UNIVERSIDAD DEL BÍO-BÍO
FACULTAD DE EDUCACIÓN Y HUMANIDADES
PEDAGOGÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

"ELEMENTOS INICIALES SOBRE VARIABLE COMPLEJA"

AUTORES: BRAVO SANDOVAL, MARÍA DANIELA
OLATE PENROZ, CLAUDIO ANDRÉS
VÁSQUEZ REYES, PAOLA MARICEL
PROFESOR GUÍA: SR. IRAZOQUI BECERRA, ELÍAS

PROYECTO PARA OPTAR AL TÍTULO DE PROFESOR DE EDUCACIÓN MATEMATICA

CHILLÁN, 2010

INDICE

INTRODUCCIÓN

Los **números complejos** son una extensión de los números reales, cumpliéndose que los Números Reales están contenidos en los números Complejos. Los números complejos representan todas las raíces de los polinomios, a diferencia de los reales.

Los números complejos son herramientas de trabajo del álgebra ordinaria, llamada álgebra de los números complejos, así como de ramas de las matemáticas puras y aplicadas como variable compleja, aerodinámica y electromagnetismo entre otras de gran importancia. Contienen a los números reales y los imaginarios puros y constituyen una de las construcciones teóricas más importantes de la inteligencia humana. Los análogos del cálculo diferencial e integral con números complejos reciben el nombre de variable compleja o análisis complejo.

Los números complejos se introducen para dar sentido a la raíz cuadrada de números negativos. Así se abre la puerta a un curioso y sorprendente mundo en el que todas las operaciones (salvo dividir entre 0) son posibles. En este proyecto se presenta este mundo: expresión de los números complejos, su representación gráfica, operaciones, forma polar, raices n-esimas, la exponencial, conjunto de puntos en el plano, límite y continuidad, funciones análiticas.

Los números complejos reales se encuentran en el eje de coordenadas horizontal y los imaginarios en el eje vertical. El término de número complejo describe la suma de un número real y un número imaginario que es un múltiplo real de la unidad imaginaria, que se indica con la letra i. Los números complejos se utilizaban en todos los campos de las matemáticas, en muchos de la física (y notoriamente en la mecánica cuántica) y en ingeniería, especialmente en la electrónica y las telecomunicaciones, por su utilidad para representar las ondas electromagnéticas y la corriente electrónica.

La importancia de los números complejos está marcada por sus múltiples aplicaciones en diversas Áreas (Matemáticas, Física, Ingeniería, Tecnología, entre otras).

Al observar en las distintas áreas de la matemática como el álgebra, análisis, geometría y teoría de números se puede notar la presencia de los números complejos, es aquí en donde nace el propósito de querer estudiarlos, los motivos pueden ser diversos pero el pricipal radica en que durante el transcurso de la vida estudiantil los números complejos fueron estudiados de manera muy ligera y en ocasiones solo fueron una mención, es por este motivo que surge el interés de realizar un estudio un poco más profundo y acabadol de lo que llamamos números complejos.

En general en esta tesis se tratarán los contenidos que se enunciaran a continuación, correspondientes a lo que son los números complejos. Se estudiará en primera instancia el plano complejo; dentro de este se estudiarán sus propiedades, la representación polar, las raices n-esimas, la definición de la función exponencial, los conjuntos de puntos en el plano. También se indagará en las funciones analíticas, abordando funciones de variables complejas, límite y continuidad, propiedades del límite, funciones analíticas, las funciones de Cauchy Riemann, funciones trugonimétricas hiperbólicas, la función logarítmica, la definición de z^α y funciones trigonometricas inversas. Por último se estudiará la teoría de la integral, y dentro de esta se trataran los temas referidos a arcos y contornos, integrales de contorno, propiedades de las integrales, el teorema de Green, el teorema de Cauchy, integrales de contorno y primitivas, la fórmula integral de Cauchy, derivadas de orden superior y teorema de Morena, además de el teorema de Liouvilley las funciones armónicas en el ámbito complejo.

MARCO TEÓRICO

La primera referencia escrita de la raíz cuadrada de un número negativo la encontraremos en la obra Stereometría de Heron de Alejandría (10-75) alrededor de la mitad del siglo I. La siguiente referencia es en el año 275 en la obra de Diophantus (aprox. 200-284) Arithmetica en su intento de cálculo de los lados de un triángulo rectángulo de perímetro 12 y área 7, Diophantus planteó resolver la ecuación $336x^2 + 24 = 172x$, ecuación de raíces complejas como puede ser comprobado fácilmente, sin embargo, son los matemáticos hindúes los que dan las primeras explicaciones a este tipo de problemas. Mahavira, alrededor del año 850, comenta en su tratado de los números negativos que como en la naturaleza de las cosas una cantidad negativa no es un cuadrado, por tanto no puede tener raíz cuadrada. Posteriormente en 1545, Jerome Cardan (Italia, 1501-1576), un matemático, físico y filósofo italiano, publica "Ars Magna" (El Gran Arte) en el cual describe un método para resolver ecuaciones algebráicas de grado tres y cuatro. Esta obra se convertiría en el mayor tratado de álgebra desde los Babilónicos, 3000 años antes, que dedujeron cómo resolver la ecuación cuadrática.

Los números que hoy llamamos "complejos" fueron durante muchos años motivo de polémicas y controversias entre la comunidad científica. Poco a poco, por la creciente evidencia de su utilidad, acabaron por ser comúnmente aceptados, aunque no fueron bien comprendidos hasta épocas recientes. Nada hay de extraño en ello si pensamos que los números negativos no fueron plenamente aceptados hasta finales del siglo XVII. Los números complejos hacen sus primeras tímidas apariciones en los trabajos de Cardano (1501 – 1576) y Bombelli (1526 – 1672) relacionados con el cálculo de las raíces de la cúbica o ecuación de tercer grado. Fue René Descartes (1596 – 1650) quien afirmó que "ciertas ecuaciones algebraicas sólo tienen solución en nuestra imaginación" y acuñó el calificativo "imaginarias" para referirse a ellas. Desde el siglo XVI hasta finales del siglo XVIII los números complejos o imaginarios son usados con recelo, con desconfianza. Con frecuencia cuando la solución de un problema resulta ser un número complejo se interpreta esto como que el problema no tiene solución. Para Leibnitz "el número imaginario es un recurso sutil y maravilloso del espíritu divino, casi un anfibio entre el ser y el no ser". Las razones de todo esto son claras. Así como los números reales corresponden al problema bien cotidiano de la medida de magnitudes, no ocurre nada similar con los números complejos. Mientras los matemáticos necesitaron interpretar en términos físicos sus objetos de estudio, no se avanzó mucho en la comprensión de los números complejos. El éxito de Euler y Gauss al trabajar con números complejos se debió a que ellos no se preocuparon "de la naturaleza" de los mismo; no se preguntaron "¿Qué es un número complejo?", sino que se dijeron "a ver, para qué sirven, qué puede hacerse con ellos". Es Gauss quien definitivamente concede a los números complejos un lugar privilegiado dentro de las matemáticas al probar en 1799 el conocido Teorema Fundamental Del Álgebra que afirma que toda ecuación polinómica de grado n con coeficiente complejos tiene, si cada raíz se cuenta tantas veces como su orden, n raíces que también son números complejos. El término, hoy usado de "números complejos" se debe a Gauss quien también hizo popular la letra "i" que Euler (1707 – 1783) había usado esporádicamente, además Euler haciendo uso fundamental de los números complejos al relacionar la exponencial con la funciones trigométricas por la expresión $e^{ix} = \cos x + i \sin x$. En 1806 Argand interpreta los números complejos como vectores en el plano complejo, el que a veces recibe el nombre de plano de Argand a causa de su uso en diagramas de Argand. Su creación se atribuye a Jean-Robert Argand, aunque fue inicialmente descrito por el encuestador y matemático Noruego-danés Caspar Wessel.

La fecha de 1825 es considerada como el nacimiento de la teoría de funciones de variable compleja, pues se publica en dicho año la Memoria sobre la Integración Compleja que Cauchy había escrito ya en 1814. Cauchy nos dejó un monumento, se trata de su teoría de funciones de una variable compleja y de su integración, una de las grandes contribuciones matemáticas del siglo XIX. Los primeros indicios de esta teoría se encuentran en su célebre "Mémoire sur la théorie del intégrales définies" (Memoria sobre la teoría de las integrales definidas), leída ante la Academia de París en 1814, pero cuya publicación se retrasará hasta 1827. Cauchy se interesa en esta memoria por la validez de una técnica utilizada en aquella época, que consistía en calcular integrales definidas mediante variables complejas. Intenta hacer riguroso este paso de la variable real a la variable compleja, utilizado por Euler desde 1759 y por Laplace desde 1782 en la evaluación de las integrales definidas. Recordemos finalmente, la afirmación de Hadamard "el camino más corto entre dos verdades del campo real pasa con frecuencia por el campo complejo".

OBJETIVOS

General:

Desarrollar con algún grado algunos temas iniciales de variable compleja.

Específicos:

- Estudiar el plano complejo y sus propiedades más importantes.
- Estudiar y desarrollar lo referido a funciones analíticas complejas.
- Estudiar la teoría integral en el ámbito complejo.

I

EL PLANO COMPLEJO

A modo de introducción el tema del Plano Complejo comienza, valga la redundancia, con los números complejos; cuya representación geométrica será reflejada en un plano llamado plano complejo.

A pesar de ser tan hermoso este mundo de los números complejos es poco estudiado. Siempre terminan siendo apenas un esbozo de algunas de sus propiedades, dejando de lado aspectos geométricos tan importantes como los movimientos del plano.

El poder de cálculo que se esconde detrás de los complejos, es algo mágico. Con un pequeño esfuerzo, podemos derivar identidades y fórmulas trigonométricas que requieren de un trabajo tedioso y agotador, siguiendo los métodos usuales. Muchos conceptos de la matemática, como el de función, límites, series de potencias y continuidad se estudian de manera bastante natural dentro del ambiente de los números complejos. Los argumentos de prueba son mucho más intuitivos y transparentes en el plano.

El plano complejo puede considerarse como una modificación de plano cartesiano, con la parte real de un número complejo representado por un desplazamiento a lo largo del eje X, y la parte imaginaria de un desplazamiento a lo largo del otro eje i.

Este plano, el complejo a veces se llama el plano de Argand, ya que se utiliza en los diagramas de Argand. Estos llevan el nombre de Jean-Robert Argand (1768-1822), a pesar de que fueron descritos por primera vez por el danés-noruego agrimensor y matemático Caspar Wessel (1745 a 1818). Los diagramas de Argand se usan frecuentemente para representar las posiciones de los polos y ceros de una función en el plano complejo.

El concepto de plano complejo permite una interpretación geométrica de los números complejos. Indagar en sus operatorias basicas como por ejemplo la multiplicación, en donde sabremos que al multiplicar dos números complejos se pueden expresar más fácilmente en coordenadas polares, también se logrará mostrar que la magnitud o módulo del producto es el producto de los dos valores, o módulos, y el ángulo o argumento del producto es la suma de los dos ángulos, o argumentos.

Así mostraremos el poder de los números complejos y su interpretetación geometrica, ademas de ciertas aplicaciones y/o deducciones algebraicas.

I.I Los números complejos

Como es bien sabido las raíces de la ecuación de segundo grado :

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$a\left(x^2 + \tfrac{bx}{a}\right) + c = 0$$

$$a\left(x^2 + \tfrac{bx}{a}\right) = -c \ / \ +\tfrac{b^2}{4a}$$

$$a\left(x^2 + \tfrac{bx}{a}\right) + \tfrac{b^2}{4a} = -c + \tfrac{b^2}{4a}$$

$$a\left(x^2 + \tfrac{bx}{a} + \tfrac{b^2}{4a}\right) = -c + \tfrac{b^2}{4a}$$

$$a\left(x + \tfrac{b}{2a}\right)^2 = \tfrac{b^2}{4a} - c$$

$$\left(x + \tfrac{b}{2a}\right)^2 = \tfrac{b^2}{4a^2} - \tfrac{c}{a}$$

$$\left(x + \tfrac{b}{2a}\right)^2 = \tfrac{b^2-4ac}{4a^2} \ / \sqrt{\ }$$

$$x + \tfrac{b}{2a} = \pm\tfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x = \tfrac{-b}{2a} \pm \tfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x = \tfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

son dadas las raíces por esta fórmula.

Obtenemos efectivamente dos raíces cuando el discriminante $b^2 - 4ac$ es positivo y apenas una raíz cuando el discriminante es cero. Cuando el discriminante es negativo, la fórmula no conduce a ninguna raíz real. En este caso, el trinomio $ax^2 + bx + c$ es siempre distinto de cero si a x se le atribuye cualquier valor real.

Por ejemplo si buscamos las raíces de la ecuación $x^2-6x+13=0$ somos llevados a:

$$x = \frac{6\pm\sqrt{36-4\cdot1\cdot13}}{2}$$
$$x = \frac{6\pm\sqrt{-16}}{2}$$
$$x = \frac{6\pm\sqrt{(4)^2\cdot(-1)}}{2}$$
$$x = \frac{6\pm4\sqrt{-1}}{2}$$
$$x = \frac{2\left(3\pm2\sqrt{-1}\right)}{2}$$
$$x = 3\pm2\sqrt{-1}$$
$$x_1 = 3+2\sqrt{-1}\ ;\ x_2 = 3-2\sqrt{-1}$$

Vamos a sustituir esos "números" en la ecuación original para verificar si son realmente raíces. Para el desarrollo debemos tratar a la $\sqrt{-1}$ como cualquier número, es decir $\left(\sqrt{-1}\right)^2=-1$.

Tenemos entonces:

$$x_1^2-6x_1+13 = \left(3+2\sqrt{-1}\right)^2-6\left(3+2\sqrt{-1}\right)+13$$
$$= 9+2\cdot3\cdot2\sqrt{-1}+4\cdot\left(\sqrt{-1}\right)^2-18-12\sqrt{-1}+13$$
$$= 9+12\sqrt{-1}+4\cdot-1-18-12\sqrt{-1}+13$$
$$= 9-4-18+13$$
$$= 0$$

$$x_2^2-6x_2+13 = \left(3-2\sqrt{-1}\right)^2-6\left(3-2\sqrt{-1}\right)+13$$
$$= 9+2\cdot3\cdot-2\sqrt{-1}+4\cdot\left(\sqrt{-1}\right)^2-18+12\sqrt{-1}+13$$
$$= 9-12\sqrt{-1}+4\cdot-1-18+12\sqrt{-1}+13$$
$$= 9-4-18+13$$
$$= 0$$

De este modo verificamos que x_1 y x_2 son raíces. Es fácil ver que podemos resolver una ecuación de segundo grado, no sucede lo mismo en el caso en que $b^2 - 4ac < 0$, si operamos con el símbolo $i = \sqrt{-1}$ como si fuese un número. Se debe tener la propiedad de $i^2 = -1$, y operar con las mismas formas que se rigen a los números reales. De esta manera los llamados *números complejos* son los números de la forma $a + bi$, como por ejemplo: $3 + 5i$; $\frac{2}{3} - 2i$; $\sqrt{2} + \frac{5}{2}i$. esta mencionada *forma binómica* de un número complejo posee este monbre puesto que tiene dos componentes a y b.

El nuevo elemento $i = \sqrt{-1}$ es llamado *unidad imaginaria*, a es llamada *parte real*, b es llamada *parte imaginaria* de número complejo $a + bi$. Si nos introducimos en los números complejos debemos definir igualdad, adición y multiplicación, de manera que permanezcan válidas las propiedades asociativa y distributiva, las cuales son operaciones referidas a los números reales. Asimismo los números complejos son determinados por las siguientes definiciones:

$$\text{Si } i^2 = -1 \text{ ; } ai = ia;$$
$$a + ib = c + id \implies a = c \wedge b = d;$$
$$(a + ib) + (c + id) = a + c + ib + id = (a + c) + i(b + d);$$
$$(a+ib)(c+id) = ac+adi+bci+iibd = ac+i(ad+bc)-bd = (ac-bd)+i(ad+bc)$$

Veamos algunos ejemplos de operaciones con números complejos :

$$(-5 + 7i) + (3 - 12i) = (-5 + 3) + i(7 - 12) = -2 - 5i$$
$$(1 - 5i)(3 + 2i) = (3 + 10) + (2 - 15)i = 13 - 13i = 13(1 - i)$$
$$\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{18}} - i\sqrt{50}\right) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{9}} - i\sqrt{100} = \frac{1}{3} - 10i$$

La sustracción de números complejos está definida en términos de adición y el opuesto de un número. El opuesto de $z = x + iy$ es el número $-z = (-x) + i(-y)$. Dado entonces $z_1 = x_1 + iy_1$ y $z_2 = x_2 + iy_2$ definimos $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$

Esto es : $z_1 - z_2 = (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$

¿Qué pasa si un número complejo lleva $b = 0$?

Observemos que los números complejos de la forma $a + i0$ se comportan en la suma y en la multiplicación del mismo modo que los números reales, en otras palabras, haciendo corresponder al número complejo $a + i0$ al número real a, entonces la suma $a + b$ corresponde $(a + b) + i0$, que es lo mismo que $(a + i0) + (b + i0)$; y al producto ab le corresponde $ab + i0$, que es lo mismo que $(a + i0)(b + i0)$. Esto quiere decir que sumar y multiplicar números reales equivale a la correspondencia $a \rightarrow a + i0$, al sumar y multiplicar respectivamente los números complejos correspondientes. Esto nos permite identificar un número real a del número complejo $a + i0$, ya que del punto de vista de la adición y de la multiplicación, su comportamiento es el mismo. De este modo los números complejos se presentan como una extensión natural de los números reales. Entonces los números reales son complejos; un número complejo es real (si $b = 0$), o es imaginario (si $a = 0$).

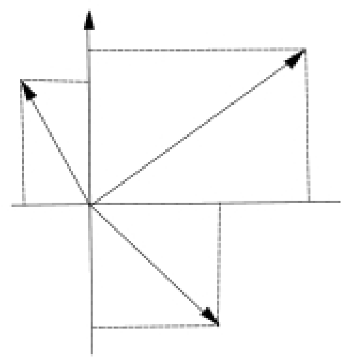
Dado un número complejo $z = x + iy$ su parte real "x" es designada por $Re\, z$ y su *parte imaginaria* "y" es designada por $Im\, z$. El *plano complejo* consiste en las representaciones de todos los números complejos $z = x + iy$ de los puntos $P = (x, y)$ del plano. Es conveniente identificar el número complejo $x + iy$ del punto (x, y), lo que es posible a través de las siguientes definiciones:

$$(a,b) = (c,d) \Longrightarrow a = c\,,\; b = d$$

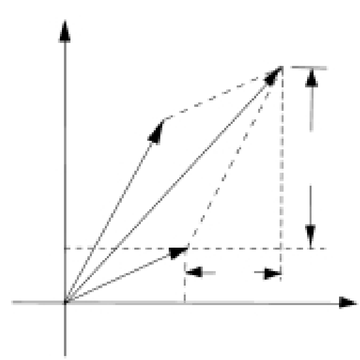
$$(a,b) + (c,d) = (a + c\,,\; b + d)$$

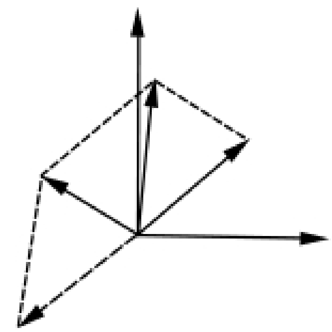
$$(a,b)\,(c,d) = (ac - bd\,,\; ad + bc)$$

La representación de los puntos complejos por puntos del plano es muy útil y de uso frecuente. Con esta representación, un número complejo $z = x + iy$ puede ser identificado como el punto de coordenadas x e y, o como el vector de componentes x e y.



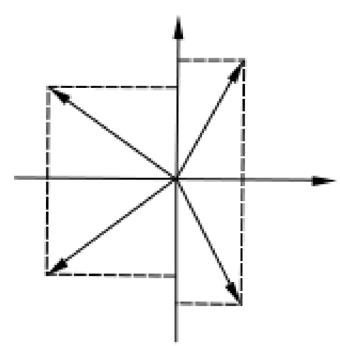
Las conocidas *reglas de paralelogramos* se aplican para la suma y sustracción de vectores, no así en el caso de la suma y la sustracción de números complejos.





El módulo o valor absoluto de un número complejo $z = x + iy$ es definido como el número real no negativo $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, que también es llamado la distancia del punto z al origen.

El complejo conjugado de $z = x + iy$ es definido como el número complejo $\overline{z} = x - iy$,



entonces $z\overline{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 + i(xy - yx) = x^2 + y^2$, esto es: $z\overline{z} = |z|^2$.

Esta propiedad permite calcular fácilmente el cociente $z = \frac{z_1}{z_2}$ de dos números complejos z_1 y $z_2 \neq 0$, que es definido por la condición $zz_2 = z_1$. Para esto basta multiplicar el numerador y el denominador por el complejo conjugado del denominador, el que conduce a un denominador real.

Por ejemplo:

$$\frac{-3+i}{1-2i}=\frac{(-3+i\,)\,(1+2i\,)}{(1-2i\,)\,(1+2i\,)}=\frac{-3-3+i(-6+1)}{1^2+2^2+i\,(-2+2)}=\frac{-5-5i}{5}=-1-i$$

En general como $z_1 = x_1 + iy_1$ y $z_2 = x_2 + iy_2$ tenemos:

$$z=\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}}=\frac{z_1\overline{z_2}}{(x_2)^2+(y_2)^2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{(x_2)^2+(y_2)^2}+i\frac{(-x_1x_2+y_1y_2)}{(x_2)^2+(y_2)^2}$$

Podemos desprender las siguientes propiedades:

a) $|z| = |\overline{z}|$

Demostración:

Como $|z| = \sqrt{(0-x)^2 + (0-y)^2} = \sqrt{x^2+y^2}$ y
$|\overline{z}| = \sqrt{(0-x)^2 + (0+y)^2} = \sqrt{x^2+y^2}$, entonces $|z| = |\overline{z}|$.

b) $Re\,z = \frac{z+\overline{z}}{2}$

Demostración:

Sabemos que $z = x + iy$ donde $Re\,z$ es x ;
$\frac{z+\overline{z}}{2} = \frac{(x+iy)+(x-iy)}{2} = \frac{2x}{2} = x$.

