = \frac{(E + p)}{\rho} \equiv \frac{1}{2}u^2 + h, \quad h = e + \frac{p}{\rho}.$$

Proposición 1.3.2. *Los autovalores del matriz Jacobiana A son*

$$\lambda_1 = u - a, \quad \lambda_2 = u, \quad \lambda_3 = u + a \quad (1.29)$$

y los correspondientes autovectores a la derecha son

$$K^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ u - a \\ H - ua \end{bmatrix}, \quad K^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ u \\ \frac{1}{2}u^2 \end{bmatrix}, \quad K^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 \\ u + a \\ H + ua \end{bmatrix} \quad (1.30)$$

Demostración. Usando la expresión (1.28) para A y el polinomio característico

$$|A - \lambda I| = 0,$$

se obtiene

$$(\lambda - u)(\gamma u - \lambda)[2u - \gamma u - \lambda] + (\lambda - u)[-a^2 - (\gamma - 1)u^2 + (\gamma - 1)\gamma u^2] + \Delta = 0,$$

donde

$$\Delta = \frac{1}{2}(\gamma u - \lambda)(1 - \gamma)u^2 - \frac{1}{2}(\gamma - 1)u^2[(1 - 2\gamma)\lambda + \gamma u].$$

Manipulando Δ se observa que también tiene el factor común $(\lambda - u)$, lo cual implica que $\lambda_2 = u$ es una raíz del polinomio característico y así un autovalor de A . Posteriormente, cancelando $(\lambda - u)$ queda

$$\lambda^2 - 2u\lambda + u^2 - a^2 = 0$$

con raíces

$$\lambda_1 = u - a, \quad \lambda_3 = u + a$$

Por consiguiente, los autovalores son: $\lambda_1 = u - a$, $\lambda_2 = u$, $\lambda_3 = u + a$.

Para encontrar los autovectores hay que resolver los sistemas lineales de la forma $AK = \lambda_i K$, $i = 1, 2, 3$ donde $K = [k_1, k_2, k_3]^T$. Al sustituir los valores de λ_i encontrados y resolver los sistemas se obtienen los autovectores dados en (1.30). \square

Los autovalores son todos reales y los autovectores $K^{(1)}$, $K^{(2)}$, $K^{(3)}$ forman un conjunto de autovectores linealmente independientes. De esta forma hemos probado que las ecuaciones de Euler unidimensionales y temporalmente dependientes son hiperbólicas, en el sentido de la definición 1.1.1. De hecho, las ecuaciones son estrictamente hiperbólicas, dado que los autovalores son reales y distintos.

1.4. Problema de Riemann

Definición 1.4.1. *El Problema de Riemann para un sistema hiperbólico se define como el siguiente problema de Cauchy para el cual la condición inicial consiste de dos estados constantes, es decir*

$$\begin{aligned} U_t + F(U)_x &= 0, \\ U(x, 0) = U_{(0)}(x) &= \begin{cases} U_L & \text{si } x < 0 \\ U_R & \text{si } x > 0, \end{cases} \end{aligned} \tag{1.31}$$

donde U_L y U_R son estados constantes de las variables conservadas.

1.4.1. Problema de Riemann para un sistema lineal

Para un sistema lineal con coeficiente constante, el problema de Riemann puede ser explícitamente resuelto. Se verá brevemente que la solución de un

problema de Riemann no lineal tiene una estructura simple, que es bastante similar a la estructura de una solución lineal, para ello se estudiará en mayor detalle el caso lineal.

Se asumirá que el sistema del problema (1.31) es lineal con flujo $F(U) = AU$, es estrictamente hiperbólico, lo que significa que los autovalores de A son reales y distintos. Recordemos que la solución general para el problema lineal es dada por (1.18), lo cual permite simplificar la notación del problema de Riemann si se descompone E_L y U_R como sigue:

$$U_L = \sum_{p=1}^m \alpha_p r_p \quad U_R = \sum_{p=1}^m \beta_p r_p,$$

entonces

$$V_p(x, 0) = \begin{cases} \alpha_p & x < 0 \\ \beta_p & x > 0, \end{cases}$$

y para

$$V_p(x, t) = \begin{cases} \alpha_p & \text{si } x - \lambda_p t < 0 \\ \beta_p & \text{si } x - \lambda_p t > 0. \end{cases} \quad (1.32)$$

Si se denota por $J(x, t)$ el máximo valor de j para cual $x - \lambda_j t > 0$, entonces la solución del problema de Riemann es

$$U(x, t) = \sum_{p=1}^{J(x,t)} \beta_p r_p + \sum_{p=J(x,t)+1}^m \alpha_p r_p \quad (1.33)$$

A continuación se muestra una manera práctica de proceder en el caso de un sistema lineal de 3 componentes, ver Figura 1.3. A continuación se detalla, la determinación de U en el punto fijado (x, t) . En el caso mostrado $V_1 = \beta_1$, mientras que $V_2 = \alpha_2$ y $V_3 = \alpha_3$. Así, la solución en el punto (x, t) es

$$U(x, t) = \beta_1 r_1 + \alpha_2 r_2 + \alpha_3 r_3. \quad (1.34)$$

Observe que la solución es la misma para cualquier punto ubicado entre las características $x' = \lambda_1$ y $x' = \lambda_2$. Cuando se atraviesa la p -ésima característica, el valor de $x - \lambda_p t$ pasa a través de 0 y el correspondiente valor de V_p , saltando de α_p a β_p . Los otros coeficientes V_i ($i \neq j$) permanecen constantes. La solución es constante en cada una de las partes, ver Figura 1.4. Por la p -ésima característica la solución salta con un salto dado por

$$[U] = (\beta_p - \alpha_p) r_p. \quad (1.35)$$

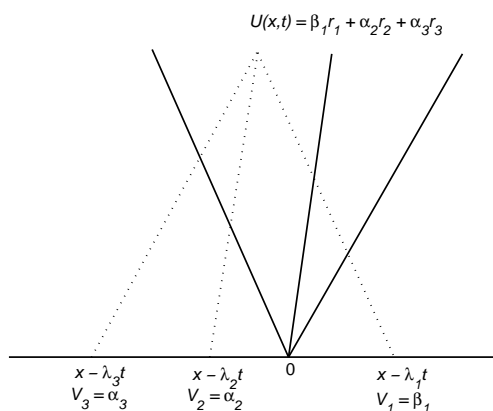


Figura 1.3: Construcción del problema de Riemann en (x, t)

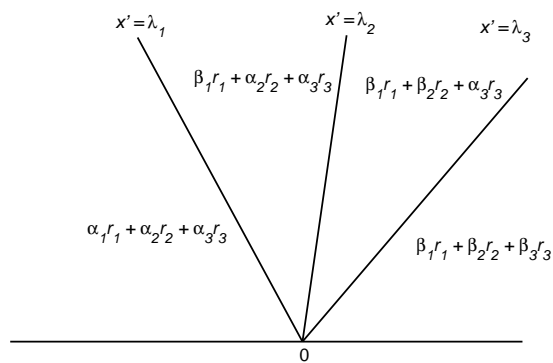


Figura 1.4: Valores de la solución U en cada parte del plano $x-t$

Estos saltos satisfacen una relación que será explicada en detalle en el caso no lineal y que se conoce como la condición de Rankine-Hugoniot. En efecto, para $F(U) = AU$ se tiene

$$[F] = A[U] = (\beta_p - \alpha_p)Ar_p = \lambda_p[U],$$

y λ_p es precisamente la velocidad de propagación de este salto. La solución $U(x, t)$ en (1.33) puede ser escrita alternativamente en términos de estos saltos como

$$U(x, t) = U_L + \sum_{\lambda_p < x/t} (\beta_p - \alpha_p)r_p \quad (1.36)$$

$$U(x, t) = U_R - \sum_{\lambda_p < x/t} (\beta_p - \alpha_p)r_p. \quad (1.37)$$

En un caso especial, podría pasar que el salto inicial $U_R - U_L$ sea un autovector de A , si $U_R - U_L = (\beta_i - \alpha_i)r_i$ para algún i . En este caso $\alpha_p = \beta_p$ para $p \neq i$. Entonces esta discontinuidad se propaga con velocidad λ_i y las otras características llevan saltos de longitud cero. En general, este no es el caso, pero de cualquier modo, el salto $U_R - U_L$ no puede propagarse como una discontinuidad simple, con velocidad arbitraria, sin que viole la condición de Rankine-Hugoniot. Esto puede observarse mejor, encontrando la solución del problema de Riemann dividiendo el salto $U_R - U_L$ en una suma de saltos

$$U_R - U_L = (\beta_1 - \alpha_1)r_1 + \dots + (\beta_m - \alpha_m)r_m, \quad (1.38)$$

cada uno de los cuales puede propagarse con una velocidad apropiada λ_i que satisface la condición de salto de Rankine-Hugoniot.

1.4.2. Problema de Riemann para un sistema no lineal

La solución del problema de Riemann es autosimilar, es decir, de la forma $U(x/t)$ y consiste en $m + 1$ estados constantes separados por m ondas, ver Figura.1.5. Por cada autovalor λ_i hay una familia de ondas. Para sistemas lineales con coeficientes constantes, tal como se vio en la subsección anterior, cada onda es una discontinuidad con velocidad $S_i = \lambda_i$ y define un campo linealmente degenerado. En cambio, para sistemas no lineales las ondas pueden ser discontinuidades como ondas de choque y ondas de contacto o transiciones suaves como rarefacciones. Los posibles tipos de onda presentes en el problema de Riemann para las ecuaciones de Euler dependen

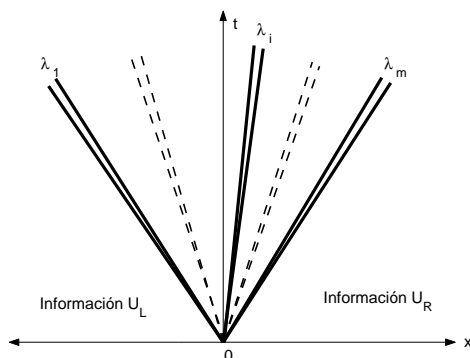


Figura 1.5: Estructura de la solución del problema de Riemann para un sistema de leyes de conservación no lineal

crucialmente de las ecuaciones de estado. En lo que sigue sólo se considerará relaciones constitutivas tal que las únicas ondas presentes sean choques, discontinuidades de contacto y rarefacciones. Más precisiones se darán en el capítulo 2, donde se estudiará el problema de Riemann para los gases ideales.

Antes de presentar las propiedades relevantes de las ondas simples es necesario precisar el concepto de genuinamente no lineal y linealmente degenerado.

Definición 1.4.2. *El i -ésimo campo característico o el par $(\lambda_i(U), R_i(U))$ es llamado genuinamente no lineal si*

$$\nabla \lambda_i(U) \cdot R_i(U) \neq 0, \quad \text{para todo } U \in \mathbb{R}^m$$

y es llamado linealmente degenerado si

$$\nabla \lambda_i(U) \cdot R_i(U) = 0, \quad \text{para todo } U \in \mathbb{R}^m.$$

Ondas de choque

Para una onda de choque los dos estados constantes U_L y U_R son conectados a través de un salto de discontinuidad en un campo genuinamente no lineal y satisfaciendo las siguientes condiciones:

- (a) La condición de Rankine-Hugoniot

$$F(U_R) - F(U_L) = S_i(U_R - U_L). \quad (1.39)$$

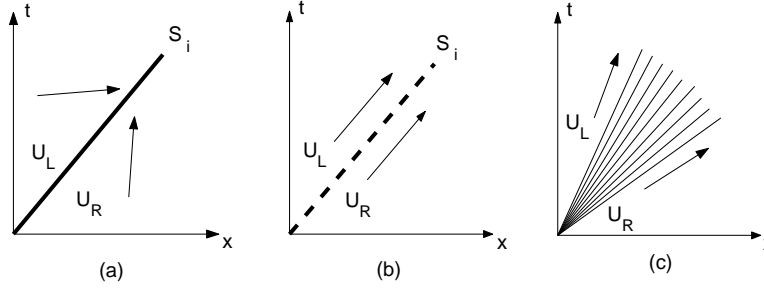


Figura 1.6: Ondas elementales de la solución del problema de Riemann: (a) onda de choque de velocidad S_i , (b) discontinuidad de contacto de velocidad S_i , y (c) onda de rarefacción.

(b) La condición de Entropía

$$\lambda_i(U_L) > S_i > \lambda_i(U_R) . \quad (1.40)$$

La Figura 1.6-(a) muestra una onda de choque de velocidad S_i . La características $dx/dt = \lambda_i$ en ambos lados de la onda corren hacia la onda de choque, lo cual ilustra la característica compresiva de un coque.

Discontinuidad de contacto

Para una discontinuidad de contacto la información de los dos estado U_L y U_R son conectados a través de un salto de discontinuidad de velocidad S_i en un campo linealmente degenerado i y satisfaciendo las siguientes condiciones.

(a) La condición de Rankine-Hugoniot

$$F(U_R) - F(U_L) = S_i(U_R - U_L). \quad (1.41)$$

(b) La condición característica paralela

$$\lambda_i(U_L) = \lambda_i(U_R) = S_i. \quad (1.42)$$

(c) Constancia de las invariantes generalizadas de Riemann a través de la onda

$$\frac{dw_1}{k_1^{(i)}} = \frac{dw_2}{k_2^{(i)}} = \frac{dw_3}{k_3^{(i)}} = \dots = \frac{dw_m}{k_m^{(i)}}. \quad (1.43)$$

La Figura 1.6-(b) muestra una discontinuidad de contacto. Las características a ambos lados de la onda son paralelas a ésta.

Ondas de rarefacción

Para una onda de rarefacción la información de los dos estados U_L y U_R están conectados a través de una transición suave en un campo genuinamente no lineal y reuniendo las siguientes condiciones.

- (a) Constancia de las invariantes generalizadas de Riemann a través de la onda

$$\frac{dw_1}{k_1^{(i)}} = \frac{dw_2}{k_2^{(i)}} = \frac{dw_3}{k_3^{(i)}} = \dots = \frac{dw_m}{k_m^{(i)}}. \quad (1.44)$$

- (a) Divergencia de las características

$$\lambda_i(U_L) < \lambda_i(U_R). \quad (1.45)$$

La Figura 1.6-(c) muestra una onda de rarefacción. Las características en el lado derecho e izquierdo de la onda divergen como lo hace la característica dentro de la onda.

Para un sistema de leyes de conservación general no existe una demostración de existencia global de soluciones, pero si existe un resultado de existencia local bajo la hipótesis que el sistema debe tener campos genuinamente no lineales o linealmente degenerados, para mayores detalles ver [6]. Sin embargo, para el caso de la ecuación de la dinámica de los gases existen diversos resultados, dependiendo de las ecuaciones de estado, inclusive para el caso multidimensional, ver [5].

1.5. Algunos aspectos teóricos de las leyes de conservación

Las leyes de conservación no lineales tienen la propiedad de poseer como soluciones a funciones discontinuas, lo cual implica una gran dificultad para descubrir una noción apropiada de solución débil para el problema de Cauchy. En el caso escalar, tanto unidimensional como multidimensional, la teoría está bien entendida al considerar la noción de solución entrópica. Sin embargo en el caso de sistemas es una teoría con múltiples propuestas pero ninguna propuesta concluyente. A continuación se revisan algunos de estos conceptos.

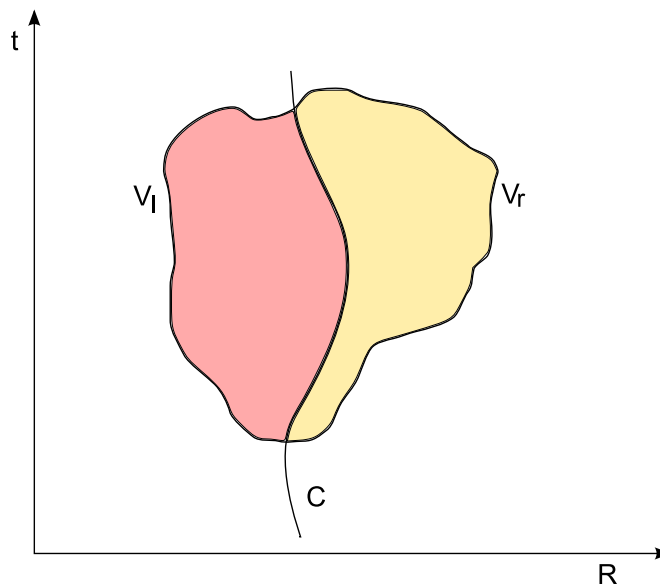


Figura 1.7: Condición de Rankine - Hugoniot

Sea $\Phi : \mathbb{R} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^m$ una función suave con soporte compacto $\Phi = (\phi^1, \dots, \phi^m)$, llamada función de prueba. Temporalmente se asumirá que U es una solución suave del problema de Cauchy (1.5), se toma el producto interno de la ecuación diferencial parcial con la función de prueba Φ y se integra por partes, obteniendo la igualdad

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty U \Phi_t + F(U) \Phi_x dx dt + \int_{-\infty}^\infty U_0 \Phi dx \Big|_{t=0} = 0. \quad (1.46)$$

Esta identidad que se deriva, suponiendo que U es una solución suave, tiene sentido si U es limitada.

