UNIVERSIDAD DEL BIO–BIO
FACULTAD DE EDUCACION Y HUMANIDADES
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS DE LA EDUCACION
CHILLAN–CHILE

MONOGRAFÍA

Aplicación a la educación de la Teoría de Juegos no cooperativos de suma cero para dos personas.

Presentado por:

Samuel Jesús Fuentes Parada

Profesor Guía:

Miguel Friz Carrillo

CAMPUS LA CASTILLA

UBB–CHILLAN

2013

Dedicatoria

A mi Madre y Padre que me han dado la existencia; y en ella, la capacidad por superarme y desear lo mejor por cada paso en este camino difícil y arduo de la vida.
Gracias por ser como son, porque su presencia y persona han ayudado a construir y forjar el hombre que soy.
A mis hermana; por su cariño, comprensión y apoyo incondicional, gracias por confiar en mí. Además a mi propia familia que he construido en estos últimos años, a mi pareja que me ha a apoyado, contenido en mis días dificiles, por ser tal cual es y por darme la dicha de ser padre. Por último gracias a mi hijo Agustín que me da la fuerza, empeño de levantarme día a día y dar la lucha para ser una mejor persona para que este orgulloso de mí.

Agradecimiento

- *Gracias a Dios por darme la vida, la salud y por permitirme estar escribiendo esta parte de la tesis ahora.*

- *Gracias a mis amigos y compañeros que me han acompañado en este camino de sabiduria, y muchas veces me acogieron abriendome las puertas de su hogar .*

- *Al Dr: Miguel Friz por su apoyo, enseñanzas y por ayudarme a crecer tanto profesionalmente como espiritualmente. En especial a un excelente Docente, trabajador incansable, amigo de sus alumnos, de un espiritú inquieto y aventurero. Amigo gracias por llegar a mi vida, en el momento justo, sigue adelante en tu camino y estes donde estes siempre te recordaré.*

Índice general

Introducción

Los fundamentos de la teoría de juegos fueron establecidos por JOHN VON NEUMANN en 1928, y expuestos en el libro Theory of games and economic behaviour, que publicó junto a Oscar Morgensten en 1944. Esta teoría pone de manifiesto que los acontecimientos de las ciencias sociales donde los agentes actúan a veces unos contra otros para la consecución de sus objetivos, pueden ser descritos mediante modelos matemáticos.

John Von Newman
(1903-1957)

La teoría de juegos proporciona modelos de las situaciones reales, los que aportan son sólo pautas generales de comportamiento, proporcionan normas de actuación más precisas, en tanto el modelo refleje con mayor precisión la realidad. En esta tesis, se expondrán soluciones prácticas a la Educación, que se pueden modelar por medio de juegos con pagos de suma cero, también llamados juegos matriciales.

Dentro del primer capítulo, se ha considerado dos temas: en el item 1.1 se representan los conceptos básicos de los juegos, la forma de representar juegos, clasificación y modelos importantes de ellos, en el item 1.2 se presenta conceptos concernientes a Educación que se utilizarán en las aplicaciones.

El segundo capítulo comienza con juegos de dos jugadores en donde cada jugador elige de muchas estrategias puras finitas o aleatoriamente entre ellas, y la suma de los pagos de los jugadores es siempre igual a cero. Se da las definiciones y teoría básica, se muestra como desarrollar juegos de 2×2, y por último como usar el concepto de estrategia dominada, además de mostrar el Teorema de Minimax, que garantiza una solución a este tipo de juegos.

El tercer capítulo está destinado a las aplicaciones. En este apartado se presentan dos, que son con respecto a Juegos de Suma Cero (también llamados juegos Matriciales). Donde se aborda los temas de Educación, como el Aprendizaje y Analfabetismo respectivamente.

Samuel Fuentes Parada.

Capítulo 1:

Preliminares

1.1. Nociones básicas de juego

Definición de un juego

- Es una situación en la que compiten dos o mas jugadores (Ferguson y Gould, 1975)
- Un juego es cualquier situación en la que los individuos deben tomar decisiones estratégicas y en la que el resultado final depende de lo que cada uno decida hacer (Nicholson, 1997).
- Cualquier problema de toma de decisiones, donde el rendimiento (que obtiene una persona) depende no sólo de sus propias decisiones sino también de las decisiones de las otras personas que participan en el juego (Maddala y Miller, 1991).

Elementos de un juego

- **JUGADORES** Son jugadores cada uno de los agentes que **toman**

decisiones. Pueden **elegir** entre un conjunto de alternativas posibles

- **ESTRATEGIAS** Una estrategia corresponde a cada curso de acción que puede elegir un jugador.