Por lo tanto $Re\,z = \frac{z+\overline{z}}{2}$.

c) $Im\, z = \frac{z-\overline{z}}{2i}$

Demostración:

Sabemos que

$z = x + iy$ donde $Im\, z$ es y ;

$\frac{z-\overline{z}}{2i} = \frac{(x+iy)-(x-iy)}{2i} = \frac{2iy}{2i} = y.$

Por lo tanto $Im\, z = \frac{z-\overline{z}}{2i}$.

d) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

Demostración:

$\overline{z_1 + z_2} = \overline{(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2)} = \overline{(x_1 + x_2) + i\,(y_1 + y_2)}$

$= (x_1 + x_2) - i\,(y_1 + y_2) = x_1 + x_2 - iy_1 - iy_2 = (x_1 - iy_1) + (x_2 - iy_2)$

$= \overline{z_1} + \overline{z_2}$.

e) $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$

Demostracion:

$\overline{z_1 z_2} = \overline{(x_1 + iy_1)\,(x_2 + iy_2)} = \overline{(x_1 x_2 - y_1 y_2) + i\,(y_1 x_2 + x_1 y_2)}$

$\overline{z_1 z_2} = (x_1 x_2 - y_1 y_2) - i\,(y_1 x_2 + x_1 y_2)$

$\overline{z_1}\,\overline{z_2} = (x_1 - iy_1)\,(x_2 - iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) - i\,(x_1 y_2 + x_2 y_1)$

$\overline{z_1}\,\overline{z_2} = (x_1 x_2 - y_1 y_2) - i\,(y_1 x_2 + x_1 y_2)$.

f) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

demostración:

$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \overline{\left(\frac{z_1 z}{z_2 z}\right)} = \overline{z}$

$\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} = \frac{\overline{z_1}\,\overline{z}}{\overline{z_2}\,\overline{z}} = \overline{z}$

Ejercicios Resueltos

Ej. 1 : Reduzca a la forma $a+bi$ cada una de las expresiones complejas siguientes

a)$(3+5i)+(-2+i)=3-2+5i+i=1+6i$

b)$(-3+4i)-(1-2i)=-3-1+4i+2i=-4+6i$

c) $\left(1+\frac{i}{3}\right)\left(\frac{-6}{5}+3i\right)=\frac{-6}{5}+\frac{13i}{5}-1=\frac{-11}{5}+\frac{13i}{5}$

Ej. 2: Muestre que $(x+iy)^2=x^2-y^2+2ixy$

Desarrollo:

$(x+iy)^2=(x+iy)(x+iy)\ =x^2+ixy+ixy+i^2y^2=x^2-y^2+2ixy$

Ej.3: Muestre que $(x-iy)^2=x^2-y^2-2ixy$

Desarrollo:

$(x-iy)^2=(x-iy)(x-iy)=x^2-ixy-ixy+i^2y^2=x^2-y^2-2ixy$

Ej.4: Muestre que $1+i^5+2i^{10}+3i^{13}=-1+4i$

Desarrollo:

$1+i^5+2i^{10}+3i^{13}=1+i\cdot(i^2)^2+2\left(i^2\right)^5+3i\cdot(i^2)^6$

$=1+i\left(-1\right)^2+2\left(-1\right)^5+3i\left(-1\right)^6$

$=1+i-2+3i$

$=-1+4i$

Ej.5: Verifique las siguientes relaciones

a)$Re\ \left[-i\,(2-3i)^2\right]=-12$

Desarrollo:

$-i\,(2-3i)^2=-i\,(4-12i-9)=-i\,(-12i-5)=12i^2+5i=-12+5i$

donde -12 es la parte real.

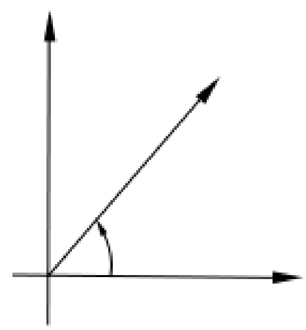
b)$\frac{1-i\sqrt{2}}{\sqrt{2}+i}=-i$

Desarrollo:

$\frac{1-i\sqrt{2}}{\sqrt{2}+i}=\frac{1-i\sqrt{2}}{\sqrt{2}+i}\cdot\frac{\sqrt{2}-i}{\sqrt{2}-i}=\frac{\sqrt{2}-i-2i-\sqrt{2}}{2+1}=\frac{-3i}{3}=-i$

I.II Representación Polar.

Para considerar la representación polar se debe nombrar a z como un número complejo; llamese *argumento* de z al ángulo formado por el eje $0x$ y el vector $0z$, este ángulo esta orientado de $0x$ para $0z$;



como en trigonometría, considerándolo positivo en el sentido opuesto al movimiento de los punteros del reloj. El argumento de z sólo puede ser definido cuando $z \neq 0$ determinándose para múltiplos menores de 2π. Como $x = \mid z \mid \cos\theta$ e $y = \mid z \mid \sin\theta$, tenemos la *representación polar* de z:

$$z = r\left(\cos\theta + i\sin\theta\right), \ r = \mid z \mid;$$

r y θ son llamados *coordenadas polares* de z. Conociendo la representación polar, vamos a deducir una regla muy conveniente para la multiplicación.

Sean

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1),$$

$$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2),$$

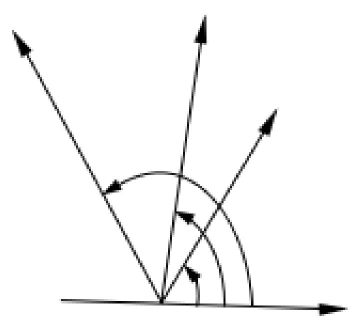
dos números complejos cualquiera. Tenemos entonces,

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) =$$

$$= r_1 r_2 \left[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i\left(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2\right)\right],$$

esto es,

$$\boxed{z_1 z_2 = r_1 r_2 \left[\cos\left(\theta_1+\theta_2\right) + i\sin\left(\theta_1+\theta_2\right)\right].}$$



Deducida esta regla vamos a deducir el resultado de modo análogo para la división.

Como

$$\frac{1}{\cos\theta + i\sin\theta} = \frac{\cos\theta - i\sin\theta}{\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)\left(\cos\theta - i\sin\theta\right)} = \cos\theta - i\sin\theta,$$

tenemos

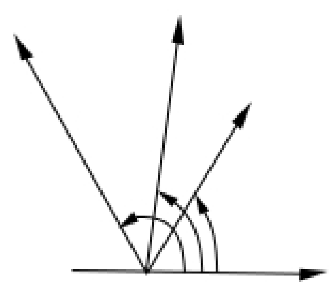
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{\cos\theta_1 + i\sin\theta_1}{\cos\theta_2 + i\sin\theta_2} = \frac{r_1}{r_2}\left(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1\right)\left(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2\right) =$$

$$= \frac{r_1}{r_2}\left[\left(\cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2\right) + i\left(\sin\theta_1\cos\theta_2 - \cos\theta_1\sin\theta_2\right)\right].$$

Por lo tanto,

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left[\cos\left(\theta_1 - \theta_2\right) + i\sin\left(\theta_1 - \theta_2\right)\right],}$$

Es así como para dividir números complejos basta hacer el cuociente de los módulos y la diferencia de los argumentos.



La fórmula de multiplicación además se establece para un número cualquiera de factores, siendo

$$z_j = r_j\left(\cos\theta_j + i\sin\theta_j\right), \qquad j = 1, 2, \ldots, n,$$

tenemos

$$z_1 z_2 \ldots z_n =$$

$$= r_1 r_2 \ldots r_n\left[\cos\left(\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_n\right) + i\sin\left(\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_n\right)\right].$$

La demostración de este hecho es simple y esta a cargo del lector.

En particular, cuando todos los factores son iguales al módulo unitario, obtenemos la llamada *Formula de De Moivre*:

$$\boxed{(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta.}$$

Esta fórmula es válida también para exponentes negativos. De hecho,

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^{-n} = \frac{1}{(\cos\theta + i\sin\theta)^n} =$$

$$= \frac{1}{\cos n\theta + i\sin n\theta} = \cos n\theta - i\sin n\theta,$$

esto es,

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^{-n} = \cos(-n\theta) + i\sin(-n\theta).$$

Propiedades del Valor Absoluto.

Las siguientes propiedades son de verificación inmediata:

$$\mid z \mid \geq 0$$

$$\mid z \mid = 0 \Leftrightarrow z = 0$$

$$\mid Re\, z \mid \leq \mid z \mid, \ \mid Im\, z \mid \leq \mid z \mid$$

$$\mid z \mid = \mid -z \mid .$$

La propiedad

$$\mid z_1 z_2 \mid = \mid z_1 \mid\mid z_2 \mid$$

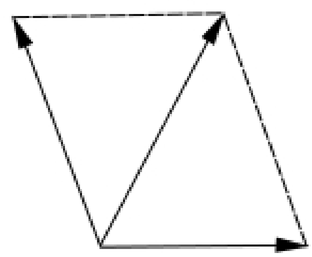
sigue de la siguiente observación:

$$\mid z_1 z_2 \mid^2 = (z_1 z_2)(\bar{z_1}\bar{z_2}) = (z_1\bar{z_1})(z_2\bar{z_2}) = \mid z_1 \mid^2 \mid z_2 \mid^2 .$$

Menos trivial es la desigualdad triángular,

$$\boxed{\mid z_1 + z_2 \mid \leq \mid z_1 \mid + \mid z_2 \mid,}$$

Así llamada por exponer una propiedad geométrica bien conocida: la suma de la longitud de dos lados de un triángulo es mayor o igual a la longitud del tercer lado. Para demostrarla observamos que



$$\mid z_1 + z_2 \mid^2 = (z_1 + z_2)(\bar{z_1} + \bar{z_2}) = z_1\bar{z_1} + z_2\bar{z_2} + (z_1\bar{z_2} + \bar{z_1}z_2) =$$

$$= \mid z_1 \mid^2 + \mid z_2 \mid^2 + z_1\bar{z_2} + \overline{z_1\bar{z_2}} =$$

$$= \mid z_1 \mid^2 + \mid z_2 \mid^2 + 2 \mid z_1\bar{z_2} \mid =$$

$$= \mid z_1 \mid^2 + \mid z_2 \mid^2 + 2 \mid z_1 \mid\mid z_2 \mid =$$

$$= (\mid z_1 \mid + \mid z_2 \mid)^2 .$$

De aquí resulta la desigualdad deseada por una simple extracción de raíz.

Como $\mid -z_2 \mid = \mid z_2 \mid$, vale también la desigualdad

$$\mid z_1 - z_2 \mid \leq \mid z_1 \mid + \mid z_2 \mid,$$

pues

$$\mid z_1 - z_2 \mid = \mid z_1 + (-z_2) \mid \leq \mid z_1 \mid + \mid -z_2 \mid = \mid z_1 \mid + \mid z_2 \mid .$$

Una tercera desiguladad muy importante es la siguiente:

$$\mid z_1 \mid - \mid z_2 \mid \leq \mid z_1 + z_2 \mid \qquad (1,1)$$

para demostrarla basta observar que

$$\mid z_1 \mid = \mid (z_1 + z_2) - z_2 \mid \leq \mid z_1 + z_2 \mid + \mid z_2 \mid .$$

por lo tanto se obtiene el resultado deseado restando al primero el último miembro. El lector debe notar también que vale la igualdad

$$\mid z_2 \mid - \mid z_1 \mid \leq \mid z_1 + z_2 \mid \qquad (1,2)$$

Si $\mid z_1 \mid - \mid z_2 \mid = a$, las desiguladades (1,1) y (1,2) son escritas, respectivamente

$$a \leq \mid z_1 + z_2 \mid, \qquad -a \leq \mid z_1 + z_2 \mid,$$

donde sigue que

$$\mid a \mid \leq \mid z_1 + z_2 \mid,$$

y queda

$$\boxed{\;||\, z_1 \,| - |\, z_2 \,|| \leq |\, z_1 + z_2 \,|\,.\;}$$

I.III Raices n-ésimas

Las raices n-esimas $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} = z$ de un número complejo $a \neq 0$ son obtenidas como una solución de la ecuación $z^n = a$ donde,

$$a = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$z = \rho(\cos\phi + i\sin\phi)$$

y usando la fórmula de De Moivre, obtenemos

$$\rho^n(\cos n\phi + i\sin n\phi) = r(\cos\phi + i\sin\phi)$$

como la igualdad de números complejos requiere una igualdad de sus partes reales y una igualdad de sus partes imaginarias separadamente, debemos tener;

$$\rho^n(\cos n\phi + i\sin n\phi) = r(\cos\phi + i\sin\phi)$$

$$\rho^n \cos n\phi + \rho^n i\sin\phi = r\cos\theta + ri\sin\theta$$

entonces

$$\rho^n \cos n\phi = r\cos\theta \text{ y } \rho^n \sin\phi = r\sin\theta$$

así estas ecuaciones son equivalentes a:

$$\rho^n = r$$

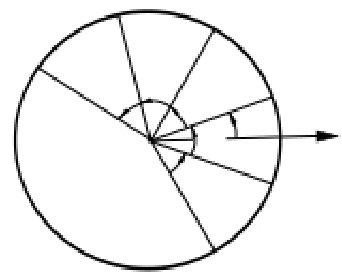
$$\rho = r^{\frac{1}{n}}$$

donde se tiene que $n\phi = \theta + 2k\pi$, entonces $\phi = \frac{\theta+2k\pi}{n}$ donde k es un intervalo, ρ es una raíz n-esima positiva de r y $z = \rho\cos\phi + i\sin\phi$. Ahora bien, al sustituir se logra

$$z = \sqrt[n]{r}(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}) \qquad (1,3)$$

Esta fórmula produce n raices distintas, cuando a k se le atribuyen valores como $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. Como es fácil ver, cualquier otro valor atribuido a k conduce a una raíz ya obtenida con uno de los valores anteriores, precisamente equivale que el resto de la división de k por n.

Veamos así que un número complejo a distinto de cero posee n-raices n-ésimas $z_0, z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$, todas con un mismo módulo $\rho = \sqrt[n]{\mid a \mid}$



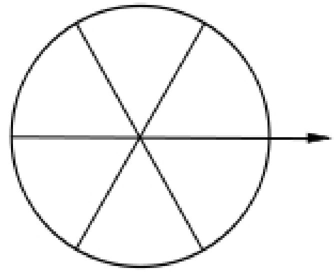
y con argumentos: $\phi k = \frac{\theta + 2k\pi}{n}$ donde $k = 0, 1, 2, 3, \ldots, n-1$.

Caso particular $a = 1$, obtenemos las raices n-ésimas de la unidad: $1, w, w^2, \ldots, w^{n-1}$ donde las soluciones de la ecuación $z^n = 1$ son para un número entero positivo n, se llaman las raíses n-ésimas de la unidad y estan dadas por:

$$z = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n} = e^{\frac{2k\pi}{n}}$$

para $k = 1$

$$w = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n} = e^{\frac{2\pi i}{n}}$$



$(ilustra\, el\, caso\ n = 6)$

Geométricamente, representan los n vértices de un polinomio regular de n lados inscritos en una circunferencia de radio unidad con centro en el origen.

Esta circunferencia tiene como ecuación $\mid z \mid = 1$ y es llamada la circunferencia unidad.

La fórmula (1,3) se puede escribir como

$$z = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta}{n} + i\sin\frac{\theta}{n}\right)\left(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}\right)$$

o bien $z = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta}{n} + i\sin\frac{\theta}{n}\right) w^k$ donde $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ donde

$$w = \left(\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}\right)$$

Esta expresión nos dice que las raices n-esimas de un número complejo pueden ser obtenidas como un producto de una raíz n-esima de un número,

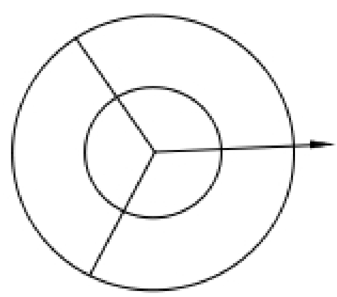
$$z_0 = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta}{n} + i\sin\frac{\theta}{n}\right)$$

precisamente para las raíces n-ésimas de la unidad $1, w, w^2, \ldots, w^{n-1}$.

Como ejemplo, determinar las raíces cúbicas del número $a = 8$. Una de las raíces es $z_0 = 2$. Las raíces cúbicas de unidad son dadas por $1, w, w^2$, como

$$w = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

luego las raíces cúbicas de 8 son:



$$z_0 = 2$$

$$z_1 = 2 \cdot w = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 + i\sqrt{3}$$

$$z_2 = 2 \cdot w^2 = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$= 2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$$

$$= 2\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= -1 - i\sqrt{3}$$

En el cálculo de la raíz cuadrada muchas veces es más conveniente seguir el planteamiento del siguiente ejemplo.

$$\sqrt{-7-24i} = x + iy\,/(\,)^2$$

$$-7 - 24i = x^2 + 2ixy - y^2$$

entonces

$$x^2 - y^2 = -7$$

$$2ixy = -24i$$

$$xy = -12$$

resolviendo esta última ecuación a x y sustituyendo en la primera obtenemos una ecuación cuadrática para y^2, cuya solución es $y^2 = 16$ (como y es real, $y^2 > 0$). Luego $y = \pm 4$ y $x = \pm 3$ donde;

$$\sqrt{-7 - 24i} = \pm (3 - 4i)$$

Ejercicios Resueltos.

a) $\sqrt{-4} = x + yi \ /()^2$

$-4 = (x + yi)^2$

$-4 = x^2 + 2xyi - y^2$

entonces

$x^2 - y^2 = -4$ $\qquad\qquad 2xyi = 0$

$y^2 = -4$ $\qquad\qquad x = 0$

$y^2 = 4$

$y = \pm 2$

por lo tanto $\sqrt{-4} = \pm(2 - 2i)$

b) $(1 + i\sqrt{3})^{1/2} = x + yi \quad /()^{1/2}$

$1 + i\sqrt{3} = (x + yi)^2$

$1 + i\sqrt{3} = x^2 + 2xyi - y^2$

entonces ahora igualando la parte real a 1 y la parte imaginaria a $i\sqrt{3}$ tenemos que:

despejando x

$2xyi = i\sqrt{3}$

$2xy = \sqrt{3}$

$x = \frac{\sqrt{3}}{2y}$

luego reeplazando x tenemos que,

$x^2 - y^2 = 1$

$x^2 - 1 = y^2$

Ejercicios Propuestos.

1. Usando el procedimiento de la parte 1.3, calcule las siguientes raices:

a) $\sqrt{-5-12i}$ $\qquad$ $b)\sqrt{3+4i}$ $\qquad$ $c)\sqrt{1+2i\sqrt{6}}$

2. En los siguientes casos resuelve las ecuaciones $P(z) = 0$ y factoriza los polinomios $P(z)$.

a) $P(z) = z^6 - 64$ $\qquad$ b) $P(z) = z^4 + 9$

c) $P(z) = 3z^2 - i$ $\qquad$ d) $P(z) = 5z^3 - 8$

3. Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $z^2 - 2z + 2 = 0$

b) $2z^2 + z + 1 = 0$

c) $z^2 + (1-2i)z + (1+5i) = 0$

d) $z^4 + (1-i)z^2 + 2(1-i) = 0$

I.IV Definición de Exponencial.

Admitiendo que el lector tiene familiaridad con las funciones trigonométricas, la constante de Euler e y la función exponencial e^x. Recordemos en particular el desarrollo de funciones en serie de potencias, válido para todos los valores reales de x.

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots; \qquad (1,4)$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots; \qquad (1,5)$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots; \qquad (1,6)$$

en (1,4) cuando $x = 1$ se obtiene e que es

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots,$$

de esta manera tomamos el desarrollo de (1.2) como base para definir e^z con z complejo. Si e^z tuviese un significado para z complejo y el desarrollo (1.4) fuese válido en este caso, entonces tendremos a y como real,

$$e^{iy} = 1 + iy + \frac{(iy)^2}{2!} + \frac{(iy)^3}{3!} + \frac{(iy)^4}{4!} + \frac{(iy)^5}{5!} + \frac{(iy)^6}{6!} + \frac{(iy)^7}{7!} + \ldots =$$

$$= 1 + iy - \frac{y^2}{2!} - i\frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + i\frac{y^5}{5!} - \frac{y^6}{6!} - i\frac{y^7}{7!} + \ldots$$

Suponiendo que todavía es posible reordenar los términos de esta serie, se reunirán los términos reales y separadamente los términos imaginarios, así obtenemos

$$e^{iy} = 1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \ldots + i\left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \frac{y^7}{7!} + \ldots\right),$$

es decir, en vista de (1.5) y (1.6),

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y. \tag{1.7}$$

Esas consideraciones que son puramente formales no establecen la relación (1.7), nos sirven como motivación para definir función exponencial. Haciendo esto tomamos la relación (1.7) como punto de partida, aquí usada para definir la exponencial en el caso de exponentes puramente imaginarios iy. Por otro lado, la definición de exponencial en el caso de un exponente cualquiera $z = x + iy$ se hace con el fin de mantener la propiedad aditiva de la exponencial real:

$$e^{x_1+x_2} = e^{x_1}e^{x_2}$$

Definimos entonces la exponencial e^z para un número complejo cualquiera $z = x + iy$ mediante la expresión

$$\boxed{e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y). \tag{1.8}}$$

La definición de las propiedades de las funciones reales $\sin x$, $\cos x$, y e^x se siguen fácilmente en la exponencial compleja:

$$e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2}; \tag{1.9}$$

$$e^{-z} = \frac{1}{e^z}; \tag{1.10}$$

$$(e^z)^n = e^{nz},\ n\,entero; \tag{1.11}$$

$$e^z \neq 0\,para\,todo\,z; \tag{1.12}$$

$$\mid e^z \mid = e^{Re\,z}; \tag{1.13}$$

$$e^z = 1 \ \Leftrightarrow \ z = 2k\pi i,\ k\,entero; \tag{1.14}$$

Demostración de (1.9)

Con la notación habitual,

$$z_1 = x_1 + iy_1 \qquad y \qquad z_2 = x_2 + iy_2,$$

obtenemos en vista de la definición (1.8),

$$e^{z_1}e^{z_2} = e^{x_1}\left(\cos y_1 + i\sin y_1\right)e^{x_2}\left(\cos y_2 + i\sin y_2\right) =$$

$$= e^{x_1+x_2}\left[\left(\cos y_1\cos y_2 - \sin y_1\sin y_2\right) + i\left(\sin y_1\cos y_2 - \cos y_1\sin y_2\right)\right] =$$

$$= e^{x_1+x_2}\left[\cos\left(y_1+y_2\right) + i\sin\left(y_1+y_2\right)\right];$$

y por lo tanto la definición (1.8) deduce que

$$e^{z_1}e^{z_2} = e^{x_1+x_2}e^{i(y_1+y_2)} = e^{x_1+x_2+i(y_1+y_2)} = e^{z_1+z_2},$$

lo que completa la demostración.

Demostración de (1.10)

Tenemos que $z = x + iy$,

$$e^{-z} = e^{-x}e^{-iy} = \frac{1}{e^x}\left[\cos(-y) + i\sin(-y)\right] = \frac{1}{e^x}\left(\cos y - i\sin y\right) =$$

$$= \frac{1}{e^x\left(\cos y + i\sin y\right)} = \frac{1}{e^x}.$$

Demostración (1.11)

La fórmula (1.11) es inmediata en los casos $n = 0$ y $n = 1$. Para $n = 2$ se deduce fácilmente de (1.9) y en general para $n > 0$ se demuestra por inducción. Para esto, como es válida para $n = 0$, basta demostrar que de ser válida para $n = k$ se deducirá que es válida para $n = k + 1$, $k \geq 0$. Suponemos, entonces

$$\left(e^z\right)^k = e^{kz}.$$

en consecuencia

$$\left(e^z\right)^{k+1} = \left(e^z\right)^k\left(e^z\right) = e^{kz}e^z = e^{kz+z} = e^{(k+1)z}.$$

En el caso de $n < 0$ se reduce fácilmente al caso $n > 0$. De hecho, suponiendo $n < 0$, tenemos

$$\left(e^z\right)^n = \frac{1}{\left(e^z\right)^{-n}};$$

pero $-n > 0$,luego $\left(e^z\right)^{-n} = e^{-nz}$, por tanto

$$\left(e^z\right)^n = \frac{1}{e^{-nz}} = e^{nz}.$$

esto completa la demostración de (1.11).

