UNIVERSIDAD DEL BÍO-BÍO

Facultad de Educación y Humanidades

Escuela de Pedagogía en Educación Matemática

Ecuaciones en Derivadas Parciales: Una Introducción a la Teoría Clásica.

Autor: Edwars Waldemar Jiménez Quintana

Profesor Guía: Dr. Luis Alberto Friz Roa

Memoria para optar al título de Profesor de Educación Media en Educación Matemática

Chillán, 2015.

Dedicado a mi familia por todo el apoyo brindado en el desarrollo de mi carrera profesional, especialmente a mis padres y a mi polola que han sido un pilar fundamental en esta etapa de mi vida.

También agradezco a mi profesor guía por todo el apoyo brindado para el desarrollo de esta actividad de titulación.

Financiado por Proyecto FONDECYT 1130456.

Resumen

El siguiente seminario está dirigido al estudio introductorio de la *Teoría Clásica de Ecuaciones en Derivadas parciales.* La cual tiene una enorme aplicación en Matemáticas Aplicadas, resolviendo una serie de problemas en diversas áreas como la Química, Física (Mecánica de Fluidos, Electromagnetismo, etc.).

El desarrollo del presente seminario está estructurado en base a una revisión general de conocimientos y resultados previos, las *Series de Fourier* y el *Problema de Sturm-Liouville*, además, se abordarán las *Ecuaciones en Derivadas Parciales* con la clasificación de las ecuaciones de segundo orden y la resolución por el *Método de Separación de Variables.*

Finalmente, se estudiarán algunas ecuaciones diferenciales parciales clásicas como lo son la *ecuación del calor*, la *ecuación de ondas* y la *ecuación de Laplace*, con su deducción, solución fundamental y la aplicación del método de separación de variables a problemas de contorno.

Tabla de Contenidos

Introducción 1

Antecedentes Históricos 4

1 Preliminares 6

1.1 Espacio $\mathbb{R}^n$ 6

1.2 Ecuaciones Diferenciales Ordinarias 10

1.3 Series de Fourier 11

1.3.1 Funciones Ortogonales 11

1.3.2 Series de Fourier 13

1.3.3 Series de Fourier de Cosenos y Senos 14

1.4 Problema de Sturm-Liouville 17

2 Ecuaciones Diferenciales Parciales 22

2.1 Generalidades 22

2.2 EDP's de Segundo Orden 24

2.2.1 Método de Separación de Variables 26

2.2.2 Clasificación de Ecuaciones 30

3 Ecuación del Calor 33

3.1 Planteamiento del Problema 34

3.1.1 Conocimientos Previos 34

3.1.2 Deducción de la Ecuación del Calor 35

3.2 Solución de la Ecuación del Calor 37

3.2.1 Solución Fundamental 37

3.2.2 Separación de Variables 39

4 Ecuación de Ondas **43**

4.1 Planteamiento del Problema 44

4.1.1 Conocimientos Previos 44

4.1.2 Deducción de la Ecuación de Ondas 45

4.2 Solución de la Ecuación de Ondas 47

4.2.1 Fórmula de D'Alembert 47

4.2.2 Separación de Variables 51

5 Ecuación de Laplace **54**

5.1 Planteamiento del Problema 55

5.1.1 Conocimientos Previos 55

5.1.2 Deducción de la Ecuación de Laplace 56

5.2 Solución de la Ecuación de Laplace 57

5.2.1 Solución Fundamental 57

5.2.2 Separación de Variables 59

Bibliografía **62**

Introducción

El Análisis ha constituido por más de trecientos años una de las ramas más importantes de la Matemática, y las ecuaciones diferenciales constituyen una parte central de este, puesto que aparecen frecuentemente en modelos matemáticos que tratan de describir situaciones de la vida real.

Muchas leyes naturales pueden ser traducidas mediante el lenguaje matemático en ecuaciones que involucran derivadas, pues son herramientas que permiten estudiar matemáticamente el cambio de una magnitud respecto a otra. Por lo tanto, las ecuaciones diferenciales, son el instrumento apropiado para resolver una multitud de problemas.

Ahora bien, modelar un problema de la vida real en el que intervengan dos o más variables independientes conduce a las Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales. Este tema abarca todo tipo de modelos, desde las leyes físicas como las ecuaciones de Maxwell en la electrodinámica, hasta las leyes conceptuales que describen la propagación de una especie invasora de la planta en una sabana.

Una de las más importantes y fascinantes ramas de las matemáticas que proporcionó el medio para las formulaciones matemáticas y soluciones de una gran variedad de problemas, es sin duda el estudio de las Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales"

M.R.Spiegel

Es por esta razón, que la teoría de las Ecuaciones Diferenciales Parciales (EDP), es una materia que forma parte esencial en la formación de ingenieros y matemáticos. Dentro de ella se encuentran algunas ecuaciones clásicas de segundo orden como lo son la ecuación del calor, de ondas y Laplace. Las cuáles serán estudiadas en la presente actividad de titulación.

Esta investigación se realizará sobre la base de un enfoque deductivo, el análisis y el estudio de la teoría clásica de ecuaciones en derivadas parciales (EDP's), de diversas propiedades, teoremas y métodos de resolución de algunas ecuaciones en derivadas parciales clásicas; como lo son la Ecuación del Calor, la Ecuación de Ondas, y la Ecuación de Laplace.