  CLASIFICACIÓN DE LAS ESTRATEGIAS

  - Estrategia Pura: Una estrategia pura es la elección de una acción con certeza por parte de un agente.
  - Estrategia Mixta: Una estrategia es mixta cuando la elección de una acción es aleatoria por parte de un agente.

- **GANANCIAS O PAGOS** Las ganancias corresponden a los rendimientos que obtiene cada jugador cuando termina el juego.

Clasificación general de los juegos

Las situaciones de conflicto reales conducen a una diversidad de juegos. En la actualidad no existe ninguna clasificación universal de los juegos, aunque éstos se diferencian por diversos criterios como : número de participantes, número de estrategias, relación entre los jugadores, tipo de pago, número de movimientos, cantidad de información que posee cada jugador, etc...

⋆ **Número de jugadores** Dependiendo del número de jugadores se definen tres tipos:

- Juegos de un jugador (sin consideración en teoría de juegos),
- Juegos de dos jugadores (**la más estudiada**) y
- Juegos n-personales con un proceso de simulación y resolución muy dificultoso.

⋆ **Número de estrategias** Los juegos se dividen en **juegos finitos** en los que cada jugador tiene un número finito de estrategias, y **juegos infinitos** en los que al menos un jugador posee infinitas estrategias.

⋆ **Relación entre los jugadores** Se clasifican en **juegos no cooperativos** (*juegos sin coaliciones*), en los que los jugadores no pueden firmar ni acuerdos ni coaliciones, **juegos cooperativos** (*juegos con coaliciones*) en los cuales los acuerdos se firman con anterioridad y deben ser respetados obligatoriamente.

⋆ **Tipo de pago** Se distinguen los **juegos de suma cero**[1] en el que la ganancia de un jugador implica la pérdida en misma cantidad de otro y **juegos de suma no nula**, en la cual las ganancias no suman cero.

[1] Los juegos de suma cero se llaman también juegos antagónicos ya que los intereses de los jugadores son opuestos

⋆ **Número de movimientos** Los juegos se dividen en *juegos de un paso* que terminan cuando cada jugador realiza un movimiento y *juegos multipasos* los cuales también se dividen en *juegos de posición* (cada jugador puede realizar más de un movimiento en el tiempo), *juegos estocásticos* (al elegir una nueva posición existe probabilidad de volver a la anterior), *juegos de tipo duelo* (se caracterizan por el instante en el cual se hace el movimiento y por la probabilidad de obtener un pago dependiendo del tiempo transcurrido)

⋆ **Información disponible** Los juegos se clasifican en *juegos de información completa* en los que cada jugador conoce los movimientos hechos por los demás, y *juegos de información incompleta* en los que no se conocen todas las jugadas anteriores.

Obviamente existen otros tipos de juegos. Dependiendo de su clase, se elabora su método de solución. No obstante, cabe destacar que un mismo juego puede pertenecer a diferentes clase.

Juegos cooperativos y no cooperativos

1. **Juegos cooperativos**

   Los jugadores pueden negociar contratos vinculantes. "Eligen estrategias de manera conjunta".

2. **Juegos no cooperativos**

   Los jugadores NO pueden negociar contratos vinculantes. "Cada uno elige su estrategia óptima independientemente".

   - Comprender el punto de vista de un adversario "racional".
   - Deducir su respuesta a nuestros actos.

Formas Matricial de representar un juego

La representación de un juego puede realizarse a través de:

- **Matriz de ganancias**(Forma normal)

  Es una representación de una situación estratégica a través de una tabla. Las estrategias de cada jugador se presentan a la izquierda y en la parte superior de la tabla. Las ganancias obtenidas por cada uno de los jugadores al final del juego se presentan en la parte interior de la tabla.

  Contiene los siguientes elementos:

  - Jugadores.
  - Estrategias de acciones factibles.
  - Matriz de pagos “payoffs”

  ***Ejemplo* 1.1. Competencia de mercados**

  Consideremos 2 jugadores: la firma I es una firma incúmbente, y la firma Es la potencial entrante en la industria.

  Primero, la firma E decide si entrar o no entrar al mercado.

  Segundo, la firma I decide si acomoda la entrada o si lucha (por ejemplo, bajando los precios).

  Se representa este juego por medio de la forma normal:

E/I	Acomodar	Pelear
Entrar	(4,5)	(-1,0)
No entrar	(0,10)	(0,10)

Modelo importante de juego no cooperativo de Suma Cero

► **La batalla del Mar Bismark**

Se dió en el sur-pacifico en 1943.El almirante japonés INAMURA tiene que transportar tropas de un lado a otro el mar Bismark a Nueva Guinea , y el almirante americano KENNEY desea bombardear a las tropas, INAMURA tiene dos posibilidades:

- Una ruta corta del norte (2 días).
- Una ruta larga del sur (3 días).