Definición 1.5.1. *Se dice que $U \in L^\infty(\mathbb{R}^n \times (0, \infty); \mathbb{R}^m)$ es una solución integral del problema de valor inicial (1.5) si se cumple la igualdad (1.46) para toda función de prueba Φ .*

Considérese ahora la situación en que tenemos una solución integral U de (1.5), la cual es suave en cualquier lado de la curva C , a lo largo de la cual U tiene simples discontinuidades. Más precisamente, se asumirá que $V \subset \mathbb{R} \times (0, \infty)$ es alguna región cortada por la curva lisa C , quedando dividida en dos: la parte izquierda V_l y la parte derecha V_r . Asumiendo que U es suave

en V_l , se selecciona la función de prueba Φ con soporte compacto en V_l y deducimos de (1.46) que

$$U_t + F(U)_x = 0 \quad \text{en } V_l, \quad (1.47)$$

Similarmente, tenemos

$$U_t + F(U)_x = 0 \quad \text{en } V_r, \quad (1.48)$$

siempre que U sea suave en V_r . Ahora se escoge una función de prueba Φ con soporte compacto en V , pero que no necesariamente se anula a lo largo de la curva C . Entonces, utilizando la identidad (1.46) y como Φ tiene soporte compacto contenido en V , se deduce que

$$0 = \iint_{V_l} U\Phi_t + F(U)\Phi_x dxdt + \iint_{V_r} U\Phi_t + F(U)\Phi_x dxdt := I_l + I_r \quad (1.49)$$

Ahora por (1.47)

$$\begin{aligned} I_l &= - \iint_{V_l} [U_t + F(U)_x] \Phi dxdt + \int_C (U_l \nu^2 + F(U_l) \nu^1) \Phi dl \\ &= \int_C (U_l \nu^2 + F(U_l) \nu^1) \Phi dl, \end{aligned} \quad (1.50)$$

Aquí $\nu = (\nu^1, \nu^2)$ es el vector unitario normal a la curva C apuntando de V_l a V_r y el subíndice l denota el límite por la izquierda. Por un argumento similar (1.48) implica

$$I_r = - \int_C (U_r \nu^2 + F(U_r) \nu^1) \Phi dl,$$

donde r denota el límite de la derecha. Agregando esta identidad a (1.50) se deduce de (1.49) que

$$\int_C [(F(U_l) - F(U_r)) \nu^1 + (U_l - U_r) \nu^2] \Phi dl = 0.$$

Esta identidad se obtiene para todas las funciones suaves Φ , por ende esto implica que

$$(F(U_l) - F(U_r)) \nu^1 + (U_l - U_r) \nu^2 = 0 \quad \text{a lo largo de } C. \quad (1.51)$$

La condición (1.51) es llamada la condición de salto de Rankine-Hugoniot y define el criterio de admisibilidad para las soluciones discontinuas. Suponiendo, que la curva C es representada parametricamente como $\{(x, t) | x = s(t)\}$ para alguna función $s: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$. Entonces $\nu = (\nu^1, \nu^2) = (1 + \frac{ds}{dt})^{-\frac{1}{2}}(1, -\frac{ds}{dt})$. Consecuentemente (1.51) se reescribe como

$$F(U_l) - F(U_r) = \frac{ds}{dt}(U_l - U_r), \tag{1.52}$$

en V a lo largo de la curva C . Introduciendo la siguiente notación

$$\begin{aligned} [[U]] &= U_l - U_r = \text{salta en } U \text{ a través de la curva } C, \\ [[F(U)]] &= F(U_l) - F(U_r) = \text{salta en } F(U), \\ \sigma &= \frac{ds}{dt} = \text{velocidad de la curva } C. \end{aligned}$$

se puede reescribir (1.52) en una manera más sintética como

$$[[F(U)]] = \sigma [[U]], \tag{1.53}$$

la cual es válida a lo largo de la curva de discontinuidad.

La condición de Rankine-Hugoniot resulta insuficiente para demostrar unicidad y una condición adicional es requerida. Esta condición adicional es la condición de entropía. Para el caso escalar la condición de entropía más general es la de Kruzkov. Sin embargo para sistemas existen varias condiciones la mayoría no equivalentes (ver [3]). En la presente monografía y debido a que el enfoque es estudiar la ecuación de Euler unidimensional se considera una solución entrópica en el sentido de Lax.

Definición 1.5.2. *Una curva discontinua C que se propaga con velocidad σ dada por (1.53) satisface la condición de entropía si*

$$\lambda(U_l) > \sigma > \lambda(U_r).$$

Finalmente, se presenta un aspecto importante y que justifica, que la ecuación de Euler se pueda escribir bajo distintos sistemas de coordenadas sin perder la hiperbolicidad. Este es un resultado válido para cualquier sistema estrictamente hiperbólico bajo el supuesto que el cambio de coordenadas sea un difeomorfismo, es decir una función biyectiva que es diferenciable tanto ella como su inversa.

Theorem 1. (*Invarianza de Hiperbolicidad bajo el cambio de coordenadas*). Sea U una solución suave del siguiente sistema estrictamente hiperbólico

$$U_t + B(U)U_x = 0 \quad \text{en } \mathbb{R} \times (0, \infty),$$

Suponiendo que $\Phi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ es un difeomorfismo con inversa Ψ . Entonces

$$\tilde{U} := \Phi(U), \quad (1.54)$$

resuelve el sistema estrictamente hiperbólico

$$\tilde{U}_t + \tilde{B}(\tilde{U})\tilde{U}_x = 0 \quad \text{en } \mathbb{R} \times (0, \infty), \quad (1.55)$$

para

$$\tilde{B}(\tilde{z}) := D\Phi(\Psi(\tilde{z}))B(\Psi(\tilde{z}))D\Psi(\tilde{z}) \quad (\tilde{z} \in \mathbb{R}^m). \quad (1.56)$$

Demostración. Mediante calculos directos se tiene que $\tilde{U}_t = D\Phi(U)U_t$, y $\tilde{U}_x = D\Phi(U)U_x$ y así la ecuación (1.55) es válida para $B(\tilde{z}) = D\Phi(z)B(z)D\Phi^{-1}(z)$, donde $\tilde{z} = \Phi(z)$. Sustituyendo $z = \Psi(\tilde{z})$, se obtiene (1.56).

Ahora, se debe demostrar que el sistema (1.55) es estrictamente hiperbólico. Si $\lambda_k(z)$ es un autovalor de $B(z)$, con el correspondiente autovector derecho $r_k(z)$, tenemos

$$B(z)r_k(z) = \lambda_k(z)r_k(z),$$

enseguida

$$\tilde{r}_k(\tilde{z}) := D\Phi(\Psi(\tilde{z}))r_k(\Psi(\tilde{z})), \quad (1.57)$$

$$\tilde{\lambda}_k(\tilde{z}) := \lambda_k(\Psi(\tilde{z})), \quad (1.58)$$

se calcula

$$\tilde{B}(\tilde{z})\tilde{r}_k(\tilde{z}) = \tilde{\lambda}_k(\tilde{z})\tilde{r}_k(\tilde{z}). \quad (1.59)$$

Similarmente si $l_k(z)$ es una autovector izquierdo, tenemos

$$\tilde{l}_k(\tilde{z}) := l_k(\Psi(\tilde{z}))D\Psi(\tilde{z}), \quad (1.60)$$

y se calcula

$$\tilde{l}_k(\tilde{z})\tilde{B}(\tilde{z}) = \tilde{\lambda}_k(\tilde{z})\tilde{l}_k(\tilde{z}). \quad (1.61)$$

En vista de (1.57)-(1.61) concluimos que el sistema (1.55) es estrictamente hiperbólico \square

Capítulo 2

El problema de Riemann para las ecuaciones de Euler

En este capítulo se presentará la forma de cómo se llegó a la solución del problema de Riemann para las ecuaciones de Euler, tanto para gases ideales como covolúmenes. La metodología se presenta detalladamente para el caso del gas ideal. Luego se discute la formación del vacío y se proporcionará una solución exacta de los tres casos en los que pueden ocurrir. Se dará particular énfasis a la verificación de las soluciones. Esto será útil para proporcionar la solución completa y para utilizarlo en el método de Godunov.

2.1. Introducción

El propósito de este capítulo es dar a conocer en forma detallada la solución exacta al problema de Riemann para las ecuaciones de Euler unidimensionales para el caso de los gases ideales y covolúmenes, incluyendo las condiciones de vacío.

La solución exacta del problema de Riemann es útil por diversas razones. Fundamentalmente esta el hecho que representa la solución de un sistema de leyes de conservación hiperbólicas no lineales sujeto a las condiciones iniciales más simples pero no triviales. Además, contiene las características físicas y matemáticas fundamentales de las leyes de conservación. La solución del problema de Cauchy, puede ser vista como el resultado de la superposición no lineal de las soluciones locales de los problemas de Riemann. En el caso de las ecuaciones de Euler el problema de Riemann es una generalización

del conocido problema de tubo de choques, un problema físico básico en la dinámica de los gases.

La solución exacta del problema de Riemann es también una situación invaluable, puesto que es útil en la evaluación y verificación del rendimiento que tiene los algoritmos y programas de métodos numéricos en desarrollo.

Un aspecto a resaltar, dado que es el enfoque principal de la presente monografía es el que la solución del problema de Riemann, exacta o aproximada, puede ser utilizada localmente en los Métodos de Godunov y en extensiones de alto orden.

Un conocimiento detallado de la solución analítica del problema de Riemann es también fundamental para utilizar, evaluar y desarrollar soluciones aproximadas.

No existe una solución analítica general y completa del problema de Riemann para las ecuaciones de Euler, ni siquiera para gases ideales. En realidad ni siquiera para modelos simples, tales como las ecuaciones isentrópicas e isotermales. De cualquier manera, es posible inventar esquemas iterativos, según los cuales la solución puede ser obtenida numéricamente con cierto grado de precisión. Las claves para diseñar una solución de Riemann exacta son: las variables seleccionadas, la ecuación usada, el número de ecuaciones y la técnica para el proceso iterativo, la suposición inicial y el manejo de condiciones no físicas, tales como la presión negativa.

S.k. Godunov es considerado el primero en dar una solución exacta al problema de Riemann para las ecuaciones de Euler. Sin embargo, actualmente, la primera solución del problema de Riemann, dada por Godunov es muy compleja y computacionalmente ineficiente. Después, Godunov propuso una segunda solución exacta del problema de Riemann. Las características distintivas de esta solución son: las ecuaciones usadas son más simples, las variables seleccionadas son más convenientes desde el punto de vista computacional y el proceso iterativo es bastante sofisticado. Mucho del trabajo siguiente contiene las características fundamentales de la segunda solución de Riemann de Godunov. Chorin [1], independientemente, produjo mejoras a la primera solución de Riemann de Godunov. En 1979, van Leer produjo otra mejora a la primera solución de Riemann de Godunov produciendo un esquema que es similar a la segunda solución de Godunov. Smoller propuso un acercamiento bastante diferente. Después, Dutt propuso una implementación práctica del esquema. Gottlieb y Groth presentaron otra solución de Riemann para gases ideales; de los esquemas que ellos probaron, el suyo resultó ser el más eficaz. Toro [5], presentó una solución exacta de Riemann para gases

ideales, cuya eficiencia es comparable a la de Gottlieb y Groth. Más recientemente, Schleicher y Pike también han presentado una nueva solución exacta de Riemann, la cual es la más rápida hasta la fecha.

2.2. Solución general del problema de Riemann para las ecuaciones de Euler

Aquí se describe la estructura de la solución del problema de Riemann como un conjunto de ondas elementales, tales como rarefacción, discontinuidades de contacto y ondas de choque. Cada una de estas ondas son estudiadas en detalle. Las relaciones básicas a través de las ondas son establecidas. Tales relaciones serán usadas para conectar todos los estados desconocidos a la información de los estados conocidos y así encontrar la solución completa del problema de Riemann.

Recordar la definición del problema de Riemann dado en la definición 1.4.1. La analogía física de este problema es la del tubo de choque en la dinámica de los gases, en que para este último las velocidades u_L y u_R en cada lado del diafragma, idealizadas por una discontinuidad inicial, son cero. Los tubos de choque y el problema de tubo de choque han jugado, por un período de más de 100 años, un rol fundamental en la investigación de la dinámica de fluidos.

La estructura de la solución $U(x/t)$ de la ecuación de Euler unidimensional es como se muestra en la figura, ver Figura 2.1. Hay tres ondas asociadas con los tres campos característicos correspondientes a los autovectores $K^{(i)}$, $i = 1, 2, 3$. Se escoge la convención de representar las ondas exteriores, cuando su característica es desconocida, por un par de rayos que nacen del origen y la onda del medio por una línea punteada. Cada familia de ondas es mostrada a lo largo con su correspondiente autovalor. Las tres ondas separadas por cuatro estados constantes. De izquierda a derecha estos son U_L (información del estado izquierdo); $U_{\star L}$ entre la onda 1 y la onda 2; $U_{\star R}$ entre la onda 2 y la onda 3 y U_R (información del estado derecho). Cuando se vea las ondas presentadas en la solución, estas serán de tres tipos: ondas de rarefacción, discontinuidades de contacto y ondas de choque. Para identificar los tipos de ondas se analizará los campos característicos para $K^{(i)}$, $i = 1, 2, 3$.

Proposición 2.2.1. *El campo característico $K^{(2)}$ es linealmente degenerado y los campos característicos $K^{(1)}$, $K^{(3)}$ son genuinamente no lineales.*

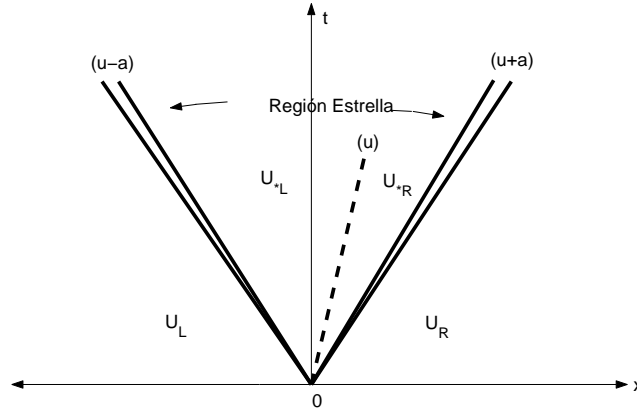


Figura 2.1: Estructura de la solución del problema de Riemann en el plano $x-t$ para las ecuaciones de Euler unidimensionales y temporalmente dependientes. Hay tres familias de ondas asociadas con los autovalores $u - a$, u y $u + a$

Demostración. Para el campo característico $K^{(2)}$ se tiene

$$\nabla \lambda_2(\mathbf{U})K^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \lambda_2}{\partial u_1} & \frac{\partial \lambda_2}{\partial u_2} & \frac{\partial \lambda_2}{\partial u_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ u \\ \frac{1}{2}u^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{u}{\rho} & \frac{1}{\rho} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ u \\ \frac{1}{2}u^2 \end{bmatrix} = 0,$$

por consiguiente, el campo característico $K^{(2)}$ es linealmente degenerado.

Para los campos característicos $K^{(1)}$ y $K^{(3)}$ se tiene

$$\nabla \lambda_1(\mathbf{U})K^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \lambda_1}{\partial u_1} & \frac{\partial \lambda_1}{\partial u_2} & \frac{\partial \lambda_1}{\partial u_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ u - a \\ H - ua \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{u}{\rho} & \frac{1}{\rho} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ u - a \\ H - ua \end{bmatrix} \neq 0,$$

$$\nabla \lambda_3(\mathbf{U})K^{(3)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \lambda_3}{\partial u_1} & \frac{\partial \lambda_3}{\partial u_2} & \frac{\partial \lambda_3}{\partial u_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ u + a \\ H + ua \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{u}{\rho} & \frac{1}{\rho} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ u + a \\ H + ua \end{bmatrix} \neq 0,$$

lo cual implica que son genuinamente no lineales. \square

Las ondas asociadas con el campo característico $K^{(2)}$ es una discontinuidad de contacto y aquellas asociadas con los campos característicos $K^{(1)}$, $K^{(3)}$ serán ondas de rarefacción u ondas de choque. Por supuesto, uno no sabe de antemano que tipo de onda estará presente en el problema de Riemann.

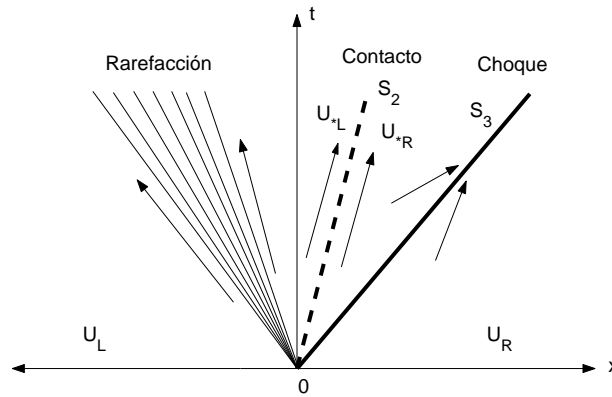


Figura 2.2: Estructura de la solución del problema Riemann en el plano $x - t$ para las ecuaciones de Euler unidimensionales y temporalmente dependientes, en que la onda izquierda es una rarefacción, la onda central es una discontinuidad de contacto y la onda derecha es una onda de choque

La única excepción es la onda asociada al campo característico $K^{(2)}$, la cual es siempre una discontinuidad de contacto, ver Figura 2.2, que muestra un caso particular en el que la onda izquierda es una rarefacción, la onda de en medio es una discontinuidad de contacto y la onda derecha es una onda de choque. Para cada onda se ha dibujado un par de flechas, una en cada lado, para indicar la dirección de la característica del autovalor correspondiente. Para la onda de rarefacción se tiene.

$$\lambda_1(U_L) \leq \lambda_1(U_{\star L}).$$

El autovalor $\lambda_1(U)$ se incrementa monótonamente cuando se cruza la onda de rarefacción de izquierda a derecha y la característica en cada lado de la onda diverge. Para la onda de choque, las características van hacia la onda uniéndose

$$\lambda_3(U_{\star R}) > S_3 > \lambda_3(U_R),$$

que es la condición de entropía, S_3 es la velocidad del choque 3. Para la onda de contacto se tiene

$$\lambda_2(U_{\star L}) = \lambda_2(U_{\star R}) = S_2,$$

donde S_2 es la velocidad de la onda de contacto; las características son paralelas a la onda de contacto. Note que esto es lo que sucede para todos

los campos característicos en sistemas hiperbólicos lineales con coeficientes constantes. Enseguida, se estudiará cada tipo de onda separadamente.