El problema de investigación de este trabajo será: *El estudio de algunas ecuaciones en derivadas parciales clásicas* . Este motivo de estudio surge de la amplia aplicabilidad de las EDP's, al modelamiento de problemas de la vida cotidiana y la ingeniería, además de ser un contenido importante de estudio en diversas carreras de pregrado.

El objetivo de este trabajo es contribuir con información útil para el estudio introductorio de las ecuaciones en derivadas parciales. Estudiar algunas ecuaciones diferenciales en derivadas parciales clásicas de segundo orden como: *la Ecuación del Calor, la Ecuación de Ondas y la Ecuación de Laplace*. Revisando algunos métodos de resolución como el *Método de Separación de Variables.*

Específicamente nuestros objetivos serán:

1. Estudiar las *Series de Fourier.*
2. Estudiar el *Problema de Sturm - Liouville.*
3. Estudiar la *Clasificación de EDP's de Segundo Orden.*
4. Estudiar el *Método de Separación de Variables.*
5. Estudiar la *ecuación del calor unidimensional.*

6. Estudiar la *ecuación de ondas unidimensional.*

7. Estudiar la *ecuación de laplace.*

En esta actividad de titulación, se seleccionará y analizará la información bibliográfica recomendada, respecto al tema. Se realizarán periódicamente exposiciones y reuniones de trabajo con el profesor guía y se le entregarán avances para recibir las sugerencias, correcciones y nuevas tareas a realizar.

Antecedentes Históricos

Todo conocimiento científico, desde su descubrimiento, evoluciona a través del tiempo, esto hace posible la aparición de nuevas teorías, pero también de nuevos problemas. Esta situación no es ajena a las ecuaciones en derivadas parciales, estas han manifestado una serie de avances gracias al aporte de grandes matemáticos de la historia.

En 1746 Jean le Rond d'Alembert dio la primera solución de la ecuación de ondas, estudiando el problema de una cuerda vibrante como las que están en los instrumentos musicales. Por su parte, Leonhard Euler (1748), Daniel Bernoulli (1753) y Joseph-Louis Lagrange(1759) también estudiaron este problema. Se hallaron soluciones en diversas formas que ocasionaron discusiones por más de veinticinco años. Las disputas se resolvieron en el siglo XIX.

En 1795, Pierre-Simon Laplace publica el primero de los cinco volúmenes que constituirán su Mecánica celeste en el que desarrolla la teoría potencial y por tanto desde este acontecimiento la ecuación diferencial parcial de Laplace se ha vuelto fundamental en esta teoría.

En 1822, el físico matemático Jean Baptiste Josept Fourier (1768-1830), publicó su trabajo sobre la teoría de la conducción del calor Théorie Analytique de la Chaleur en donde utilizaba de manera cabal las series que ahora llevan su nombre. Años más tarde en 1829, Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859), dio la primera demostración satisfactoria de que ciertas clases de funciones son realmente iguales a las suma de sus series de Fourier.

Por otra parte, el matemático alemán Dirichlet formuló también el principio de Dirichlet en teoría del potencial, según la cual existen funciones armónicas (o sea, funciones que satisfacen la ecuación de Laplace) con valores de contorno prefijados.

Por último, es de importancia hacer referencia a Joseph Liouville (1809-1882),por ser el primero en resolver el problema de valores de contorno, mediante la resolución de una ecuación integral equivalente, un método que se convirtió, de la mano de Fredholm y Hilbert, a comienzos del siglo XX en uno de los campos principales del análisis moderno.

Capítulo 1

Preliminares

Todo trabajo o desarrollo matemático surge a partir de un conjunto de conceptos esenciales, que son los que dan el sustento y/o la base para el desarrollo del mismo. Es por esto, que el presente capítulo está dirigido a definir aquellos conceptos e ideas que sirven de base para el desarrollo de la teoría clásica de ecuaciones en derivadas parciales y, en particular, serán conceptos de uso recurrente en el desarrollo de esta memoria.

1.1 Espacio $\mathbb{R}^n$

Definición 1.1.1 (**Espacio** $\mathbb{R}^n$)**.** Sea $\mathbb{R}$ el conjunto de números reales y sea $n \in \mathbb{N}$. Se define el conjunto $\mathbb{R}^n$, como el producto cartesiano de n factores iguales a $\mathbb{R}$, es decir,

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}$$

.

En general, un conjunto tiene elementos. Para el caso de $\mathbb{R}^n$, esos elementos también se conocen como puntos.

Definición 1.1.2 (**Puntos en** $\mathbb{R}^n$)**.** Corresponden a las n-úplas ordenadas de números reales, es decir, si $x \in \mathbb{R}^n$, tiene la siguiente forma:

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n); \quad x_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

A cada x_i la llamaremos la i-ésima coordenada de x.

Diremos que dos puntos $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, \ldots, y_n)$ en $\mathbb{R}^n$ son iguales, si y solamente si, tienes todas sus coordenadas respectivamente iguales. Es decir, si $x_i = y_i$, $\forall i = 1, \ldots, n$.