Dejamos al lector la tarea de demostrar las propiedades (1.12), (1.13) y (1.14).

Con la notación exponencial, la representación polar de un número complejo, se asume la fórmula compacta $z = re^{i\theta}$, donde $r =| z |$ y $\theta = \arg z$. La fórmula de De Moivre es simplemente

$$\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}.$$

Observamos también que se acostumbra a usar la notación $\exp z$ en lugar de e^z. Por ejemplo, es más conveniente escribir

$$\exp\left[\frac{z}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)\right]$$

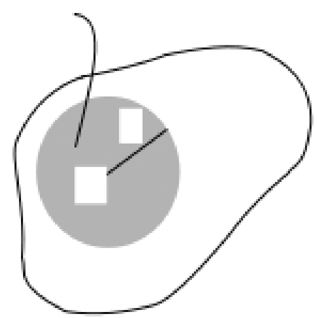
que

$$e^{\frac{z}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)}.$$

I.V Conjuntos de Puntos en el Plano

Dados los números $r > 0$ y z_0 números complejos cualquiera, se llama disco de centro z_0 y radio r al conjunto $D_r(z_0)$de todos los números complejos que están a una distancia menor que r desde el punto z_0, esto es

$$D_r(z_0) = \{z : |z - z_0| < r\}$$



Se llama *vecindad* de un punto z_0 a todo conjunto V que contiene un disco de centro z_0. En particular cualquier disco $D_r(z_0)$ es una vecindad de z_0.

Decimos que z_0 es un *punto interior* de un conjunto C si C es vecindad de z_0, esto es, si existe un disco de centro z_0 todo contenido en C.

Decimos que C es abierto si todos sus puntos son interiores, es decir, C es vecindad de cada uno de esos puntos. Vamos a demostrar que todo disco $D_r(z_0)$ es abierto. Para esto, sea w un punto cualquiera de $D_r(z_0)$. Debemos mostrar que existe un disco $D_\epsilon(w)$ contenido en $D_r(z_0)$.

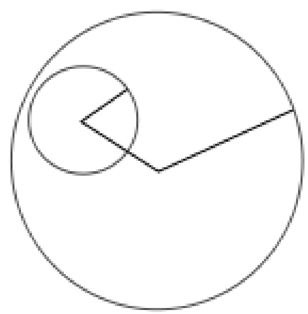
Sea $\delta = |w - z_0|$ .Es claro que $\delta < r$; sea $e < r - \delta$ y z un punto cualquiera de$D_\epsilon(w)$. Por desigualdades de triángulos,

$|z - z_0| = |(z - w) + (w - z_0)| \leqslant |z - w| + |w - z_0|$

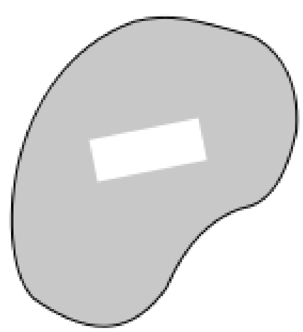
Como $|z - w| < \epsilon < r - \delta$ y $|w - z_0| = \delta$, obtenemos

$|z - z_0| < (r - \delta) + \delta = r$

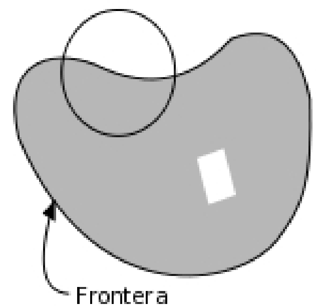
Luego $z \in D_r(z_0)$. Como z es arbitrario en $D_\epsilon(w)$, concluimos que $D_\epsilon(w) \subset D_r(z_0)$, lo que completa la demostración.



Decimos que un conjunto F es *cerrado* cuando su complemento es abierto. Recordemos que el *complemento* de un conjunto C es el conjunto C' de los puntos que no pertenecen a C. Es fácil ver que el complemento del complemento de C es el propio C.



Se llama *frontera o contorno* de un conjunto C al conjunto de los puntos z tales que la vecindad de z contenga puntos de C y puntos de su complemento C'.



Es claro de esta definición, que la frontera de C es también la frontera de C'. Un punto de la frontera puede o no pertenecer al conjunto en cuestión . Por ejemplo, en el conjunto

$$A = \{z : 3 \leqslant |z| < 5\}$$

la frontera en este caso consiste en los puntos z con $|z| = 3$ (que pertenecen al conjunto) y en los puntos z con $|z| = 5$ (que no pertenecen al conjunto). Este conjunto no es abierto ni cerrado.

Es fácil ver que ningún punto interior de un conjunto puede ser punto frontera y ningún punto frontera puede ser punto interior. En consecuencia, *un conjunto es abierto si y sólo si no contiene puntos frontera, pues un conjunto abierto es un conjunto que consta solamente de puntos interiores.* De aquí se da la definición de conjunto cerrado se sigue que *un conjunto es cerrado si y sólo si contiene todos los puntos frontera.*

Decimos que z_0 es *punto de acumulación* de un conjunto C si cualquier vecindad de z_0 contiene infinitos puntos de C. Es fácil ver que un punto interior de un conjunto, así como todo punto de frontera que no pertenece al conjunto, son puntos de acumulación del conjunto; todo punto de acumulación que no pertenece al conjunto es punto frontera; *un conjunto es cerrado si y sólo si contiene todos sus puntos de acumulación.*

Decimos que un conjunto es *conexo* si dos de cualquiera de sus puntos puede ser ligados por una poligonal completamente contenida en el conjunto. Se llama región a todo conjunto abierto y conexo. Un conjunto C es limitado si existe un número positivo K tal que $|z| \leqslant K$ para todo z en C. Se llama conjunto *compacto* a todo conjunto limitado y cerrado.

Se llama *punto aislado* de un conjunto C a todo punto de C que no es punto de acumulación de ese conjunto. Por ejemplo, todos los puntos de conjunto infinito

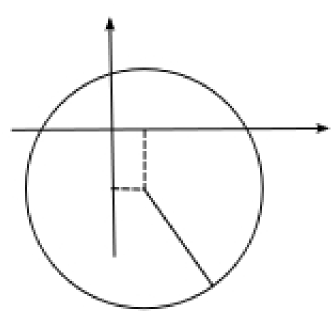
$$C = \left\{ 0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, ..., \frac{n}{n+1} \right\}, ...$$

son puntos aislados, 1 es el único punto de acumulación que no pertenece al conjunto.

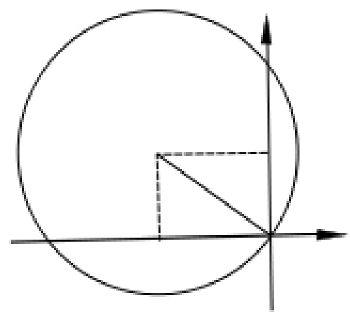
Todas estas nociones son las mismas del plano euclidiano. Que se basan en la noción de *distancia de dos puntos* z_1 y z_2, dada por $d\left(z_1, z_0\right) = |z_1 - z_2|$, que es lo mismo que distancia euclidiana $\sqrt{\left(x_1 - x_2\right)^2 + \left(y_1 - y_2\right)^2}$, donde $z_1 = x_1 + iy_1$ y $z_2 = x_2 + iy_2$. Por otra parte del punto de vista algebráico, el plano complejo y el plano euclidiano sólo difieren uno de otro debido a los términos definidos en la multiplicación de números (o puntos) complejos, en cuanto al plano euclidiano no tenemos tal operación.

Muchas veces es conveniente considerar *vecindades infinitas*, los denominados conjuntos de forma $V_k = \{z : z > K\}$. Esto corresponde el incorporar al plano complejo un nuevo elemento - el punto en el infinito, como acostumbramos a decir - para el cual usamos una conocida notación ∞. Debe ser bien claro que esta adjunción de infinito al plano complejo no tiene carácter algebráico. Son así conocidas las dificultades que surgen cuando procuramos implicar el infinito a la estructura algebráica a traves de las operaciones de suma y multiplicación. El adjuntar el infinito al plano complejo resulta un *plano extendido*, que es formado por todos los puntos finitos e infinitos. Este punto es único, al contrario de la recta donde en ella encontramos dos infinitos, $-\infty$ y $+\infty$. En el plano extendido cualquier semi-recta de origen z liga a z a un punto infinito.

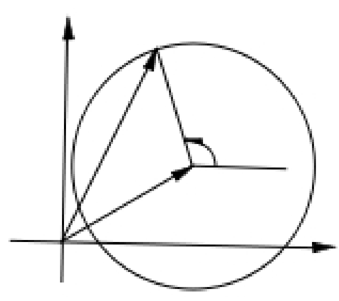
Veamos algunos ejemplos de conjuntos en el plano complejo. El conjunto de los puntos z tales que $|z - 3i| < 5$ consiste en un disco de centro $z_0 = 3i$ y radio 5; $|z + 3| > 7$ es el complemento , o exterior, del disco cerrado $|z - (-3)| \leqslant 7$ de centro -3 y radio 7; $\left|z - \frac{1}{2} + i\right| \leqslant 2$ es el disco cerrado de centro $z_0 = \frac{1}{2} - i$ y radio 2



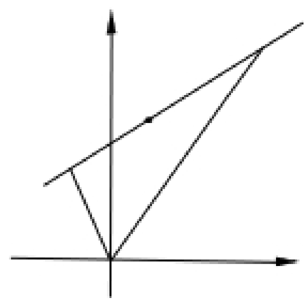
$|2z+4-3i| \geqslant 5$ es el mismo que $\left|z+2-\frac{3i}{2}\right| \geqslant \frac{5}{2}$, que es el exterior del disco de centro z_0 y radio $\frac{5}{2}$



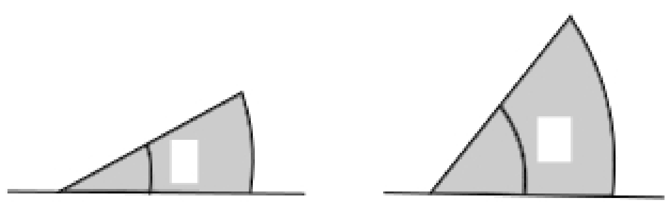
La ecuación $z = \alpha + re^{i\theta}$ describe el circulo de centro α y radio r, θ variando en el intervalo $0 \leqslant \theta < 2\pi$



La recta que pasa por los puntos α y β es dada por la ecuación paramétrica $z = \alpha + (\beta - \alpha)\, t$ y parámetro t variando en el conjunto de los números reales

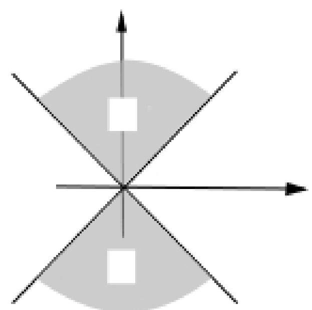


¿Cuál es el conjunto de puntos z tales que $Re\ z^2 < 0$? Poniendo $z = re^{i\theta}$ tenemos $z^2 = r^2 e^{2i\theta}$, por tanto la transformación que lleva a z en $w = z^2$, trasforma una región angular $0 < \arg z < \alpha$ en una región $0 < \arg w < 2\alpha$



Hecha esta observación, es fácil ver que el conjunto de puntos $Re\ z^2 < 0$ es una reunión de dos conjuntos

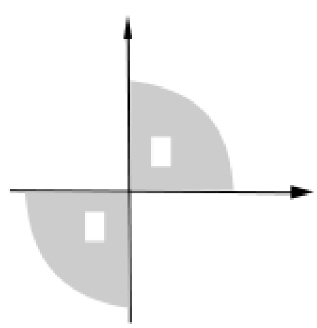
$C_1 = \left\{z : \frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{3\pi}{4}\right\}$ y $C_2 = \left\{z : \frac{3\pi}{4} < \arg z < \frac{\pi}{4}\right\}$



De manera análoga, verificamos que el conjunto $Im\ z^2 > 0$ consiste en la unión de dos conjuntos

$$S_1 = \{z : 0 < \arg z < \pi/2\}$$

$$S_2 = \{z : \pi < \arg z < 3\pi/2\}$$



II

FUNCIONES ANALÍTICAS

Las funciones analíticas se pueden considerar como un puente entre polinomios y funciones generales.

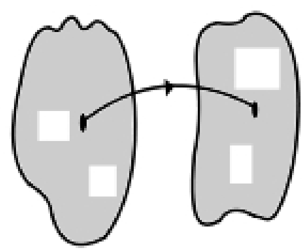
Recordemos que las funciones que podemos derivar e integrar son aquellas que cumplen con las normas de derivación e integración. También las funciones las podemos derivar e integrar en el plano complejo aunque en este caso de debe plantear la siguiente pregunta:

¿El concepto de derivada de una función compleja tiene sentido? Si es así, ¿cómo debería definirse y qué representa?

Estas y otras preguntas similares son el foco de este capítulo. Como se puede imaginar, los derivados complejos tienen una definición significativa, y muchos de los teoremas derivados proceden de la norma de cálculo (como la regla del producto y la regla de la cadena).

II.I Funciones de Variable Compleja

Vamos a considerar funciones definidas en un conjunto complejo, cuyos valores son en general complejos. Más precisamente, sea D un conjunto de números complejos y sea f una función que le corresponde a cada elemento de z un elemento de D, un único número complejo, que designamos por $f(z)$. Estas condiciones dice que f es una función con dominio D. Un conjunto I con dos valores $w = f(z)$, correspondiente a todos los valores de z en D y llamado una imagen de D para la función. f



z es llamada una *variable independiente* y w una *variable dependiente*.

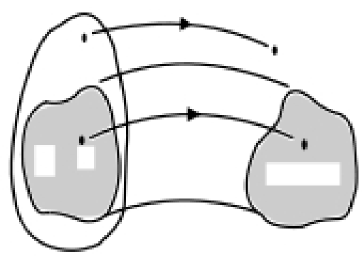
Se debe notar que para caracterizar una función no basta dar la ley de correspondencia de f; es preciso especificar también el dominio de definición de D. Entonces, frecuentemente consideramos funciones dadas en términos de relaciones analíticas bien definidas con $w = f(z)$, especificando el dominio de la definición. En estos casos estamos suponiendo que el dominio de la función es el conjunto de todos los valores de z para los cuales tienen sentido para la expresión analítica de $f(z)$.

Por ejemplo, cuando llamamos " sea una función

$$w = \frac{3z - 5i}{(z-i)(z+7)}",$$

estamos usando esta relación para especificar la ley de correspondencia de f que lleva a z y w; al mismo tiempo, se subentiende el dominio de esta función y el plano complejo, excepto los puntos $z = i$ e $z = -7$.

Dícese que una función f_1 con dominio D_1 está *restringuido* de una función f_2 con dominio D_2 y D_1 esta enteramente contenido en D_2 y $f_1(z) = f_2(z)$ para todo z en D_1



.

En estas mismas condiciones se dice que f_2 es una *extensión* de f_1. Por ejemplo, una relación $w = e^z$, z complejo define una función en todo el plano complejo, el cuál es una extensión de $y = e^x$, x real

Una función de variable compleja z podemos asumir valores reales.

Por ejemplo;

$f(z) =\mid z \mid= \sqrt{x^2+y^2}$, $z = x + iy$,

es una función de variable compleja z.

A cada función $w = f(z)$ de una variable compleja $z = x + iy$, está asociada a dos funciones reales de variables reales x e y, dadas por

$$u = u(x, y) = Re\, f(z), \;\; v = v(x, y) = Im\, f(z).$$

Por ejemplo, siendo $f(z) = z^2 + 3z - 5$, tenemos

(si reemplazamos los anterior en nuestra función nos queda de la siguiente manera:)

$$u = x^2 - y^2 + 3x - 5, \;\; v = 2xy + 3y$$

Otro ejemplo esta dado por:

$f(z) = \exp(z^2 + 4z)$, para el cuál tenemos que la parte real es:

$$u = e^{x^2 - y^2 + 4x} \cos(2xy + 4y)$$

y la parte imaginaria

$$v = e^{x^2 - y^2 + 4x} \sin(2xy + 4y)$$

Ejercicios Resueltos:

Determine la parte real y la parte imaginaria de la siguiente función:

1. Si $w = z^2 - 5z + 3$

sustituyendo en la función $z = x + iy$ en w

entonces nos queda

$w = (x + iy)^2 - 5(x + iy) + 3$

$w = x^2 + 2xyi - y^2 - 5x - 5yi + 3$

por lo tanto la parte real es

$u = x^2 - y^2 - 5x + 3$

y la parte imagina es

$v = 2xy - 5y$

2. Si $w = \frac{3}{z-5}$

considerando que $z = x + iy$ por lo tanto reemplazando en w tenemos que

$$w = \frac{3}{z-5} \cdot \frac{(z-5)}{(z-5)}$$

$$w = \frac{3(z-5)}{(z-5)(z-5)}$$

$$w = \frac{3(z-5)}{(z-5)^2}$$

$$w = \frac{3(z-5)}{z^2-10z+25}$$

$$w = \frac{3(x+iy-5)}{x^2+y^2-10(x+iy)+25}$$

$$w = \frac{3x+3iy-15}{x^2+2xyi+y^2-10x-10yi+25}$$

por lo tanto la parte real es

$$u = \frac{3x-15}{x^2+y^2-10x+25}$$

$$u = \frac{3(x-5)}{(x-5)^2+y^2}$$

y la parte imaginaria es

$$v = \frac{-3y}{(x-5)^2+y^2}$$

3. Determina el dominio de esta función:

$f(z) = \frac{z}{(z-i)\sin y}$

por lo tanto el dominio es:

$(z - i) = 0$

$z = i$

así el dominio de la función dada es todo $z = i, \; z = 0, \pm i\pi, \pm 2i\pi, ...$

Ejercicios Propuestos

1. Determina la parte real e imaginaria de cada una de las siguientes funciones:

a) $w = \frac{z+2}{z-2}$

b) $w = \frac{z-4i}{z+3i}$

c) $w = \frac{|z-3iz|}{z-i}$

d) $w = e^z(z-i)$

2. Determina el dominio de las siguientes funciones.

a) $f(z) = \frac{z}{x} - \frac{y}{z}$

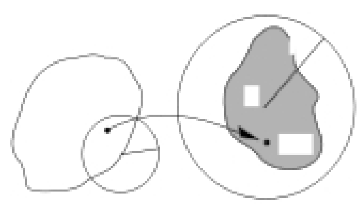
b) $f(z) = \frac{z^2+(z-1)^3}{(e^z-1)\cos y}$

II.II Límite y continuidad

Antes de partir con límite y continuidad, diremos que: Se llama función compleja a una función $f:\ D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

Ejemplo: Si $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad f(z) = z^2 + 2z + 1$

Diremos que una función $f(z)$ tiene límite L con z tendiendo a z_0, cuando la distancia $\mid f(z) - L \mid$ entre $f(z)$ y L es arbitrariamente pequeño, desde que se restringe a una vecindad convenientemente de z_0. En otras palabras dado cualquier $\varepsilon > 0$ un número $\mid f(z) - L \mid$ puede ser hecho menor que ε para ciertos valores convenientes de z, este ε esta aproximadamente entre $f(z)$ y L; una vez fijado ε tenemos que determinar un $\delta > 0$ de tal forma que para todos los valores z quedan sujetos a la condición de $0 <\mid z - z_0 \mid< \delta$, tenemos que $\mid f(z) - L \mid< \varepsilon$



Es importante observar que la variable z se aproxima a z_0, más nunca asume este valor. Es claro también que z debe siempre pertenecer al dominio de la función f. Daremos entonces la siguiente *definición de limite:*

Definición: *Sea z_0 un punto de acumulación de dominio D_f de una función f. Dicese que f tiene límite L para z tendiendo a z_0 si dado cualquier $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que*

$$z \,\epsilon\, D_f,\ 0 <\mid z - z_0 \mid< \delta \Rightarrow\mid f(z) - L \mid< \varepsilon$$

se escribe

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = L$$

Esta definición es formalmente la misma que en el caso de funciones reales, de los cursos de Cálculo; ella se reduze exactamente a este caso cuando L, $f(z)$, z y z_0 son números reales.

Vamos a considerar, como primer ejemplo, una función dada por

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

para todo número real $x \neq 0$. El lector debe saber que

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Este es un ejemplo típico de una función que tiene límite en un número sin estar definida en este punto, esto evidencia bien el hecho de que el límite L nada tiene que ver con el valor de la función en el punto z_0.

Cuando el punto z_0 pertenece al dominio de f y $L = f(z_0)$, entonces decimos que f es *continua* en el punto z_0:

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$$

En este caso hay que excluir al punto $z = z_0$, para el cuál el limite no esta definido.

La definición de continuidad que acabamos de dar, es fácil ver que la función

$$f(x) = \frac{\sin x}{x},$$

seria continua en un punto $x = 0$, si ella fuese definida en este punto y si $f(0) = 1$. Es por eso que se acostumbra a entender la función f aquí considerada, atribuyendole un valor 1 en el origen.

Como otro ejemplo, vamos a mostrar que la función:

$$f(z) = \frac{z + 3i}{2}$$

y continua en el punto $z_0 = 2 - i$ tenemos que

$$|f(z) - f(z_0)| = \frac{z + 3i}{2} - (1 + i) = \frac{|z - (2 - i)|}{2}.$$

De aqui se tiene que, dado $\varepsilon > 0$, basta tomar $\delta = 2\varepsilon$ para tener

$$|z - (2 - i)| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$$

Consideremos la función

$$g(z) = \begin{cases} 0 & para\ z = 2 - i \\ \frac{z+3i}{2} & para\ z \neq 2 - i \end{cases}$$

y límite con $z \to 2 - i$ será el mismo que en el caso de la función f , la cuál difiere del valor de g en el punto $2 - i$.

Ahora usando la definición de límite, se va a mostrar que

$$\lim_{z \to 2i} \left(z^2 + 3z\right) = -4 + 6i$$

por lo tanto tenemos que

$$\left|\left(z^2 + 3z\right) - (-4 + 6i)\right| = \left|\left(z^2 + 4\right) + 3(z - 2i)\right|$$

$$= |(z - 2i)(z + 2i) + 3(z - 2i)| = |z - 2i|\,|z + 3 + 2i|$$

$$\leq |z - 2i|\,(|z| + |3| + |2i|) = |z - 2i|\,(|z| + 5)\,.$$

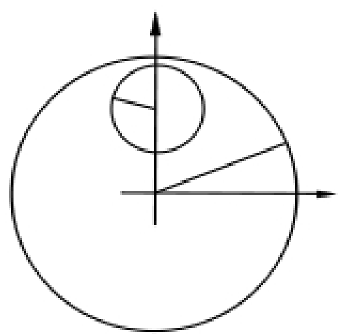
Como $z \to 2i$ podemos desde ahora suponer que $|z| < 3$ o que se puede escribir de la siguiente forma

$$\left|\left(z^2 + 3z\right) - (-4 + 6i)\right| \leq 8\,|z - 2i|\,.$$

Vemos entonces que dado $\varepsilon > 0$, basta saber $|z-2i| < \frac{\varepsilon}{8}$ (y también $|z < 3|$), para tener

$$\left|\left(z^2+3z\right)-(-4+6i)\right| < \varepsilon$$

Basta entonces tomar un δ menor que dos números 1 y $\frac{\epsilon}{8}$ para que esta última desigualdad se satisfaga desde $|z-2i| < \delta$



Como en el caso de las funciones de variable real, la definición de limite puede ser fácilmente en el caso de que z o $f(z)$ tiendan al infinito.