Discontinuidades de contacto

La discontinuidad de contacto en la solución del problema de Riemann para las ecuaciones de Euler puede ser analizada utilizando la autoestructura de las ecuaciones. En particular, las Invariantes Generalizadas de Riemann revelarán que las cantidades cambian a través de la onda. Note que para un sistema hiperbólico general $m \times n$, tal como (1.21) o (1.26), con

$$W = [w_1, w_2, \dots, w_m]^T$$

y autovectores derechos

$$K^{(i)} = [k_1^{(i)}, k_2^{(i)}, \dots, k_m^{(i)}],$$

las i ésimas Invariantes Generalizadas de Riemann son las $(m - 1)$ EDO

$$\frac{dw_1}{k_1^{(i)}} = \frac{dw_2}{k_2^{(i)}} = \frac{dw_3}{k_3^{(i)}} = \dots = \frac{dw_m}{k_m^{(i)}},$$

Usando la autoestructura (1.29) - (1.30) de la formulación conservativa (1.21), para la onda $K^{(2)}$ se tiene

$$\frac{d\rho}{1} = \frac{d(\rho u)}{u} = \frac{dE}{\frac{1}{2}u^2}. \tag{2.1}$$

La manipulación de estas igualdades da

$$p = \text{constante}, \quad u = \text{constante},$$

a través de la onda de contacto. El mismo resultado sigue directamente por inspección del autovector $K^{(2)}$

$$K^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

por la formulación de la variable primitiva

$$W_t + A(W)W_x = 0,$$

donde

$$W = \begin{bmatrix} \rho \\ u \\ p \end{bmatrix}, \quad A(W) = \begin{bmatrix} u & \rho & 0 \\ 0 & u & 1/\rho \\ 0 & \rho u^2 & u \end{bmatrix},$$

los saltos de la onda en ρ , u y p son proporcionales a las componentes correspondientes del autovector. Estas son cero para la velocidad y la presión. El salto en ρ es por lo general no trivial. Para concluir, una onda de contacto es una onda discontinua a través de la cual la presión y la velocidad de la partícula son constantes, pero la densidad salta discontinuamente como lo hacen las variables que dependen de la densidad, tales como la energía interna específica, la temperatura, la velocidad del sonido, la entropía, etc.

Ondas de rarefacción

Las ondas de rarefacción en las ecuaciones Euler están asociadas con los campos característicos $K^{(1)}$ y $K^{(3)}$. Inspección de los autovectores

$$K^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -a/\rho \\ a^2 \end{bmatrix}, \quad K^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad K^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 \\ a/\rho \\ a^2 \end{bmatrix}$$

para la formulación de variables primitivas revelan que ρ , u y p cambian a través de la onda de rarefacción. Ahora se utiliza las Invariantes Generalizadas de Riemann para la autoestructura

$$\lambda_1 = u - a, \quad \lambda_2 = u, \quad \lambda_3 = u + a$$

y

$$K^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -a/\rho \\ 0 \end{bmatrix}, \quad K^{(2)} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial p}{\partial s} \\ 0 \\ a^2 \end{bmatrix}, \quad K^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 \\ a/\rho \\ 0 \end{bmatrix},$$

de la formulación de entropía

$$W_t + A(W)W_x = 0,$$

con

$$A(W) = \begin{bmatrix} u & \rho & 0 \\ a^2/\rho & u & \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} \\ 0 & 0 & u \end{bmatrix}$$

Proposición 2.2.2. *Para las ecuaciones de Euler las Invariantes Generalizadas de Riemann a través de las rarefacciones 1 y 3 son*

$$a \text{ través de } \lambda_1 = u - a \begin{cases} I_L(u, a) = u + \frac{2a}{\gamma-1} = \text{constante} \\ s = \text{constante} \end{cases} \quad (2.2)$$

$$a \text{ través de } \lambda_3 = u + a \begin{cases} I_R(u, a) = u - \frac{2a}{\gamma-1} = \text{constante} \\ s = \text{constante} \end{cases} \quad (2.3)$$

Demostración. A través de una onda asociada con la onda $\lambda_1 = u - a$ se tiene

$$\frac{d\rho}{1} = \frac{du}{-a/\rho} = \frac{ds}{0}.$$

Dos relaciones significativas son

$$u + \int \frac{a}{\rho} d\rho = \text{constante y } s = \text{constante}. \quad (2.4)$$

Similarmente, a través de la onda $\lambda_3 = u + a$ se tiene

$$u - \int \frac{a}{\rho} d\rho = \text{constante y } s = \text{constante}. \quad (2.5)$$

Para obtener (2.2) y (2.3) se necesita evaluar las integrales en (2.4) y (2.5). Primero se observa que por inspección de los autovectores $K^{(1)}$ y $K^{(3)}$ la condición de la constante de entropía, a través de la onda respectiva, es inmediata. Por consiguiente, se puede usar la ley isentrópica

$$p = C\rho^\gamma$$

con la constante C evaluada en la información del estado apropiado (constante). Así la integral es

$$\int \frac{a}{\rho} d\rho = \frac{2a}{\gamma-1}$$

y así las ecuaciones (2.2) y (2.3) son encontradas. \square

Para resumir: una onda de rarefacción es una onda lisa asociada con los campos 1 y 3, a través de la cual ρ , u y p cambian. Las ondas tienen una forma tipo abanico y están encerradas por dos características limitantes correspondientes al principio y fin de la onda. A través de la onda las Invariantes Generalizadas de Riemann se aplican.

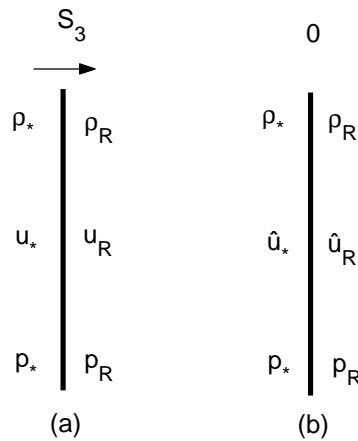


Figura 2.3: Parámetro derecho una onda de choque: (a) marco de referencia estacionario, el tiene una velocidad S_3 ; (b) marco de referencia moviéndose con velocidad S_3 , para que el choque tenga velocidad cero.

Ondas de choque

En el contexto de las ecuaciones de Euler unidimensionales, las ondas de choque son ondas discontinuas asociadas con los campos 1 y 3 genuinamente no lineales. Las tres cantidades ρ , u y p cambian a través de la onda de choque. Considere el campo característico $K^{(3)}$ y asuma que la onda correspondiente es una onda de choque derecho viajando a una velocidad constante S_3 ; ver Figura 2.3. En términos de las variables primitivas se denota el estado anterior al choque por $W_R = (\rho_R, u_R, p_R)^T$ y es estado posterior al choque por $W_\star = (\rho_\star, u_\star, p_\star)^T$. Se esta interesado en deducir relaciones, a través de la onda de choque, entre las cantidades involucradas. Central para el análisis es la aplicación de la Condición de Rankine-Hugoniot. Se encuentra conveniente transformar el problema a un nuevo marco que mueve al choque de tal manera, que éste en el nuevo marco, sea cero; ver Figura 2.3. muestra ambos marcos de referencia.

En el marco transformado (b) los estados anterior y posterior al choque han cambiado en virtud de la transformación. Densidades y presiones permanecen inalterables mientras que las velocidades han cambiado a las velocidades relativas \hat{u}_R y \hat{u}_\star dadas por

$$\hat{u}_\star = u_\star - S_3, \quad \hat{u}_R = u_R - S_3. \quad (2.6)$$

Si se aplica la Condición de Rankine-Hugoniot, en el marco en el cual la velocidad del choque es cero, da

$$\rho_{\star}\widehat{u}_{\star} = \rho_{\text{R}}\widehat{u}_{\text{R}}, \quad (2.7)$$

$$\rho_{\star}\widehat{u}_{\star}^2 + p_{\star} = \rho_{\text{R}}\widehat{u}_{\text{R}}^2 + p_{\text{R}}, \quad (2.8)$$

$$\widehat{u}_{\star}(\widehat{E}_{\star} + p_{\star}) = \widehat{u}_{\text{R}}(\widehat{E}_{\text{R}} + p_{\star}). \quad (2.9)$$

Usando la definición de la energía total E e introduciendo la energía interna específica e , el lado izquierdo de (2.9) se puede escribir como

$$\widehat{u}_{\star}\rho_{\star}\left[\frac{1}{2}\widehat{u}_{\star}^2 + (e_{\star} + p_{\star}/\rho_{\star})\right]$$

y el lado derecho de (2.9) como

$$\widehat{u}_{\text{R}}\rho_{\text{R}}\left[\frac{1}{2}\widehat{u}_{\text{R}}^2 + (e_{\text{R}} + p_{\text{R}}/\rho_{\text{R}})\right].$$

Ahora si se usa la entalpía específica h se tiene

$$h_{\star} = e_{\star} + p_{\star}/\rho_{\star}, \quad h_{\text{R}} = e_{\text{R}} + p_{\text{R}}/\rho_{\text{R}}. \quad (2.10)$$

Usando las ecuaciones (2.7) y (2.9) se llega a

$$\frac{1}{2}\widehat{u}_{\star}^2 + h_{\star} = \frac{1}{2}\widehat{u}_{\text{R}}^2 + h_{\text{R}}. \quad (2.11)$$

Usando (2.7) en (2.8) se obtiene

$$\rho_{\star}\widehat{u}_{\star}^2 = (\rho_{\text{R}}\widehat{u}_{\text{R}})\widehat{u}_{\text{R}} + p_{\text{R}} - p_{\star} = (\rho_{\star}\widehat{u}_{\star})\frac{\rho_{\star}\widehat{u}_{\star}}{\rho_{\text{R}}} + p_{\text{R}} - p_{\star}.$$

Después con algunas manipulaciones se llega a

$$\widehat{u}_{\star}^2 = \left(\frac{\rho_{\text{R}}}{\rho_{\star}}\right)\left[\frac{p_{\text{R}} - p_{\star}}{\rho_{\text{R}} - \rho_{\star}}\right]. \quad (2.12)$$

Por una camino similar obtenemos

$$\widehat{u}_{\text{R}}^2 = \left(\frac{\rho_{\star}}{\rho_{\text{R}}}\right)\left[\frac{p_{\text{R}} - p_{\star}}{\rho_{\text{R}} - \rho_{\star}}\right]. \quad (2.13)$$

Sustituyendo (2.12) - (2.13) en (2.11) da

$$h_{\star} - h_{\text{R}} = \frac{1}{2} (p_{\star} - p_{\text{R}}) \left[\frac{\rho_{\star} + \rho_{\text{R}}}{\rho_{\star} \rho_{\text{R}}} \right], \quad (2.14)$$

Asumiendo que la energía interna específica e es dada por la ecuación de estado (1.23), es entonces más conveniente reescribir la ecuación de la energía (2.14) usando (2.10). Obteniendo

$$e_{\star} - e_{\text{R}} = \frac{1}{2} (p_{\star} + p_{\text{R}}) \left[\frac{\rho_{\star} - \rho_{\text{R}}}{\rho_{\star} \rho_{\text{R}}} \right], \quad (2.15)$$

Observe que hasta ahora no se ha hecho ninguna suposición de la ecuación de estado (1.23). En lo que sigue, se deducirán relaciones de choque que se aplican a los gases ideales en que la ecuación ideal de estado es supuesta. Usando (1.24) en (2.15) y haciendo algunas manipulaciones algebraicas se obtiene

$$\frac{\rho_{\star}}{\rho_{\text{R}}} = \frac{\left(\frac{p_{\star}}{p_{\text{R}}} \right) + \left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right)}{\left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right) \left(\frac{p_{\star}}{p_{\text{R}}} \right) + 1}. \quad (2.16)$$

Esto establece una útil relación entre la razón de densidad $\rho_{\star}/\rho_{\text{R}}$ y la razón de presión p_{\star}/p_{R} a través de la onda de choque. Ahora se introducirá los números Mach

$$M_{\text{R}} = u_{\text{R}}/a_{\text{R}}, \quad M_{\text{S}} = S_3/a_{\text{R}}, \quad (2.17)$$

donde M_{R} es el número Mach del movimiento anterior del choque, en el marco original; M_{S} es el número Mach del choque. Manipulando las ecuaciones (2.13), (2.16) y (2.17) se logra la expresión para la razón de densidad y de presión a través del choque como función del número Mach relativo $M_{\text{R}} - M_{\text{S}}$, es decir

$$\frac{\rho_{\star}}{\rho_{\text{R}}} = \frac{(\gamma + 1)(M_{\text{R}} - M_{\text{S}})^2}{(\gamma - 1)(M_{\text{R}} - M_{\text{S}})^2 + 2}, \quad (2.18)$$

$$\frac{p_{\star}}{p_{\text{R}}} = \frac{2\gamma(M_{\text{R}} - M_{\text{S}})^2 - (\gamma - 1)}{(\gamma + 1)}. \quad (2.19)$$

La velocidad del choque S_3 puede ser relacionada con la razón de densidad y de presión a través de la onda de choque. En términos de la razón de presión (2.19) primero se observa la siguiente relación

$$M_{\text{R}} - M_{\text{S}} = -\sqrt{\left(\frac{\gamma + 1}{2\gamma} \right) \left(\frac{p_{\star}}{p_{\text{R}}} \right) + \left(\frac{\gamma - 1}{2\gamma} \right)}.$$

Esto conduce a una expresión para la velocidad del choque como una función de la razón de presión a través del choque, es decir

$$S_3 = u_R + a_R \sqrt{\left(\frac{\gamma+1}{2\gamma}\right) \left(\frac{p_\star}{p_R}\right) + \left(\frac{\gamma-1}{2\gamma}\right)}. \quad (2.20)$$

Observe que cuando la fuerza del choque tiende a cero, la razón p_\star/p_R tiende a la unidad y la velocidad del choque S_3 se acerca a la velocidad de la característica $\lambda_3 = u_R + a_R$. Se puede obtener una expresión para la velocidad de la partícula u_\star posterior a la onda de choque. De (2.7) se relaciona u_\star a la razón de densidad a través del choque, es decir

$$u_\star = (1 - \rho_R/\rho_\star)S_3 + u_R\rho_R/\rho_\star. \quad (2.21)$$

Las relaciones de choque (2.18), (2.19) y (2.21) definen un estado

$$(\rho_\star, u_\star, p_\star)^T,$$

posterior a un choque para condiciones iniciales dadas $(\rho_R, u_R, p_R)^T$ anteriores al choque y un número Mach de choque M_S , o equivalentemente una velocidad de choque S_3 . Estas relaciones pueden ser útiles para probar problemas que involucran una sola onda de choque. El choque esta asociado a la familia de ondas 3.

El análisis para la onda de choque 1 (lado izquierdo) viajando con velocidad S_1 es totalmente análogo. El estado anterior del choque (lado izquierdo ahora) es denotado por $W_L = (\rho_L, u_L, p_L)^T$ y el estado posterior al choque (lado derecho) por $W_\star = (\rho_\star, u_\star, p_\star)^T$. Como se hizo para el choque 3, se transformará a una estado estacionario de referencia. Las velocidades relativas son

$$\hat{u}_L = u_L - S_1, \quad \hat{u}_\star = u_\star - S_1. \quad (2.22)$$

Los números Mach son

$$M_L = u_L/a_L, \quad M_S = S_1/a_L. \quad (2.23)$$

La relación de la razón de densidad y la presión es

$$\frac{\rho_\star}{\rho_L} = \frac{\left(\frac{p_\star}{p_L}\right) + \left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right)}{\left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right) \left(\frac{p_\star}{p_L}\right) + 1}. \quad (2.24)$$

En términos del número Mach relativo $M_L - M_S$ la razón de la densidad y la presión a través del choque izquierdo puede ser expresada como sigue

$$\frac{\rho_\star}{\rho_L} = \frac{(\gamma + 1)(M_L - M_S)^2}{(\gamma - 1)(M_L - M_S)^2 + 2}, \quad (2.25)$$

$$\frac{p_\star}{p_L} = \frac{2\gamma(M_L - M_S)^2 - (\gamma - 1)}{(\gamma + 1)}. \quad (2.26)$$

La velocidad del choque S_1 se puede obtener de (2.25) ó (2.26). En términos de la razón de la presión (2.26) se tiene

$$M_L - M_S = -\sqrt{\left(\frac{\gamma + 1}{2\gamma}\right)\left(\frac{p_\star}{p_L}\right) + \left(\frac{\gamma - 1}{2\gamma}\right)},$$

que conduce

$$S_1 = u_L + a_L \sqrt{\left(\frac{\gamma + 1}{2\gamma}\right)\left(\frac{p_\star}{p_L}\right) + \left(\frac{\gamma - 1}{2\gamma}\right)}. \quad (2.27)$$

Observe que cuando la fuerza del choque tiende a cero, la razón p_\star/p_L tiende a la unidad y la velocidad del choque S_1 se acerca a la velocidad de la característica $\lambda_1 = u_L - a_L$. La velocidad de la partícula posterior al choque izquierdo es

$$u_\star = (1 - \rho_L/\rho_\star)S_1 + u_L\rho_L/\rho_\star. \quad (2.28)$$

Las relaciones de choque (2.25), (2.26) y (2.28) definen un estado $(\rho_\star, u_\star, p_\star)^T$ posterior a un choque para condiciones iniciales dadas $(\rho_L, u_L, p_L)^T$ anteriores al choque y un número Mach de choque M_S , o equivalentemente un velocidad de choque S_1 . El choque esta asociado a la familia de ondas 1.