Definición 1.1.3 (Producto por escalar). Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ y $x \in \mathbb{R}^n$, se define el producto por escalar como, $\lambda x = (\lambda \cdot x_1, \ldots, \lambda \cdot x_n)$

Con esta definición, queda bastante claro entonces que $-y$ no es otra cosa que $-1 \cdot y$.

Definición 1.1.4 (Producto Interno). Se define el producto entre dos elementos $x, y \in \mathbb{R}^n$ como el número real $z = x \cdot y = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i$. Esta operación suele anotarse $\langle x \cdot y \rangle$ y se conoce también como *producto punto* entre x e y.

Teorema 1.1.5 (Propiedades del Producto Interno). *Sean u, v, w vectores en el espacio, entonces el producto interno (u, v) de los vectores cumple las siguientes propiedades:*

1. $(u, v) = (v, u)$.

2. $(ku, v) = k(u, v), \quad k$ *es un escalar.*

3. $(u, u) = 0, \quad$ *si* $u = 0 \quad$ *y* $\quad (u, u) > 0, \quad$ *si* $u \neq 0$.

4. $(u + v, w) = (u, w) + (v, w)$.

Demostración: Sean $u = (u_1, u_2, ..., u_n),\ v = (v_1, v_2, ..., v_n),\ w = (w_1, w_2, ..., w_n) \ \in \mathbb{R}^n$ y $k \ \in \mathbb{R}$ entonces:

1. Conmutatividad de producto interior:

$$\begin{aligned}
(u, v) &= (u_1, u_2, ..., u_n) \cdot (v_1, v_2, ..., v_n) \\
&= u_1 v_1 + u_2 v_2 + ... + u_n v_n \\
&= (v_1, v_2, ..., v_n) \cdot (u_1, u_2, ..., u_n) \\
&= (v, u)
\end{aligned}$$

2. Multiplicación por escalar:

$$\begin{aligned}(ku,v) &= (ku_1,ku_2,...,ku_n)\cdot(v_1,v_2,...,v_n)\\ &= ku_1v_1+ku_2v_2+...+ku_nv_n\\ &= k(u_1v_1+u_2v_2+...+u_nv_n)\\ &= k(u,v)\end{aligned}$$

3. si $u=0$ entonces,

$$\begin{aligned}(u,u) &= (0_1,0_2,...,0_n)\cdot(0_1,0_2,...,0_n)\\ &= 0\end{aligned}$$

si $u\neq 0$ entonces,

$$\begin{aligned}(u,u) &= (u_1,u_2,...,u_n)\cdot(u_1,u_2,...,u_n)\\ &= u_1^2+u_2^2,...,u_n^2\end{aligned}$$

todo número al cuadrado distinto de cero es mayor que cero, entonces $(u,u)>0$.

4. Distributividad del producto escalar:

$$\begin{aligned}(u+v,w) &= (u_1+v_1,u_2+v_2,...,u_n+v_n)\cdot(w_1,w_2,...,w_n)\\ &= u_1w_1+v_1w_1+...+u_nw_n+v_nw_n\\ &= (u,w)+(v,w)\end{aligned}$$

Un aspecto de suma importancia es determinar la cercanía o lejanía entre los elementos de un conjunto. Para esto, definimos a continuación lo que se conoce como métrica o distancia en el espacio $\mathbb{R}^n$.

Definición 1.1.6 (Métrica). Una métrica o distancia en $\mathbb{R}^n$, es una función $\delta:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, tal que para todo $x,y,z\in\mathbb{R}^n$, se cumplen las siguientes condiciones:

1. $\delta(x,y)\geq 0$, (la igualdad es válida si y sólo si $x=y$).

2. $\delta(x, y) = \delta(y, x)$.

3. $\delta(x, z) \leq \delta(x, y) + \delta(y, z)$.

Un espacio vectorial real X, en el que hay definida una métrica o distancia, se llama espacio métrico, y se denota por (X, δ).

Ya hemos visto cómo se define la distancia entre dos punto cualesquiera de $\mathbb{R}^n$, a continuación veremos cómo se define la logitud de un vector de $\mathbb{R}^n$.

Definición 1.1.7 (Norma de un vector). La norma de un vector en $\mathbb{R}^n$, es una función $\| \cdot \| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, tal que, se verifican las siguientes condiciones:

1. $\|x\| \geq 0$, (la igualdad es válida si y sólo si, $x = 0$),

2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^n$,

3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall x, y \in \mathbb{R}^n$

Ejemplo 1. A continuación, algunos ejemplos de norma:

1. Norma euclideana: $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$

2. Norma del máximo: $\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\}$

3. Norma p: $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty$.

Decimos que dos normas $\|\|_{n_1}$ y $\|\|_{n_2}$son equivalentes si existen constantes $c_1, c_2 > 0$, tales que

$$c_1 \|x\|_{n_1} \leq \|x\|_{n_2} \leq c_2 \|x\|_{n_1}$$

Lo expuesto anteriormente no es de menor importancia, dado que a partir de ello, se concluye que todas las normas definidas son equivalentes en dimensión finita y definen los mismos conjuntos abiertos, por lo que es posible usar cualquier norma, sin pérdida de generalidad.