Dícese que $f(z)$ *tiene limite finito* L con $z \to \infty$ si dado cualquier $\varepsilon > 0$, existe un $M > 0$ tal que $|f(z) - L| < \varepsilon$, para todo z en el dominio de f, $|z > M|$.

Dícese que $f(z)$ *tiende a infinito cuando* z *tiende a* z_0 si, dado que cualquier $K > 0$, existe un $\delta > 0$, tal que $|f(z)| > K$ para todo z en el dominio de f, $0 < |z - z_0| < \delta$;

Dícese que $f(z)$ *tiende a infinito con* z *tendiendo a infinito* si, dado cualquier $K > 0$, existe un $M > 0$ tal que $|f(z)| > K$ para todo z en el dominio de f, $|z| > M$.

Veamos algunos ejemplos

1) La función $f(z) = \frac{5z}{2z-8i} = \frac{5z}{2(z-4i)}$

tiende a infinito con $z \to 4i$. Para mostrar esto, primero sujetamos a z a la condición de que $|z| > r$, donde r es cualquier número positivo menor que 4. Ahora tenemos que:

$$|f(z)| = \frac{5|z|}{2|z-4i|} > \frac{5r}{2|z-4i|}$$

de aquí se sigue que, dado cualquier $K > 0$, $|f(z)|$ será mayor que K si

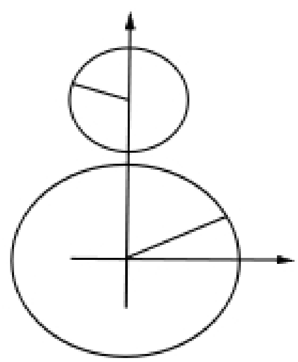
$$\frac{5r}{2|z-4i|} > K$$

en otras palabras

$$0 < |z-4i| < \frac{5r}{2K}$$

Esta condición debe ser satisfecha justamente con otra condición la cuál dice que con $|z| > r$. Tomando entonces $0 < |z - 4i| < \delta$, donde

$$\delta = min\left\{\frac{5r}{2k}, 4 - r\right\}$$



obtenemos que:

$$| z |=| 4i + (z - 4i) | \geq 4- | z - 4i |> 4 - \delta > 4 - (4 - r) = r$$

luego

$$0 <| z - 4i |< \delta \Rightarrow| f(z) |> K$$

2) La función $$f(z) = \frac{3iz+5}{2z-i}$$

tiende a $\frac{3i}{2}$ con $z \to \infty$. Es decir, desde que $\mid z \mid > \frac{1}{2}$ tomese $\mid 4z \mid > \mid 2i \mid$, luego $\mid 4z - 2i \mid > 4 \ \mid z \mid -2$; y entonces,

$$\left| f(z) - \frac{3i}{2} \right| = \left| \frac{3iz+5}{2z-i} - \frac{3i}{2} \right| = \frac{7}{|4z-2i|} < \frac{7}{4\,|z|-2}$$

Ahora sustituyendo z a una condición $|z| > 2$, obtenemos

$$\left| f(z) - \frac{3i}{2} \right| \leq \frac{7}{4\,|z|-2} = \frac{7}{3\,|z| + |z| - 2} < \frac{7}{3\,|z|}$$

Esto será menor que $\varepsilon > 0$ sí $|z| > \frac{7}{3}\varepsilon$. Por lo tanto

$$M = max\left\{2, \frac{7}{3}\varepsilon\right\}$$

obteniendo

$$|z| > M \Rightarrow \left| f(z) - \frac{3i}{2} \right| < \varepsilon$$

3) Finalmente vamos a mostrar que la función $f(z) = \frac{z^2-i}{3z+5}$ con $z \to \infty$ tiende a infinito. Con una restricción $|z| > 5$, tenemos

$$|f(z)| = \frac{|z^2-i|}{|3z+5|} \geq \frac{|z|^2 - 1}{3\,|z|+5} > \frac{|z|^2-1}{4\,|z|}$$

como $|z| > 5$, tenemos $1 < \frac{|z|^2}{2}$, donde

$$|f(z)| > \frac{|z|^2-1}{4\,|z|} > \frac{|z|^2 - \frac{|z|^2}{2}}{4\,|z|} = \frac{|z|}{8}$$

Dado $K > 0$, basta entonces saber $|z| > 5$ para terminos $|f(z)| > K$, es decir, M y mayor a dos números 5 y $8K$ tenemos que:

$$|z| > M \Rightarrow |f(z)| > K$$

Ejercicios Resueltos.

1. Establesca el resultado directamente de la definición de limite ($z = x + iy$).

a) $\lim_{z \to 3i} (z^2 - 5z) = -9 + 15i$

resolviendo el límite tenemos que

$$| (z^2 - 5z) - (-9 + 15i) | = | (z^2 + 9) - 5(z - 3i) |$$

$$= | (z + 3i)(z - 3i) - 5(z - 3i) |$$

$$= |(z - 3i)| \, |z + 3i - 5|$$

$$\leq |z - 3i| \, (|z|) + |-5| + |3i| = |z - 3i| \, (|z| + 8)$$

Ejercicios Propuestos

1. Determina los siguientes limites, directamente de la definición ($z = z + iy$)

a) $\lim\limits_{z \to 2i} (2x + y^2) = 4$

b) $\lim\limits_{z \to i} \frac{4z+i}{z+1} = \frac{5i}{1+i}$

c) $\lim\limits_{z \to i} \frac{7}{z^2+1} = \infty$

2. Resuelva los siguientes casos en donde a y b son constantes complejas:

a) $\lim\limits_{z \to z_0} (az + b) = az_0 + b$

b) $\lim\limits_{z \to z_0} \sqrt{z} = \sqrt{z_0}, \quad z_0 \neq 0$

c) $\lim\limits_{z \to z_0} (az^2) = az_0^2$

sugerencia: $\sqrt{z} - \sqrt{z_0} = \frac{(\sqrt{z}-\sqrt{z_0})(\sqrt{z}+\sqrt{z_0})}{\sqrt{z}+\sqrt{z_0}} = \frac{z-z_0}{\sqrt{z}+\sqrt{z_0}}$

3. Sea $f(z)$ una función con límite L para $z \to z_0$. Muestre que

$$\lim_{z \to z_0} |f(z)| = |L|$$

sugerencia: $|f(z)| - |L| \leq |f(z) - L|$

4. Pruebe que si $f(z) \to L \neq 0$ con $z \to z_0$, entonces f es limitada por una vecindad de z_0. Más especificamente, dado $\varepsilon > 0$, tal que

$$z \,\epsilon\, D_f \text{ y } 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z)| < |L| + \varepsilon$$

5. Pruebe que si $f(z) \to L \neq 0$, con $z \to z_0$, entonces existe un $\delta > 0$, tal que

$$z \,\epsilon\, D_f \;\; y \;\; 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z)| > |L| /2$$

6. Pruebe que un polinomio de grado $n > 0$,

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_0, \, a_n \neq 0$$

tiende a ∞ con $|z| \to \infty$

Sugerencia: para n suficientemente grande

$$|P(z)| \geq |z|^n \left(|a_n| - \left|\frac{a_{n-1}}{z} + ... + \frac{a_0}{z^n}\right|\right)$$

$$\geq |z|^n \left(|a_n| - \left|\frac{a_{N-1}}{z}\right| - ... \left|\frac{a_0}{z^n}\right|\right) \geq \frac{|a_n z^n|}{2}$$

7. Pruebe que el cuociente de dos polinomios

$$f(z) = \frac{a_m z^m + ... + a_1 z + a_0}{b_n z^n + ... + b_1 z + b_0} \text{ , } a_m b_n \neq 0,$$

tiende a cero $\frac{a_m}{b_n}$ o ∞ con $z \to \infty$, conforme sea $m < n$ o $m > n$ respectivamente.

Sugerencia: Factorice z^{m-n}

II.III Propiedades de Límite

Las propiedades conocidas de límite, relativa a límite de una suma, de un producto y cuociente, permanecen válidas y son establecidas como en el caso de variables reales. Especialmente, la hipotesis de que $f(z)$ y $g(z)$ toman un mismo dominio y tengan limites finitos con $z \to z_0$, valen como relaciones:

$$\lim_{z\to z_0}[f(z)+g(z)] = \lim_{z\to z_0} f(z) + \lim_{z\to z_0} g(z) \qquad (2,1)$$

$$\lim_{z\to z_0}[f(z)\cdot g(z)] = \left[\lim_{z\to z_0} f(z)\right]\left[\lim_{z\to z_0} g(z)\right] \qquad (2,2)$$

$$\lim_{z\to z_0} g(z) \neq 0 \quad entonces \quad \lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{\lim_{z\to z_0} f(z)}{\lim_{z\to z_0} g(z)} \qquad (2,3)$$

Demostración (2,1): Sean F y G los límites de f y g, respectivamente, con $z \to z_0$. Dado $\varepsilon > 0$, notemos que:

$$\mid f(z)+g(z)-(F+G)\mid = \mid (f(z)-F)+(g(z)-G)\mid$$

$$\leq \mid f(z)-F\mid + \mid g(z)-G\mid,$$

así esto será menor que ε si hacemos $\mid f(z)-F\mid < \frac{\epsilon}{2}$ y $\mid g(z)-G\mid < \frac{\epsilon}{2}$.

Ahora, siendo D_f y D_g los dominios de f y g respectivamente, existen $\delta' > 0$ y $\delta'' > 0$ tales que

$$z \,\epsilon\, D_f \text{ y } 0 <\mid z - z_0 \mid< \delta' \Rightarrow\mid f(z) - F \mid< \tfrac{\varepsilon}{2},$$

$$z \,\epsilon\, D_g \text{ y } 0 <\mid z - z_0 \mid< \delta'' \Rightarrow\mid g(z) - G \mid< \tfrac{\varepsilon}{2},$$

Esta claro entonces, que son verdaderas esta disigualdades si tomamos

$$\delta = min\left\{\delta', \delta''\right\}.$$

$$z \;\epsilon\; D_f \;\cap\; D_g \text{ y } 0 <\mid z - z_0 \mid< \delta, \qquad (\Box)$$

pues entonces, tenemos que $\delta < \delta'$y $\delta < \delta''$. En consecuencia, $(\Box)$ implica

$$\mid f(z) + g(z) - (F + G) \mid< \varepsilon,$$

y que completa la demostración.

Son igualmente válidas las propiedades de funciones continuas, que siguen fácilmente las propiedades de la suma y el producto de funciones continuas, también el cuociente de dos funciones f y g son continuas en un punto z_0, y una función continua en z_0, siempre que el denominador g no se anule a ese punto. Vale también la propiedad de la función compuesta: sea g una función cuyo dominio es un disco D de centro z_0, cuya imagen está contenida en el dominio de D' de una función f; estas condiciones, si g es continua en z_0 y f continua en $g(z_0)$, entonces una función compuesta $f(g(z))$ es continua en un punto z_0.

Existe una importante relación entre el limite de una función compleja y los límites de sus partes reales e imaginarias, que se consideran acontinuación.

Teorema: *Sea $f = u + iv$ una función con dominio D y sea $L = U + iV$. Entonces*

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = L \qquad (2,4)$$

si y sólo si

$$\lim_{z \to z_0} u(x,y) = U \ \ y \ \lim_{z \to z_0} v(x,y) = V \qquad (2,5)$$

Demostración: Supongamos que se satisface la condición $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = L$ (2,4). Entonces, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que:

$$z \,\epsilon\, D, \ 0 <\mid z - z_0 \mid< \delta \Rightarrow\mid f(z) - L \mid< \varepsilon. \qquad (2,6)$$

como

$u - U = Re(f - L)$ y $v - V = Im(f - L)$.

de aquí (2,6) se sigue que $z \epsilon D,\ 0 <| z - z_0 |< \delta$ implica que

$| u(x, y) - U |< \varepsilon$ y $| v(x, y) - V |< \varepsilon$,

lo cuál establece la condición anterior (2,5).

Reciprocamente, supongamos que la condición satisface la condición (2,5), dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $z\,\epsilon\, D,\ 0 <| z - z_0 |< \delta$ implica que:

$$| u(x, y) - U |< \tfrac{\epsilon}{2} \text{ y } | v(x, y) - V |< \tfrac{\epsilon}{2} \qquad (2, 7).$$

Por otro lado, usando la desigualdad triangular, obtenemos que

$$| f - L |=| (u - U) + i(v - V) \leq| u - U | + | v - V | .$$

De aquí y de (2,7) se sigue que $z \epsilon D$, $0 <| z - z_0 |< \delta$ implica que

$$| f(z) - L |< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

en donde esta condición, completa la demostración.

Corolario: *Una función*

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

es continua en un punto $z_0 = x_0 + iy_0$ *sí, y solamente sí su parte real e imaginaria,* u *y* v *son continuas en ese punto.*

Ejercicos Propuestos:

1. Demuestre la propiedad del producto de los límites. Como sugerencia: $f(z) \to F$ y $g(z) \to G$, observe que:

$|f(z) \cdot g(z) - FG| = |f(z)(g(z) - G) + G(f(z) - F)| \leq |f(z)| |g(z) - G| + |G| |f(z) - F|$

Dado $\varepsilon > 0$, para $|f(z)| < 2|F|$, $|g(z) - G| < \varepsilon/4\,|F|$ y $|f(z) - F| < \varepsilon/2\,|G|$

(suponga que $F \neq 0$ y $G \neq 0$). Y si $F = 0$ o $G = 0$ o ambos son cero.

2. Pruebe que si $f(z) \to 0$ con $z \to z_0$ y $g(z)$ es limitada por una vecindad de z_0, entonces $f(z)\,g(z) \to 0$ con $z \to z_0$

3. Demuestre la propiedad del cuociente entre limites para el caso en que $f(z) = 1$. Sugerencia: Sea $G = \lim\limits_{z \to z_0} g(z)$.

Observe que

$\left|\frac{1}{g(z)} - \frac{1}{G}\right| = \frac{|g(z)-G|}{|g(z)||G|}$

4. Calcule los siguientes limites

a) $\lim\limits_{z\to i}\frac{z^3-27}{z-3}$

b) $\lim\limits_{z\to -2i}\frac{z^3-8i}{z+2i}$

c) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\sqrt{1+h}-1}{h}$

Sugerencia: Use $a-b=\frac{a^2-b^2}{a+b}$ con $a=\sqrt{1+h},\ b=1$

d) $\lim\limits_{z\to 0}\frac{(1+z)^{1/4}-1}{z}$

Sugerencia: Use $a-b=\frac{a^4-b^4}{a^3+a^2b+ab^2+b^3}$ con $a=(1+z)^{1/4},\ \ b=1$

e) $\lim\limits_{z\to 0}\frac{(1+z)^{1/3}-(1-z)^{1/3}}{z}$

Sugerencia: Use la expreriencia de los ejercicios anteriores.

II.IV Función Analítica

Sea f una función cuyo domino es una región R (conjunto abierto y conexo) y sea z un punto de R. Dícese que f tiene derivada en el punto z si existe el límite

$$\lim_{h\to 0}\frac{f\,(z+h)-f(z)}{h}$$

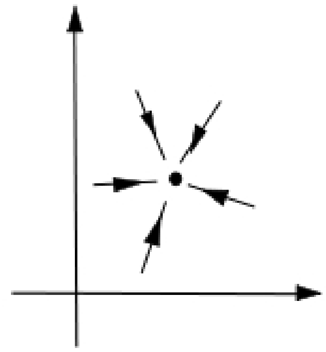
O, el que es equivalente, si existe

$$\lim_{w\to z}\frac{f(w)-f(z)}{w-z}$$

Cuando ese límite existe, que define una nueva función de z, la función derivada de una función f, es designada por f':

$$f'(z)=\lim_{h\to o}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}$$

Debe observar que, para la existencia de la derivada, el límite no puede depender del modo como h tiende a cero o como w tiende a z. En particular, w puede tender a z a lo largo de diferentes radios de origen en el punto z y el límite debe ser el mismo.



Como por ejemplo, vamos a mostrar que una función

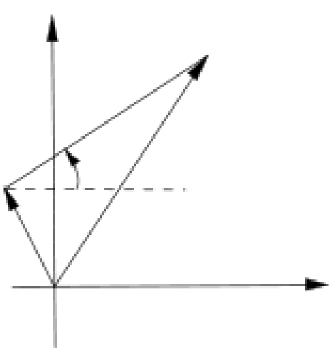
$$f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2$$

Sólo es derivable en $z = 0$

En efecto, poniendo $h = re^{i\theta}$, tenemos

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{(z+h)(\overline{z} + \overline{h}) - z\overline{z}}{h} =$$

$$\frac{z\overline{h} + h\overline{z} + h\overline{h}}{h} = ze^{-2i\theta + \overline{z} + re^{-i\theta}}$$



Pasando al límite con $r \to 0$ y designando este límite como $f'_\theta(z)$ obtenemos

$$f'_\theta(z) = ze^{-2i} + \overline{z}$$

Esta es una expresión de derivada direccional de f en un punto z. Ella depende del ángulo θ para todo $z \neq 0$, de forma que f no es derivada ordinaria en estos puntos. La derivada de f sólo existe para $z = 0 : f'(0) = 0$.

Se dice que una función f es analística en la región R si es derivable en cada punto de R; f es analítica en un punto z_0 si f es analítica una región que contiene a z_0, por ejemplo, un disco de centro z_0. La expresión *función holomorfa, función regular, función monógena* son usadas como sinónimos de *función analítica.*

De acuerdo con esta definición, una función que sólo posee derivadas en ciertos puntos aislados no es analítica; el concepto de analiticidad requiere la existencia de derivada en todos los puntos de un conjunto abierto. Sin duda esta condición impone fuertes restricciones a la función f y tiene como consecuencia una serie de resultados verdaderamente sorprendentes.

Todas las funciones las que se ven en un curso de cálculo son analíticas, cuando convenientemente son extendidas al plano complejo. Una función constante es analítica y su derivada es cero. La función $f(z) = z^n$, donde n es un entero positivo, es analítica y su derivada es $f'(z) = nz^{n-1}$; esto se demuestra como un caso real, usando la Fórmula de Binomio de Newton, por el cual

$$f(z+h) = (z+h)^n =$$

$$= z^n + nz^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}z^{n-2}h^2 + .. + h^n$$

De aquí se sigue que

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{(z+h)^n - z^n}{h} =$$

$$= nz^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}z^{n-2}h + ... + h^{n-1}$$

haciendo $h \to 0$, obtenemos el resultado deseado.

Del mismo modo, la suma y el producto de un número finito de funciones analíticas, es analítica, y las derivadas se calculan de acuerdo con las reglas conocidas, el cuociente de funciones analíticas, es analítica en puntos donde el denominador no se anula y la derivada es dada por la conocida regla de derivación de un cuocioente. Vale también la regla de la derivación de la función compuesta o derivación en cadena: si g es derivable en el punto z y f es derivable en el punto $g(z)$, entonces $f(g(z))$ es derivable en el punto z.

$$\frac{d}{dz}f(g(z)) = f'(g(z))g\prime(z)$$

Todos esos teoremas y otros más se demuestran como las derivadas reales.

Vamos a demostrar que

si una función es derivable en un punto z_0, entonces f es continua en ese punto.

Como f es derivable en el punto z_0, la expresión

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) = g$$

tiende a cero con $z \to z_0$. En consecuencia, el último termino de la expresión

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)f'(z_0) + (z - z_0)g$$

tiende a cero con $z \to z_0$. Como el penúltimo termino también tiende a cero, concluimos que

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$$

que es el resultado deseado.

Se llama *función entera* a toda función analítica en todo el plano. Los polinomios son los ejemplos más simples de funciones analíticas, que son funciones enteras.

A seguir vienen las funciones racionales, definidas como el cuociente de dos polinomios. Estas son analíticas en todos los puntos que no anulan el denominador.

Por ejemplo, la función

$$f(z) = \frac{(z+2)(3z-1)^2}{z(z-3)(z+i)^2}$$

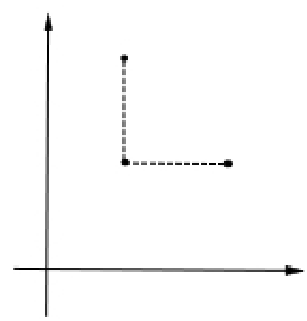
Es analítica en todo el plano, exceptuando los ceros del denominador: $z = 0, 3, -i$.

II.V Las funciones de Cauchy-Riemann

Sea $f = u + iv$ una función derivable en un punto $z = x + iy$. Entonces el cuociente

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

tiene límite $f'(z)$ para $h \to 0$, independiente de modo como h tiende a cero. En particular, podemos hacer h tender a cero por valores reales $h = k$ y por valores imaginarios $h = it$.



obtenemos respectivamente,

$$f'(z) = \lim_{k \to 0} \frac{u(x+k, y) - u(x, y) + i\,[v(x+k, y) - v(x, y)]}{k}$$

y

$$f'(z) = \lim_{t \to 0} \frac{u(x, y+t) - u(x, y) + i\,[v(x, y+t) - v(x, y)]}{it}$$

El hecho de que estos límites existieren implica en sus partes reales, asi como en sus partes imaginarias, poseen límites separadamente, esto es,

$$f'(z) = \lim_{k \to 0} \frac{u(x+k,y) - u(x,y)}{k} + i \lim_{k \to 0} \frac{v(x+k,y) - v(x,y)}{k}$$

y

$$f'(z) = \lim_{t \to 0} \frac{v(x,y+t) - v(x,y)}{t} + i \lim_{k \to 0} \frac{u(x,y+t) - u(x,y)}{t}$$

En consecuencia, las funciones u y v poseen derivadas parciales en un punto (x, y) y las siguientes relaciones son válidas en ese punto:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x};$$
$$f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}$$

Igualmente de las partes reales y de las partes imaginarias, obtenemos de aquí las llamadas Ecuaciones de *Cauchy-Riemann*

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x}, \; \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \qquad (2,8)}$$

El análisis muestra que las Ecuaciones de Cauchy-Riemann son una condición necesaria para la existencia de derivada de una función f. Más esa condición no es suficiente para garantizar la existencia de derivada de f. Como ejemplo de esto, consideremos la función

$$f(z) = \sqrt{|xy|},\ z = x + iy$$

Tenemos aquí $v \equiv 0$ por tanto $v_x = v_y = 0$. Por otro lado, $u = \sqrt{|xy|}$, donde $u(k,0) = u(0,0) = 0$

$$u_x(0,0) = \lim_{k \to 0} \frac{u(k,0) - u(0,0)}{k} = 0$$

Análogamente se demuestra que $u_y(0,0) = 0$. Vemos entonces que las Ecuaciones de Cauchy-Riemann satisfechas en el punto $z = 0$.