2.3. Solución del problema de Riemann para el caso de los gases ideales

El dominio de interés en el plano $x-t$ son los puntos (x, t) con $-\infty < x < \infty$ y $t > 0$. En la práctica uno permite que x pueda variar en un intervalo finito $[x_L, x_R]$ alrededor del punto $x = 0$. En la resolución del problema de Riemann se hará frecuentemente uso el vector $W = (\rho, u, p)^T$ de variables primitivas, en lugar del vector U de variables conservativas, donde ρ es la

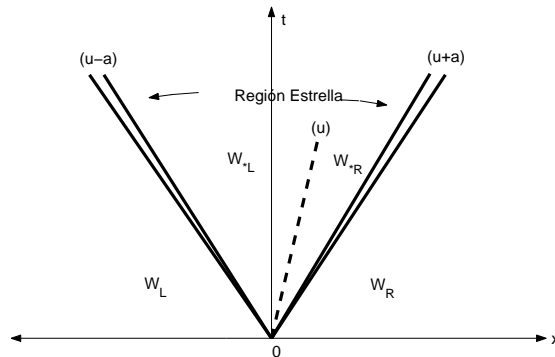


Figura 2.4: Estructura de la solución del problema de Riemann en el plano $x-t$ para las ecuaciones de Euler unidimensionales y temporalmente dependientes

densidad, u la velocidad de la partícula y p la presión. El problema de Riemann es el más simple problema de valores iniciales, no trivial. Esta condición inicial nos muestra que existen dos estados constantes, los cuales en términos de las variables primitivas serían $W_L = (\rho_L, u_L, p_L)^T$ a la izquierda de $x = 0$ y $W_R = (\rho_R, u_R, p_R)^T$ a la derecha de $x = 0$, separados por una discontinuidad en $x = 0$. Físicamente, en el contexto de las ecuaciones de Euler, el problema de Riemann es una generalización del llamado problema tubo de choques en el cual dos gases estacionarios en un tubo ($u_L = u_R = 0$) son separados por un diafragma. La ruptura del diafragma genera un sistema de ondas casi centrado, que típicamente consiste en una onda de rarefacción, una discontinuidad contacto y una onda de choque. Este problema físico es razonablemente bien aproximado, resolviendo el problema de tubo de choques para las ecuaciones de Euler. En el problema de Riemann la velocidad de la partícula u_L y u_R pueden ser distintas de cero, pero la estructura de la solución es la misma que la del problema de tubo de choques.

En general, dadas las ecuaciones de conservación para la dinámica, quedan pendiente las declaraciones del material, es decir la ecuación de estado, determinar no sólo la estructura de la solución del problema de Riemann, sino también el carácter matemático de las ecuaciones. En este capítulo se enfocará nuestra atención a los gases ideales que obedecen a la ecuación calórica de estado

$$e = \frac{p}{(\gamma - 1)\rho}, \tag{2.29}$$

y a los gases covolumenes que obedecen a la siguiente ecuación

$$e = \frac{p(1-b\rho)}{(\gamma - 1)\rho}, \quad (2.30)$$

donde γ es razón de calores específicos, una constante, y b es el covolumen, también una constante. Para el caso en el cual el vacío no esta presente, la solución exacta del problema de Riemann tiene tres ondas, que están asociadas con los autovalores $\lambda_1 = u - a$, $\lambda_2 = u$ y $\lambda_3 = u + a$, ver Figura 2.4. Note que las velocidades de esas ondas no son, en general, las velocidades características dadas por los autovalores. Las tres ondas separan cuatro estados constantes, los cuales de izquierda a derecha son: W_L (al lado izquierdo de $u - a$), $W_{\star L}$, $W_{\star R}$ y W_R (al lado derecho de $u - a$).

La región desconocida entre la onda izquierda y la onda derecha, la región estrella, es dividida por la onda intermedia en dos subregiones: estrella izquierda ($W_{\star L}$) y estrella derecha ($W_{\star R}$). Las ondas intermedias son siempre una discontinuidad de contacto, mientras que las ondas izquierda y derecha (no lineales) son ondas de choque u ondas de rarefacción. Por lo tanto, según el tipo de onda (no lineal) pueden ser cuatro las configuraciones de onda, ver Figura 2.5. Hay dos variaciones de éstas que son sólo de interés cuando utilizamos en la solución los métodos de Godunov, es decir, cuando una onda no lineal es una onda de rarefacción acústica. Con el propósito de construir un esquema de la solución del problema de Riemann es suficiente considerar los cuatro dibujos, ver Figura 2.5.

Un análisis basado en la autoestructura de las ecuaciones de Euler revela que tanto la presión p_{\star} como la velocidad de la partícula u_{\star} , son constantes entre la onda izquierda y la onda derecha; mientras que la densidad toma dos valores constantes $\rho_{\star L}$ y $\rho_{\star R}$. Aquí se presentará una solución, en la cual se hará uso de que tanto la presión como la velocidad de la partícula son constantes en la Región Estrella, para llegar a una sola ecuación algebraica no lineal para la presión p_{\star} . En resumen, las principales cantidades físicas buscadas son: p_{\star} , u_{\star} , $\rho_{\star L}$ y $\rho_{\star R}$.

Se establecerán ecuaciones y estrategias de solución para calcular la presión p_{\star} y la velocidad de la partícula u_{\star} en la Región Estrella.

Proposición 2.3.1. *(Solución para p_{\star} y u_{\star}) La solución para la presión p_{\star} del problema de Riemann para el sistema de Euler con la ecuación de estado de los gases ideales (2.29) esta dada por la raíz de la ecuación algebraica*

$$f(p, W_L, W_R) \equiv f_L(p, W_L) + f_R(p, W_R) + \Delta u = 0, \quad \Delta u \equiv u_R - u_L \quad (2.31)$$

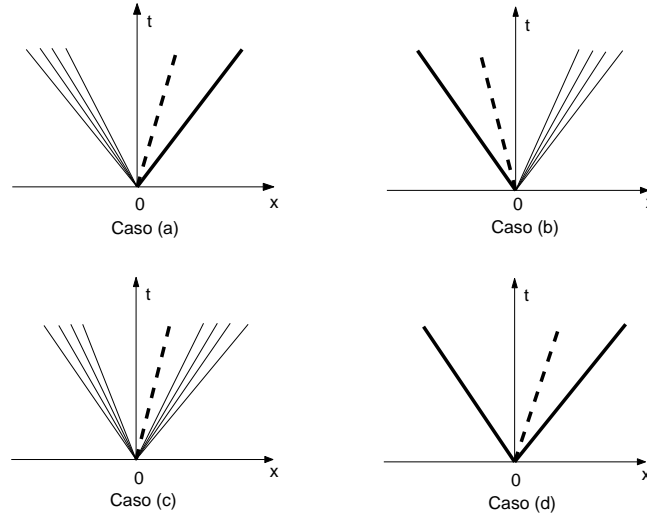


Figura 2.5: Posibles tipos de ondas en la solución del problema de Riemann: (a) rarefacción izquierda, contacto, choque derecho (b) choque izquierdo, contacto, rarefacción derecha (c) rarefacción izquierda, contacto, rarefacción derecha (d) choque izquierdo, contacto, choque derecho.

donde la función f_L esta dada por

$$f_L(p, W_L) = \begin{cases} (p - p_L) \left[\frac{A_L}{p + B_L} \right]^{\frac{1}{2}} & \text{si } p > p_L \text{ (choque)} \\ \frac{2a_L}{(\gamma-1)} \left[\left(\frac{p}{p_L} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} - 1 \right] & \text{si } p \leq p_L \text{ (rarefacción)}. \end{cases} \quad (2.32)$$

la función f_R esta dada por

$$f_R(p, W_R) = \begin{cases} (p - p_R) \left[\frac{A_R}{p + B_R} \right]^{\frac{1}{2}} & \text{si } p > p_R \text{ (choque)} \\ \frac{2a_R}{(\gamma-1)} \left[\left(\frac{p}{p_R} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} - 1 \right] & \text{si } p \leq p_R \text{ (rarefacción)} \end{cases} \quad (2.33)$$

y las constantes dependientes A_L, B_L, A_R, B_R están dadas por

$$\begin{cases} A_L = \frac{2}{(\gamma+1)\rho_L}, & B_L = \frac{(\gamma-1)}{(\gamma+1)}p_L \\ A_R = \frac{2}{(\gamma+1)\rho_R}, & B_R = \frac{(\gamma-1)}{(\gamma+1)}p_R. \end{cases} \quad (2.34)$$

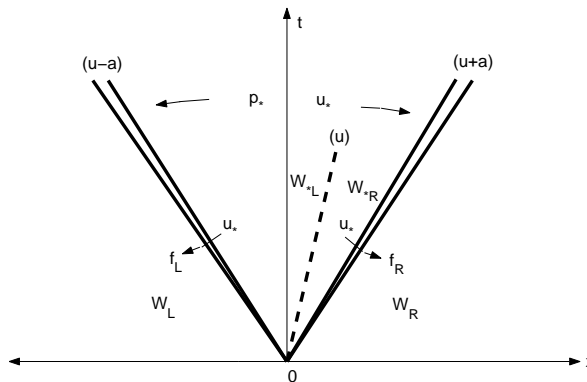


Figura 2.6: Estrategia para resolver el problema de Riemann vía función de presión. La velocidad de la partícula es conectada con la información del lado izquierdo y derecho via las funciones f_L y f_R .

La solución para la velocidad de la partícula u_\star en la Región Estrella es

$$u_\star = \frac{1}{2}(u_L + u_R) + \frac{1}{2}[(f_R(p_\star) - f_L(p_\star))]. \quad (2.35)$$

Antes de proceder a demostrar la proposición, haremos algunos comentarios útiles. Una vez resuelta para la ecuación (2.31) para p_\star , la solución para u_\star es obtenida de (2.35), los otros datos desconocidos son encontrados usando las relaciones normales de la dinámica de los gases. La función f_L determina las relaciones a través de la onda no lineal izquierda y sirve para conectar la velocidad desconocida de la partícula u_\star al estado conocido W_L en el lado izquierdo, ver Figura 2.6; las relaciones dependen del tipo de onda (choque o rarefacción). Los argumentos de f_L son la presión p y la información del estado W_L . Similarmente, la función f_R determina las relaciones a través de la onda derecha y conecta la velocidad desconocida de la partícula u_\star a la información del estado derecho W_R ; Aquí los argumentos son p y W_R . Para nuestra conveniencia, a menudo, omitiremos la información de los argumentos de las funciones f , f_L y f_R . La presión buscada p_\star en la Región Estrella es la solución de la ecuación algebraica (2.31), $f(p) = 0$. Un análisis detallado de la función presión $f(p)$, revela una conducta particularmente simple y que para la información físicamente relevante existe una única solución para la ecuación

2.3.1. Función f_L para un choque Izquierdo

Se asume que la onda izquierda es un choque que se mueve con velocidad S_L , ver Figura 2.7-(a); los valores del pre choque son ρ_L , u_L y p_L ; y los valores del post choque son $\rho_{\star L}$, u_{\star} y p_{\star} .

Se transforman las ecuaciones a un marco de referencia con que se mueve el choque, ver Figura (2.7)b. En el nuevo marco la velocidad del choque es cero y las velocidades relativas son:

$$\hat{u}_L = u_L - S_L \quad \hat{u}_{\star} = u_{\star} - S_L. \quad (2.36)$$

Las condiciones dadas de Rankine Hugoniot son

$$\rho_L \hat{u}_L = \rho_{\star L} \hat{u}_{\star}, \quad (2.37)$$

$$\rho_L \hat{u}_L^2 + p_L = \rho_{\star L} \hat{u}_{\star}^2 + p_{\star}, \quad (2.38)$$

$$\hat{u}_L (\hat{E}_L + p_L) = \hat{u}_{\star} (\hat{E}_{\star L} + p_{\star}). \quad (2.39)$$

Se introduce el flujo de masa Q_L que en vista de (2.37) puede ser escrita como

$$Q_L \equiv \rho_L \hat{u}_L = \rho_{\star L} \hat{u}_{\star}. \quad (2.40)$$

De la ecuación (2.38)

$$(\rho_L \hat{u}_L) \hat{u}_L + p_L = (\rho_{\star L} \hat{u}_{\star}) \hat{u}_{\star} + p_{\star}.$$

Usando (2.40) y resolviendo para Q_L se obtiene

$$Q_L = -\frac{p_{\star} - p_L}{\hat{u}_{\star} - \hat{u}_L}. \quad (2.41)$$

Pero de la ecuación (2.36) $\hat{u}_L - \hat{u}_{\star} = u_L - u_{\star}$. Por lo tanto, Q_L queda

$$Q_L = -\frac{p_{\star} - p_L}{u_{\star} - u_L}, \quad (2.42)$$

de la cual obtenemos

$$u_{\star} = u_L - \frac{(p_{\star} - p_L)}{Q_L}. \quad (2.43)$$

Ahora se esta cerca de haber relacionado u_{\star} con la información del lado izquierdo. Se busca expresar el lado derecho de (2.43) puramente en términos

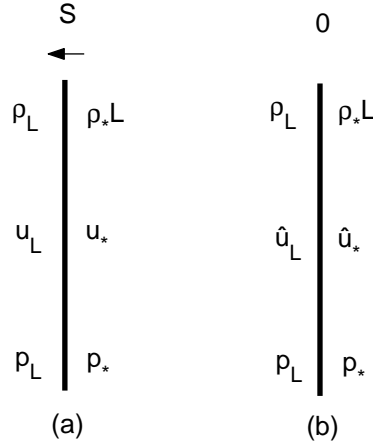


Figura 2.7: La onda izquierda es una onda de choque de velocidad S_L : (a) marco estacionario, velocidad del choque es S_L (b) marco de referencia moviéndose con velocidad S_L , velocidad del choque es cero

de p_{\star} y W_L , lo cual significa que se necesita expresar Q_L como función de p_{\star} y la información del lado izquierdo.

$$\hat{u}_L = \frac{Q_L}{\rho_L}, \quad \hat{u}_{\star} = \frac{Q_L}{\rho_{\star L}}.$$

Reemplazando (2.40) en la ecuación (2.41) se obtiene

$$Q_L^2 = -\frac{p_{\star} - p_L}{\frac{1}{\rho_{\star L}} - \frac{1}{\rho_L}}. \quad (2.44)$$

La densidad $\rho_{\star L}$ esta relacionada con la presión p_{\star} detrás del choque izquierdo via

$$\rho_{\star L} = \rho_L \left[\frac{\left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right) + \left(\frac{p_{\star}}{p_L}\right)}{\left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right) \left(\frac{p_{\star}}{p_L}\right) + 1} \right]. \quad (2.45)$$

Sustituyendo $\rho_{\star L}$ en (2.44) da

$$Q_L = \left[\frac{p_{\star} + B_L}{A_L} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (2.46)$$

Que a su vez reduce a (2.43) a

$$u_{\star} = u_L - f_L(p_{\star}, W_L) \quad (2.47)$$

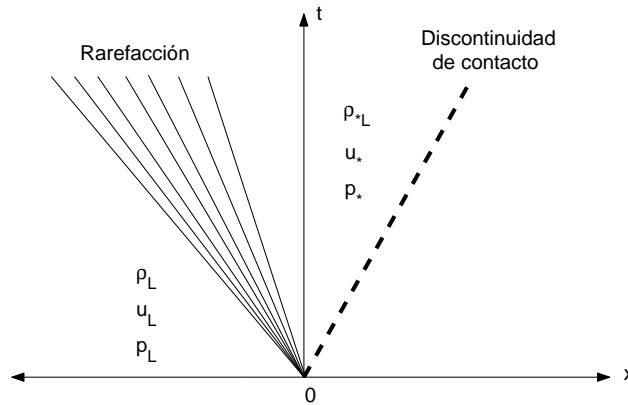


Figura 2.8: La onda izquierda es una onda de rarefacción que conecta el estado W_L con el estado desconocido $W_{\star L}$ en la región estrellada, al lado izquierdo de la discontinuidad de contacto

con

$$f_L(p_{\star}, W_L) = (p_{\star} - p_L) \left[\frac{A_L}{p_{\star} + B_L} \right]^{\frac{1}{2}}$$

y

$$A_L = \frac{2}{(\gamma + 1)\rho_L}, \quad B_L = \frac{(\gamma - 1)}{(\gamma + 1)}p_L.$$

Así, la expresión buscada para f_L para el caso en que la onda izquierda es una onda de choque ha sido obtenida.