De la misma forma en que definimos un espacio métrico, una vez que tenemos el concepto de norma, es posible definir un espacio normado.

Definición 1.1.8 (Espacio Normado). Sea X un espacio vectorial en el que definimos una norma, entonces es llamado espacio normado, y lo representamos por $(X, \|\cdot\|)$.

Podemos preguntarnos, si existe alguna relación entre el concepto de métrica y norma. La respuesta es afirmativa y surge de manera sencilla al definir:

$$\delta(x, y) = \|x - y\|$$

Esta métrica se conoce como *métrica inducida por la norma.* Es claro que cumple cada una de las propiedades anteriormente mencionadas, por lo que estamos en condiciones de afirmar que todo espacio normado es también un espacio métrico.

1.2 Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Definición 1.2.1 (Ecuación Diferencial). Una ecuación diferencial, es aquella que contiene derivadas o diferenciales de una función incognita.

Definición 1.2.2 (Clasificación de las Ecuaciones). Las ecuaciones diferenciales, se clasifican en dos tipos:

1. Si la función incógnita depende de una sola variable independiente, en la cual solo aparecen derivadas ordinarias, la ecuación diferencial se llama **"Ecuación Diferencial Ordinaria"**.

2. Si la función incógnita depende de varias variables independientes y las derivadas son derivadas parciales, la ecuación diferencial se llama **"Ecuación Diferencial Parcial"**.

Definición 1.2.3 (Orden de una EDO). El orden de una ecuación diferencial ordinaria, está dado por el orden mayor de su derivada.

Definición 1.2.4 (Grado de una EDO). El grado de una ecuación diferencial ordinaria, está dado por el exponente de mayor orden de su derivada.

Ejemplo 2. Algunas ecuaciones diferenciales:

1. $\dfrac{dy}{dx} + 10y = e^x$, es una ecuación diferencial ordinaria de primer orden.
2. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{dy}{dx} + 6y = 0$, es una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden.
3. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, es una ecuación diferencial parcial de segundo orden.

Observación 1.2.5 (Soluciones). *Si recordamos las ecuaciones con coeficientes constantes, sus soluciones generales son de la forma,*

$$\begin{aligned}
y' + \alpha y = 0 \qquad & \Leftrightarrow \quad y = c_1 e^{-\alpha x} \\
y'' + \alpha^2 y = 0, \quad \alpha > 0 \quad & \Leftrightarrow \quad y = c_1 \cos \alpha x + c_2 \sin \alpha x \\
y'' - \alpha^2 y = 0, \quad \alpha > 0 \quad & \Leftrightarrow \quad y = c_1 e^{-\alpha x} + c_2 e^{\alpha x}
\end{aligned}$$

donde α es una constante y c_1, c_2 son constantes cualquiera.

1.3 Series de Fourier

1.3.1 Funciones Ortogonales

Definición 1.3.1 (Producto interno de funciones). El Producto interno de dos funciones f_1 y f_2 en un intervalo $[a, b]$ es el número:

$$(f_1, f_2) = \int_a^b f_1(x) f_2(x) dx$$

Definición 1.3.2 (Funciones Ortogonales). Dos funciones f_1 y f_2 son ortogonales en un intervalo $[a, b]$ si:

$$(f_1, f_2) = \int_a^b f_1(x) f_2(x) dx = 0$$

Definición 1.3.3 (Conjunto ortogonal de funciones). Un conjunto de funciones de valor real $\{\phi_0, \phi_1, \phi_2, ...\}$ se dice que son ortogonales en un intervalo $[a, b]$ si:

$$(\phi_m, \phi_n) = \int_a^b \phi_m(x) \phi_n(x) dx = 0, \quad m \neq n$$

Ejemplo 3 (Conjunto ortogonal de funciones). Demuestre que el conjunto

$$\{1, \cos x, \cos 2x, ..., \cos nx\}$$

es ortogonal en el intervalo $[-\pi, \pi]$.

SOLUCIÓN: Basta con probar que el producto interior de dos funciones cualquiera del conjunto es igual a cero.

Sean $\phi_0(x) = 1$, $\phi_m(x) = \cos mx$ y $\phi_n(x) = \cos nx$, debemos probar que el producto interior: $(\phi_0(x), \phi_n(x)) = 0,\ n \neq 0$ y $(\phi_m(x), \phi_n(x)) = 0,\ m \neq n$, es decir, para el primer caso.

$$\begin{aligned}
(\phi_0(x), \phi_n(x)) &= \int_{-\pi}^{\pi} \phi_0(x)\phi_n(x)dx, \quad n \neq 0 \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx \\
&= \frac{1}{n} \sin nx|_{-\pi}^{\pi} \\
&= \frac{1}{n}[\sin n\pi - \sin(-n\pi)] \\
&= 0, \quad n \neq 0
\end{aligned}$$

para el segundo caso, tememos:

$$\begin{aligned}
(\phi_m(x), \phi_n(x)) &= \int_{-\pi}^{\pi} \phi_m(x)\phi_n(x)dx, \quad m \neq m \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(m+n)x + \cos(m-n)x dx \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m+n)x}{m+n} + \frac{\sin(m-n)x}{m-n}\right]_{-\pi}^{\pi} \\
&= 0, \quad m \neq n.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, el conjunto de funciones $\{1, \cos x, \cos 2x, ..., \cos nx\}$ es ortogonal en el intervalo $[-\pi, \pi]$.