Kenney tiene que elegir una de esas rutas para hacer su plan, si elige la ruta incorrecta puede regresar hacia tras los planes y tomar la otra ruta pero el número de días de bombardeo es reducido a 1. El numero de días de bombardeo representa el pago para Kenney en un sentido positivo y para Inamura un sentido negativo.
El problema de la batalla del mar de BISMARK se modela en la siguiente tabla.

$$\begin{array}{c} \\ \text{Norte} \\ \text{Sur} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{Norte} & \text{Sur} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

Cada jugador tiene dos posibles elecciones, Kenney (jugador 1) elige una fila, Inamura (jugador 2) elige una columna y estas elecciones son tomadas independientemente y simultáneamente. Los números representan los pagos para kenney.
Este es un ejemplo de suma cero porque la suma de los pagos es siempre

igual a cero.

En este juego en particular, no parece tener dificultad para predecir que va a pasar.

Si elegimos Norte Inamura es siempre menos mala que si escogiera el Sur, esto se ve en la tabla de pagos. Ver que en este juego es fácilmente analizar porque uno de los jugadores tiene una estrategia dominante. Una elección es siempre buena o alguna otra elección, no interesando que decida el oponente.

1.2. Nociones de Educación en Chile

Niveles de la Educación

La educación en Chile se distingue en niveles parvulario, básico, secundario, educación para adultos y superior. En Chile la educación está regida por la Ley General de Educación de 2009 (LGE), sucesora de la Ley Orgánica Constitucional de Enseñanza (LOCE). El sistema educacional en sus niveles parvulario, básico y medio y los centros de formación técnica de la educación superior, están regulados y vigilados por el Ministerio de Educación. El Consejo Superior de Educación (CSE) tiene como principales funciones pronunciarse sobre la solicitud de reconocimiento oficial de las universidades e institutos profesionales, verificar su desarrollo, establecer sistemas de examen selectiva y acreditación, recomendar sanciones y realizar estudios sobre la educación superior.

El derecho a la educación y a la libertad de enseñanza están resguardados en la Constitución Política de la República, sin embargo, para tener reconocimiento legal los establecimientos particulares, deben cumplir con los Objetivos Fundamentales y Contenidos Mínimos Obligatorios (OF-CMO) prescritos por el artículos 15 a 20 de la LOCE. Dichos requisitos y normas son establecidas por el Ministerio de Educación previo informe del CSE.

Analfabetismo de Adultos mayores en Chile

En Chile las personas que son analfabetos absolutos, es decir, que no saben 1 % de la población mayor de 15 años del país, cifra que comenzó a disminuir a partir de 1970, año en que Chile registraba un 11,7 % de analfabetismo.

La verdad es que encontrándonos en el siglo XXI ver estas estadísticas es aberrante, no puede ser que con los grandes avances tecnológicos y con la introducción de las TIC?s aún exista analfabetismo. Esto tiene mucho que ver con la exclusión que se genera a la hora de conseguir un trabajo, de acuerdo a las estadísticas ya nombradas la exclusión que se produce en el campo laboral en el sector urbano es muy grande, si bien es cierto el mayor porcentaje de analfabetismo se encuentra en el sector rural, esto no afecta mucho a la hora de conseguir en el campo un puesto de trabajo ya que no hay una exigencia de años cursados en escolaridad, pues perfectamente se puede trabajar en una cosecha amarrando parras sin la necesidad de tener un título profesional.

Capítulo 2:

Juegos finitos de suma cero para dos personas

Este capítulo trata juegos con dos jugadores en donde cada jugador elige estrategias puras finitas o aleatorias entre estas, y la suma de los pagos o pagos esperados es siempre igual a cero.
En la sección 2.1, las definiciones y teorías básicas son discutidas. En la sección 2.2 se muestra como resolver juegos de 2×2 y juegos amplios por eliminación de estrategias estrictamente dominada.

Por último se enuncia el Teorema del MINIMAX de Von Neumann, que nos garantiza que en todo juego matricial A el pago que al menos recibirá el jugador 1 es igual al pago que a lo más el jugador 2 pagará.

2.1. *Definiciones y teoría básica*

Los datos de un juego finito de suma cero para dos personas puede ser resumida en una matriz, donde el juego es normalmente llamado un "Juego matricial".