2.3.2. Función f_L para la rarefacción Izquierda

Ahora se deducirá una expresión para f_L , para el caso en que la onda izquierda es una onda de rarefacción, ver Figura 2.8. El estado desconocido $W_{\star L}$ es ahora conectado a la información del estado izquierdo W_L usando la relación isentrópica y las Invariantes Generalizadas de Riemann para la onda izquierda. La ley isentrópica

$$p = C\rho^\gamma, \tag{2.48}$$

donde C es una constante, puede ser usada a través de las rarefacciones. C es evaluada en la información inicial del estado izquierdo que es aplicada a la ley isentrópica, es decir

$$p_L = C\rho_L^\gamma,$$

y así la constante C queda

$$C = \frac{p_L}{\rho_L^\gamma},$$

de lo cual se tiene

$$\rho_{\star L} = \rho_L \left(\frac{p_{\star}}{p_L} \right)^{\frac{1}{\gamma}}. \quad (2.49)$$

Luego, a través de la rarefacción izquierda, la Invariante Generalizada de Riemann $I_L(u, a)$ es constante. Por lo que evaluando la constante en la información del estado izquierdo, se obtiene

$$u_L + \frac{2a_L}{\gamma - 1} = u_{\star} + \frac{2a_{\star L}}{\gamma - 1}, \quad (2.50)$$

donde a_L y $a_{\star L}$ denotan la velocidad del sonido en los estados izquierdo y derecho, respectivamente, de la onda izquierda de rarefacción. Ver Figura 2.8. Sustituyendo $\rho_{\star L}$ de (2.49) en la definición de $a_{\star L}$ da

$$a_{\star L} = a_L \left(\frac{p_{\star}}{p_L} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}}, \quad (2.51)$$

y la ecuación (2.50) queda

$$u_{\star} = u_L - f_L(p_{\star}, W_L), \quad (2.52)$$

con

$$f_L(p_{\star}, W_L) = \frac{2a_L}{(\gamma - 1)} \left[\left(\frac{p_{\star}}{p_L} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} - 1 \right].$$

Esta es la expresión requerida para la función f_L para el caso en que la onda izquierda es una onda de rarefacción.

2.3.3. Función f_R para un choque Derecho

Aquí se obtiene la expresión para la función f_R para el caso en que la onda derecha es una onda de choque que viaja con velocidad S_R . La situación es enteramente análoga al caso de la onda de choque izquierdo. Los valores del Pre choque son ρ_R , u_R y p_R y los valores del Post choque son $\rho_{\star R}$, u_{\star} y p_{\star} . En el marco de referencia transformado con que se mueve el choque, la velocidad del choque es cero y las velocidades relativas son

$$\hat{u}_R = u_R - S_R, \quad \hat{u}_{\star} = u_{\star} - S_R. \quad (2.53)$$

La aplicación de las condiciones de Rankine Hugoniot da

$$\begin{aligned}\rho_{\star R} \widehat{u}_{\star} &= \rho_R \widehat{u}_R, \\ \rho_{\star R} \widehat{u}_{\star}^2 + p_{\star} &= \rho_R \widehat{u}_R^2 + p_R, \\ \widehat{u}_{\star} (\widehat{E}_{\star R} + p_{\star}) &= \widehat{u}_R (\widehat{E}_R + p_R).\end{aligned}\tag{2.54}$$

Ahora el flujo de masa esta definido como

$$Q_R \equiv -\rho_{\star R} \widehat{u}_{\star} = -\rho_R \widehat{u}_R.\tag{2.55}$$

Realizando manipulaciones algebraicas similares a las hechas para un choque izquierdo, se obtiene la siguiente expresión para el flujo de masa

$$Q_R = \left[\frac{p_{\star} + B_R}{A_R} \right]^{\frac{1}{2}}\tag{2.56}$$

Por lo tanto, la velocidad de la partícula en la región estrella satisface

$$u_{\star} = u_R + f_R(p_{\star}, W_R),\tag{2.57}$$

con

$$\begin{aligned}f_R(p_{\star}, W_R) &= (p_{\star} - p_R) \left[\frac{A_R}{p_{\star} + B_R} \right]^{\frac{1}{2}}, \\ A_R &= \frac{2}{(\gamma + 1)\rho_R}, \quad B_R = \frac{(\gamma - 1)}{(\gamma + 1)} p_R.\end{aligned}$$

Esta es la expresión buscada para f_R para el caso en que la onda derecha es una onda de choque.

2.3.4. Función f_R para la rarefacción Derecha

La obtención de la función f_R para el caso en que la onda derecha es una onda de rarefacción se lleva a cabo de una manera análoga al caso de la rarefacción izquierda. La ley isentrópica es

$$\rho_{\star R} = \rho_R \left(\frac{p_{\star}}{p_R} \right)^{\frac{1}{\gamma}}\tag{2.58}$$

y la Invariante Generalizada de Riemann $I_L(u, a)$ para una rarefacción derecha es

$$u_{\star} - \frac{2a_{\star R}}{\gamma - 1} = u_R - \frac{2a_R}{\gamma - 1},\tag{2.59}$$

usando (2.58) en la definición de la velocidad del sonido $a_{\star R}$ da

$$a_{\star R} = a_R \left(\frac{p_{\star}}{p_R} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} \quad (2.60)$$

que si se sustituye en (2.59) queda

$$u_{\star} = u_R - f_R(p_{\star}, W_R), \quad (2.61)$$

con

$$f_R(p_{\star}, W_R) = \frac{2a_R}{(\gamma - 1)} \left[\left(\frac{p_{\star}}{p_R} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} - 1 \right].$$

Las funciones f_L y f_R han sido ahora determinadas para todos los posibles modelos de ondas, ver Figura 2.5. Ahora si se elimina u_{\star} de las ecuaciones (2.47) o (2.52) y (2.57) o (2.61) se obtiene una sola ecuación

$$f(p_{\star}, W_L, W_R) \equiv f_L(p_{\star}, W_L) + f_R(p_{\star}, W_R) + \Delta u = 0, \quad (2.62)$$

que es la ecuación requerida (2.31) para la presión. Esto demuestra la primera parte de la demostración. Si se asume que esta ecuación algebraica no lineal es resuelta (numéricamente) para p_{\star} , entonces la solución para la velocidad de la partícula u_{\star} puede ser encontrada de la ecuación (2.47), si la onda izquierda es un choque ($p_{\star} > p_L$); o de la ecuación (2.52), si la onda izquierda es una rarefacción ($p_{\star} \leq p_L$); o de la ecuación (2.57), si la onda derecha es un choque ($p_{\star} > p_R$); o de la ecuación (2.61), si la onda derecha es una onda de rarefacción ($p_{\star} \leq p_R$). También puede ser encontrada de un valor significativo como

$$u_{\star} = \frac{1}{2}(u_L + u_R) + \frac{1}{2}[(f_R(p_{\star}) - f_L(p_{\star}))],$$

que es la ecuación (2.35), y la proposición ha sido demostrada.

2.4. Ejemplos numéricos

Cinco problemas de Riemann son seleccionados para probar la eficacia de la solución de Riemann y la influencia de la suposición inicial para la presión. Las pruebas son también usadas para ilustrar algunos modelos típicos de ondas que resultan de la solución del problema de Riemann. El cuadro 2.1 muestra la información para las cinco pruebas en términos de las variables primitivas. En todos los casos la razón de calor específico es $\gamma = 1,4$.

Prueba	ρ_L	p_L	u_L	ρ_R	p_R	u_R
1	1.0	1.0	0.0	0.125	0.1	0.0
2	1.0	0.4	-2.0	1.0	0.4	2.0
3	1.0	1000.0	0.0	1.0	0.01	0.0
4	1.0	0.01	0.0	1.0	100.0	0.0
5	5.99924	460.894	19.5975	5.99242	46.0950	-6.19633

Cuadro 2.1: Información de las cinco pruebas del problema de Riemann

La prueba 1 es muy apacible y la solución consiste en una rarefacción izquierda, una discontinuidad de contacto y un choque derecho, ver Figura 2.9. La figura muestra perfiles de las soluciones para la densidad, velocidad, presión y energía interna específica a través de la estructura completa de la onda en un tiempo $t = 0,25$. La prueba 2 tiene una solución que consiste en dos rarefacciones muy marcadas y una trivial discontinuidad de contacto estacionaria; la presión p_\star es muy pequeña y ésta puede ocasionar dificultades en el esquema de iteración para encontrar numéricamente p_\star . La figura muestra los perfiles de la solución, ver Figura 2.12. La prueba 2 también es útil en la evaluación de la eficacia de los métodos numéricos para flujos de baja densidad. La prueba 3 tiene como solución una rarefacción izquierda, una discontinuidad de contacto y un choque derecho. La figura muestra los perfiles de la solución, ver Figura 2.15. La prueba 4 tiene como soluciones un choque izquierdo, una discontinuidad de contacto, y una rarefacción derecha, ver Figura 2.18. La prueba 5 esta compuesta de los choques derecho e izquierdo que surgen de las pruebas 3 y 4 respectivamente; esta solución representa la colisión de estos dos choques marcados y consiste en el enfrentamiento de un choque izquierdo (viajando muy lentamente a la derecha), una discontinuidad de contacto viajando a la derecha y una onda de choque viajando a la derecha, ver Figura 2.21.

El cuadro 2.2 muestra los valores calculados de la presión en la región estrella, para resolver la ecuación de la presión $f(p) = 0$ por el método de Newton-Raphson.

La solución exacta y la convergencia para la presión esta dada en la columna 2. Las columnas 3 a la 6 dan los supuestos valores p_{TR} , p_{PV} , p_{TS} y la media aritmética de los valores de la información. El número en parentesis al lado de cada valor supuesto es el número de iteraciones requeridas para la convergencia con una tolerancia $TOL = 10^{-6}$. Para la prueba 1, p_{TR} y p_{TS}

Prueba	p_{\star}	p_{TR}	p_{PV}	p_{TS}	$\frac{1}{2}(p_L + p_R)$
1	0.30313	0.30677(3)	0.55000(5)	0.31527(3)	0.55(5)
2	0.00189	exact(1)	TOL(8)	TOL(8)	0.4(9)
3	460.894	912.449(5)	500.005(4)	464.108(3)	500.005(4)
4	46.0950	82.9831(5)	50.005(4)	46.4162(3)	50.005(4)
5	1691.64	2322.65(4)	781.353(5)	1241.21(4)	253.494(6)

Cuadro 2.2: Supuestos valores p_0 para esquema de iteración. Al lado de cada condición es necesario el número de iteraciones para la convergencia (en parentesis)

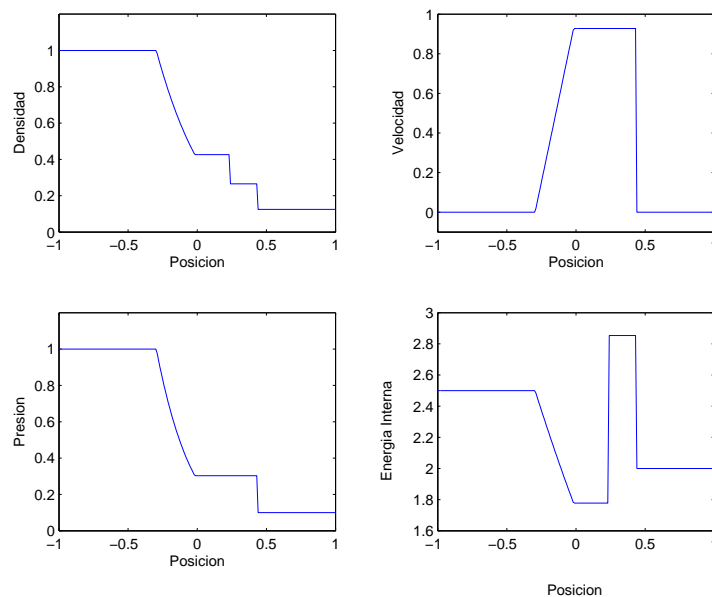


Figura 2.9: Prueba 1: Solución exacta para la densidad, velocidad, presión y energía interna específica en un tiempo $t = 0,25$

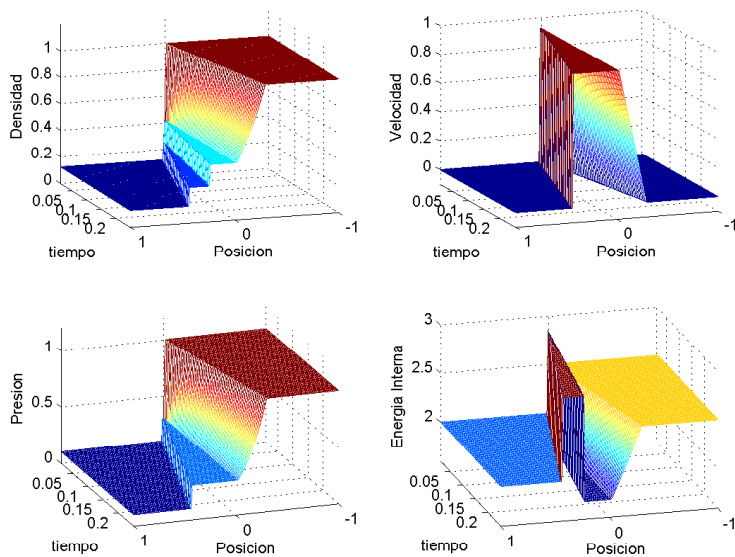


Figura 2.10: Visión 3D de la prueba 1

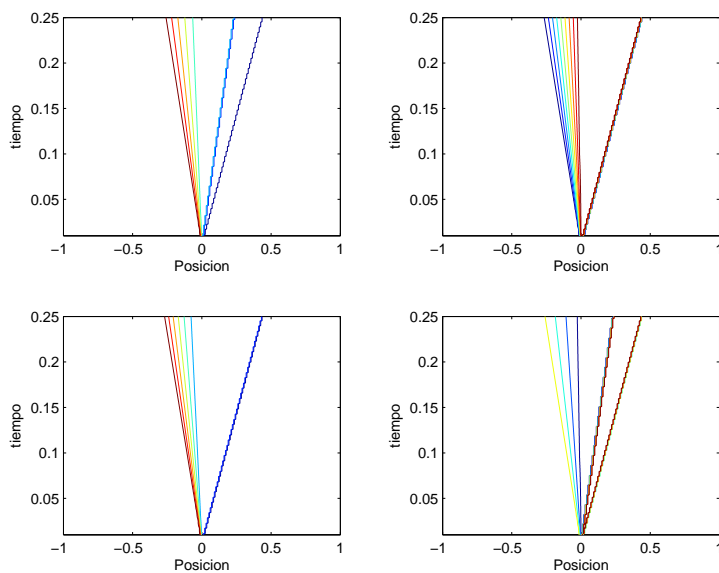


Figura 2.11: Características de la prueba 1

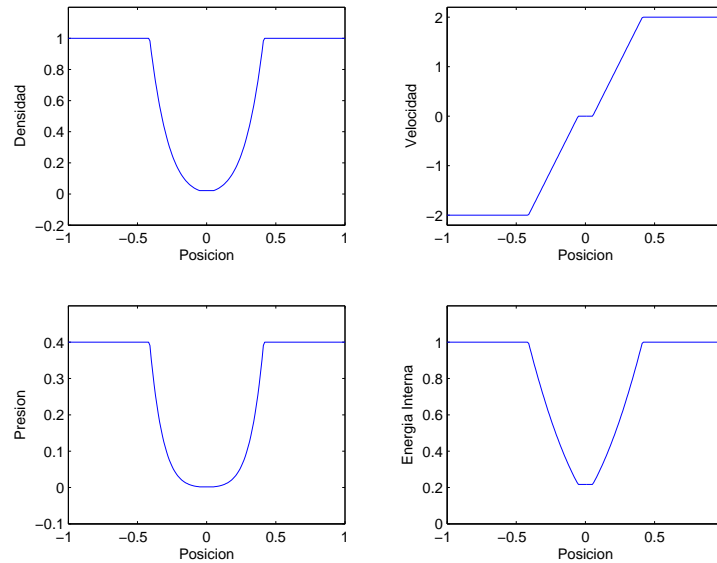


Figura 2.12: Prueba 2: Solución exacta para la densidad, velocidad, presión y energía interna específica en un tiempo $t = 0,15$

son el mejor valor supuesto para p_0 . Para la prueba 2, p_{TR} es actualmente la solución exacta (dos rarefacciones). Excluyendo la prueba 2, p_{TS} es la mejor suposición global.

En una aplicación típica de la solución exacta de Riemann a un método numérico, la mayoría de los problemas de Riemann consistirán en estados cercanos que pueden ser aproximados con precisión por el simple valor de p_{PV} .

Habiendo encontrado p_{\star} , la solución u_{\star} para la velocidad de la partícula viene dada por

$$u_{\star} = \frac{1}{2}(u_L + u_R) + \frac{1}{2}[(f_R(p_{\star}) - f_L(p_{\star}))]$$

y los valores de las densidades $\rho_{\star L}$, $\rho_{\star R}$ viene dada por las apropiadas ondas relacionadas. El cuadro 2.3 muestra las soluciones exactas para la presión p_{\star} , velocidad u_{\star} , densidades $\rho_{\star L}$ y $\rho_{\star R}$ para las pruebas 1 a la 5.