1.3.2 Series de Fourier

Definición 1.3.4 (Series de Fourier). La serie de Fourier de una función f definida en un intervalo $(-p, p)$ está dada por:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{p} x + b_n \sin \frac{n\pi}{p} x \right)$$

donde

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{p} \int_{-p}^{p} f(x) dx \\ a_n &= \frac{1}{p} \int_{-p}^{p} f(x) \cos \frac{n\pi}{p} x dx \\ b_n &= \frac{1}{p} \int_{-p}^{p} f(x) \sin \frac{n\pi}{p} x dx \end{aligned}$$

Teorema 1.3.5 (Condiciones de Convergencia). *Sean f y f continuas en un intervalo $(-p, p)$; es decir, sean f y f continuas excepto en un número finito de puntos en el intervalo y con discontinuidades finitas solo en esos puntos. Entonces, la serie de Fourier de f en el intervalo converge a $f(x)$ en un punto de continuidad. En un punto de discontinuidad, la serie de Fourier converge hacia el promedio:*

$$\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$$

en donde $f(x^+)$ y $f(x^-)$ denotan el límite de f en x, por la derecha y por la izquierda, respectivamente.

Demostración: La demostración de este teorema no la llevaremos a cabo en está actividad de titulación, pero se puede encontrar en el texto clásico [5].

Ejemplo 4 (Desarrollo de una serie de Fourier). Desarrolle en una serie de Fourier la función,

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0 \\ \pi - x, & 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

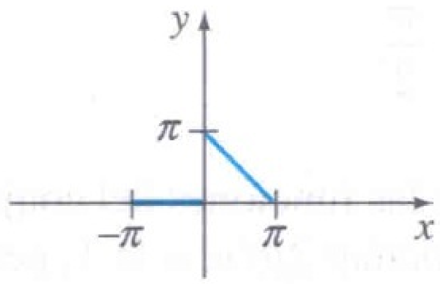

Figura 1.1: Función ejemplo 4.

SOLUCIÓN: Considerando $p = \pi$, buscamos los coeficientes de Fourier,

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} 0dx + \int_{0}^{\pi}(\pi - x)dx\right] \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\pi x - \frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} 0dx + \int_{0}^{\pi}(\pi - x)\cos nx dx\right] \\ &= \frac{1}{\pi}\left[(\pi - x)\left.\frac{\sin nx}{n}\right|_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin nx dx\right] \\ &= \frac{1}{n\pi}\left.\frac{\cos nx}{n}\right|_0^{\pi} = \frac{1-(-1)^n}{n^2\pi}. \end{aligned}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - x)\sin nx dx = \frac{1}{n}$$

Por lo tanto, la serie de Fourier de la función es:

$$f(x) = \frac{\pi}{4} + \Sigma_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1-(-1)^n}{n^2\pi}\cos nx + \frac{1}{n}\sin nx\right\}.$$

1.3.3 Series de Fourier de Cosenos y Senos

La representación de series de Fourier se simplifica en el caso de funciones pares e impares.

Definición 1.3.6. Una función $f \in \mathbf{L^2}[-l,l]$ se llama función par si $f(x) = f(-x)$, $\forall x \in [-l,l]$. Se llama impar si cumple que, $f(x) = -f(-x)$.

Los gráficos de las funciones pares son simétricos con respecto al eje de las ordenadas, y los gráficos de las funciones impares son simétricos con respecto al origen.

Teorema 1.3.7 (Propiedades de las funciones pares/impares). *Las funciones pares/impares cumplen las siguientes propiedades:*

1. *El producto de dos funciones pares es par.*
2. *El producto de dos funciones impares es par.*
3. *El producto de una función impar y una función par es impar.*
4. *La suma (diferencia) de dos funciones pares es par.*
5. *La suma (diferencia) de dos funciones impares es impar.*
6. *Si f es par, entonces* $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$
7. *Si f es impar, entonces* $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$

Demostración: Sean $f,\ g$ dos funciones pares y $h,\ j$ dos funciones impares:

1. $fg(x) = f(x)g(x) = f(-x)g(-x) = fg(-x)$
2. $hj(x) = h(x)j(x) = -h(-x)\cdot -j(-x) = hj(-x)$
3. $hf(x) = h(x)f(x) = -h(-x)f(-x) = -hf(-x)$
4. $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x) = f(-x) \pm g(-x) = (f \pm g)(-x)$
5. $(h \pm j)(x) = h(x) \pm j(x) = -h(-x) \pm -j(-x) = -(h \pm j)(-x)$
6. Sea f una función par, entonces:

$$\begin{aligned}
\int_{-a}^{a} f(x)dx &= \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx = -\int_{-a}^{0} f(-x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx \\
&= \int_{0}^{a} f(-x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx.
\end{aligned}$$