DEFINICIÓN 2.1. *(JUEGO MATRICIAL). Un juego matricial es una* *matriz A de $m \times n$ números reales, donde el número de filas m y el número de columnas n son enteros mayores ó igual que 1.*

Una estrategia (mixta) del jugador 1 es una distribución de probabilidad p sobre las filas de A, es decir, un elemento del conjunto

$$\Delta^m = \{p = (p_1, \ldots, p_m) \in \mathbb{R}^m / \sum_{i=1}^{m} p_i = 1, p_i \geq 0, \forall i = 1, \ldots, m\}$$

Una estrategia (mixta) del jugador 2 es una distribución de probabilidad q sobre las columnas de A, es decir, un elemento del conjunto

$$\Delta^n = \{q = (q_1, \ldots, q_n) \in \mathbb{R}^n / \sum_{j=1}^{n} q_j = 1, q_j \geq 0, \forall j = 1, \ldots, n\}$$

Una estrategia p del jugador 1 es llamada pura si hay alguna fila i con $p_i = 1$. Esta estrategia es también denotada por e^i, q es una estrategia del jugador 2 es llamada pura, si en alguna columna j con $q_j = 1$. Esta estrategia es denotada por e^j.

La interpretación de un juego matricial A es:

Si el jugador 1 juega la fila i (i.e. la estrategia pura e^i) y el jugador 2 la columna j (i.e. la estrategia pura e^j), entonces el jugador 1 recibe un pago de a_{ij} y el jugador 2 paga a_{ij} (y de esta manera recibe $-a_{ij}$), donde a_{ij} es el número en la fila i y columna j de la matriz A.

Si el jugador 1 juega la estrategia [1] p y el jugador 2 juega la estrategia q, el jugador 1 recibe el pago esperado [2]

$$p\ A\ q = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_i q_j a_{ij} \qquad [5]$$

[1]Observe que aquí, por "estrategia"se entenderá estrategias mixtas, para diferenciarlas de las estrategias puras.

[2]$p\ A\ q$ puede ser expresado por $p^T\ A\ q$ ó $p\ A\ q^T$ matrices

y el jugador 2 recibe $-p\ A\ q$.

Para solucionar juegos matriciales, los conceptos de estrategias máximin y minimax son importantes.

DEFINICIÓN 2.2. *(Estrategias MAXIMIN y MINIMAX)*
Una estrategia p es una estrategia máximin del jugador 1 en juego matricial A si:

$$min\{p\ A\ q/q \in \Delta^n\} \geq min\{p'\ A\ q/q \in \Delta^n\}, \quad \forall p' \in \Delta^m$$

Una estrategia q es una estrategia minimax del jugador 2 en un juego matricial A si:

$$max\{p\ A\ q/p \in \Delta^m\} \leq max\{p\ A\ q'/p \in \Delta^m\}, \quad \forall q' \in \Delta^n$$

Una estrategia máximin del jugador 1 maximiza el mínimo (con respecto a las estrategias del jugador 2) pago del jugador 1, y una estrategia minimax del jugador 2 minimiza el máximo (con respecto a las estrategias del jugador 1) que el jugador 2 tiene que pagar al jugador 1.
Para probar si una estrategia p del jugador 1 es una estrategia máximin es suficiente probar que la primera inecuación en la definición 2.2 cumple con e^j, para todo $j = 1, \ldots, n$ en lugar de para todo $q \in \Delta^n$.

Para probar si una estrategia es máximin (minimax) es suficiente considerar su desempeño contra toda estrategia pura i.e, columna (fila).

¿Por qué nos interesa tales estrategias?
A primera vista, tales estrategias parecen expresar un comportamiento conservativa o pesimista, la actitud en el escenario del caso-peor, la razón para considerar estrategias máximin / minimax es probado por NEWMAN.

VON NEWMAN demostró [3] el siguiente Teorema, que para todo juego matricial A, tiene un número real $v = v(A)$.

Haciendo uso de las definiciones se enuncia el Teorema de Von Newman del Minimax.

Dado A un juego matricial $m \times n$. Para una estrategia $p \in \Delta^m$ del jugador 1,

$$v_1(p) = \min_{q \in \Delta^n} p\ A\ q = \min_{j \in \{1,\ldots,n\}} p\ A\ e^j$$

Es fácil ver que $\min\limits_{j \in \{1,\ldots,n\}} pAe^j$, donde pAq es combinación convexa de los números pAe^j.

En el juego matricial A el jugador 1 puede garantizar un pago de al menos

$$v_1(A) = \max_{p \in \Delta^m} v_1(p)$$

Similarmente, para una estrategia $q \in \Delta^n$ del jugador 2, daremos

$$v_2(q) = \max_{p \in \Delta^m} pAq = \max_{i \in \{1,\ldots,m\}} e^i Aq$$

entonces el jugador 2 puede garantizar un pago de a lo más

$$v_2(A) = \min_{q \in \Delta^n} v_2(q)$$

Intuitivamente, el jugador 1 no puede garantizar de obtener más que el jugador 2 puede garantizar su pago máximo.