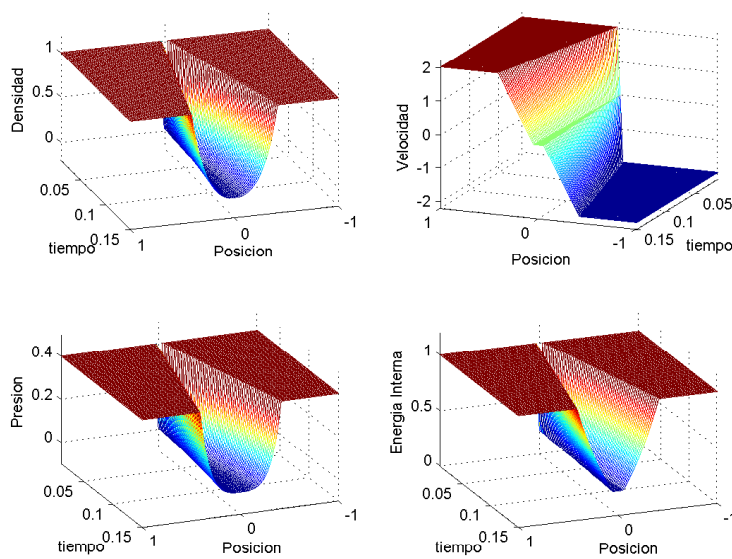


Figura 2.13: Visión 3D de la prueba 2

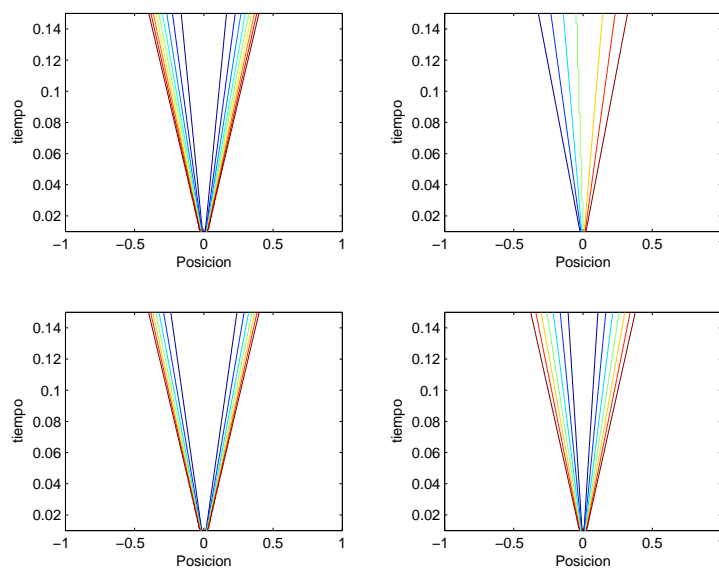


Figura 2.14: Características de la prueba 2

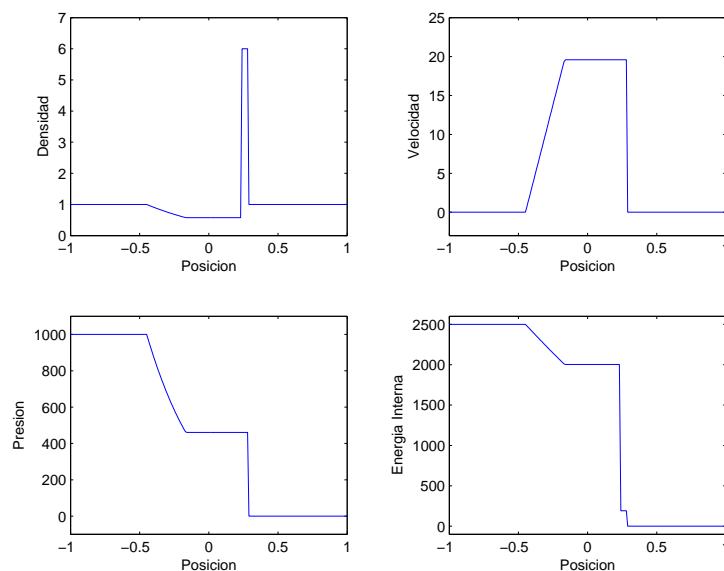


Figura 2.15: Prueba 3: Solución exacta para la densidad, velocidad, presión y energía interna específica en un tiempo $t = 0,012$

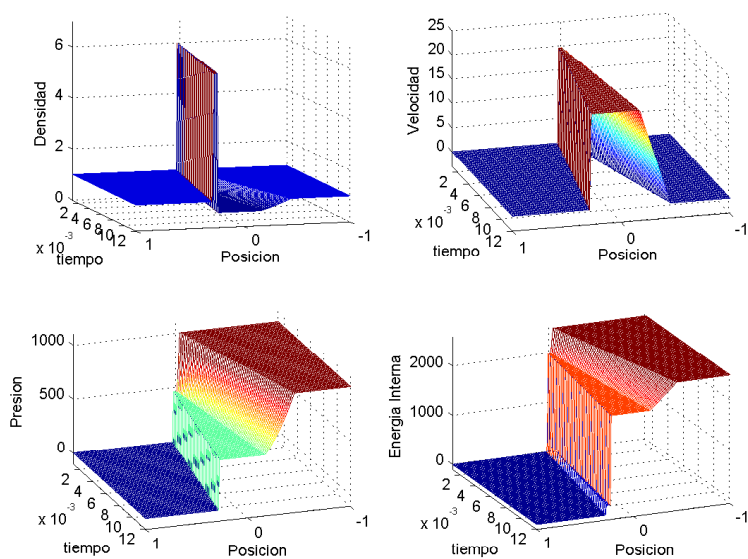


Figura 2.16: Visión 3D de la prueba 3

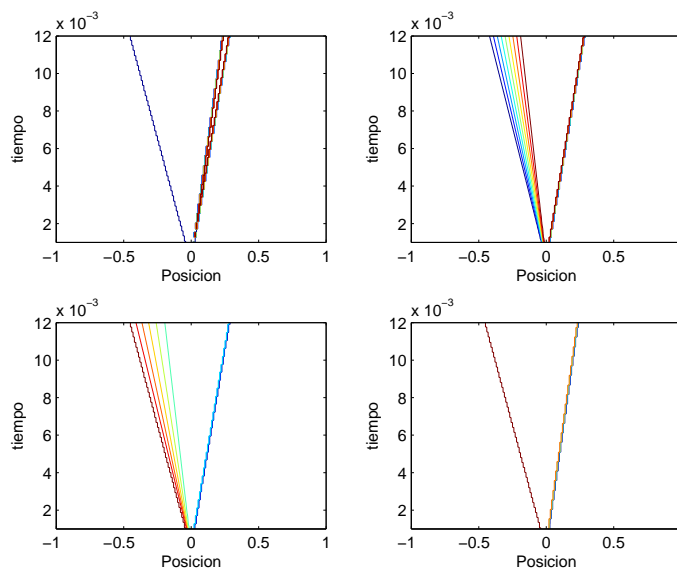


Figura 2.17: Características de la prueba 3

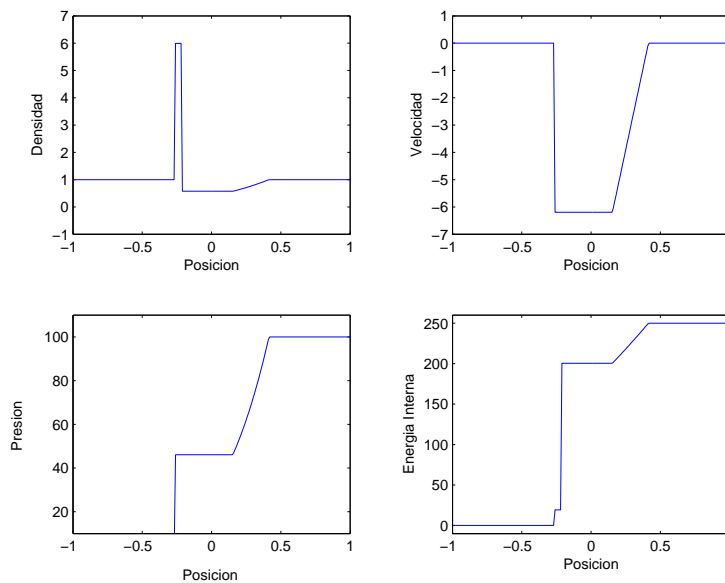


Figura 2.18: Prueba 4: Solución exacta para la densidad, velocidad, presión y energía interna específica en un tiempo $t = 0,035$

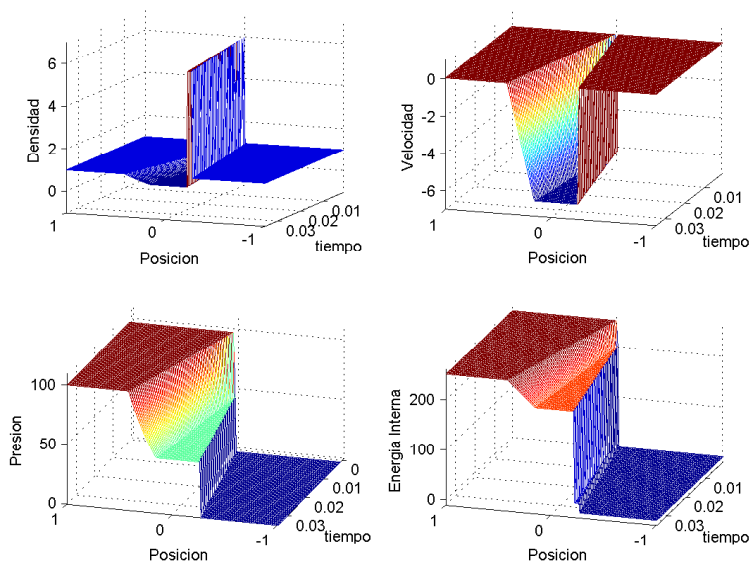


Figura 2.19: Visión 3D de la prueba 4

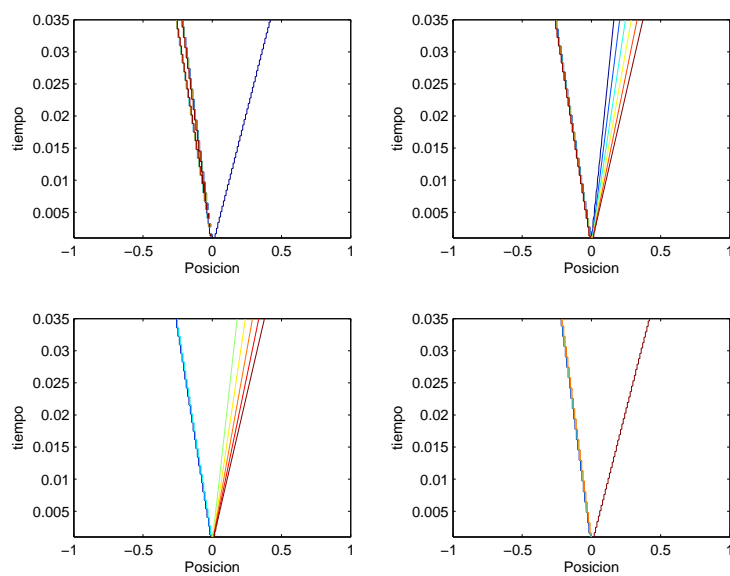


Figura 2.20: Características de la prueba 4

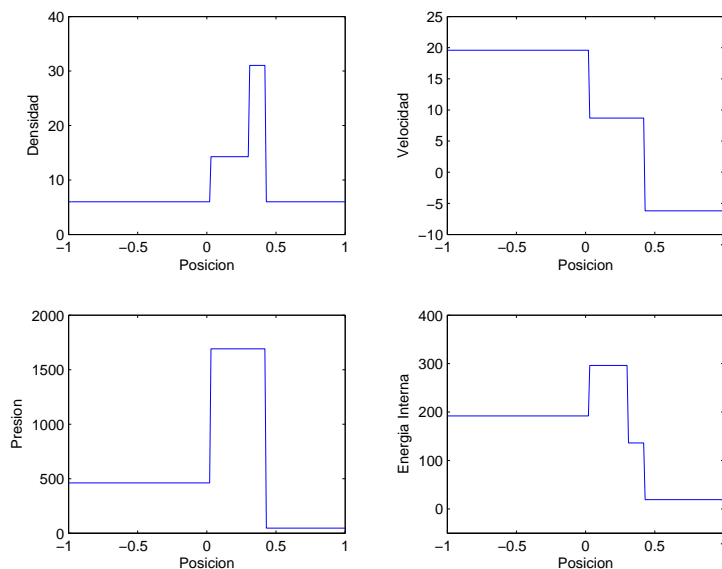


Figura 2.21: Prueba 5: Solución exacta para la densidad, velocidad, presión y energía interna específica en un tiempo $t = 0,035$

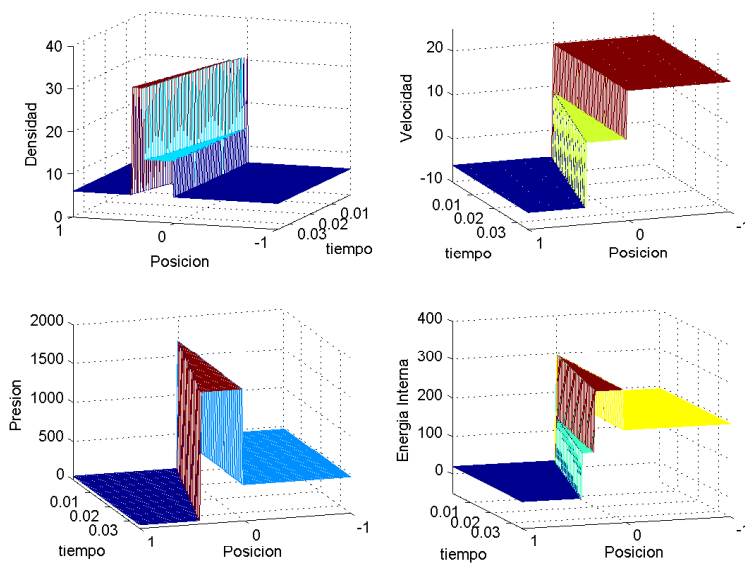


Figura 2.22: Visión 3D de la prueba 5

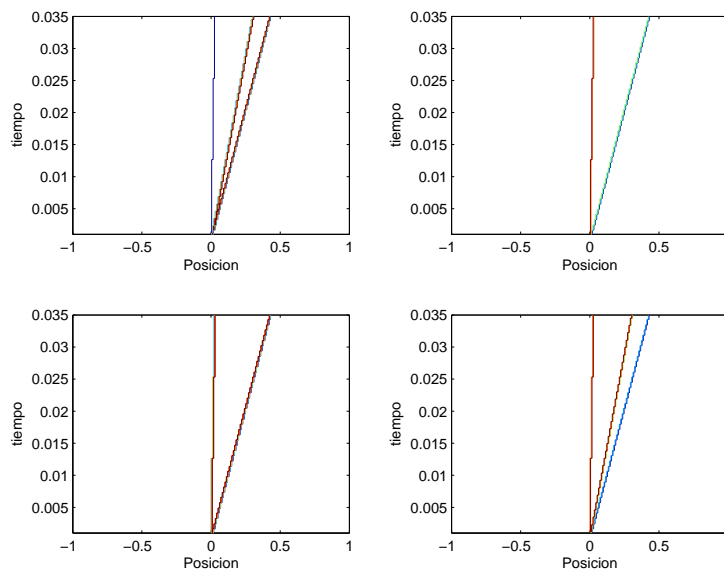


Figura 2.23: Características de la prueba 5

Prueba	p_{\star}	u_{\star}	$\rho_{\star L}$	$\rho_{\star R}$
1	0,30313	0,92745	0,42632	0,26557
2	0,00189	0,00000	0,02185	0,02185
3	460,894	19,5975	0,57506	5,99924
4	46,0950	-6,19633	5,99242	0,57511
5	1691,64	8,68975	14,2823	31,0426

Cuadro 2.3: Solución exacta para la presión, velocidad y densidades para las pruebas 1 a la 5

Capítulo 3

El método de Godunov

En este capítulo se presenta el método de Godunov. Se hace una presentación de la metodología y de los principales aspectos de los volúmenes finitos. Se presentan las dos versiones del esquema de Godunov y se explica detalladamente como puede aplicarse en el caso lineal. Además se consideran algunos ejemplos numéricos.

3.1. Notación y generalidades de los métodos numéricos

Considérese el problema de Cauchy para un sistema de leyes de conservación hiperbólicas no lineales, ver (1.6). Naturalmente, se recuerda que $U(x, t)$ denota el vector de variables conservativas, $F(U)$ el vector de flujo y $U_0(x)$ la condición inicial. En el problema de valores iniciales $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$, lo cual es una consideración teórica que en la práctica tiene que reducirse a un dominio computacional acorde con la información física. Así, resulta más natural considerar $(x, t) \in [0, L] \times [0, T]$ o más generalmente $(x, t) \in [L_0, L_1] \times [0, T]$. Sin embargo, en estos casos hay que considerar valores en la frontera. En lo que sigue, se considerará condiciones del tipo Dirichlet, en ambos lados de la frontera. Así como también, se asumirá, sin pérdida de generalidad, que $(x, t) \in [0, L] \times [0, T]$.