No obstante esto, f no es derivable para $z = 0$. De hecho, poniendo $h = re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ obtenemos

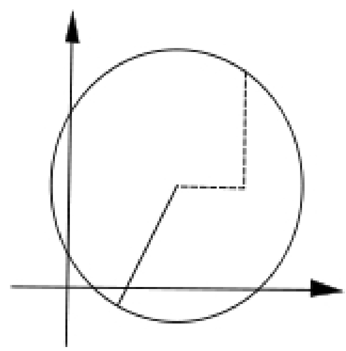
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{\sqrt{|\cos\theta \sin\theta|}}{e^{i\theta}} = \frac{|\sin 2\theta|^{1/2}}{2} e^{-i\theta}$$

La expresión para la derivada direccional es $f'_\theta(0)$. Ella depende de θ. Luego $f'(0)$ no existe.

Como acabamos de ver, las Ecuaciones de Cauchy-Riemann son una condición necesaria, pero no suficiente, para que una función f tenga derivada. Entre tanto si la juntáramos con la condición de que las derivadas u y v sean continuas en una región R, obtenemos una caracterización muy importante de las funciones analíticas en términos de estas Ecuaciones. Es lo que vamos a considerar en el teorema que sigue.

Teorema: *Sean $u(x,y)$ y $v(x,y)$ funciones reales con derivadas parciales u_x, u_y, v_x, v_y, continuas en una región R. Entonces una condición necesaria y suficiente para que la función $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ sea analítica en esta región es que las Ecuaciones de Cauchy-Riemann se cumplan en R.*

Demostración: la necesidad de la condición fue demostrada anteriormente, de forma que sólo nos resta probar que la condición es suficiente. Para esto vamos a considerar un punto $z = (x, y)$ de R y un número $\delta > 0$ tal que la vecindad $V_\varepsilon = (x + k, y + t) : k^2 + t^2 < \delta^2$ este toda contenida en R,



en particular, los segmentos zz_1 y zz_2, donde $z_1 = (x + k, y)$ y $z_2 = (x + k, y+t)$, están también contenidos en R. Esto nos permite aplicar el conocido Teorema de Media, del cual tenemos

$$u(x + k, y) - u(x, y) = ku_x(x + \theta_1 k, y)$$

$$u(x + k, y + t) - u(x + k, y) = tu_y(x + k, y + \theta_2 t)$$

Donde θ_1 y θ_2 son números convenientes del intervalo $(0,1)$. Tomando estas dos igualdades obtenemos

$$\Delta u = u(x+k, y+t) - u(x,y)$$

$$= ku_x(x+\theta_1 k, y) + tu_y(x+k, y+\theta_2 t) \qquad (2,9)$$

Como las funciones u_x y u_y son continuas, podemos escribir

$$u_x(x+\theta_1 k, y) = u_x(x,y) + \delta_1$$

y

$$u_y(x+k, y+\theta_2 t) = u_y(x,y) + \delta_2 \qquad (2,10)$$

donde δ_1 y δ_2 tienden a cero como $k^2+t^2 \to 0$. Sustituyendo $(2,10)$ en $(2,9)$ obtenemos

$$\Delta u = u(x+k, y+t) - u(x,y)$$

$$= ku_x + tu_y + k\delta_1 + t\delta_2 \qquad (2,11)$$

de modo análogo deducimos que

$$\Delta v = v(x+k, y+t) - v(x,y)$$

$$= kv_x + tv_y + k\delta_3 + t\delta_4 \qquad (2,12)$$

donde δ_3 y δ_4 tienden a cero como $k^2 + t^2 \to 0$.

Introduciendo $h = k + it$ y usando $(2,10)$ y $(2,11)$ obtenemos

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{\Delta u + i\Delta v}{h} = \frac{(ku_x + itv_y) + (kv_x - itu_y)}{h} +$$

$$+ \frac{k}{h}(\delta_1 + i\delta_3) + \frac{t}{h}(\delta_2 + i\delta_4) \qquad (2,13)$$

Usamos ahora las Ecuaciones de Cauchy-Riemann para sustituir v_y y $-u_y$ en $(2,13)$ por u_x y v_x respectivamente. Tenemos entonces

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = (u_x + iv_x) + \frac{k}{h}(\delta_1 + i\delta_3) + \frac{t}{h}(\delta_2 + i\delta_4) \, (2,14)$$

Finalmente observamos que $\left|\frac{k}{h}\right| \leqslant 1$ y $\left|\frac{t}{h}\right| \leqslant 1$, en cuanto que δ_1, δ_2, δ_3 y δ_4 tienden a cero con $h \to 0$, de forma que pasando al límite de $(2,14)$ concluimos que la derivada $f'(z)$ existe y es dada por $u_x + iv_x$.

Esto completa la demostración.

Vamos a mostrar en seguida que, en coordenadas polares, las Ecuaciones de Cauchy-Riemann tienen la forma

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}\,,\ \frac{\partial v}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} \qquad (2,15)}$$

Las fórmulas

$$x = r\cos\theta\,,\ y = r\sin\theta \qquad (2,16)$$

Definen implícitamente r y θ como funciones de x e y. Derivando en relación a x obtenemos

$$1 = \frac{\partial r}{\partial x}\cos\theta - r\sin\theta\frac{\partial \theta}{\partial x}$$

$$0 = \frac{\partial r}{\partial x}\sin\theta + r\cos\theta\frac{\partial \theta}{\partial x}$$

De aquí se sigue finalmente que

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \cos\theta,$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{\sin\theta}{r}$$

De modo análogo, derivando $(2,16)$ en relación a y y resolviendo en relación a $\partial r/\partial y$ y $\partial \theta/\partial y$ encontramos

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \sin\theta,$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\cos\theta}{r}$$

Estamos ahora en condiciones de escribir las Ecuaciones de Cauchy-Riemann en coordenadas polares. Observamos que

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \theta} = \cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta},$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \theta} = \sin\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}. \qquad (2,17)$$

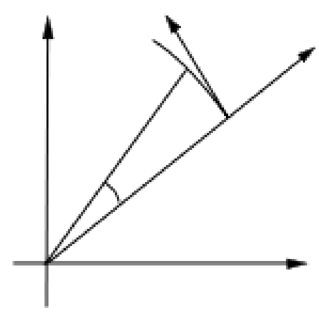
Sustituyendo en $(2,8)$ obtenemos

$$\cos\theta\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} = \sin\theta\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta},$$

$$\sin\theta\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} = -\cos\theta\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}.$$

Multiplicando la primera de estas ecuaciones por $\cos\theta$ y la segunda por $\sin\theta$ sumándolas obtenemos la primera ecuación de $(2,15)$. Análogamente, multiplicando la primera ecuación por $\sin\theta$ y la segunda por $-\cos\theta$ y sumándolas obtenemos la segunda ecuación de $(2,15)$.

Un modo de recordar rápidamente la forma polar de Ecuaciones de Cauchy-Riemann se basa en el hecho siguiente: en cada punto $P = (x, y)$ de coordenadas polares (r, θ) introducimos un sistema cartesiano PXY de ejes PX y PY.



Este nuevo sistema de Ecuaciones de Cauchy-Riemann asumen la forma

$$\frac{\partial u}{\partial X} = \frac{\partial v}{\partial Y} \text{ y } \frac{\partial v}{\partial Y} = -\frac{\partial v}{\partial X}$$

Como se ve claramente, $\partial X = \partial x$ y $\partial Y = r\partial\theta$. Sustituyendo vemos

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \text{ y } \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} = -\frac{\partial v}{\partial r}$$

Las Ecuaciones de Cauchy-Riemann tiene un significado geométrico interesante, expresado en la siguiente proposición:

Si $f = u + iv$ *es analítica en una región* R*, entonces, las curvas de las familias*

$u(x, y) = cont.$ y $v(x, y) = const.$

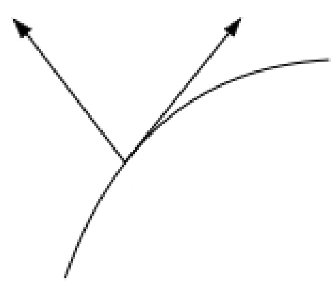
se cortan en un angulo recto en todo punto $z_0 = x_0 + iy_0$ *donde* $f'(z_0) \neq 0$

De hecho, como el vector gradiente de u, (u_x, u_y) es normal a la curva

$$u(x, y) = u(x_0, y_0)$$

el punto (x_0, y_0), el vector $(u_y, -u_x)$ es tangente, pues esos dos vectores son ortogonales:

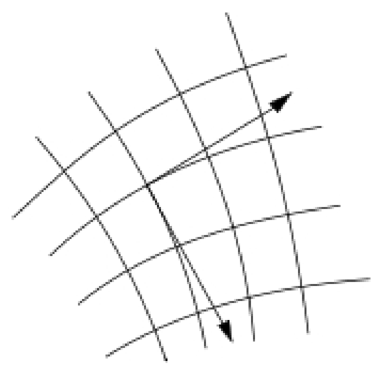
$$(u_x, u_y) \cdot (u_y, -u_x) = u_x u_y - u_y u_x = 0$$



De modo análogo, $(v_y, -v_x)$ es tangente a la curva $v(x, y) = const$. Haciendo el producto escalar de estos dos vectores y usando la Ecuacion de Cauchy-Riemann obtenemos:

$$(u_x, -u_y) \cdot (v_y, -v_x) = u_x v_y + u_y v_x = u_y u_x - u_x u_y = 0$$

que establece el resultado deseado.



II.VI Las Funciones Trigonométricas Hiperbólicas

Por lo que ya vimos la función exponencial está definida en todo el plano complejo, siendo dada por

$$e^x = e^x(\cos y + i \sin y)\,,\; z = x + iy \tag{2,18}$$

Es fácil ver que esta función satisface la hipótesis del teorema de las Ecuaciones de Cauchy-Riemann, de donde se sigue que ella es analítica en todo el plano, por tanto entera. Calculamos su derivada de a cuerdo con la regla

$$\frac{d(u+iv)}{dz} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\,\frac{\partial v}{\partial x}$$

Como $(e^x)' = e^x$ tenemos

$$\frac{de^z}{dz} = e^z,$$

esto es, la derivada propia de la función.

Las relaciones

$$e^{iy} = \cos y + \sin y$$

$$e^{-iy} = \cos y - i \sin y$$

Siguen fácilmente las *Fórmulas de Euler:*

$$\sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i},$$

$$\cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}$$

Estas son ahora usadas para entender las funciones trigonométricas en todo el plano complejo, definiéndose

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i},$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

$\cot z = \frac{\cos z}{\sin z}$, $\sec z = \frac{1}{\cos z}$, $\csc z = \frac{1}{\sin z}$.

Las conocidas fórmulas de derivación.

$\frac{d \sin z}{dz} = \cos z$, $\frac{d \cos z}{dz} = -\sin z$ etc., siguen de las definiciones y de $\frac{de^z}{dz} = e^z$

Las identidades trigonométricas familiares permanecen todas válidas en el campo complejo. Así,

$$\sin(-z) = -\sin z\,,\ \cos(-z) = \cos z,$$

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1,$$

$$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2,$$

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin_{z_1} \sin z_2.$$

Las dos primeras son consecuencias inmediatas de las definiciones de sin y cos y las demás siguen fácilmente de las definiciones de las propiedades de función exponencial.

Las funciones hiperbólicas sin y cos definidas por las expresiones

$$\sinh\, z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}\,,\ \cosh\, z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

Como se ve, los valores son reales para los valores reales de z. Ellas surgen naturalmente cuando se procuran separar las partes real e imaginaria de las funciones $\sin z$ y $\cos z$. Es fácil ver que $D \sinh\, z = \cosh\, z$, $D \cosh\, z = \sinh\, z$.

II.VII La Función Logarítmica.

Definimos la ecuación logarítmica como la ecuación

$$\ln z = \ln r + i\theta, \quad z = re^{i\theta} \neq 0, \tag{2.19}$$

donde $\ln z$ es el logaritmo ordinario de número $r > 0$. El logaritmo es asimismo definido para todo número complejo $z \neq 0$ y se reduce al logaritmo ordinario para $\theta = 0$.

En realidad, la fórmula además permite atribuir al logarítmo varios valores distintos, dependiendo del argumento usado para el número z, pues siendo θ_0 el llamado valor principal del argumento de $z(-\pi < \theta_0 \leq \pi)$, el argumento genérico es dado por

$$\theta = \theta_0 + 2k\pi, \; k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

tenemos entonces que restringir el argumento de z a un intervalo del tipo

$$(2k-1)\pi < \theta \leq (2k+1)\pi, \; k = 0, \pm 1, \pm 2, ... \tag{2.20}$$

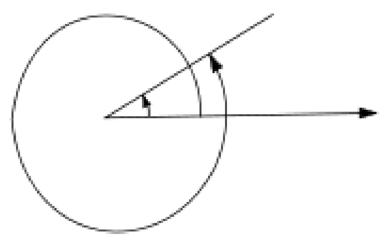
para evitar cualquier ambigüedad en la definición de logaritmo. Cada valor de k conduce a lo que llamamos una rama de función, dada por

$$\ln z = \ln z + i(\theta_0 + 2k\pi).$$

Llamese valor principal del logaritmo a la rama que se obtiene con $k = 0$.

Debemos observar que no hay nada de especial en la elección del intervalo principal $-\pi < \theta \leq \pi$. Podríamos tomar $0 < \theta \leq 2\pi$, $0 \leq \theta < 2\pi$, o cualquier otro intervalo del complemento de 2π :

$$\alpha < \theta \leq \alpha + 2\pi \; o \; \alpha \leq \theta < \alpha + 2\pi,$$



en cualquiera de estos casos, la restricción del argumento a un intervalo de longitud 2π introduce una discontinuidad en la función $\ln z$ a lo largo del radio por el origen y del argumento α. Ese radio es frecuentemente considerado un corte del plano complejo; considerando las restricciones $\alpha < \theta \leq \alpha + 2\pi$, $\alpha \leq \theta < \alpha + 2\pi$, o $\alpha < \theta < \alpha + 2\pi$, decimos que el plano fue cortado a lo largo del radio $z = re^{i\alpha}, r > 0$.

Usando las ecuaciones de Cauchy-Riemann en forma polar, es fácil verificar que cualquier rama de logaritmo es una función analítica en su dominio. Para calcular su derivada usamos la primera de las ecuaciones 2.8.

$$\frac{d}{dz}\ln z = \frac{\partial}{\partial x}(\ln r + i\theta) = \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \theta}(\ln r + i\theta)$$

Como vimos en la sección II.V

$$\frac{\partial r}{\partial x} = cos\theta, \ y, \ \frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{sen\theta}{r};$$

sustituyendo obtenemos

$$\frac{d}{dz}\ln z = \frac{cos\theta}{r} - i\frac{sen\theta}{r} = \frac{1}{r(cos\theta + isen\theta)},$$

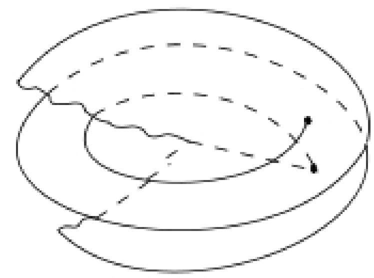
esto es,

$$\frac{d}{dz}\ln z = \frac{1}{z}.$$

Superficie de Riemann.

La función logaritmo es un ejemplo típico de lo que suele llamarse función multivalente. Esto porque la fórmula que la define conduce, por introducción de cortes a varias ramas de funciones.

Un modo de evitar esa multivalencia y al mismo tiempo evitar las discontinuidades introducidas por los cortes, consiste en considerar como distintos puntos complejos del mismo módulo y cuyos argumentos difieren por múltiplos de 2π. Esto equivale a considerar varias replicas F_k del plano complejo cortado, cada una de ellas caracterizadas por valores del ángulo θ en un intervalo de longitud 2π, digamos del tipo (2.20). Imaginamos esas diferentes réplicas superpuestas y ligadas sucesivamente unas a otras, la segunda arista de F_k ligada a la primera arista de F_{k+1}.



De este modo, partiendo de un punto $z = re^{i\theta}$ y aumentando continuamente su argumento hasta el valor $\theta+2\pi$, se alcanzará el punto $z' = re^{i(\theta+2\pi)}$, que debe ser considerado distinto de z.

Los puntos del plano complejo, diferenciados unos de otros, resultan una "superficie de espiral", que es la superficie de Riemann de la función $\ln z$.

El punto $z = 0$ es el punto de ramificación de las diferentes réplicas F_k del plano, resultando las hojas de estas superficies. Al considerar los valores del $\ln z$ como z se restringe a una hoja F_k resulta una rama de función logaritmo.

Estas ideas que solo vamos a considerar en casos concretos, se aplican en general a todas las funciones multivalentes, que son funciones del tipo $\ln z$, $\sqrt{z}$, etc., cuyas fórmulas de definiciones admiten más de un valor en cada punto z.

La idea corriente de función es la de función univalente, con valor único en cada punto z, de forma que en el tratamiento de las funciones multivalentes debemos introducir modificaciones que permiten reducirlas a funciones univalentes. Esto es lo que se consigue con las superficies de Riemann o restringiendo el dominio por definición de la función considerada una parte de su superficie de Riemann. La idea de la suerficie de Riemann es conseguir alargar lo más posible el dominio de la definición de la función.

Propiedades del logaritmo.

Veremos en seguida que el logaritmo y la exponencial son funciones inversas una de la otra, esto es, $z \neq 0$,

$$z = e^w \Leftrightarrow w = \ln z \tag{2.21}$$

Vamos primero a determinar la solución general w de la ecuación $z = e^w$, donde $z \neq 0$. Usando la representación polar $z = re^{i\theta_0}$, donde $0 < \theta_0 \leq 2\pi$ y al usar $w_0 = \ln r + i\theta_0$, obtenemos

$$e^{w_0} = e^{\ln r} e^{i\theta_0} = re^{i\theta_0} = z.$$

Sea ahora w una solución arbitraria de $z = e^w$. Tenemos entonces $e^{w-w_0} = 1$, donde $w - w_0 = 2k\pi i$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$, entonces, $w = \ln z$ es la solución general de $z = e^w$. Como consecuencia, tenemos también que $w = \ln z \Rightarrow z = e^w$. Completando la demostración de (2.21).

De (2.21) se sigue que $z = e^{\ln z}$ para todo $z \neq 0$. La fórmula

$$\ln(z_1 z_2) = \ln z_1 + \ln z_2 \tag{2.22}$$

permanece válida, si se interpreta correctamente. En efecto, siendo $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ y $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$, tenemos

$$\ln z_1 + \ln z_2 = [\ln r_1 + i\,(\theta_1 + 2k_1\pi) + \ln r_2 + i\,(\theta_2 + 2k_2\pi)] =$$

$$= \ln(r_1 r_2) + i\,[(\theta_1 + \theta_2) + 2\,(k_1 + k_2)\,\pi]\,, \qquad (2.23)$$

donde k_1 y k_2 son enteros arbitrarios. Esta última expresión es la forma general de $\ln(z_1 z_2)$, Si k_1 y k_2 son independientes uno del otro. En este caso la ecuación (2.22) es valida con el siguiente significado: el conjunto de valores positivos de $\ln(z_1 z_2)$ coincide con el conjunto de valores positivos de $\ln z_1 + \ln z_2$.

Si k_1 y k_2 no son independientes, como es el caso en que $z_1 = z_2 = re^{i\theta}$ y el (2.22) se reduce a

$$\ln z^2 = 2\ln z, \qquad (2.24)$$

entonces el último miembro de (2.23) se reduce a

$$\ln r^2 + i\,[(2\theta) + 2\,(2k)\,\pi]\,,$$

donde k es arbitrario. En este caso cualquier valor del segundo miembro de (2.24) es un valor del primer miembro, más no reciprocamente, como es facil ver.

Obsevaciones análogas se aplican cuando

$$\ln(z_1 ... z_n) = \ln z_1 + ... + \ln z_n,$$

$$\ln z^n = n \ln z,$$

cuya demostración queda a cargo del lector. Esta última relación, por ejemplo, significa que todo valor de $n \ln z$ es un valor positivo de $\ln z^n$, más no reciprocamente.

II.VIII Definición de z^α

Dados los números complejos z y α. $z \neq 0$, definimos z^α por la ecuación

$$z^\alpha = e^{\alpha \ln z} \tag{2.26}$$

Esto equivale a

$$\ln z^\alpha = \alpha \ln z, \tag{2.27}$$

que para $z > 0$ y α real, es una fórmula familiar de logarítmo ordinario. La definición (2.26) es entonces una extención natural de la noción de potencia real de números positivos, que mantienen la propiedad (2.27).

Observemos que el significado del simbolo z^α esta dado por (2.26). Cuando escribimos la ecuación (2.27) tenemos los números z^α y $\alpha \ln z$. La ecuación (2.27) nos dice que el número $\alpha \ln z$ es una de las posibles raíces de la ecuación $z^\alpha = e^w$; estas raíces existen y el conjunto de todas estas raíces es el conjunto de los valores posibles de $\ln z^\alpha$, los que son dados por $\ln z^\alpha = \alpha \ln z + 2k\pi i$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$

Como el logarítmo es una función multivalente, z^α posee el mismo punto de ramificación $z = 0$ que $\ln z$. Para evidenciar este hecho, sea $z = re^{i\theta} = re^{i(\theta_0 + 2k\pi)}$,

$$0 < \theta_0 \leq 2\pi, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

Sustituyendo $\ln z = (\ln r + i\theta_0) + 2k\pi i$ en (2.26), tendremos

$$z^\alpha = e^{\alpha(\ln r + i\theta_0)} e^{2\pi(k\alpha)i} = P\left(z^\alpha\right) e^{2\pi(k\alpha)i}, \tag{2.28}$$

donde $P(z^{\alpha})$ es el valor principal de la función z^{α} obtenido al multiplicar el valor principal $P(z^{\alpha})$ por el factor $e^{2\pi(k\alpha)i}$. Procuremos determinar diferentes valores de z, digamos k y k' dando como resultado el mismo factor:

$$e^{2\pi(k\alpha)i} = e^{2\pi(k'\alpha)i}.$$

Esto es equivalente a $e^{2\pi(k-k')\alpha i} = 1$, o sea, $(k-k')\,\alpha$ debe ser un entero, o también, α debe ser racional. Vemos entonces que siendo α un número (real o complejo) no racional, la función z^{α} admite infinitas ramas de su superficie de Riemann que es la misma que describimos para $\ln z$ en la sección 2.7.

Supongamos ahora que α sea racional, digamos $\alpha = \frac{p}{q}$, con p y q primos entre sí. Entonces el factor $e^{2\pi\left(\frac{kp}{q}\right)i}$ toma apenas q valores distintos, dados por $k = 0, 1, ..., q-1$, y en consecuencia la función

$$z^{\frac{p}{q}} = P\left(z^{\frac{p}{q}}\right) e^{2\pi\left(\frac{kp}{q}\right)i}$$

tomando también apenas q valores distintos para un mismo z.