TEOREMA 2.1. ***(Teorema de Minimax)*** *Para un juego matricial A de $m \times n$.*

$$v_1(A) = v_2(A)$$

[3] la demostración de Von Newman no se verá en esta tesis

Que además este teorema cumple con las siguientes propiedades:

1. Una estrategia p del jugador 1 garantiza un pago de al menos v para el jugador 1. (i.e, $p\ A\ q \geq v \quad , \quad \forall q$, de estrategias para el jugador 2) sí y solamente si p es una estrategia máximin.

2. Una estrategia q del jugador 2 garantiza un pago de a lo más v para el jugador 2 al jugador 1. (i.e, $p\ A\ q \leq v$, para toda estrategia p del jugador 1) sí y solamente si q es una estrategia minimax.

donde, el jugador 1 puede obtener un pago de a lo menos v pero jugando una estrategia máximin y el jugador 2 puede garantizar un pago de no más que v donde asegura un pago de al menos $-v$, pero jugando una estrategia minimax.
Por estas razones, el número $v = v(A)$ se llama el valor del juego A y las estrategias máximin y minimax se llaman estrategias óptimas para los jugadores 1 y 2, respectivamente.
Por lo tanto desarrollar el juego A consta determinar las estrategias óptimas y el valor del juego.
En la batalla del mar Bismark, la estrategia pura N de ambos jugadores garantiza la misma cantidad de 2. Por lo tanto, es el valor del juego y N es la estrategia óptima para ambos jugadores.

El análisis del juego es fácil cuando este tiene un "punto silla", a saber la posición $(1,1)$ con $a_{11} = 2$.

DEFINICIÓN 2.3. *(Punto silla)*
Una posición (i,j) en un juego matricial A es un punto silla si:

$$a_{ij} \geq a_{kj} \quad \forall k = 1, \ldots, m \qquad y \qquad a_{ij} \leq a_{ik} \quad \forall k = 1, \ldots, n$$

i.e, si a_{ij} es máximal en su columna j y mínimo en su fila i.

Si (i, j) es un punto silla, entonces el jugador 1 puede garantizar un pago de al menos a_{ij} pero jugando la estrategia pura, fila i, donde a_{ij} es mínimo en su fila i.
Similarmente, el jugador 2 puede garantizar un pago de al menos $-a_{ij}$ pero jugando la estrategia pura, columna j, donde a_{ij} es el valor del juego matricial $A : v(A) = a_{ij}$, e^i es una estrategia optimal (máximin) del jugador 1 y e^j es una estrategia optimal (minimax) del jugador 2.

2.2. *Resolviendo Juegos de matriz* 2×2

En esta sección se desarrolla juegos matriciales donde a lo menos uno de los jugadores tiene dos estrategias puras. Se muestra como la idea de dominación estricta sirve de ayuda para resolver juegos matriciales.

En este tipo de juegos se usa la teoría de matrices para determinar las estrategias óptimas. Este es un juego en el cual cada jugador sólo tiene la posibilidad de hacer dos jugadas[4]. En este caso, la matriz de pagos es una matriz 2×2

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Si el juego matricial A tiene un punto silla, se puede determinar las estrategias óptimas de los jugadores, si por el contrario este juego no tuviera punto silla, se procede de la siguiente manera:
Se calcula primero el pago esperado para dos estrategias arbitrarias p y q, $p\,A\,q$.

[4]las estrategias puras son también llamadas jugadas

Sea $p = (p_1, p_2)$ y $q = (q_1, q_2)$

$$\begin{aligned}
p\ A\ q &= \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} p_i q_j a_{ij} \\
p\ A\ q &= \sum_{i=1}^{2} p_i (q_1 \cdot a_{i1} + q_2 \cdot a_{i2}) \\
p\ A\ q &= p_1(q_1 \cdot a_{11} + q_2 \cdot a_{12}) + p_2(q_1 \cdot a_{21} + q_2 \cdot a_{22}) \\
p\ A\ q &= \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \cdot a_{11} + q_2 \cdot a_{12} \\ q_1 \cdot a_{21} + q_2 \cdot a_{22} \end{bmatrix} \\
p\ A\ q &= \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\therefore \quad \boxed{p\ A\ q = p^T\ A\ q = p\ A\ q^T} \tag{2.1}$$

luego de (2.1) se obtiene:

$$\begin{aligned}
p\ A\ q &= \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} \\
p\ A\ q &= \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \cdot a_{11} + q_2 \cdot a_{12} \\ q_1 \cdot a_{21} + q_2 \cdot a_{22} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$p\ A\ q = a_{11}.p_1.q_1 + a_{12}.p_1.q_2 + a_{21}.p_2.q_1 + a_{22}.p_2.q_2 \cdots (*_1)$$