7. Sea f una función impar, entonces:

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a} f(x)dx &= \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx = -\int_{-a}^{0} f(-x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx \\ &= \int_{0}^{a} f(-x)dx - \int_{0}^{a} f(-x)dx = 0.\end{aligned}$$

Definición 1.3.8 (**Series de Fourier de cosenos y senos**)**.** Se define que:

1. La serie de Fourier de una función par definida en un intervalo $(-p, p)$ es la serie de los cosenos:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{p} x$$

donde

$$\begin{aligned}a_0 &= \frac{2}{p}\int_{0}^{p} f(x)dx \\ a_n &= \frac{2}{p}\int_{0}^{p} f(x)\cos\frac{n\pi}{p} x dx\end{aligned}$$

2. La serie de Fourier de una función impar definida en un intervalo $(-p, p)$ es la serie de los senos:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{p} x$$

donde

$$b_n = \frac{2}{p}\int_{0}^{p} f(x)\sin\frac{n\pi}{p} x dx$$

Ejemplo 5 (**Desarrollo de una serie de senos**)**.** Desarrolle en una serie de Fourier de senos la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi < x < 0 \\ 1, & 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

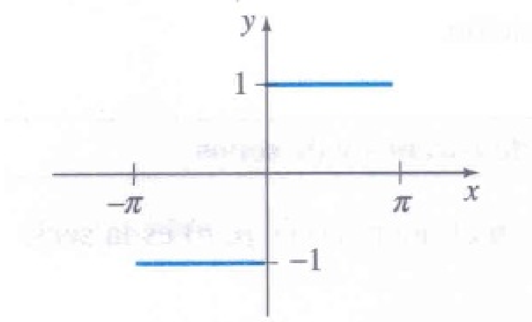

Figura 1.2: Función ejemplo 5.

SOLUCIÓN: En la figura 1.2: Se muestra que la función es impar en el intervalo $(-\pi, \pi)$, luego la serie de Fourier de $f(x)$ es una serie de senos. Con $p = \pi$ tenemos que:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(1)\sin nx dx \\ &= \frac{2}{\pi}\frac{1-(-1)^n}{n}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n}\sin nx.$$

1.4 Problema de Sturm-Liouville

Definición 1.4.1 (**Operador Diferencial Lineal**). Una transformación lineal $L : \mathcal{C}^n(I) \longrightarrow \mathcal{C}(I)$ es un operador diferencial lineal (O.D.L.) de orden n sobre I si:

$$L = a_n(x)\frac{d^n}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1(x)\frac{d}{dx} + a_0(x)$$

donde $a_0, a_1, \ldots, a_n \in C(I)$ y a_n no es idénticamente nula sobre I.

Observación 1.4.2. *si* $f \in \mathcal{C}(I)$, *entonces*

$$Lf(x) = a_n(x)\frac{d^n f(x)}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}f(x)}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1(x)\frac{df(x)}{dx} + a_0(x)f(x) = 0$$

Definición 1.4.3 (**Problema de Valores Frontera**). Se llama problema de valores en la frontera a la ecuación diferencial del tipo,

$$a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2}+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=h$$

definida en $[a,b]$ y $h\in\mathcal{C}[a,b]$; junto a un par de condiciones de puntos extremos de la forma,

$$\begin{aligned}\alpha_1y(a)+\alpha_2y(b)+\alpha_3y'(a)+\alpha_4y'(b) &= \gamma_1\\ \beta_1y(a)+\beta_2y(b)+\beta_3y'(a)+\beta_4y'(b) &= \gamma_1\end{aligned}$$

donde $\alpha_i,\beta_i,\gamma_j$ son constantes para $i=1,2,3,4; j=1,2$.

Observación 1.4.4. *En relación al problema anterior debemos tener en cuenta:*

1. *Para evitar solouciones triviales se exige que al menos uno de los α_i y uno de los β_i sean distintos de cero.*

2. *Las condiciones de frontera se dicen homogéneas si $\gamma_1=\gamma_2=0$.*

3. *Las soluciones de un P.V.F. cuyo operador diferencial es $L:\mathcal{S}\longrightarrow\mathcal{C}[a,b]$ están relacionadas con las soluciones de la ecuación,*

$$Ly=\lambda y$$

4. *Los valores de λ para los cuales la ecuación $Ly=\lambda y$ tiene soluciones no nulas se llaman **valores propios** o **carasterísticos**. Para cada valor propio λ_i las funciones $y\in\mathcal{S}$ no nulas que satisfacen $Ly=\lambda y$ se llaman **funciones propias** o **características** de L correspondientes a λ_i.*

5. *Si $L=a_2(x)\frac{d^2}{dx^2}+a_1(x)\frac{d}{dx}+a_0(x)$, entonces*

$$Ly=\lambda y\Leftrightarrow a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2}+a_1(x)\frac{dy}{dx}+[a_0(x)-\lambda]y=0$$

Definición 1.4.5 (**Operador Autoadjunto**)**.** Se dice que un operador diferencial lineal de segundo orden L definido sobre $[a, b]$ es ***autoadjunto*** si puede escribirse de la forma,

$$L = D(p(x)D) + q(x)$$

donde $p \in \mathcal{C}^1[a, b]$ es tal que $(\forall x \in [a, b])\ p(x) > 0,\ (o\ p(x) < 0)$ y $q \in \mathcal{C}[a, b]$.