En términos de superficie de Riemann de $\ln z$, partiendo del valor $z_0 = re^{i\theta_0}$ y trazando una ruta en torno al origen, pasamos sucesivamente por los puntos

$$z_j = re^{i(\theta_0+2\pi j)} \qquad j = 0, 1, ..., q-1,$$

que dan a la función $z^{\frac{p}{q}}$ los valores

$$z_j^{\frac{p}{q}} = \left(z_0^{\frac{p}{q}}\right) e^{2\pi\left(\frac{jp}{q}\right)i}.$$

Estos valores se repiten en el mismo orden para todas las sucesiones de valores j,

$$kq, kq+1, ..., kq+q-1,$$

donde k es un entero arbitrario. De aquí se sigue que en la superficie de Riemann de $\ln z$ debemos considerar como idénticos todos los puntos $z = re^{i\theta}$que tienen el mismo módulo r y cuyos argumentos θ difieren unos de otros por múltiplos de $2q\pi$. Esto significa que solo necesitamos considerar q réplicas del plano complejo, caracterizadas por valores del argumento θ dados por

$$-\pi + 2k\pi < \theta \leq \pi + 2k\pi, \qquad k = 0, 1, ..., q-1.$$

Como en el caso del $\ln z$, imaginamos esas réplicas sobrepuestas y ligadas sucesivamente una a otras formando un "espiral" de q hojas, donde la arista final de la última hoja se identifica como la arista inicial de la primera.

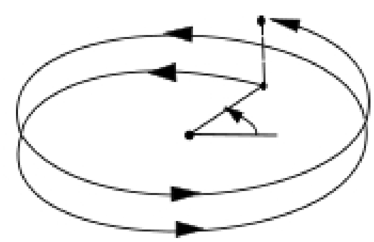
Consideremos el ejemplo concreto de la función raíz cuadrada $f(z) = z^{\frac{1}{2}} = \sqrt{z}$. En el punto $z = re^{i\theta}$ del argumento $\theta = \theta_0 + 2k\pi$ que asume el valor

$$\sqrt{z} = \sqrt{r}e^{\frac{i\theta_0}{2}}e^{ik\pi}.$$

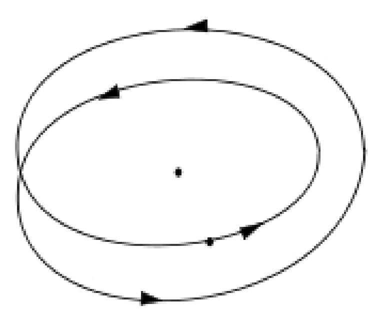
Es claro que en esta expresión basta desplegar cada punto del argumento θ_0 $(0 < \theta_0 \leq 2\pi)$ en apenas dos puntos, de argumentos θ_0 y $\theta_0 + 2\pi$ respectivamente $(k = 0 \; y \; k = 1)$, para obtener todos los posibles valores de $\sqrt{z}$, esto es,

$$\sqrt{z} = \pm\sqrt{r}e^{\frac{i\theta_0}{2}}.$$

La superficie de Riemann de $\sqrt{z}$ consiste de dos replicas del plano complejo.



La arista final de la segunda réplica se identifica como la arista inicial de la primera. De este modo, partiendo de un punto cualquiera $z_0 \neq 0$, un contorno circular con centro en el origen rota al punto z_0 después de dos vueltas completas.



Es claro que la restricción $0 < \theta_0 \leq 2\pi$ del argumento principal puede ser sustituida por otra equivalente, $\alpha < \theta_0 \leq 2\pi + \alpha$, donde α es un número real cualquiera.

La función z^α es analítica en toda su superficie de Riemann. Esto se sigue fácilmente del hecho de ser e^z una función analítica en todo el plano y de la regla de derivación de funciones compuestas. Tenemos

$$\frac{dz^\alpha}{dz} = \frac{de^{\alpha \ln z}}{dz} = e^{\alpha \ln z}\frac{d(\alpha \ln z)}{dz} = z^\alpha \frac{\alpha}{z},$$

es decir

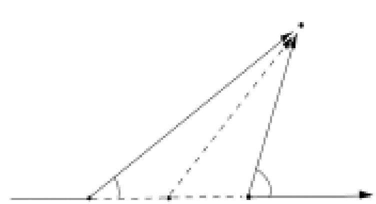
$$\frac{dz^\alpha}{dz} = \alpha z^{\alpha-1}, \quad z \neq 0$$

La función $\sqrt{z^2-1}$.

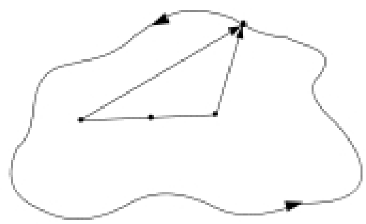
A modo de ilustración vamos a considerar en detalle un ejemplo de función multivalente, la función $f(z) = \sqrt{z^2-1}$. Esta función puede ser considerada como el producto de $\sqrt{z-1}$ e $\sqrt{z+1}$. si cortamos el plano a lo largo de los radios $(-\infty, -1]$ y $[1, \infty)$, introduciendo las restricciones

$$-\pi < \arg(z+1) < \pi \; y \; 0 < \arg(z-1) < 2\pi,$$

obtenemos una región donde ambas funciones $\sqrt{z+1}$ y $\sqrt{z-1}$ son univalentes, por lo tanto donde es también univalente la función original $f(z) = \sqrt{z^2-1}$.



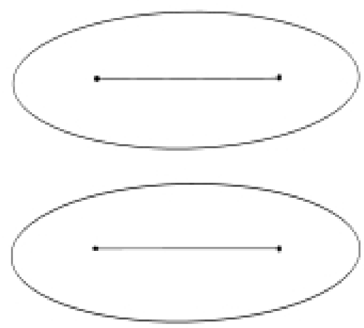
Otra posibilidad consiste en cortar el plano complejo a lo largo del segmento $[-1,1]$, de modo que sea un contorno cerrado C que envuelve el punto $z=1$, este necesariamente envuelve también el punto $z=-1$. De esta forma, si un punto z se mueve a lo largo del contorno C, volviendo a la población inicial, los argumentos de $z+1$ y $z-1$ ambos varian por múltiplos de 2π, de forma que $f(z)$ vuelva a el valor inicial.



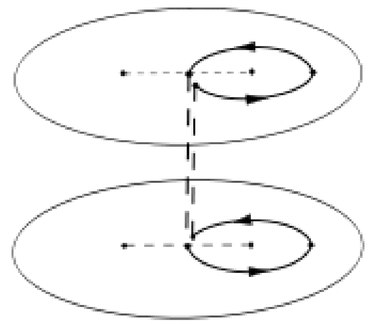
Vemos así que f es una función monódroma en la región considerada, completamente determinada por su valor en un punto cualquiera. Por ejemplo, sea $z_0 = 3$. Como sabemos, existen dos valores posibles para $\sqrt{z_0-1}$, que son $\sqrt{2}$ y $-\sqrt{2}$, conforme $\arg(z_0-1)$ sea un múltiplo par o un múltiplo impar de 2π respectivamente. Análogamente $\sqrt{z_0+1}$ puede tomar los valores $\sqrt{4}$ y $-\sqrt{4}$, de forma que los posibles valores de $f(z_0)=\sqrt{z_0^2-1}$ son $2\sqrt{2}$ y $-2\sqrt{2}$; una vez elegido uno de estos valores, la función f es determinada en toda la región que estamos considerando.

Hay otras maneras de especificar ramas particulares de funciones; por ejemplo, el plano puede ser cortado a lo largo de dos radios cualquieras, con origenes en -1 y $+1$, o a lo largo de una curva ligando -1 a $+1$. En todos estos casos obtenemos ramas particulares de la función $\sqrt{z^2-1}$.

Un modo de visualizar la superficie de Riemann de la función $f(z) = \sqrt{z^2 - 1}$ consiste en considerar dos replicas del plano complejo P_1 y P_2, cortadas al lo largo del intervalo $[-1, 1]$; Ellas corresponden respectivamente a cada una de las dos ramas posibles de f, determinados por $f(3) = 2\sqrt{2}$ y $f(3) = -2\sqrt{2}$, como vimos antes. Los cortes en estos planos introducen cuatro aristas (dos en cada plano), que distinguimos como aristas superiores $A+$ y $B+$ (aristas de los semiplanos Im $z \geq 0$) y aristas inferiores $A-$ y $B-$ (aristas de los semiplanos Im $z \leq 0$).



Visualizamos la superficie de Riemann, en cuestión, formada por los dos planos del mismo modo cortado y donde identificamos las aristas $A+$ y $B-$ así como $A-$ y $B+$. Para comprender bien lo que esto significa, imaginemonos un punto deslizandose en sentido antihorario sobre el contorno circular de centro $z = 1$ y radio $r = 1$. Partiendo del punto $z = 2$ en el plano P_1, para lograr la arista $A+$ este punto pasará enseguida para el punto P_2; después de completar una vuelta que retorna al plano P_1, donde vuelve al punto inicial $z = 2$.



Los ejemplos de funciones multivalentes considerados anteriormente son relativamente simples y las superficies de Riemann correspondientes pueden ser facilmente visualizadas. Esto no es lo que acontese en general.

II.IX Funciones Trigonométricas Inversas.

Las funciones inversas de las funciones trigonométricas se expresan fácilmente en términos de logarítmos. Consideremos por ejemplo la función

$$w = \arccos z,$$

definida por $z = \cos w$, o sea

$$z = \frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2}$$

multiplicando por e^{iw}, reducimos esta ecuación a la forma

$$\left(e^{iw}\right)^2 - 2z(e^{iw}) + 1 = 0,$$

donde

$$e^{iw} = z + \sqrt{z^2} - 1,$$

y finalmente

$$w = \arccos z = -i \ln\left(z + i\sqrt{1 - z^2}\right).$$

Tenemos aquí una función multivalente, cuya superficie de Riemann requiere una descripción más complicada que en los casos considerados anteriormente. Sin entrar en detalles, observamos sólo que obtenemos ramas particulares de esta función considerando ramas particulares de $\sqrt{z^2 - 1}$ y de logarítmo.

Al derivar la función $\arccos z$ puede ser fácilmente calculada a partir de la expresión anterior, con la ayuda de la regla de la cadena. Tenemos

$$\frac{d}{dz}\arccos z = \frac{-i\frac{d}{dz}\left(z+i\sqrt{1-z^2}\right)}{z+i\sqrt{1-z^2}}$$

$$= \frac{-i}{z+i\sqrt{1-z^2}}\left(1-\frac{iz}{\sqrt{1-z^2}}\right)$$

$$= \frac{-i}{z+i\sqrt{1-z^2}}\cdot\frac{\sqrt{1-z^2}-iz}{\sqrt{1-z^2}},$$

o sea

$$\frac{d}{dz}\arccos z = \frac{-1}{\sqrt{1-z^2}}.$$

Las demás funciones inversas, trigonométricas e hiperbolicas, son obtenidas de manera análoga.

Observamos que las notaciones $\cos^{-1} z$, $\sin^{-1} z$ etc. son frecuentemente usadas en lugar de $\arccos z$, $\arcsin z$ etc. Las que no deben ser confundidas con $(\cos z)^{-1}$, $(\sin z)^{-1}$ etc.

III

TEORÍA DE LA INTEGRAL

La integración es un concepto importante en las matemáticas y junto con la diferenciación es una de las dos principales operaciones en el cálculo.

El término integral también puede referirse a la noción de primitiva, una función F cuya derivada es la función f.

Los principios de la integración se formularon de forma independiente por Isaac Newton y Gottfried Leibniz en el siglo XVII. A través del teorema fundamental del cálculo, que desarrollado de manera independiente, la integración está relacionado con la diferenciación.

En el campo matemático de análisis complejo, la integración del contorno es un método de evaluación de ciertas integrales a lo largo de las trayectorias en el plano complejo.

Los métodos directos que implican el cálculo de la integral también se emplean en el cálculo de integrales de línea en el cálculo de varias variables con variables complejas.

Bueno, así será como trabajaremos este capitulo, mostrando un claro sustento teórico del trabajo integral en los numeros complejos, abordando diferentes teoremas, como son el de Green y Morena entre otros.

III.I Arcos y contornos

Definimos arco continuo como C un conjunto de puntos de tipo

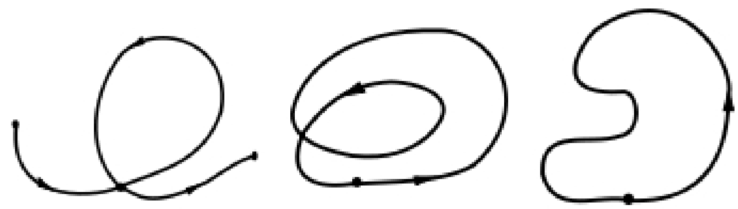
$$C = \{z(t) = x(t) + iy(t),\, a \leqslant t \leqslant b\} \qquad (3,1)$$

donde $z(t)$ es una función continua, $x(t)$ y $y(t)$ son funciones continuas de t, para t en el intervalo $[a,b]$.

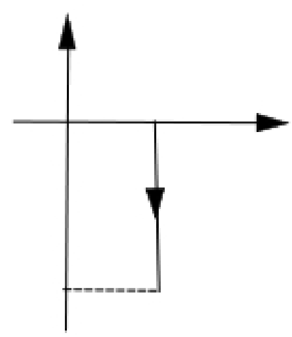
La representación paramétrica $z = z(t)$ ordena los puntos de C de acuerdo con los valores crecientes de t, de la forma que C es un conjunto ordenado o abierto. El mismo conjunto con orientación opuesta es el arco que designamos por $-C$ y que posee representación paramétrica

$$z_1(t) = z(-t)\,, \quad -b \leqslant t \leqslant -a$$

Se llama *Arco de Jordan o Arco Simple* al que en cada punto $z(t)$ le corresponde un único valor de t. Intuitivamente esto significa que, a medida que t varía de a hasta b, el punto $z(t)$ recorre la curva C, pasando una sola vez por cada uno de sus puntos. cuando el Arco no es Simple, contiene al menos un punto de múltiple, así mismo designado todo punto proveniente de dos o más valores distintos de parámetro $t : z(t_1) = z(t_2)$ con $t_1 \neq t_2$. Se llama Curva Cerrada a todo arco cuya extremidades $z(a)$ y $z(b)$ coinciden; y *Curva Cerrada Simple o Curva de Jordan* a toda curva cerrada cuyos puntos, a excepción de las extremidades, sean todos simples.



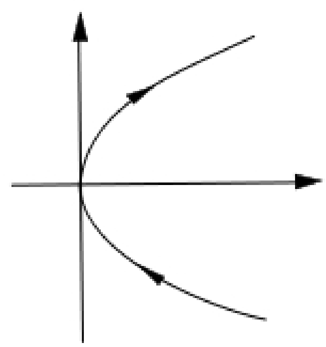
La ecuación $z = 1 - it$, para $0 \leqslant t \leqslant 2$, por ejemplo, representa un Arco Simple que es un segmento $[1, 1-2i]$, orientado de 1 para $1-2i$.



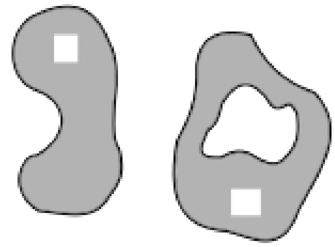
La ecuación $z = t^2 + it$, $-\infty < t < \infty$ representa la parábola

$$x = t^2\,,\ y = t,$$

o sea , $x = y^2$, orientada como indica la figura.



De acuerdo con un famoso teorema, debido a Jordan, toda Curva Cerrada Simple divide al plano en dos regiones, teniendo frontera común, una de las cuales , es llamada el interior de C, siendo limitada. El teorema afirma también que el interior de C posee una propiedad adicional, llamada *Conectividad Simple.* Intuitivamente esto significa que es posible trasformar la curva C hasta reducirla a un punto sin dejar esta región interior. La figura ilustra dos regiones conexas A y B, de las cuales A es simplemente conexa, mas no B. Esta posee un "agujero" que destruye la conectividad Simple.

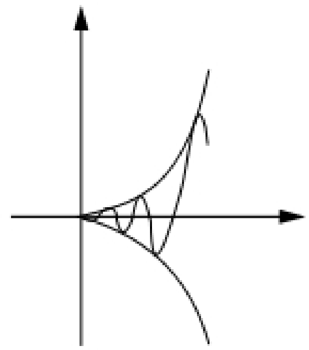


El Teorema de Jordan es de fácil comprensión, más su tratamiento riguroso es delicado y está fuera de nuestro objetivo.

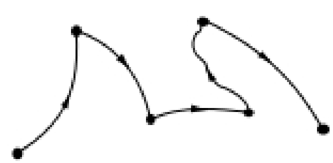
El concepto de Arco Continuo es mucho más general e incluye objetos complicados, que en nada se parecen con las figuras geométricas simples, como un arco de círculo, una parábola, etc. En nuestras cosideraciones necesitamos la idea de *Arco Regular*, asimismo entendido el arco cuya representación es tal que la derivada $z'(t) = x'(t) + iy'(t)$ existe, es continua y no se anula. Tal arco posee tangente en cada punto, cuyo ángulo con el eje x esta dado por $\arg z'(t)$, el cual varía continuamente con t. El mismo arco regular puede exhibir comportamientos sorprendentes; consideremos, como ejemplo, el arco regular dado por

$$z(0) = 0 \ , \ z(t) = t + it^3 \sin \tfrac{1}{t} \ , \qquad 0 < t \leqslant 1$$

Este arco intercepta al eje x en una infinidad de puntos teniedo $x = 0$ como punto de acumulación



Llamaremos *Contorno* o *Camino* a todo arco continuo que consiste de un número finito de arcos regulares. Un contorno C tiene entonces representación paramétrica del tipo $z = z(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$ donde $z(t)$ es una función continua en el intervalo $[a, b]$. Este a su vez consiste en un número finito de subintervalos $[a_j, b_j]$, en cada uno de los cuales la derivada $z'(t)$ es continua y diferente de cero y tales que $b_1 = a_2$, $b_2 = a_3$, etc.



III.II Integral de Contorno

Sea $F(t) = U(t) + iV(t)$ una función continua de variable real t en un intervalo $[a, b]$. Su integral está definida fácilmente en términos de integrales de funciones reales U y V, mediante la expresión

$$\int_a^b F(t)dt = \int_a^b U(t)dt + i\int_a^b V(t)dt \qquad (3,2)$$

De esta definición se sigue inmediatamente las siguientes propiedades:

$$Re\int_a^b F(t)dt = \int_a^b ReF(t)dt,\ Im\int_a^b F(t)dt = \int_a^b ImF(t)dt \qquad (3,3)$$

Las propiedades de linealidad,

$$\int_a^b [F(t) + G(t)]\, dt = \int_a^b F(t)dt + \int_a^b G(t)dt \qquad (3,4)$$

y

$$\int_a^b cF(t)dt = c\int_a^b F(t)dt \qquad (3,5)$$

Donde C es una constante, son también de fácil verificación. Para probar esta última, por ejemplo sea $c = c_1 + ic_2$ luego

$$\int_a^b cF(t)dt = \int_a^b \left[c_1U(t) - c_2V(t)\right]dt + i\int_a^b \left[c_1V(t) + c_2U(t)\right]dt =$$

$$= (c_1 + ic_2)\left[\int_a^b U(t) + i\int_a^b V(t)\right]dt = c\int_a^b F(t)dt$$

La integral $(3,2)$ goza también de las propiedades (donde $a < b$)

$$\left|\int_a^b F(t)dt\right| \leqslant \int_a^b |F(t)|\,dt \qquad (3,6)$$

que es inmediata si la integral que aparece el primer miembro es nulo. Caso contrario, sea

$$\int_a^b F(t)dt = re^{i\theta} \quad (r > 0)$$

su representación polar. De aquí y de $(3,5)$, obtenemos

$$r = e^{-i\theta}\int_a^b F(t)dt = \int_a^b e^{-i\theta}F(t)dt;$$

usando $(3,3)$,

$$r = Re\int_a^b e^{-i\theta}F(t)dt = \int_a^b Re\left[e^{-i\theta}F(t)\right]dt$$

Por tanto, teniendo en cuenta que $\left|e^{-i\theta} = 1\right|$.

$$\left|\int_a^b F(t)dt\right| = r = \int_a^b Re\left[e^{-i\theta}F(t)\right]dt \leqslant \int_a^b \left|Re\left[e^{-i\theta}F(t)\right]\right|dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_a^b \left|e^{-i\theta}F(t)\right|dt = \int_a^b |F(t)|\,dt,$$

donde aparece la desigualdad de $(3,6)$

Estamos ahora en condiciones de definir la *Integral Curvilínea o Integral de Contorno*

$$\int_C f(z)dz,$$

donde C es un contorno cualquiera y $f = u + iv$ es una función continua en C. Usando la representación de contorno C, $z = z(t)$; $a \leqslant t \leqslant b$, definimos

$$\int_C f(z)dz = \int_a^b f(z(t))z'(t)dt \qquad (3,7)$$

Donde el segundo miembro es una integral del tipo (11) con

$$U(t) = u\left[x(t), y(t)\right]x'(t) - v\left[x(t), y(t)\right]y'(t)$$

$$V(t) = u\left[x(t), y(t)\right]y'(t) + v\left[x(t), y(t)\right]y'(t)$$

Lo integrado en $(3,7)$, $f(z(t))z'(t) = U(t) + iV(t)$, puede no ser una función continua en todo el intervalo $[a,b]$, debido al factor $z'(t)$. Pero como vimos anteriormente, este intervalo consiste en un número finito de subintervalos $I_j\,[a_j,b_j]$, en cada uno de los que $z'(t)$ es continua; y la integral $(3,7)$ debe ser interpretada como la suma de las integrales en estos subintervalos I_j.

La integral $(3,7)$ es invariante con un cambio de parámetro dada por una función creciente $t = t(\tau)$, que transforma un intervalo $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, en un intervalo $a \leqslant t \leqslant \beta$ y cuya derivada $t'(\tau)$ debe ser sólo por partes continua. De hecho, usando el punto $z_1(\tau) = z(t(\tau))$, y usando la regla del cambio de variable de integración en integrales reales, obtenemos

$$\int_a^b f(z(t))z'(t)dt = \int_\alpha^\beta f(z(t(\tau)))z'(t(\tau))t'(\tau)d\tau$$

$$= \int_\alpha^\beta f(z_1(\tau))z_1'(\tau)d\tau \qquad (3,8)$$

Es debido a esta invariancia que se torna innecesario explicitar la representación paramétrica del contorno C: la notación de primer miembro de $(3,7)$ tiene significado único y preciso.