Como $p_1 + p_2 = 1$ y $q_1 + q_2 = 1 \cdots (*_2)$
pueden sustituirse $p_2 = 1 - p_1$ y $q_2 = 1 - q_1$ en $(*_1)$, obteniéndose

$$p\ A\ q = a_{11}.p_1.q_1 + a_{12}.p_1.(1 - q_1) + a_{21}.(1 - p_1).q_1 + a_{22}.(1 - p_1).(1 - q_1)$$

reordenando los términos de la ecuación se llega a:

$$p\ A\ q = [(a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21})p_1 - (a_{22} - a_{21})]q_1 + (a_{12} - a_{22})p_1 + a_{22} \cdots (*_3)$$

Examinando el coeficiente del término en q_1 de $(*_3)$, se ve que, se se hace:

$$p_1 = p_1^* = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} \cdots (*_4)$$

ese coeficiente es cero y la ecuación $(*_3)$ se reduce a:

$$p^*\ A\ q = \frac{a_{11}.a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} \cdots (*_5)$$

la ecuación $(*_5)$ es independiente de q, si el jugador 1 escoge la estrategia determinada por p_1^*, el jugador 2 no puede variar el pago esperado cambiando su estrategia.

De forma análoga, se demuestra que si el jugador 2 escoge la estrategia :

$$q_1 = q_1^* = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} \cdots (*_6)$$

con la sustitución en $(*_3)$, se obtiene:

$$p\ A\ q^* = \frac{a_{11}.a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} \cdots (*_7)$$

las ecuaciones $(*_7)$ y $(*_5)$ demuestran que

$$p^*\ A\ q = \frac{a_{11}.a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} = p\ A\ q^*$$

se tiene que:

$$p^* A q^* = \frac{a_{11}.a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}$$

$$\therefore \qquad p^*\ A\ q = p^*\ A\ q^* = p\ A\ q^*$$

para todas las estrategias p y q. Por consiguiente por el Teorema de MINI-MAX de VON NEWMAN, se tendrá que las estrategias determinadas por las ecuaciones $(*_4)$ y $(*_6)$ son óptimas respectivamente, para los jugadores 1 y 2.

Lo anterior se resume en el siguiente Teorema, en el que los valores correspondientes a p_2^* y q_2^* se calcula por medio de la ecuación $(*_2)$.

TEOREMA 2.2. *Las estrategias óptimas para los jugadores 1 y 2 en un juego matricial* 2×2 *que no tiene punto silla, son*

$$p^* = \begin{bmatrix} \frac{a_{22}-a_{21}}{a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21}} & \frac{a_{11}-a_{12}}{a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21}} \end{bmatrix}$$

y

$$q^* = \begin{bmatrix} \frac{a_{22}-a_{12}}{a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21}} \\ \frac{a_{11}-a_{21}}{a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21}} \end{bmatrix}$$

y el valor del juego es:

$$v = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}$$

DEFINICIÓN 2.4. ***(Dominación estricta)***

Dado A un juego matricial $m \times n$ y i una fila, la estrategia pura e^i es estrictamente dominada si hay una estrategia $p = (p_1, \ldots, p_m) \in \Delta^m$ con $p_i = 0$ tal que $pAe^j > e^iAe^j$, para todo $j = 1, \ldots, n$.

Dada j una columna, la estrategia pura e^j es estrictamente dominada si ahí hay una estrategia $q = (q_1, q_2, \ldots, q_n) \in \Delta^n$ con $q_j = 0$ tal que:

$$e^iAq < e^iAe^j \quad \forall j = 1, \ldots, m$$

***Ejemplo* 2.1.** Considerar el siguiente juego matricial 3×3.

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Para el jugador 1, la tercera estrategia pura e^3 es estrictamente dominada por la estrategia $p = (\frac{7}{12}, \frac{5}{12}, 0)$, donde $p\,A = (3\frac{1}{2}, 2\frac{1}{12}, 2\frac{5}{6})$ tiene estrictamente todas las coordenadas mayores que $e^3A = (3, 2, 1)$.