En la presente monografía se estudia la variable espacial unidimensional. En consecuencia se adopta la notación usual de volúmenes finitos para discretizar el dominio espacial. Se divide el intervalo $[0, L]$ en M celdas o volúmenes finitos $I_i = [x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}]$ de longitud constante $\Delta x = x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}} =$

L/M , con $i = 1, \dots, M$. Para una celda dada I_i el centro de la celda es denotado por x_i y las fronteras por $x_{i-\frac{1}{2}}$ y $x_{i+\frac{1}{2}}$, es decir

$$x_{i-\frac{1}{2}} = (i-1)\Delta x, \quad x_i = (i-\frac{1}{2})\Delta x, \quad x_{i+\frac{1}{2}} = i\Delta x. \quad (3.1)$$

En cuanto al dominio temporal, dado por $[0, T]$, donde T es algún tiempo fijo y no necesariamente el tiempo que dura todo el proceso. En este caso, la discretización es dada en pasos de tiempo constante y de longitud Δt . Se denota por $t^n = n\Delta t$ el n -ésimo nivel de tiempo.

Los métodos numéricos que aproximan las leyes de conservación producen aproximaciones de la forma U_i^n de la solución real $U(x_i, t^n)$, es decir $U_i^n \approx U(x_i, t^n)$. Sin embargo, esta aproximación puntual es solamente notacionalmente conveniente y para ser mas rigurosos en la aproximación de leyes de conservación no lineales los valores U_i^n deben ser entendidos en el sentido de promedios sobre las celdas, es decir

$$U_i^n = \frac{1}{\Delta x} \int_{I_i} U(x, t^n) dx. \quad (3.2)$$

Esta interpretación es natural, debido a la forma integral de las leyes de conservación y es mas rigurosa que la aproximación puntual, debido a que permite considerar las soluciones discontinuas de las leyes de conservación. La condición inicial es discretizada considerando los promedios dados en (3.2) con $t^n = 0$, es decir

$$U_i^0 = \frac{1}{\Delta x} \int_{I_i} U(x, 0) dx = \frac{1}{\Delta x} \int_{I_i} U_0(x) dx.$$

En algunos casos se puede considerar una aproximación puntual de la condición inicial. Sin embargo, siempre se prefiere una discretización en términos de los promedios.

La solución numérica $U_\Delta(x, t)$ para todo (x, t) en el dominio computacional puede ser entendida como una función constante por tramos, esto es

$$U_\Delta(x, t) = U_i^n, \quad \text{para } (x, t) \in I_i \times [t^n, t^{n+1}[\quad (3.3)$$

De manera genérica, los métodos de volúmenes finitos para leyes de conservación, suponen conocida la solución en el tiempo $t = t^n$ y definen una estrategia para calcular la solución en un tiempo $t = t^{n+1}$, es decir, partiendo de U^0 se calcula U^1 y con U^1 (y posiblemente U^0) se calcula U^2 , etc.

Hechas todas las aclaraciones notacionales se puede formular la pregunta: ¿Cómo discretizar la ley de conservación?. Esto depende del método numérico que se desee utilizar, particularmente en esta monografía el interés es presentar uno de los métodos mas relevantes de volúmenes finitos así que para discretizar la ecuación diferencial se utilizará esta estrategia. Lo que se hace según esta técnica es reformular la ley de conservación en el sentido integral sobre cada uno de los volúmenes de control. Para un volumen de control genérico $[x_1, x_2] \times [t_1, t_2]$ esto equivale a la ecuación

$$\int_{x_1}^{x_2} U(x, t_2) dx = \int_{x_1}^{x_2} U(x, t_1) dx + \int_{t_1}^{t_2} F(U(x_1, t)) dt - \int_{t_1}^{t_2} F(U(x_2, t)) dt, \quad (3.4)$$

La aproximación de las integrales donde aparece el flujo es un problema delicado, debido a que ambas están evaluadas en las interfaces de los volúmenes de control y es donde la solución posiblemente posee discontinuidades. Este es el punto en el cual difieren las distintas familias de métodos numéricos.

3.2. Descripción general del método

En el caso lineal y escalar, utilizando la información de las características, se puede aproximar en (3.4) las integrales conteniendo el flujo tan solamente observando el signo de la velocidad de la onda. Esto dió origen a los denominados métodos upwind (en la dirección del viento). La generalización de estos resultados para sistemas de leyes de conservación lineales fue hecho de manera directa al caso en el cual los autovalores del sistema lineal tienen el mismo signo y mediante una descomposición de los campos característicos en el caso de que los autovalores tengan signo mixto. El desarrollo de métodos que generalicen estos resultados a sistemas de leyes de conservación no lineales, motivo el desarrollo de distintos esquemas. Particularmente destacan el de Courant-Isaacson-Rees (ver [8]) y el de Godunov.

En el método de Courant-Isaacson-Rees, también llamado el método CIR, se propone la solución de ciertas ecuaciones a lo largo de las características y de manera retrógrada utiliza la información en las celdas vecinas para interpolar el valor de la celda actual. La gran desventaja de este método es que queda formulado en forma no conservativa.

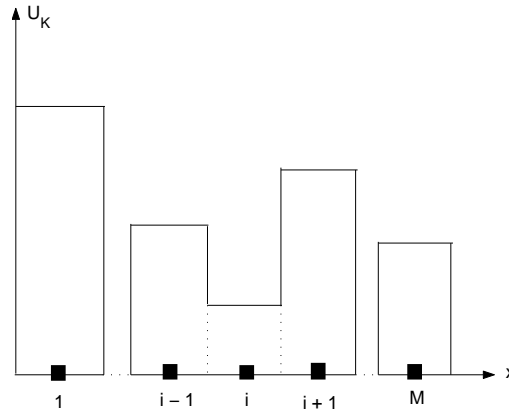


Figura 3.1: Distribución constante de información en tramos, en un nivel de tiempo n para una sola componente del vector U .

De manera independiente a Courant, Isaacson y Rees, en el año 1959, Godunov creó una extensión conservativa de los esquemas upwind para las ecuaciones de la dinámica de los gases (ver [7]). Actualmente estas ideas son utilizadas para sistemas de leyes de conservación hiperbólicas no lineales de otros tipos. En lo que sigue, se describe este esquema para sistemas hiperbólicos no lineales generales. El ingrediente esencial de la idea original del método de Godunov es la solución exacta del problema de Riemann. Sin embargo, actualmente, existen extensiones que consideran soluciones aproximadas convenientes.

En la siguiente sección se explicará en mayor detalle el método de Godunov. Sin embargo, a continuación se presentan las ideas generales. En primer lugar, se supone una distribución constante por tramos que formalmente es entendida como el promedio por celda de la solución, es decir

$$U(x, t^n) = U_i^n, \text{ para } x \text{ en cada celda } I_i = [x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}], \quad (3.5)$$

ver Figura 3.1. Luego, se considera la forma integral de la ley de conservación (3.4) sobre el volumen de control genérico $I_i \times]t^n, t^{n+1}]$ y esto implica una segunda etapa en la cual se resuelven dos problemas de Riemann locales. El primero es el problema $RP(U_{i-1}^n, U_i^n)$ centrado en $x_{i-\frac{1}{2}}$ y datos U_{i-1}^n (lado izquierdo) y U_i^n (lado derecho). El otro problema es $RP(U_i^n, U_{i+1}^n)$ centrado en $x_{i+\frac{1}{2}}$ y datos U_i^n (lado izquierdo) y U_{i+1}^n (lado derecho). La solución del problema de Riemann es autosimilar y depende de la razón \bar{x}/\bar{t} . Por ejemplo,

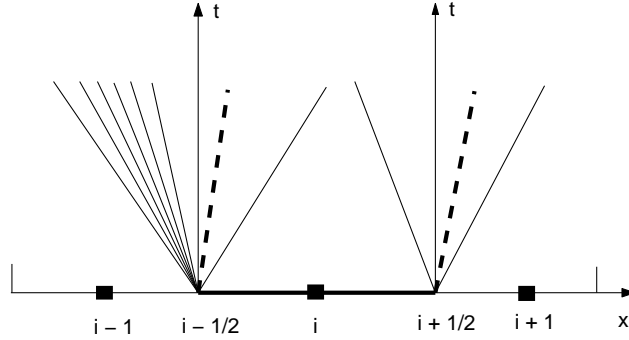


Figura 3.2: Típicos modelos de ondas emergiendo de la solución del problema local de Riemann en el límite de la celdas intermedias $i - \frac{1}{2}$ y $i + \frac{1}{2}$.

para el segundo problema, la solución es denotada por $U_{i+\frac{1}{2}}(\bar{x}/\bar{t})$, donde (\bar{x}, \bar{t}) son las coordenadas locales para el problema de Riemann local, ver Figura 3.2. Para un paso de tiempo Δt , suficientemente pequeño en el sentido que se debe evitar la interacción de ondas, se puede definir una solución global $\tilde{U}(x, t)$ en la franja $0 \leq x \leq L$, $t^n \leq t \leq t^{n+1}$ en términos de la solución local como sigue

$$\tilde{U}(x, t) = U_{i+\frac{1}{2}}(\bar{x}/\bar{t}), \quad x \in [x_i, x_{i+1}], \quad (3.6)$$

donde la correspondencia entre las coordenadas global (x, t) y local (\bar{x}, \bar{t}) esta dada por

$$\begin{aligned} \bar{x} &= x - x_{i+\frac{1}{2}}, & \bar{t} &= t - t^n, \\ x &\in [x_i, x_{i+1}], & t &\in [t^n, t^{n+1}], \\ \bar{x} &\in [-\frac{\Delta x}{2}, \frac{\Delta x}{2}], & \bar{t} &\in [0, \Delta t], \end{aligned} \quad (3.7)$$

y es ilustrado en la Figura 3.3. Finalmente, el método de Godunov avanza la solución a un tiempo t^{n+1} y donde se define un nuevo set de valores promedios $\{U_i^{n+1}\}$, como en (3.5) y se repite el proceso hasta alcanzar el tiempo $t^N = T$. Los pasos serán descritos con mayor detalle en la siguiente sección.

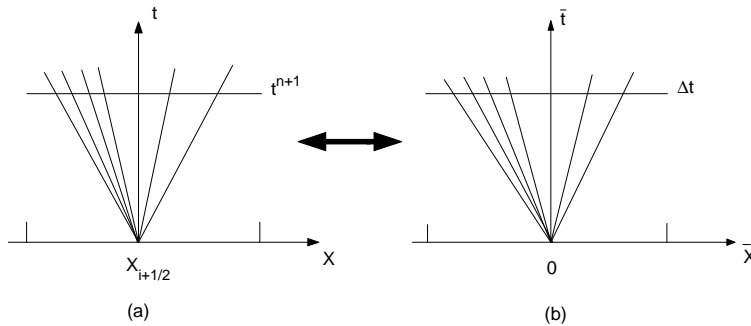


Figura 3.3: Correspondencia entre el marco de referencia global (a) y el local (b) para la solución del problema de Riemann

3.3. El esquema de Godunov

Actualmente existen dos versiones del método de Godunov. Sus ventajas y desventajas están directamente relacionadas con el tipo de no linealidad del sistema en estudio. La presentación que se hará a continuación recoge el espíritu original del esquema propuesto por Godunov. Sin embargo, es una presentación más moderna que sigue los pasos de la teoría de Volúmenes Finitos.

3.3.1. Primera versión del esquema de Godunov

La primera versión del método de Godunov define un nuevo valor promedio U_i^{n+1} en el tiempo $t^{n+1} = t^n + \Delta t$ via la integral

$$U_i^{n+1} = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \tilde{U}(x, t^{n+1}) dx, \tag{3.8}$$

dentro de cada celda I_i . Este proceso de promediado es ilustrado en la Figura 3.4. Observe que para realizar el promedio, se necesita asumir que ninguna onda tenga interacción dentro de la celda I_i , en el tiempo $t \in [t^n, t^{n+1}]$. Esto se satisface poniendo la siguiente restricción en el tamaño de Δt , es decir

$$\Delta t \leq \frac{\frac{1}{2} \Delta x}{S_{max}^n}, \tag{3.9}$$

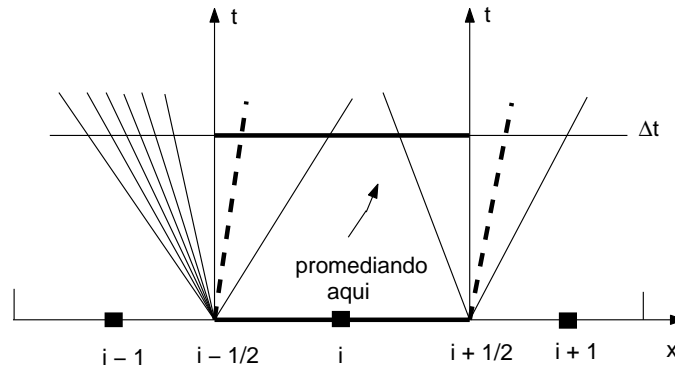


Figura 3.4: Godunov que promedia las soluciones locales de los problemas de Riemann en cada celda I_i en un tiempo fijo Δt .

donde S_{max}^n corresponde a la máxima velocidad de la onda a lo largo del dominio $[0, L] \times [t^n, t^{n+1}]$. Una consecuencia de esta restricción es que sólo dos soluciones del problema de Riemann afectan la celda I_i ; , es decir, la onda que viaja a la derecha $U_{i-\frac{1}{2}}(x/t)$ y la onda que viaja a la izquierda $U_{i+\frac{1}{2}}(x/t)$. , ver Figura 3.4. Así U_i^{n+1} dado por (3.8) puede ser expresado como

$$U_i^{n+1} = \frac{1}{\Delta x} \int_0^{\frac{1}{2}\Delta x} U_{i-\frac{1}{2}}\left(\frac{x}{\Delta t}\right)dx + \frac{1}{\Delta x} \int_{-\frac{1}{2}\Delta x}^0 U_{i+\frac{1}{2}}\left(\frac{x}{\Delta t}\right)dx, \quad (3.10)$$

después de usar (3.6) y (3.8). Esta versión del método de Godunov puede ser obviamente implementada como un esquema práctico. Sin embargo, se observa, dos inconvenientes principales. Primero la condición CFL (3.9) es computacionalmente muy restrictiva e implica escoger Δt muy pequeño. Segundo, la evaluación de las integrales en (3.10), aunque es posible, podría ser complicada. Además, las ondas de rarefacción proporcionan complejidad a este tipo de esquema. Estas desventajas, implican la introducción de una segunda versión del método de Godunov que es más atractiva y de mayor utilidad en la implementación computacional.

3.3.2. Segunda versión del esquema de Godunov

Suponiendo que tenemos el estado U^n dado por (3.5) el cálculo del estado U^{n+1} puede ser hecho en dos pasos:

Primer paso. Se resuelve exactamente los problemas de Riemann locales $RP(U_i^n, U_{i+1}^n)$ para un tiempo Δt que cumple una restricción CFL, ver (3.13).

Segundo paso. Se define U^{n+1} como el promedio de la solución en el estado precedente, es decir U^n . Esto implica una forma conservativa del esquema, ver (3.11).

Mayores detalles de esta versión son dados en la siguiente proposición.

Proposición 3.3.1. *El método de Godunov puede ser escrito en forma conservativa*

$$U_i^{n+1} = U_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} [F_{i-\frac{1}{2}} - F_{i+\frac{1}{2}}], \quad (3.11)$$

con flujo numérico de la celda intermedia dado por

$$F_{i+\frac{1}{2}} = F(U_{i+\frac{1}{2}}(0)), \quad (3.12)$$

si el paso de tiempo satisface la condición CFL

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{S_{max}^n}. \quad (3.13)$$

Demostración. El integrando $\tilde{U}(x, t)$ en (3.8) es una solución exacta de las leyes de conservación, ver ecuación (3.6). Se puede, por consiguiente, aplicar la forma integral (3.4) de las leyes de conservación para cualquier volumen de control $[x_1, x_2] \times [t_1, t_2]$. En particular, se puede aplicar al caso en que $x_1 = x_{i-\frac{1}{2}}$, $x_2 = x_{i+\frac{1}{2}}$, $t_1 = t^n$, $t_2 = t^{n+1}$. De (3.2) se tiene

$$\begin{aligned} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \tilde{U}(x, t^{n+1}) dx = & \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \tilde{U}(x, t^n) dx + \int_0^{\Delta t} F[\tilde{U}(x_{i-\frac{1}{2}}, t)] dt \\ & - \int_0^{\Delta t} F[\tilde{U}(x_{i+\frac{1}{2}}, t)] dt. \end{aligned} \quad (3.14)$$

En términos de la solución local, como en (3.6) y asumiendo la condición (3.13) se tiene

$$\begin{aligned} \tilde{U}(x_{i-\frac{1}{2}}, t) &= U_{i-\frac{1}{2}}(0) = \text{constante}, \\ \tilde{U}(x_{i+\frac{1}{2}}, t) &= U_{i+\frac{1}{2}}(0) = \text{constante}, \end{aligned} \quad (3.15)$$

donde $U_{i+\frac{1}{2}}(0)$ es la solución del problema de Riemann $RP(U_i^n, U_{i+1}^n)$ a lo largo de la recta $x/t = 0$, que es el eje t en el marco local. Similarmente, $U_{i-\frac{1}{2}}(0)$ es la solución de $RP(U_{i-1}^n, U_i^n)$ a lo largo del eje t . Dividiendo (3.14) por Δx da

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \tilde{U}(x, t^{n+1}) dx = & \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \tilde{U}(x, t^n) dx + \frac{\Delta t}{\Delta x} [F(U_{i-\frac{1}{2}}(0)) \\ & - F(U_{i+\frac{1}{2}}(0))], \end{aligned} \quad (3.16)$$

que por virtud de (3.2) y (3.15) conduce a los resultados deseados (3.11) - (3.12) y así la proposición ha sido probada. \square

La CFL (3.13) de la segunda versión del método de Godunov (3.11)-(3.12) es menos restrictiva que la CFL (3.9), así permite un paso de tiempo más largo. Esto a su vez genera un esquema más eficiente. Aquí una onda puede viajar, a lo más, la longitud de la celda Δx en un tiempo Δt . La condición (3.13) permanece válida aún cuando la interacción de la onda tome lugar en el tiempo Δt dentro de la celda I_i , bajo la suposición de que la aceleración de la onda no se produce como consecuencia de la interacción de la onda. La condición (3.13) es necesaria en (3.16) cuando se contabiliza los flujos a lo largo de los límites de las celdas intermedias izquierda y derecha. Por consiguiente, la segunda versión del método de Godunov, es decir las ecuaciones (3.11)-(3.12), es la que se utiliza para cálculos prácticos.