Se debe observar también que las integrales curvilíneas tratadas en la teoría de las funciones reales de variables reales x e y pueden ser definidas de modo análogo con $(3,8)$. Asi mismo tenemos

$$\int_C P(x,y)dx = \int_a^b P(x(t),y(t))x'(t)dt,$$

$$\int_C Q(x,y)dy = \int_a^b Q(x(t),y(t))y'(t)dt,$$

y, en general,

$$\int_C Pdx + Qdy = \int_a^b \left[P(x(t),y(t))x'(t) + Q(x(t),y(t))y'(t)\right] dt$$

Vemos entonces que la integral definida en $(3,7)$ puede ser escrita de la forma

$$\int_C f(z) = \int_C udx - vdy + i\int_C vdx + udy$$

Es conveniente introducir la intrgral curvilínea en relación a z, lo que puede ser hecho de varias maneras equivalentes. Una de ellas consiste en dar a la siguiente definición, en términos de integral de contorno definida en $(3,7)$:

$$\int_C f(z)\overline{dz} = \overline{\int_C \overline{f(z)}dz}$$

Es fácil verificar que

$$\int_C f(z)\overline{dz} = \int_C udx + vdy + i\int_C vdx - udy$$

donde $f = u + iv$

III.III Propiedades de la Integral

La linealidad de una integral, se expresa por

$$\int_C [f_1(z) + f_2(z)]\, dz = \int_C f_1(z)dz + \int_C f_2(z)dz$$

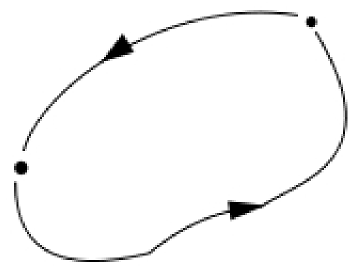
$$\int_C cf(z)dz = c\int_C f(z)dz$$

donde c es una constante, es de verificación casi inmediata. La segunda propiedad, por ejemplo, se sigue fácilmente de la propiedad $(3,5)$.

Es fácil verificar también que si un contorno C consiste en un contorno C_1 seguido de un contorno C_2 (escribimos $C = C_1 \cup C_2$) entonces la integral de C es la suma de las integrales de C_1 y C_2. Esta propiedad se generaliza fácilmente para un número finito de contornos:

$$\int\limits_{C_1\cup ....\cup C_r} f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + ... + \int_{C_r} f(z)dz$$

De aquí se sigue que la integral del largo de un cotorno cerrado es invariante como una traslación de parámetros. De hecho, tal traslación a penas cambia el punto inicial y final de una posición z_1 para una posición z_2,



designando por C_1 el trecho de C que va de z_1 a z_2 y por C_2 el trecho restante, tenemos

$$\int_{C_1 \cup C_2} f(z)dz = \int_C f(z)dz$$

que prueba la invariancia de la integral.

La propiedad

$$\int_{-C} f(z)dz = -\int_C f(z)dz$$

es demostrada del siguiente modo:

$$-C = \{z = z_1(t) = z(-t) : -b < t \leqslant a\},$$

obtenemos

$$z_1'(t) = -z'(-t);$$

por tanto,

$$\int_{-C} f(z)dz = \int_{-b}^{-a} f(z_1(t))z_1'(t)dt$$

$$= -\int_{-b}^{-a} f(z(-t))z'(-t)dt.$$

reemplazando $\tau = -t$, resulta

$$\int_{-C} f(z)dz = \int_{b}^{a} f(z(\tau))z'(\tau)d\tau = -\int_{a}^{b} f(z(\tau))z'(\tau)d\tau$$

$$= -\int_{C} f(z)dz$$

que es el resultado deseado.

Otra propiedad de importancia fundamental esta dada por

$$\left|\int_C f(z)dz\right| \leqslant \int_C |f(z)|\,|dz| \qquad (3,9)$$

donde la integral de segundo miembro significa

$$\int_a^b |f(z(t))|\,|z'(t)|\,dt$$

(note que $a < b$). Esta propiedad se sigue de $(3,6)$ pues

$$\left|\int_C f(z)dz\right| = \left|\int_a^b f(z(t))z'(t)dt\right| \leqslant \int_a^b |f(z(t))z'(t)|\,dt$$
$$= \int_a^b |f(z(t))|\,|z'(t)|\,dt = \int_a^b |f(z)|\,|dz|$$

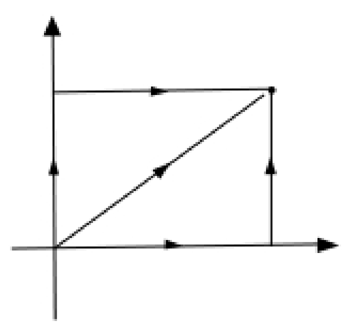
Se puede demostrar que si f es una función continua sobre un arco C, entonces existe una constante M tal que $|f(z)| \leqslant M$ para todo z en C. De aquí y de $(3,9)$ obtenemos la importante desigualdad

$$\left|\int_C f(z)dz\right| \leqslant M \int |dz| = ML$$

donde L es la longitud del contorno de C :

$$L = \int_C |dz| = \int_a^b |z'(t)|\,dt = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 dt} \tag{3,10}$$

Ejemplo 1. Vamos a calcular la integral de $f(z) = z$ a lo largo de tres contornos indicados en la figura:



OC, OAC y OBC, donde $O = (0,0)$, $A = (1,0)$, $B = (0,m)$ y $C = (1,m)$, y m es un número real cualquiera, digamos $m > 0$. El contorno OC está dado por $z(t) = t + imt$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, de forma que

$$\int_{OC} zdz = \int_0^1 (t - imt)(1 + im)dt = \frac{1 + m^2}{2}$$

El contorno OAC puede ser representado por $z(t) = t$ para $0 \leqslant t \leqslant 1$ y $z(t) = 1 + im(t-1)$ para $1 \leqslant t \leqslant 2$; o podemos considerar OAC con dos contornos: OA dado por $z(t) = t$ y AC dado por $z(t) = t + imt$, $0 \leqslant t \leqslant 1$.

En un caso u otro la integral tiene el mismo valor, dado por

$$\int_{OAC} zdz = \int_0^1 tdt + \int_0^1 (1 - imt)imdt = \frac{1 + m^2 + 2m}{2}$$

De manera análoga, tenemos

$$\int_{OBC} zdz = \int_0^1 (-imt)imdt + \int_0^1 (t - imt)imdt = \frac{1 + m^2 - 2m}{2}$$

De este ejemplo obtenemos un valor diferente para cada uno de los tres casos considerados, ; la integral depende no solamente de las extremidades del contorno, también del contorno que se considera en cada caso.

Ejemplo 2. En contraste con este fenómeno, vamos a mostrar ahora que la integral curvilínea de la función $f(z) = z$ sólo depende del contorno y no del contorno en particular que se considera. Para eso sea C un contorno cualquiera, ligado al punto z_1 y al punto z_2, de forma que en cualquier representación paramétrica de C: $z = z(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, valen las relaciones $z(a) = z_1$ y $z(b) = z_2$

Tenemos entonces

$$\int_C zdz = \int_a^b z(t)z'(t)dt = \int_a^b \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[z(t)\right]^2 dt = \int_a^b \frac{1}{2}z(t)^2 \mid_a^b = \frac{z_2^2 - z_1^2}{2}$$

y esta expresión muestra claramente que la integral considerada sólo depende de los mismos puntos extremos z_1 y z_2 y no del contorno particular que se considere. En particular, siendo C un contorno cerrado, tenemos $z_1 = z_2$, por tanto

$$\int_C zdz = 0$$

(C un contorno cerrado)

Esta propiedad es verdadera no solamente para la función $f(z) = z$, sino que para toda función analítica; conocido como Teorema de Cauchy este resultado es, como veremos, la clave todas la teoría de las funciones analíticas.

Ejemplo 3. Como en el ejemplo anterior, es fácil verificar que la integral de $f(z) = 1$ sólo depende de los puntos inicial y final, no del contorno particular empleado.

$$\int_C dz = 0$$

(C un contorno cerrado)

Ejemplo 4. Vamos a calcular la integral de $|z|$ a lo largo del segmento de la recta que une al origen con el punto $-2+3i$. Tenemos entonces

$$C = \left\{ z = -t + \frac{3i}{2}t,\ 0 \leqslant t \leqslant 2 \right\};$$

luego

$$\int_C |z|\, dz = \int_C \sqrt{x^2+y^2}(dx + idy) =$$

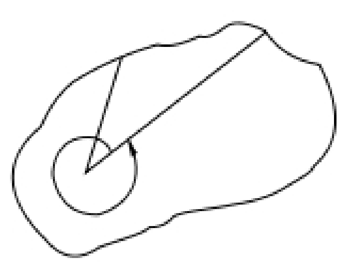
$$= \int_0^{-2} |x| \sqrt{1+\frac{9}{4}}(dx - \frac{3i}{2}dx) = \frac{-\sqrt{3}(2-3i)}{2} \int_0^{-2} xdx =$$

$$= \frac{-\sqrt{13}(2-3i)}{2}$$

III.IV Teorema de Green

Vamos a recordar aquí el Teorema de Divergencia en el Plano, también conocido como Teorema de Geen, relativo a ciertas integrales sobre contornos cerrados.

La consideración de integrales sobre contornos cerrados, es preciso distinguir entre las dos orientaciones posibles positivas de un contorno cerrado, una de las cuales es escogida como la orientación positiva. Nos vamos a ocupar de cómo la noción de orientación positiva puede ser introducida rigurosamente, sin la apelación a la intuición geométrica. Lo importante aquí es acentuar que esto puede ser hecho, y en consecuencia, dado un contorno cerrado simple C, de representación paramétrica $z = z(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$,la idea de que C esté orientado positivamente corresponde exactamente al hecho intuitivo de que, para z_0 interior de C, el argumento de $z(t) - z_0$ crece de 2π con t variando de $t = a$ y $t = b$. Una observación localizada en $z(t)$ recorrerá el contorno C de manera que al interior de C siempre quede a la izquierda.



El teorema de Green, en el caso de una región simplemente conexa R, así mismo se enuncia:

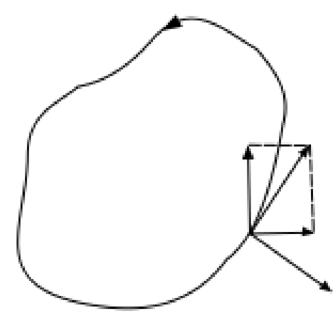
Sean $P(x,y)$ y $Q(x,y)$ funciones definidas en R,como derivadas primeras continuas. Entonces para cualquier contorno cerrado simple C en R,

$$\boxed{\int\int_{R'}(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy=\oint_C Pdx+Qdy}$$

donde R' es una región interior de C.

El símbolo de integración de segundo miembro indica, como se ve, el sentido positivo de ruta sobre C.

Designamos por $t=(t_x,t_y)$ un vector unitario tangente a C un punto (x,y), por $n=(n_x,n_y)$ un vector unitario normal exterior y por ds un elemento de arco, entonces, $(dx,dy)=t$ y $(dy,-dx)=nds$.



Poniendo entonces $F=(Q-P)$, la fórmula se escribe

$$\boxed{\int\int_{R'}div\,Fdxdy=\int_C F\cdot n\,ds}$$

que es una fórmula familiar del Teorema de Divergencia.

III.V Teorema de Cauchy

La integral es una función compleja entre dos puntos z_0 y z puede o no depender del contorno usado en la integración. Si la integración es una función analítica, la integral no depende del contorno, tan solo los puntos inicial y final z_0 y z. Este es el Teorema de Cauchy, que está presente en:

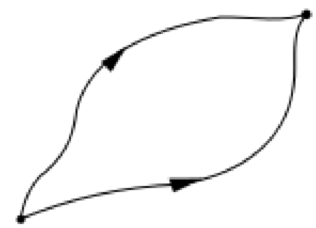
Teorema 1: *Sea f una función analítica una región simplemente conexa R. Entonces*

$$\oint_C f(z)dz = 0$$

para todo el contorno cerrado C contenido en R.

Teorema2: *Sea f una función analítica y una región simplemente conexa R. Entonces la integral de f a lo largo de un contorno ligando z_0 a z sólo depende de estos puntos y no del contorno de integración.*

Es fácil verificar una equivalencia de estos dos teoremas. Supongamos que el Teorema 1 sea verdadero y sean C_1 y C_2 dos contornos arbitrarios en R, ligando z_0 a z.



Entonces $C_1 + (-C_2)$ es un contorno cerrado en R, luego

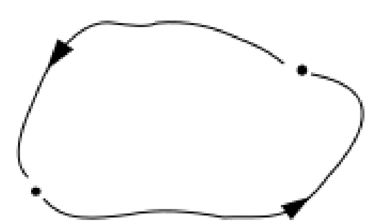
$$0 = \int\limits_{C_1 \cup (-C_2)} f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz - \int_{C_2} f(z)dz$$

o sea,

$$\int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz$$

Esto prueba el Teorema 2.

Supongamos ahora que el teorema 2, sea verdadero y sea C un contorno cerrado en R.



Tomando dos puntos z_0 y z_1 en C, obtenemos los contornos C_1 de z_0 en z_1 y C_2 de z_1 en z_0. Por el Teorema 2, tenemos

$$\int_{C_1} f(z)dz = -\int_{C_2} f(z)dz$$

donde

$$\int_{C} f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz = 0$$

esto prueba el Teorema 1.

El Teorema de Cauchy puede ser fácilmente demostrado con ayuda del Teorema de Green, suponiendo que la derivada f' sea continua en R. De hecho, con la notación $z = x + iy$, $f = u + iv$ obtenemos

$$\oint_C f(z)dz = \oint_C udx - udy + i\oint_C udx + udy =$$

$$= -\int\int_{R'} (v_x + u_y)dxdy + i\int\int_{R'} (u_x - v_y)dxdy$$

Pero $v_x + u_y = u_x - v_y = 0$ por las Ecuaciones de Cauchy-Riemann.

Foi Goursat quien descubrió que el teorema puede ser demostrado sin una hipótesis de que f' es continua.

III.VI Integrales de Contorno y Primitivas.

Como lo hemos visto en otras oportunidades en Teorema de Cauchy y el teorema fundamenteal de funciones analíticas. Los resultados más relevantes que obtenemos desde aquí por consecuencia directa o indirectamente de éste teorema. Ahora vamos a estudiar la forma general de la primitiva de una función analítica.

Por lo tanto podemos decir que $F(z)$ es una primitiva de $f(z)$ si $F'(z) = f(z)$.

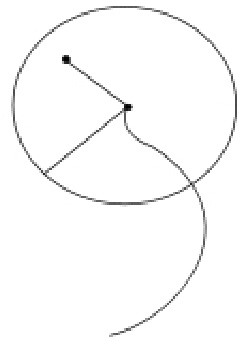
Teorema 1: Sea f una función analítica en una región conexa R. Por lo tanto la forma general de la primitiva de f esta dada por

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\xi)\, d\xi + C \qquad (3,11)$$

donde z_0 es un punto cualquiera de R, C es una cosntante arbitraria y una integración es integrable en cualquier contorno de R, ligado a z_0 a z.

Demostración: Observamos que en el inicio de la integral de (3,11), esta bien definida, puesto que ella no depende del camino de integración.

Ahora vamos a demostrar que F es analítica en R y es que $F'(z) = f(z)$. Por lo tanto la figura nos muetra que:



$$F(z+h)-F(z)=\left(\int_{z_0}^{z+h}-\int_{z_0}^{z}\right)f(\xi)\,d\xi=\int_{z}^{z+h}f(\xi)\,d\xi$$

puesto que $f(\xi)=f(z)+\eta(z,\xi)$, obtenemos que

$$\frac{F(z+h)-F(z)}{h}=\frac{1}{n}\int_{z}^{z+h}\left[f(z)+\eta(z,\xi)\right]d\xi=f(z)+\frac{1}{h}\int_{z}^{z+h}\eta(z,\xi)\,d\xi$$

como f es continua dado que $\varepsilon>0$, tal que existe $\delta>0$ por lo tanto tenemos que:

$$|\eta(z,\xi)|=|f(\xi)-f(z)|<\varepsilon \text{ para } |\xi-z|<\delta$$

haciendo entonces que $|h|<\delta$ e integrando esto en el intervalo $[z,z+h]$ obtenemos que

$$\left|\frac{F(z+h)-F(z)}{h}-f(z)\right|=\frac{1}{|h|}\left|\int_{z}^{z+h}\eta(z,\xi)\,d\xi\right|\leq$$

$$\leq\frac{1}{|h|}\int_{z}^{z+h}|\eta(z,\xi)|\,|d\xi|<\frac{\varepsilon}{|h|}\int_{z}^{z+h}|d\xi|=\varepsilon$$

esto conlleva que $F'(z)=f(z)$,luego F es una primitiva de f.

Basta entonces mostrar que que toda primitiva es de la forma de (3,11). Para esto sea una primitiva cualquiera, tenemos que:

$$\frac{d}{dz}\,G(z)-\int_{z_0}^{z}f(\xi)\,d\xi=G'(z)-\frac{d}{dz}\int_{z_0}^{z}f(\xi)\,d\xi=f(z)-f(z)=0$$

luego una función H, dada por

$$H(z)=G(z)-\int_{z_0}^{z}f(\xi)\,d\xi,$$

tiene derivada nula, por lo tanto es constante (Notar que $H=u+iv$ y notar que $H'(z)=0$ se sigue $u_x+iv_x=0\,y\,u_x=v_x=u_y=v_y=0$; de aquí se concluye que u y v son constantes, luego Hes constante). Siendo H constante, concluimos que (3,11) es la forma de cualquier primitiva G de f.

De este teorema se sigue inmediatamente que una integral de f en un intervalo de z_0 a z_1 dado que

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)\,dz = F(z_1) - F(z_0)$$

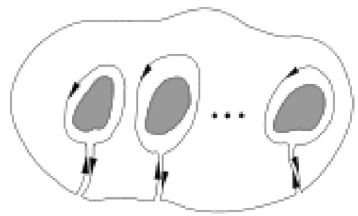
donde F es una primitica cualquiera de f. De este resultado se desprende el siguiente teorema que es de vital importancia en el calculo de integrales en un intervalo.

Teorema 2: *Sea f una función analítica en una región R en cualquier intervalo cerrado simple $C_0, C_1, ..., C_n$ tales que $C_1, ..., C_n$ son exteriores de C_0; $C_i\, y\, C_j$ el uno del otro para $i \neq j,\ i, j \geq 1$; la región R contiene el interior de C_0, excepto eventualmente las regiones $R_1, R_2, ..., R_n$ interiores de $C_1, ..., C_n$ respectivamente. Entonces*

$$\int_{C_0} f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz + ... + \int_{C_n} f(z)\,dz,$$

asumiendo en el intervalo tengan todos la misma orientación.

Justificación. Una explicación simple es la que muestra la figura



justificando así el teorema introduciendo cortes $L_1\, y\, -L_1$, $L_2\, y\, -L_2$, ..., $L_n\, y\, L_n$, uniendo C_0 a C_1, C_2,..., C_n respectivamente, todos los contenidos en R.

El contorno que asimismo obtenemos, $C_0 \cup L_1 \cup (-C_1) \cup (-L_1) \cup ... \cup L_n \cup (-C_n) \cup (-L_n)$, envuelve una región simplemente conexa, de forma que a lo largo de la integral de f debe ser nula. Observando que a lo largo de las integrales de $L_1\, y\, -L_1$, $L_2\, y\, -L_2$, ..., $L_n\, y\, L_n$ obtenemos

$$\int_{C_0} - \int_{C_1} - \int_{C_2} - ... - \int_{C_n} \qquad f(z)dz = 0$$

o

$$\int_{C_0} f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz + ... + \int_{C_n} f(z)dz.$$

Ejemplo 1: Una función $f(z) = z^n$, donde n es un entero no negativo y analítica en todo el plano tienen por primitiva una función $F(z) = z^{n+1}/(n+1)$. Tenemos que:

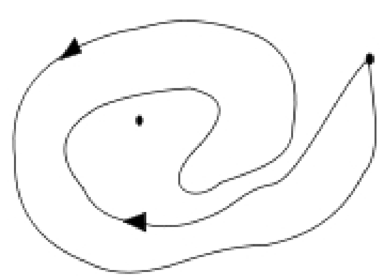
$$\int_{z_0}^{z_1} z^n dz = \frac{1}{n+1}\left(z_1^{n+1} - z_0^{n+1}\right)$$

cualquiera que sean los números complejos $z_0\, y\, z_1$ en cualquier intervalo de integración ligado a z_0 y z_1.

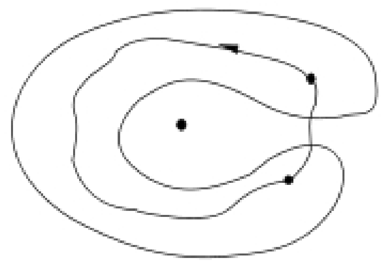
Ejemplo 2: Una función $f(z) = (z-a)^{-1}$ es analitica en el plano complejo, excepto el punto $z = a$ y tiene por primitiva la función $F(z) = \ln(z-a)$

$$\int_{z_0}^{z_1} \frac{dz}{z-a} = \ln(z_1 - a) - \ln(z_0 - a) \qquad (3,12)$$

desde que una integración sea hace a lo largo de cualquier intervalo de C ligado a z_0 y z_1 y contenido en una región simplemente conexa que excluye al punto $z = a$. En particular es fácil ver que si el contorno vuelve al punto inicial sin redean al punto $z = a$, entonces $z_0 - a$ y $z_1 - a$ coinciden en módulo y argumento, y el valor de la integral también es cero.



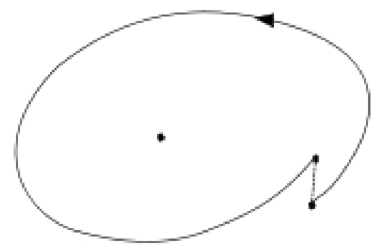
Supongamos que C envuelve a el punto $z = a$ en sentido positivo, como lo muestra la figura



Entonces cualquier región simplemente conexa que contenga a C contiene al punto $z = a$ donde f no es analítica y no podemos concluir que la integral se anule. Más en este caso la formula (3,12) se aplica, desde lo que anteriormente se interpretó. Una manera de justificar consiste en considerar primero la integración en torno a un intervalo parcial en C', uniendo z_0 al punto de z' como muestra la figura. Tal contorno esta todo contenido en una región simplemente conexa en R que no contiene a un punto $z = a$ de tal forma que:

$$\int_{C'} \frac{dz}{z-a} = \ln(z'-a) - \ln(z_0-a)$$

pasando al límite con $(z'-a) \to (z_1-a) = (z_0-a)\, e^{2\pi\iota}$, obtenemos $2\pi i$ el valor que da la integral. Este razonamiento es equivalente a considerar z_0 y z_1 como puntos distintos de la superficie de Riemann de $\ln(z-a)$, la cual $z = a$ es punto de ramificación.



La integral (3,12) tiene el mismo valor $2\pi i$, cualquier que sea un contorno que envuelve a $z = a$ una vez en sentido positivo, esto es;

$$\int_C \frac{dz}{z-a} = 2\pi i$$

Ejercicios:

1. Calcule la integral directamente en el punto $z - a = re^{i\theta}$, donde $dz = d(z-a) = rie^{i\theta}d\theta$

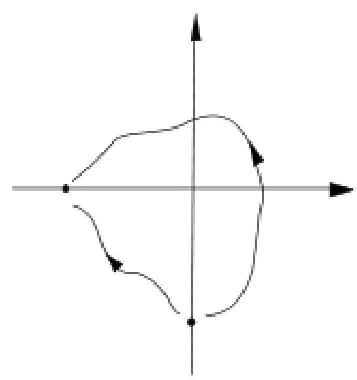
2. Muetre que $\oint_C \frac{dz}{(z-a)^{n+1}} = 0$

donde n es un entero positivo y C es cualquier intervalo cerrado envolviendo $z = a$ siendo no positivo.

3. Calcular la integral

$\int_{-i}^{-1} \frac{dz}{z}$

a lo largo de cualquier intervalo C_1 que no pase por el tercer cuadrante. Calcule la misma integral usando C_2 todo contenido en el tercer cuadrante.