Donde, en una estrategia óptima del jugador 1 pondremos la probabilidad cero en la tercera fila. Eliminando a esta fila resultaría la matriz.

$$B = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Ahora, la tercera estrategia del jugador 2 (e^3) es estrictamente dominada por la estrategia $q = (\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 0)$, donde $B\ q = (\frac{3}{2}, 3\frac{3}{4})$, donde tiene todas las coordenadas son estrictamente menores que $B\ e^3 = (2, 4)$.

Donde en una estrategia óptima para el jugador 2, pondremos probabilidad cero en la tercera columna.

Eliminando a esta columna resulta la matriz:

$$C = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Este es un juego matricial 2×2, donde puede ser desarrollado por el teorema (2.2) de la sección (2.1).

Aplicando el teorema mencionado, el juego matricial no tiene puntos sillas.

Luego:

$$a_{11} = 6 \quad , \quad a_{12} = 0 \quad , \quad a_{21} = 0 \quad , \quad a_{22} = 5$$

- $$\begin{aligned} p^* &= \left(\tfrac{a_{22}-a_{21}}{a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21}}, \tfrac{a_{11}-a_{12}}{a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21}}\right) \\ p^* &= \left(\tfrac{5-0}{6+5-0-0}, \tfrac{6-0}{6+5-0-0}\right) \\ p^* &= \left(\tfrac{5}{11}, \tfrac{6}{11}\right) \quad \text{Estrategia óptima del jugador 1} \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} q^* &= \left(\tfrac{a_{22}-a_{12}}{a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21}}, \tfrac{a_{11}-a_{21}}{a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21}}\right) \\ q^* &= \left(\tfrac{5-0}{6+5-0-0}, \tfrac{6-0}{6+5-0-0}\right) \\ q^* &= \left(\tfrac{5}{11}, \tfrac{6}{11}\right) \quad \text{Estrategia óptima del jugador 2} \end{aligned}$$

Y el valor del juego es:

$$v = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}$$

Reemplazando:

$$v = \frac{6{,}5 - 0{,}0}{6 + 5 - 0 - 0} = \frac{30}{11}$$

$$\therefore \quad \boxed{v = \frac{30}{11}} \quad \text{El valor del juego.}$$

En el juego original las estrategias óptimas son $(\frac{5}{11}, \frac{6}{11}, 0)$ para el jugador 1 y $(\frac{5}{11}, \frac{6}{11}, 0)$ para el jugador 2.

Capítulo 3:

Aplicaciones

3.1. Aprendizaje Alumno-Profesor

Un alumno de un Colegio puede pasar (representandolo con el valor de 1) o quedar repitiendo el curso (representandolo con el valor de 0), tomando en cuenta como es el profesor, en su labor de pedagogo.
El alumno tiene dos opciones o actitudes de actuar, con las cuales el pretende afrontar el curso.
La opcion 1 que es de estudiar, pudiendose obtener que si el docente es buen profesor tenga el valor de 1 o que no lo sea y tenga 0.
La opcion 2 que es de no estudiar, donde se obtiene los posibles valores de 0, sin importar la labor del profesor.

¿Cuál es la opcion adecuada tomada por el alumno, para obtener mejor resultado?

Se resolvió como un juego de dos personas, en el cual el jugador A (alumno) desea que el pago (aprobar o quedar repitiendo el ramo) sea aprobar y el jugador P (el profesor).

En este caso, la matriz de pagos es una matriz 2×2

$$
\begin{array}{r c}
 & \begin{array}{cc} \text{Buen Profesor} & \text{Mal Profesor} \end{array} \\
\begin{array}{r} \text{Estudia} \\ \text{No Estudia} \end{array} & \left(\begin{array}{cc} \quad 1 \quad & \quad 0 \quad \\ \quad 0 \quad & \quad 0 \quad \end{array} \right)
\end{array}
$$

Utilizando la Definición 2.4 (Dominación Estricta), podemos deducir que nuestro juego puede tiene una estrategia dominada, de donde se obtiene

$$
\begin{array}{r c}
 & \begin{array}{cc} \text{Buen Profesor} & \text{Mal Profesor} \end{array} \\
\text{Estudia} & \left(\begin{array}{cc} \quad 1 \quad & \quad 0 \quad \end{array} \right)
\end{array}
$$

$\therefore$ Las estrategia óptima para el jugador A es estudiar y el resultado de pasar o repetir el curso, va a dependera de la estrategia del jugador P, es decir, si es buen o mal profesor.