En el caso de un sistema hiperbólico lineal de coeficientes constantes con flujo de la forma $F(U) = AU$. El flujo numérico $F_{i+\frac{1}{2}} = F(U_{i+\frac{1}{2}}(0))$ puede ser obtenido analíticamente. En efecto, la solución $U_{i+\frac{1}{2}}(x/t)$ puede ser encontrada expresando la condición inicial U_i^n , y U_{i+1}^n en términos de los autovectores por la derecha

$$U_i^n = \sum_{j=1}^m \alpha_j K^{(j)}, \quad U_{i+1}^n = \sum_{j=1}^m \beta_j K^{(j)} \quad (3.17)$$

La solución general en cualquier punto (x, t) esta dada por

$$U_{i+\frac{1}{2}}(x/t) = \sum_{j=1}^I \beta_j K^{(j)} + \sum_{j=I+1}^m \alpha_j K^{(j)}, \quad (3.18)$$

donde I es el máximo entero con $1 \leq I \leq m$ tal que $x/t \geq \lambda_I$. El flujo de Godunov requiere la solución en $x/t = 0$ de (3.18), ver Figura 3.5. Para $x/t = 0$ I es tal que $\lambda_I \leq 0$ y $\lambda_{I+1} \geq 0$, entonces $U_{i+\frac{1}{2}}(0)$ es obtenida por manipulaciones de (3.18) como

$$U_{i+\frac{1}{2}}(0) = U_i^n + \sum_{j=1}^I (\beta_j - \alpha_j) K^{(j)}, \quad (3.19)$$

o

$$U_{i+\frac{1}{2}}(0) = U_{i+1}^n - \sum_{j=I+1}^m (\beta_j - \alpha_j) K^{(j)}. \quad (3.20)$$

Recuerde que el salto a través de la onda j con autovalor λ_j y autovector $K^{(j)}$ es dado por $(\beta_j - \alpha_j)K^{(j)}$. Observe que la solución del problema de Riemann en $x/t = 0$ dada por (3.19) puede ser interpretada como la solución del estado izquierdo U_i^n más todos los saltos que se produzcan en las ondas con velocidad negativa o cero. Similarmente, la ecuación (3.20) da la solución del estado derecho U_{i+1}^n menos todos los saltos que se produzcan en las ondas de velocidad positiva o cero. Combinando (3.19) y (3.20) se tiene

$$U_{i+\frac{1}{2}}(0) = \frac{1}{2}(U_i^n + U_{i+1}^n) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \text{sign}(\lambda_j) (\beta_j - \alpha_j) K^{(j)}. \quad (3.21)$$

El flujo de Godunov de la celda intermedia puede ser ahora obtenida evaluando $F(U)$ en cualquiera de las expresiones (3.19)-(3.21) para la solución del problema de Riemann. Usando (3.19) da

$$F_{i+\frac{1}{2}} = F_i^n + \sum_{j=1}^I A(\beta_j - \alpha_j) K^{(j)}, \quad (3.22)$$

y puesto que $AK^{(j)} = \lambda_j K^{(j)}$,

$$F_{i+\frac{1}{2}} = F_i^n + \sum_{j=1}^I (\beta_j - \alpha_j) \lambda_j K^{(j)}. \quad (3.23)$$

Similarmente, (3.20) da

$$F_{i+\frac{1}{2}} = F_{i+1}^n + \sum_{j=I+1}^m (\beta_j - \alpha_j) \lambda_j K^{(j)}, \quad (3.24)$$

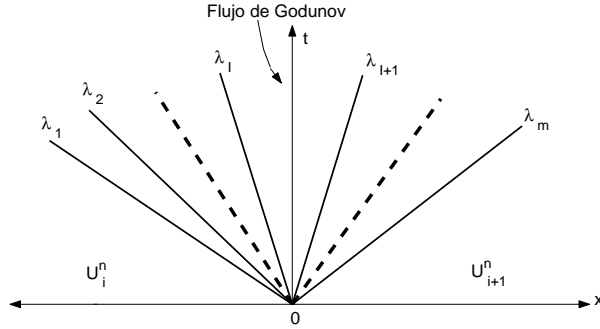


Figura 3.5: Evaluación del flujo de la celda intermedia de Godunov para sistemas hiperbólicos lineales con coeficientes constantes

o combinando (3.23) y (3.24) se obtiene

$$F_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(F_i^n + F_{i+1}^n) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m (\beta_j - \alpha_j) |\lambda_j| K^{(j)}. \quad (3.25)$$

obtenemos. A continuación, se muestra que el flujo de Godunov puede ser expresado de dos formas alternativas

Proposición 3.3.2. *El flujo numérico de Godunov para un sistema lineal puede ser calculado por*

$$F_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(F_i^n + F_{i+1}^n) - \frac{1}{2} |A| (U_{i+1}^n - U_i^n). \quad (3.26)$$

Demostración. Empezando de (3.25) y usando las propiedades

$$\lambda_j = \lambda_j^+ + \lambda_j^-, \quad |\lambda_j| = \lambda_j^+ - \lambda_j^-.$$

y

$$\begin{aligned} A &= A^+ + A^-, & |A| &= A^+ - A^-, \\ A &= A^+ + A^- & |A| &= A^+ - A^- \end{aligned}$$

tenemos

$$\begin{aligned}
 F_{i+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2}(F_i^n + F_{i+1}^n) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m (\beta_j - \alpha_j) (\lambda_j^+ - \lambda_j^-) K^{(j)} \\
 &= \frac{1}{2}(F_i^n + F_{i+1}^n) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m (\beta_j - \alpha_j) [\lambda_j^+ K^{(j)} - \lambda_j^- K^{(j)}] \\
 &= \frac{1}{2}(F_i^n + F_{i+1}^n) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m (\beta_j - \alpha_j) [A^+ K^{(j)} - A^- K^{(j)}] \\
 &= \frac{1}{2}(F_i^n + F_{i+1}^n) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m (\beta_j - \alpha_j) [A^+ - A^-] K^{(j)} \\
 &= \frac{1}{2}(F_i^n + F_{i+1}^n) - \frac{1}{2} |A| \sum_{j=1}^m (\beta_j - \alpha_j) K^{(j)}.
 \end{aligned}$$

llegando a

$$F_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(F_i^n + F_{i+1}^n) - \frac{1}{2} |A| (U_{i+1}^n - U_i^n).$$

con lo cual la proposición es probada \square

Proposición 3.3.3. *El flujo de Godunov puede ser escrito como un esquema de flujo dividido (flux-splitting method) con*

$$F_{i+\frac{1}{2}} = A^+ U_i^n + A^- U_{i+1}^n \quad (3.27)$$

Demostración. El resultado proviene directamente de manipular (3.26) y al-

gunas definiciones apropiadas. Alternativamente tenemos

$$\begin{aligned}
 F_{i+\frac{1}{2}} &= AU_{i+\frac{1}{2}}(0) \\
 &= \sum_{j=1}^I \beta_j AK^{(j)} + \sum_{j=I+1}^m \alpha_j AK^{(j)} \\
 &= \sum_{j=1}^I \beta_j \lambda_j K^{(j)} + \sum_{j=I+1}^m \alpha_j \lambda_j K^{(j)} \\
 &= \sum_{j=1}^m \beta_j \lambda_j^- K^{(j)} + \sum_{j=1}^m \alpha_j \lambda_j^+ K^{(j)} \\
 &= \sum_{j=1}^m \beta_j A^- K^{(j)} + \sum_{j=1}^m \alpha_j A^+ K^{(j)} \\
 &= A^+ \sum_{j=1}^m \alpha_j K^{(j)} + A^- \sum_{j=1}^m \beta_j K^{(j)} \\
 &= A^+ U_i^n + A^- U_{i+1},
 \end{aligned}$$

con lo cual la proposición queda probada. \square

Para finalizar se debe observar que para el caso de sistemas no lineales con una autoestructura del Jacobiano donde los autovalores tengan el mismo signo, el esquema de Godunov se reduce a un esquema upwind y no es necesario resolver problemas de Riemann.

3.4. Algunos ejemplos numéricos

En esta sección evaluaremos el rendimiento del método de Godunov upwind de primer orden para las ecuaciones de Euler en problemas de prueba con solución exacta. En todas las pruebas escogidas, la información consiste de dos estados constantes $W_L = (\rho_L, u_L, p_L)$ y $W_R = (\rho_R, u_R, p_R)$, separados por una discontinuidad en una posición $x = x_0$. Los estados W_L y W_R son mostrados en el cuadro 3.1. La razón de calor específico es $\gamma = 1,4$. La solución numérica y exacta son encontradas en el dominio espacial $0 \leq x \leq 1$. La solución numérica es calculada con 200 celdas espaciales y con una CFL de $C_{\text{eff}} = 0,5$.

Prueba	ρ_L	p_L	u_L	ρ_R	p_R	u_R
1	1.0	1.0	0.75	0.125	0.1	0.0
2	1.0	0.4	-2.0	1.0	0.4	2.0
3	1.0	1000.0	0.0	1.0	0.01	0.0
4	5.99924	460.894	19.5975	5.99242	46.0950	-6.19633

Cuadro 3.1: Información para los cuatro problemas de prueba con solución exacta

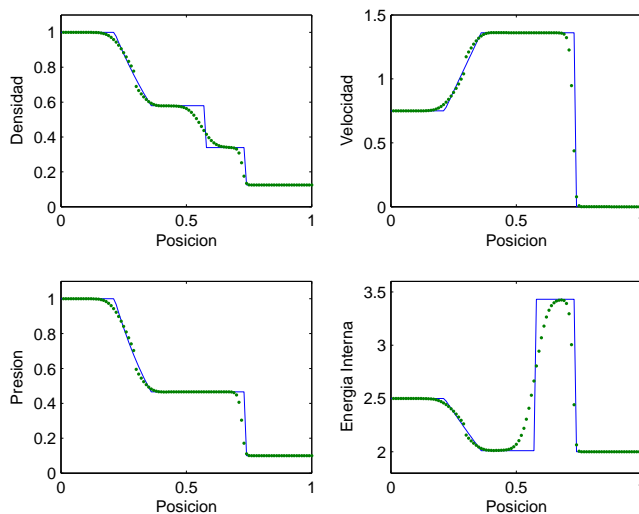


Figura 3.6: Prueba 1. La solución exacta es la línea continua y la solución mediante Godunov es la línea punteada. La prueba es hecha con 200 pasos de espacio y hasta $T = 0,2$ y la discontinuidad es considerada en $x = 0,3$

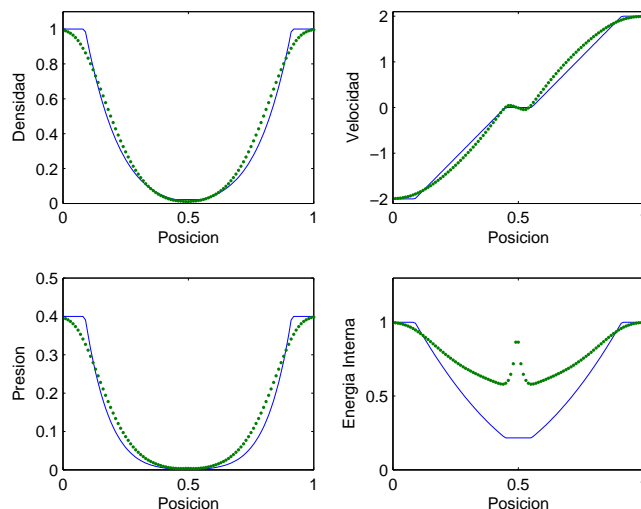


Figura 3.7: Prueba 2. La solución exacta es la línea continua y la solución mediante Godunov es la línea punteada. La prueba es hecha con 200 pasos de espacio y hasta $T = 0,012$ y la discontinuidad es considerada en $x = 0,5$

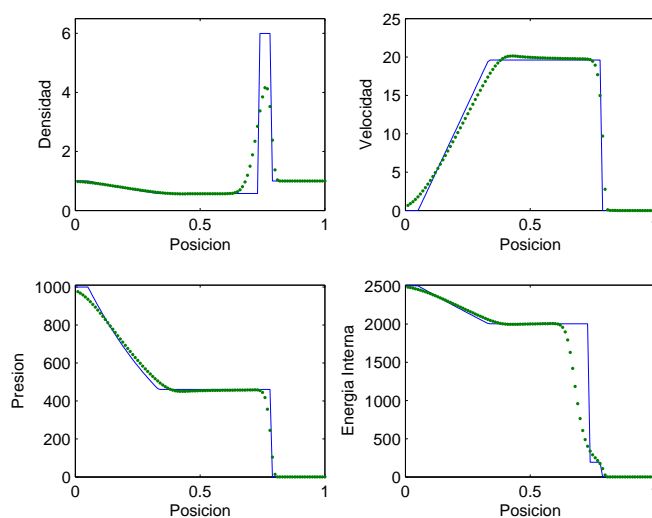


Figura 3.8: Prueba 3. La solución exacta es la línea continua y la solución mediante Godunov es la línea punteada. La prueba es hecha con 200 pasos de espacio y hasta $T = 0,035$ y la discontinuidad es considerada en $x = 0,4$

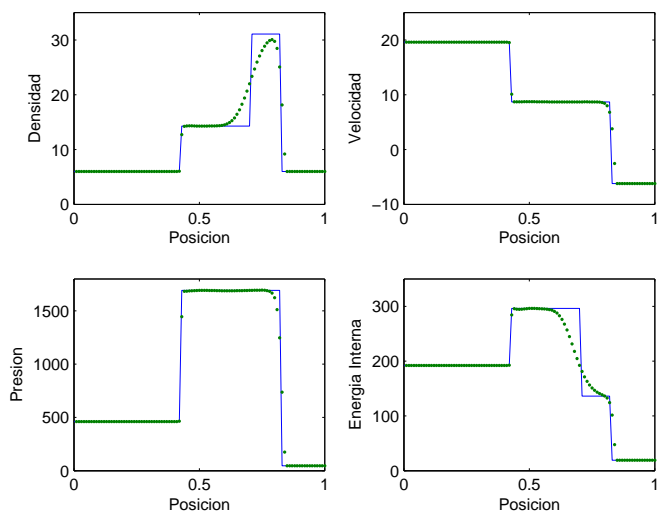


Figura 3.9: Prueba 4. La solución exacta es la línea continua y la solución mediante Godunov es la línea punteada. La prueba es hecha con 200 pasos de espacio y hasta $T = 0,2$ y la discontinuidad es considerada en $x = 0,3$

Conclusiones

De la presente Memoria se pueden obtener las siguientes conclusiones

1. Las ecuaciones de la dinámica de los gases permiten modelar coherentemente los gases ideales.
2. El problema de Riemann se puede resolver analíticamente en ciertas situaciones especiales, como por ejemplo si la ecuación de estado corresponde a la de los gases ideales, ver proposición 2.3.1.
3. Las ondas de choque son caracterizadas a través de la condición de Rankine-Hugoniot, ver los comentarios después de la definición 1.5.1 y fundamentalmente la ecuación 1.51.
4. Las ondas de rarefacción y discontinuidades de contacto son caracterizadas por los invariantes de Riemann generalizados y están restringidas a satisfacer la condición de Entropía.
5. La solución analítica del problema de Riemann, permite crear métodos numéricos, que en base a información local, aproximan la solución entrópica global de los sistemas hiperbólicos. Esta familia de métodos numéricos son conocidos como los esquemas de tipo Godunov.
6. Las simulaciones del problema de Riemann con el método de Godunov, en el caso de la dinámica de los gases ideales, es consistente.

Bibliografía

- [1] A. J. Chorin and J. E. Marsden, A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics, Springer- Verlag, 1979.
- [2] E. Godlewski and P.-A. Raviart, Numerical Approximation of Hyperbolic Systems of Conservation Laws, Springer, New York, 1996.
- [3] D. Serre, Systems of Conservation Laws. Volume 1: Hyperbolicity, Entropies, Shock Waves, Cambridge University Press, Cambridge, 1999
- [4] R. J. LeVeque, Numerical Methods for Conservation Laws, Lectures in Mathematics, ETH-Zurich Birkhauser-Verlag, Basel, 1990.
- [5] E. F. Toro, Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics, Springer, Berlin, Heidelberg, 1997.
- [6] L. C. Evans, Partial differential equations, Graduate studies in mathematics, AMS, 1998.
- [7] S. K. Godunov, A difference method for numerical calculation of discontinuous solutions of the equations of hydrodynamics, Mat. Sb., 47 (1959), pp. 271306
- [8] R. Courant and K. O. Friedrichs, Supersonic Flow and Shock Waves, Springer, 1948.