Observación 1.4.6. *Puesto que L es lineal , autoadjunto y simétrico, entonces sus valores propios son reales y sus funciones propias asociadas a valores propios son diferentes son ortogonales.*

Definición 1.4.7 (**Problema de Sturm-Liouville**)**.** Los problemas con valores en la frontera que involucran operadores diferenciales lineales autoadjuntos con funciones mutuamente ortogonales se llaman ***problemas o sistemas Sturm-Liouville***.

Definición 1.4.8 (**Problema Regular de Sturm-Liouville**)**.** Sean p, q, r y r' funciones de valor real continuas en un intervalo $[a, b]$ y sean $r(x) > 0$ y $p(x) > 0$ para todo x en el intervalo. Entonces

$$\begin{array}{rc} Resuelva: & \dfrac{d}{dx}[r(x)y'] + (q(x) + \lambda p(x))y = 0 \\ Sujeto\ a: & A_1 y(a) + B_1 y'(x) = 0 \\ & A_2 y(a) + B_2 y'(x) = 0 \end{array}$$

se dice que es un ***problemas regular Sturm-Liouville***.

Ejemplo 6 (Problema de Valores Frontera)**.** Considere el problema,

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(L) = 0$$

SOLUCIÓN: Debemos buscar los valores de λ para los cuales la ecuación diferencial tiene soluciones no triviales.

Consideremos los casos para los cuales: $\lambda = 0$, $\lambda < 0$ y $\lambda > 0$

CASO I: Para $\lambda = 0$, la ecuación es $y'' = 0$ y la solución $y = c_1x + c_2$. Imponiendo la condición de borde, $y(0) = 0$ a la solución se obtiene que:

$$\begin{aligned} y(0) &= c_1 0 + c_2 \\ 0 &= c_2 \end{aligned}$$

ahora para $y(L) = 0$ y $c_2 = 0$, se tiene,

$$\begin{aligned} y(L) &= c_1 L, \quad L \neq= 0 \\ 0 &= c_1 \end{aligned}$$

Luego $c_1 = c_2 = 0$ y la solución es la trivial $y = 0$.

CASO II: Para $\lambda < 0$ sustituimos $\lambda = -\alpha^2$, con α un número positivo. Luego la ecuación es $y'' - \alpha^2 y = 0$ y la solución $y = c_1 \cosh \alpha x + c_2 \sinh \alpha x$. Imponiendo la condición de borde, $y(0) = 0$ a la solución se obtiene que:

$$\begin{aligned} y(0) &= c_1 \cosh \alpha 0 + c_2 \sinh \alpha 0 \\ 0 &= c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0 = c_1 \end{aligned}$$

ahora para $y(L) = 0$ y $c_1 = 0$, se tiene,

$$\begin{aligned} y(L) &= c_2 \sinh \alpha L \\ 0 &= c_2, \quad \sinh \alpha L \neq 0 \end{aligned}$$

Nuevamente, $c_1 = c_2 = 0$ y la solución es la trivial $y = 0$.

CASO III: Para $\lambda > 0$ sustituimos $\lambda = \alpha^2$, con α un número positivo. Luego la ecuación es $y'' + \alpha^2 y = 0$ y la solución $y = c_1 \cos \alpha x + c_2 \sin \alpha x$. Imponiendo las condiciones de borde, $y(0) = 0$ e $y(L) = 0$ a la solución se obtiene que:

$$\begin{aligned} y(0) &= c_1 \cos \alpha 0 + c_2 \sin \alpha 0 \\ 0 &= c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0 = c_1 \end{aligned}$$

$$y(L) = c_2 \sin \alpha L = 0$$

Si consideramos $c_2 = 0$ satisface la condición pero la solución sería trivial. Luego, si $c_2 \neq 0$ entonces, $\sin \alpha L = 0$, por lo tanto, $\alpha L = n\pi$, o bien $\alpha = \dfrac{n\pi}{L}$.

En resumen, el problema de valores frontera tiene soluciones no triviales para los valores propios,

$$\lambda_n = \alpha_n^2 = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \quad n = 1, 2, ...$$

Y la solución, son las funciones fropias asociadas a estos valores son:

$$y_n = \sin\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad n = 1, 2, ...$$

Capítulo 2

Ecuaciones Diferenciales Parciales

2.1 Generalidades

Definición 2.1.1 (**Ecuación Diferencial en Derivadas Parciales**)**.** Se llama ecuación diferencial en derivadas parciales (EDP) a la ecuación de la forma:

$$F\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}, ..., \frac{\partial^m u}{\partial {x_1}^{k_1} \partial {x_2}^{k_2} ... \partial {x_n}^{k_n}}\right) = 0$$

donde: $k_1, k_n, ..., k_n$,son números enteros tales que $k_1 + k_n + ... + k_n = m$

Observación 1. En la definición precedente, para simplificar la notación, es costumbre utilizar la notación que se define a continuación:

$$x = (x_1, x_2, ..., x_n)$$

donde x son las n *variables independientes.*

$$u = u\,(x_1, x_2, ..., x_n)$$

donde u es la *función incógnita.*

Definición 2.1.2 (**Orden**)**.** Se llama orden de una EDP al orden superior de las derivadas parciales que figuran en la ecuación diferencial.