3.2. Analfabetismo en Adultos Mayores

Un Programa del Ministerio de Educación esta evaluando iniciar una campaña de alfabetización centrada en los adultos.
En los adultos se producen dos reacciones diferentes, interes y desinteres. El Ministerio tiene dos opciones, Invertir y no invertir, obteniéndose diferente eficacia, con las cuales se pretende atacar a el analfabetismo.
La opcion 1 de invertir obtiene 100 % de eficacia contra el Interes y 0 % al desinteres el adulto.
La opcion 2 de no invertir obtiene 0 % de eficacia contra el Interes y 25 % al desinteres del adulto.
¿Cuál sería la política que debieran adoptar los directores del Programa de Alfabetización?

Se resolvió como un juego de dos personas. Los jugadores son el ESTADO(Ministerio de Educación) y los adultos mayores analfabetos , en este caso, la matriz de pagos es una matriz 2×2

$$\begin{array}{l c} & \begin{array}{cc} \text{Interes} & \text{Desinteres} \end{array} \\ \begin{array}{l} \text{Invierte} \\ \text{No Invierte} \end{array} & \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{array} \right) \end{array}$$

Aplicando el Teorema 2.2, adecuadamente se obtiene, que las estrategias óptimas para los jugadores 1 y 2 en este juego matricial 2×2 que no tiene punto silla, son

$$p^* = \left[\begin{array}{cc} \frac{\frac{1}{4}-0}{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-0-0} & \frac{1-0}{1+\frac{1}{4}-0-0} \end{array} \right]$$

$$p^* = \begin{bmatrix} \frac{\frac{1}{4}}{\frac{5}{4}} & \frac{1}{\frac{5}{4}} \end{bmatrix}$$

$$p^* = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$$

y

$$q^* = \begin{bmatrix} \frac{\frac{1}{4}-0}{1+\frac{1}{4}-0-0} \\ \frac{1-0}{1+\frac{1}{4}-0-0} \end{bmatrix}$$

$$q^* = \begin{bmatrix} \frac{\frac{1}{4}}{\frac{5}{4}} \\ \frac{1}{\frac{5}{4}} \end{bmatrix}$$

$$q^* = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{4}{5} \end{bmatrix}$$

y el valor del juego es:

$$v = \frac{1.\frac{1}{4} - 0{,}0}{1 + \frac{1}{4} - 0 - 0}$$

$$v = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{5}{4}}$$

$$v = \frac{1}{5}$$

$$\boxed{v = 0{,}2}$$

Se concluye de esta aplicación que el valor de dicho juego es del 20 %, con las estrategias dadas optimas para el Estado y los adultos mayores, de donde se desprende que esto se debe a la falta de interes del jugador 2.

Conclusiones

(1) En todo juego finito de Suma cero existen estrategias óptimas para ambos jugadores debido a la existencia del Teorema de VON NEWMAN, que es enunciado en la presente tesis y evaluamos un caso particular para juegos matriciales de 2×2.

(2) En todo conflicto o juego siempre se pretende encontrar las estrategias óptimas para hallar el mejor resultado para ambos jugadores.

(3) La teoría de juegos modela conflictos ocurridos en la sociedad, pero nuestro interes es el caso de la Educación.

(4) En la primera aplicación queda matematicamente (utilizando Teoria de Juegos) comprobando, que para poder aprobar culquier ramo o curso, la mejor estrategia a utilizar por el alumno es estudiar.

(5) Queda claramente comprobado, por la teoria expuesta que la alfabetización depende mayormente del interes de la persona analfabeto, para obtener un resultado optimo.

Bibliografía

[1] Allen, B. Mackenzie and Luis A. Dasilva *Game theory for wireless engineers.* MORGAN & CLAYPOOL PUBLISHER'S FIRST EDITION, 2006.

[2] Nasar S. *A beautiful mind.* FABER AND FABER, London 1998.

[3] Chris Rorres - Koward Anton *Aplicaciones de Algebra Lineal.* LIMUSA, Mexico 1975.

[4] Churchil *Second world war.* HOUGHTON MIFLIN, Boston 1983.

[5] Gibbons R. *A primer in game theory.* HARVESTER WHEATSHEAF, 1992.

[6] Gadner *Games for busines and Economics.* WILEY, New York 1995.

[7] Hans Peters *Game theory. A multi-leveled Approach.* SPRINGER, Berlin 2008.

[8] J. M. Bilbao y F. R. Fernández*Avances en Teoría de Juegos.* UNIVERSIDAD DE SEVILLA, España 1998.

[9] Rasmusen E.*Games and Information an introduction a game theory.* OXFORD, 1989.

[10] Osborne M.S *An introduction to game theory*. OXFORD, New York 2004.

[11] Von Stengel B.*Computing Equilibria for two-person games*. NORTH-HOLLAND, Amsterdan 2002.

[12] w.w.w.gametheory.com

[13] w.w.w.gametheorysociety.net