4. Como en el ejercicio anterior calcule

$\int_{C_1} \ln z dz$ y $\int_{C_2} \ln z dz$

tomando para punto inicial $-i$ y argumento $-\pi/2$.

5. Calcule las siguientes integrales, entorno a cualquier intervalo ligado a los límites indicados:

$\int_3^{i/\pi} \cos \pi z dz$

$\int_\pi^{i\pi} ze^{z^2} dz$

6. Calcule la integral $\int_C \frac{z}{3z^2+7}dz$, donde C es cualquier intervalo ligado $e^{-i\pi/4}$ a $e^{i\pi/4}$ y todo contenido en el semiplano $Re\ \ z > 0$.

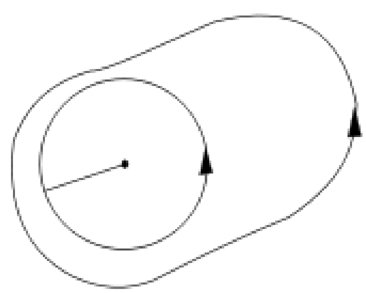
III.VII Fórmula integral de Cauchy, Derivadas de Orden Superior y Teorema de Morera.

Teorema 1: *Supongamos que f es analitíca en un abierto conexo S de $\mathbb{C}$. Sea C una curva de Jordan seccionalmente suave tal que C y su región interior $I(C)$ estan contenidas en S. Entonces para todo punto $z_0 \epsilon I(C)$, se cumple:*

$$\boxed{f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi}$$

con tal que la curva C este orientada en sentido antihorario.

Demostración: Sea $\delta > 0$ tal que el disco $\xi : |\xi - z| \leq \delta$ no contempla puntos de C, (como indica la figura)



designado por C_δ el contorno del disco, del teorema 2 del capitulo anterior (III.VI), se sigue que

$$\int_c \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \oint_{C_\delta} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

Vamos ahora a descomponer esta ultima integral en dos integrales, entonces de acuerdo a la descomposición tenemos que:

$$f(\xi) = f(z) + [f(\xi) - f(z)];$$

obtenemos que:

$\int_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = f(z) \int_{C_\delta} \frac{d\xi}{\xi - z} + \int_{C_\delta} \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} d\xi$

La primera integral del segundo miembro es $2\pi i$, como observamos en la sección anterior tenemos entonces que:

$$2\pi i\, f(z) = \int_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - \int_{C_\delta} \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} d\xi \qquad (3,14)$$

Esta última integral tiende a cero como $\delta \to 0$. De hecho, dado $\varepsilon > 0$ arbitrario, continuo en f, se sigue que podemos tomar δ tan pequeño que $|f(\xi) - f(z)| < \varepsilon$, desde que $|\xi - z| \leq \delta$. Estas condiciones

$$\left| \int_{C_\delta} \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} d\xi \right| \leq \int_{C_\delta} \frac{|f(\xi) - f(z)|}{|\xi - z|} |d\xi| \leq \frac{\varepsilon}{\delta} \int_{C_\delta} |d\xi| = 2\pi\varepsilon$$

Por lo tanto haciendo $\delta \to 0$, en (3,14) obtenemos el resultado deseado.

La fórmula de la Integral de Cauchy es un instrumento básico en todo el estudio de funciones analíticas. Ello revela, casi de inmediato, que algunos resultados son verdaderamente sorprendentes y de una importancia fundamental. Por ejemplo, una simple inspección de la fórmula nos muestra que basta el conocimiento de f en los puntos ξ de contorno C para que pasemos a calcular f en cualquier punto de z del interior de C. Esto nos revela que la condición de analítica esta restringida: los valores de la función f estan todos ligados unos a otros como muestra la Fórmula de Cauchy y no pueden ser alternados, sea una región a lo largo del arco y lo mismo en los puntos aislados, sin que esto viola la condición de analítico. Veremos más tarde que una interdependencia de dos valores de una función analítica y esto es más fuerte que muestra en el momento de la Fórmula de Cauchy.

La Fórmula de Cauchy dice que una función analítica posee derivadas de todos los ordenes. Y este es el objetivo del siguiente teorema.

Teorema 2: *Una función analítica en una región R posee derivadas de todos los ordenes, las cuáles a su vez son también analíticas en R y son obtenidas de la Fórmula de Cauchy por derivación bajo el signo de integración.*

Demostración: Sea z un punto cualquiera de R y C en un contorno cerrado y simple, enteramente contenido en R, cuyo interior contenga un punto cualquiera de R y C en un contorno cerrado y simple, todo contenido en R cuyo interior contenga el punto z y este esté enteramente contenido en R. Entonces por la *Fómula de Cauchy*

$$\boxed{f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi}$$

admitiendo por un momento, una derivación es una señal de integración, tendremos que:

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi;$$

ahora derivando sucesivamente tenemos que:

$$f''(z) = \frac{2!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^3} d\xi$$

$$f'''(z) = \frac{3!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^4} d\xi$$

y en general

$$\boxed{f^n = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi}$$

donde n es un entero positivo cualquiera.

Las fórmulas anteriores no solo establecen un resultado, como nos nuestra las expresiones para las derivadas de f en terminos de los valores de C. Nos basta justificar las derivadas sobre los signos de integración, el cuál es objeto del teorema siguiente.

Teorema 3: *Sea C un contorno cualquiera (abierto y cerrado), $g(z)$una función definida y continua para z en C, y n un entero positivo. Entonces una función*

$$f(z) = \int_C \frac{g(\xi)}{(\xi - z)^n} d\xi$$

y regular en todo punto de $z \notin C$ y posee derivada dada por

$$f'(z) = n\int_C \frac{g(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi$$

Demostración: Para ello debemos mostrar que

$$F = \frac{f(z+h) - f(z)}{h} - n\int_C \frac{g(\xi)}{(\xi - 1)^{n+1}} d\xi$$

tiende a cero cuando $h \to 0$. Usando la Fórmula que define a una función f obtenemos

$$F = \int_C Gg \; d\xi,$$

donde

$$G = \frac{1}{h}\left[\frac{1}{(\xi - z - h)^n} - \frac{1}{(\xi - z)^{n+1}}\right] - \frac{n}{(\xi - z)^{n+1}}$$

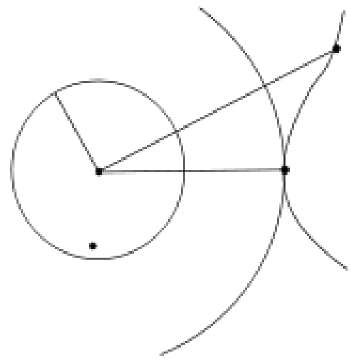
Vamos a mostrar primero que esta función G puede ser hecha arbitrariamente pequeña, desde que h tenga un número suficientemente pequeño. Por conveniencia vamos a tomar $a = \xi - z - h$ y $b = \xi - z$. Tenemos entonces (supongamos que $n \geq 2$, dejando al lector el caso para $n = 1$, que es el más simple de resolver)

$$G = \frac{1}{h}\left(\frac{1}{a^n} - \frac{1}{b^n}\right) - \frac{n}{b^{n+1}} = \frac{b^n - a^n}{(b-a)\,a^n b^n} - \frac{n}{b^{n+1}}$$

$$= \frac{a^{n-1}b + a^{n-2} + ... + ab^{n-1} + b^n - na^n}{a^n b^{n+1}}$$

$$= \frac{a^{n-1}(b-a) + a^{n-2}(b^2 - a^2) + ... + a(b^{n-1} - a^{n-1}) + (b^n - a^n)}{a^n b^{n+1}}$$

como $z \notin C$ y C es cerrado en una vecindad de z, de radio d, que no contiene puntos de C .



En otras palabras $|\xi - z| \geq d$ para todo $\xi \epsilon C$ y tomando $|h| < {}^{d}\!/_{2}$

tenemos también $|\xi - z - h| \geq |\xi - z| - |h| > {}^{d}\!/_{2}$ de aquí, de la expresión anterior obtenemos

$$|G| \leq \frac{2^n}{d^{2n+1}} \left[\left| a^{n-1} (b-a) \right| + \left| a^{n-2} \left(b^2 - a^2 \right) \right| + ... + \left| (b^n - a^n) \right| \right]$$

como $|h| \leq {}^{d}\!/_{2}$ se puede probar que existe una constante M tal que $|a| < M$ y $|b| < M$.

$$b^j - a^j = (b-a) \left(b^{j-1} + b^{j-2} + ... + a^{j-1} \right)$$

obtenemos

$$\left| b^j - a^j \right| \leq |b-a| \, jM^{j-1} = j \, |h| \, M^{j-1}$$

de aquí se sigue que

$$|G| \leq \frac{2^n}{d^{2n+1}} |h| \left(M^{n-1} + 2M^{n-1} + ... + nM^{n-1} \right)$$

$$= \frac{2^{n-1} n \left(n+1 \right) M^{n-1} |h|}{d^{2n+1}}$$

esta expresión nos muestra que dado un $\varepsilon > 0$ arbitrario en el punto

$$\delta = min \left\{ \frac{d}{2},\ \frac{d^{2n+1}}{2^{n-1} n \left(n+1 \right) M^{n-1}} \right\}$$

tenemos que $|h| < \delta \Rightarrow |G| < \varepsilon$. De aqui se obtiene que

$$|F| \leq \int_C |G| \, |g| \, |d\xi| \leq \epsilon AL,$$

donde A es el máximo de $|g|$ en C y L de longitud de C. Esto muestra que $F \to 0$ con $h \to 0$, como se queria demostrar.

Por lo tanto recien ahora nos encontramos en condiciones de establecer un reciproco de *Teorena de Cauchy*.

Teorema 4 de Morera: *Sea f una función continua en una region R, tal que*

$$\oint_C f\left(z \right) dz = 0$$

para todo contorno cerrado C en R. Entonces f es analítica en R.

Demostración: Sea z_0 un punto cualquiera de R, fijo a una expresión

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\xi)\, d\xi$$

independientemente del camino de integración. Como la demostración de uno de los teoremas anteriores F es una función analítica en R en su derivada y una función f : $F'(z) = f(z)$. Pero el teorema de Cauchy, $F'(z)$ también es analítica en R, esto es, $f(z)$ es analítica en R y que completa la demostración.

Es interesante observar que esta demostración se basa enteramente en el Teorema de Cauchy y es consecuencia de lo mismo.

III.VIII Teorema de Liouville

Una función entera (analítica en todo el plano) y limitada en f y necesariamente constante.

Demostración: Sea M una constante tal que $|f(z)| \leq M$ para todo z. De acuerdo con la fórmula integral de derivada.

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2}d\xi$$

donde z es un punto cualquiera y C un contorno abierto alrededor de z una vez en sentido positivo. En particular, tomando para C el circulo $\{\xi : |\xi - z| = r\}$; obtenemos

$$|f'(z)| \leq \oint_{|\xi - z| = r} \frac{|f(\xi)|}{|\xi - z|^2}d\xi \leq \frac{M}{2\pi r^2}\int_{|\xi - z| = r} |d\xi| = \frac{M}{r}$$

como r es arbitrario, haciendo $r \to \infty$, obtenemos $f'(z) = 0$, esto siendo verdadero para todo z, concluimos que f es constante.

Como en el Teorema de Liouville se demuestra facilmente el Teorema Fundamental del Algebra: *todo polinomio de grado $n \geq 1$ posee no menos de una raiz.* De esto, sea

$$P(z) = \frac{1}{P(z)} = \frac{1}{a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0}$$

es una función entera. Como $f(z) \to 0$ y como $z \to \infty$ y f es continua, por lo tanto limita en cualquier parte finita del plano, concluimos que f es limitada en todo el plano. Pero el Teorema de Liouville se sigue que f es constante, luego $P(z) = c$ también es constante. De aquí se sigue que $P(z) - c$ se anula, esto contradice la hipotesis inicial, luego el Teorena queda demostrado.

Ejercicios:

1. Use la Fórmula de Cauchy para calcular las siguientes integrales.

a) $\oint_{|z|=3} \frac{z^2+1}{z+2} dz$

b) $\oint_{|z|=1} \frac{e^z}{2z+i} dz$

c) $\oint_{|z|=2} \frac{\ln(z+5)}{z^2-2iz+3} dz$

En esta última considere un rango del logaritmo corresponde a $ln\, x > 0$ para $x > 1$

2. Calcule las siguientes integrales:

a) $\oint_{|z|=3} \frac{\cos\left(z^2+3z-1\right)}{(2z+3)^2} dz$

b) $\oint_{|z|=1} \frac{z^2+z+i}{(4z-i)^3} dz$

c) $\oint_{|z|=1} \frac{\ln\left(z^2+2\right)}{(3z-2)^2} dz$

observe que el valor de esta última integral independientemente del rango particular de $\ln(z^2+2)$ usando una integración.

3. Calcule las siguientes integrales.

a) $\oint_C \frac{\sqrt{z^2+4}}{4z^2+4z-3} dz$

b) $\oint_C \frac{\sqrt{z^2+4}}{4z^2-4iz-1} dz$

c) $\oint_C \frac{\sqrt{z^2+4}}{3z^2-(10+i)z+3(1+i)} dz$

donde C es un cuadrado de vértices $\pm 1, \pm i$ es una función $f(z) = \sqrt{z^2+4}$ es determinada por la condición de $f(0) = -2$

III.IX Funciones Armónicas

Sea $f\,(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ una función analítica en una región R. Pero el Teorema de Cauchy posee derivadas de todo orden en R. Esas derivadas, a su vez también son analíticas en R y pueden ser calculadas derivando f varias veces en relación a x y en relación a iy; y anda, en relación a x y en relación a iy , un número convenientemente de las veces que sea necesario. Es facíl ver entonces que las funciones $u\,(x,y)$y $u\,(x,y)$ poseen derivadas parciales de todo orden, las cuales son continuas en R. Podemos entonces derivar las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

$$u_x = v_y \qquad \text{y} \qquad u_y = -v_x$$

cualquier número de veces. En particular, derivando la primera de estas en relación a x y la segunda en relación a y es sumando los resultados miembro a miembro obtenemos que

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \qquad (3,17)$$

análogamente

$$v_{xx} + v_{yy} = 0 \qquad (3,18)$$

Una función $g(x,y)$ es armónica en una región R si ella posee derivadas continuas ante una segunda derivada y satisface una Ecuación de Laplace en R:

$$\Delta g = g_{xx} + g_{yy} = 0$$

Pero lo que vimos anteriormente, *la parte real e imaginaria de una función analitica en una región R son funciones armónicas la misma región.* Además es fácil ver por derivadas sucesivas de (3,17) y (3,18) que cualquier derivada parcial de u y v la mencionamos $\frac{\partial^{m+n}u}{\partial x^m \partial y^n}$, $\frac{\partial^{p+q}v}{\partial x^p \partial y^q}$ son también armónicas en R.

La pregunta es que si cualquier función armónica puede ser considerada como parte real y parte imaginaria de una función analítica. La respuesta a esta pregunta es afirmativa, como veremos acontinuación. Existe entonces una íntima relación entre la teoría de funciones analíticas y la teoría de funciones armónicas.

Por lo tanto sea

$$u\left(x,y\right) = x^2 - y^2 \qquad (3,19)$$

que es armónica en todo el plano, como es fácil verificar. Vamos a determinar una función v usando las ecuaciones de Cauchy Riemann, tenemos

$$u_x = -u_y = 2y$$

integrando en función de x tenemos que

$$v = 2xy + g$$

donde g es una función arbitraria de $y - a$ (en función a x) de integración anterior. Derivando esta última ecuación en relación a y y usando $v_y = u_x = 2x$, obtenemos $g'(y) = 0$, luego g es una constante arbitraria y $v = 2xy + g$. De aquí y de lo anterior se sigue que

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y) = x^2 + 2ixy - y^2 + const = (x + iy)^2 + const$$

en otras palabras

$$f(z) = z^2 + const$$

Vamos ahora a considerar un problema en su generalidad. Dea $u(x,y)$ una función armónica en una región R, suponemos que, es simplemente conexa. Vamos a determinar $v(x,y)$de forma que $f = u + iv$ sea analítica en R. Una función v asi determinada y llamada una función armonica conjugada da la función u . Como en el ejemplo anterior, v es determinada por la ecuaciones de Cauchy Riemann. Devenos tener entonces que.

$$dv = v_x dx + v_y dy = -u_y dx + u_x dy$$

esto nos lleva a procurar una función de la forma

$$v(x,y) = v_0 + \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} -u_y dx + u_x dy \qquad (3,20)$$

donde $v_0 = v(x_0., y)$ y (x_0, y_0) es un punto en R tomado arbitrariamente.

Si la integral anterior toma una camino independiente de integración, una función v que ella define como que posee derivadas continuas en R , satisfaciendo, justamente como u, es la ecuación de Cauchy Riemann, luego $f = u + iv$ es analítica en R. El problema se reduce, entonces, a probar que una expresión

$$-u_y dx + u_x dy$$

y una diferencia exacta; más esto equivale a verificar que una integral de esta expresión a lo largo de cualquier contorno cerrado de C en R es nula. Designado por R' en el interior de C y teniendo en cuenta el Teorema de Green obtenemos que:

$$\oint_C -u_y dx + u_x dy = \iint_{R'} (u_{xx} + u_{yy})\, dxdy = 0$$

donde usamos que u es armónica. Esto concluye la demostración de la existencia de la función v la cuál es determinada para la función u a menos de una constante aditiva arbitraria v_0, como nos muestra la expresión (3,20)

Ahora en el caso de una región multiplemente conexa, una función conjugada v puede ser equivalente. Un ejemplo típico de esta situación es dado por $u = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$ que es armónica en todo el plano, excluyendo el origen.

Por lo tanto sustituyendo en (3,20) tenemos que

$$v\left(x,y\right)=v_0+\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$$

tomando el camino de la integración en un contorno cerrado formado por segmento rectilineos tomando (x_0,y_0) a (x,y_0) y (x,y_0)a (x,y), una expresión anterior nos da

$$v\left(x,y\right)=v_0-\arctan\frac{x}{y_0}+\arctan\frac{x_0}{y_0}+\arctan\frac{y}{x}-\arctan\frac{y_0}{x}$$

como

$$\arctan\frac{x}{y_0}+\arctan\frac{y_0}{x}=\frac{\pi}{2}$$

obtenemos finalmente que

$$v\left(x,y\right)=\arctan\frac{y}{x}+const$$

que es una función esquivalente a una región considerada. En coordenadas polares $r=\sqrt{x^2+y^2}$ y $\theta=\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ obtenemos que

$$f=u+iv=\ln\left(r\right)+i\theta+\cos t$$

y donde, con $z=re^{i\theta}=x+iy$

$$f(z)=\ln z+const.$$

Se debe notar casos como este reduce la situación de una región completamente conexa, basta esto para introducir un corte conveniente en el plano.

Ejercicios:

1. Siendo $f = u + iv$ una función analítica en una región R, muestre que u es una conjugada de $-v$.

2. Muestre que $u = x - 5xy$ es armónica en todo el plano. Determine su conjugada v y exprese $f = u + iv$ en terminos de $z = x + iy$

3. Verifique que $a\left(x^2 - y^2\right) + by$ es una forma más general de dos polinomios homogeneos y armónicos de segundo grado x e y. Determine su función armónica conjugada y una función $f = u + iv$

4. Determine la forma general de dos polinimios homogeneos y armonicos de grado 3 en x e y . Determine también una función conjugada y una función $f = u + iv$.

5. Muestre que las siguientes funciones son armónicas en cierta región; determine una función armónica conjugada y una función $f = u + iv$ en cada caso:

a) $u = x - 4xy$

b) $u = \sin\, x\ \cos h\, y$

c) $u = x^3 - 3xy^2$

CONCLUSIÓN

Se puede finalizar agregando que en el transcurso de nuestra formación académica hemos recibido diversos conocimientos de toda índole, sin embargo nunca es suficiente con lo que se aprende, siempre es necesario aprender un poco más cada día, es por ello que como estudiantes decidimos realizar un estudio enfocado hacia nuestra especialidad, es decir, los números complejos y algunas de sus aplicaciones, en este caso como se comportan estos números en el plano, en funciones analíticas y por su puesto en lo que respecta a su trabajo en integrales.

Cabe además señalar los motivos por los cuales se decidió realizar el estudio de los números complejos. Esta inquietud nació a partir de que en nuestra formación universitaria no se trataron con mayor profundidad, es aquí en donde se planteo la idea de poder realizar este trabajo, con el objetivo que estuviera al alcance de los estudiantes para que fuese un poco más fácil de poder estudiar. A grandes rasgo se puede destacar que nosotros como grupo logramos comprender un poco más sobre los números complejos, ya que de complejo solo reciben el nombre, son números en los cuales no debiese existir mayor dificultad al aprenderlos por parte del estudiante, solo deben ser capaces de diferenciar en el contexto o conjunto numérico en el cual están trabajando, pero más allá no existe mayor rigurosidad.

Hemos descubierto que muchas de las propiedades y teoremas que se trabajaban para números reales, así también se extienden para los números complejos. Sin embargo es importante resaltar que solo fueron abarcados tres de los aspectos de los números complejos, realizando una alusión que este tema se extiende mucho más de allá que estos, ya mencionados, tres ítems que hemos trabajado de alguna manera. Es por ello que los demás aspectos que sean necesarios estudiar quedan a libre elección de los mismos estudiantes interesados en estos números tan especiales como los llamados números complejos.

Esta investigación facilitó la incorporación de nuevo conocimientos sobre una pequeña parte de la matemática, pero además de haber realizada esta indagación en base a este tema, se cumplió el objetivo de abarcar tres unidades correspondientes a los números complejos, como también fue importante el trabajo en equipo, por parte de cada uno de los integrantes del grupo tesista, en donde se logro afianzar la confianza y compartir nuevas experiencias entre cada uno de nosotros. Sin embargo debemos reconocer que el tiempo que se necesita es demasiado escaso para realizar una investigación profunda y acabada de un determinado tema, aunque en desmedro del mismo, el corto tiempo, logramos tener cada uno de los integrantes del grupo instacias de trabajo tranquilas y organizadas para tema a investigar.

Finalmente la investigación realizada de los número complejos está orientada hacia nuevos estudiantes que tengan real interés en las matemáticas y que en realidad sea de vital importancia para continuar con este mismo estudio, es por ello que existen ejercicios propuestos en donde estan enfocados hacia el lector, el cual está en libre elección de realizarlo o no. Es por ello que el fin común de nuestra tesis va hacia cada uno de los estudiantes de pedagogía en matemática o simplemente de cualquier carrera en donde se necesite en apoyo, pues aquí es donde juega un rol importante nuestra investigación.

BIBLIOGRAFÍA

1. Avila, Geraldo (1990). *Variáveis Complexas e Aplicacoes.* Rio de Janeiro:Livros Técnicos Cientificos Editorial.

2. Gonzalez, Artemio (2003). *Variable Compleja.* Madrid Septiembre.

3. Muller, Hans (2000). *Variable Compleja.*

4. Murray, Spiegel (1968). *Teoria y Problemas de Variable Compleja.* Universidad de Montreal, Montreal Canada.

5. Nieto, Jose. *Funciones de Variable Compleja.*