Ejemplo 7. Algunas ecuaciones defereciales parciales de alto orden:

1. $u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0,$ (Ecuación de Korteweg-De Vrries) es una E.D.P. de tercer orden.

2. $u_t + uu_x = vu_{xx},$ (Ecuación de Burger) es una E.D.P. de segundo orden.

Definición 2.1.3 (Solución). Sea una EDP de orden m de la forma:

$$F\left(x_1, ..., x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}, ..., \frac{\partial^m u}{\partial {x_1}^{k_1} \partial {x_2}^{k_2} ... \partial {x_n}^{k_n}}\right) = 0$$

se llama solución de dicha edp en cierta region D a una función cualquiera

$$u = u\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) \in \mathcal{C}^m(D)$$

(conjunto de funciones continuas en la región D junto con todas las derivadas de hasta orden m inclusive), tal que al sustituir u, y sus derivadas en la ecuación, esta se convierte en una identidad.

Definición 2.1.4 (Ecuación Lineal). Una ecuación en derivadas parciales se llama lineal, si esta es lineal respecto a la función buscada y todas sus derivadas que forman parte de la ecuación. En caso contrario se llama no lineal.

Definición 2.1.5 (EDP Lineal de Orden Uno). La forma general de una ecuación lineal de primer orden tiene la forma

$$P(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + Q(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} = uR(x,y) + T(x,y)$$

donde P, Q, R y T son funciones de clase $\mathcal{C}^1$, y P y Q no se anulan simultáneamente.

Ejemplo 8. Ecuaciones en Derivadas Parciales Lineales y No lineales.

1. $\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^2 + x\frac{\partial y}{\partial t} + y\frac{\partial y}{\partial t} = x$ la E.D.P. no es lineal pues aparece $\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^2$ y el producto $y\frac{\partial y}{\partial t}$.

2. $\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t)$

3. $\dfrac{\partial u}{\partial t} = k\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \alpha(x,t)u$

Propiedades de las Soluciones de las EDP's Homogéneas

Teorema 2.1.6. *Si $u(x,y)$ es solución de la EDP homogénea $L[u] = 0$, entonces $ku(x,y)$ es también solución de la homogénea para $k \in \mathbb{R}$.*

Teorema 2.1.7. *Si $u_1(x,y)$, $u_2(x,y)$ son soluciones de la EDP Homogénea $L[u] = 0$, entonces $u_1(x,y) + u_2(x,y)$ es también solución de esta ecuación.*

Teorema 2.1.8. *Si cada una de las funciones $u_i(x,y)$, $i = 1, 2, ..., k$ es solución de $L[u] = 0$, entonces $\sum_{i=1}^{k} c_i u_i(x,y)$ es también solución de la ecuación homogénea, siendo $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, ..., n$*

Teorema 2.1.9. *Sea $L[u] = f(x,y)$*

1. *Si $u(x,y)$ es solución de $L[u] = f$ y $v(x,y)$ es solución de la homogénea $L[u] = 0$, entonces $u(x,y) + v(x,y)$ es solución de $L[u] = f$.*

2. *Si $u_1(x,y)$ es solución de $L[u] = f_1$ y $u_2(x,y)$ es soluciones de $L[u] = f_2$, entonces $u_1(x,y) + u_2(x,y)$ es solución de la ecuación $L[u] = f_1 + f_2$.*

Las demostraciones de los teoremas antes mencionados no serán realizadas, pero estas tienen directa relación con la linealidad del operador diferencial.

2.2 EDP's de Segundo Orden

Definición 2.2.1 (EDP de Segundo Orden). Una ecuación diferencial en derivadas parciales (EDP) de segundo orden en las n variables independientes $x_1, x_2, ..., x_n$ y en la función incógnita $u(x_1, x_2, ..., x_n)$ es una expresión de la forma:

$$F\left(x_1, x_2, ..., x_n, u(x_1, x_2, ..., x_n), \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial {x_1}^2}, ..., \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, ..., \frac{\partial^2 u}{\partial {x_n}^2}\right) = 0$$

Observación 2. En la definición anterior, para simplificar la notación, es costumbre utilizar la notación que se define a continuación:

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n} \right)$$

donde ∇u es el *Gradiente* de u.

$$\Delta u = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial {x_1}^2} + ... + \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + ... + \frac{\partial^2 u}{\partial {x_n}^2} \right)$$

donde Δu es el *Laplaciano* de u.

Según todo lo anterior, es posible redefinir la ecuación diferencial parcial de segundo orden de la siguiente forma:

Definición 2.2.2 (EDP de Orden II). Una EDP de segundo orden de n variables independientes y función incógnita u es una expresión de la forma:

$$F\left(x, u, \nabla u, \Delta u\right) = 0$$

Definición 2.2.3 (Condiciones de Borde). Para una Ecuación Diferencial Parcial de segundo orden $(n = 2)$ las condiciones de borde pueden tomar las siguientes formas:

1. Las condiciones de borde especifican los valores de la función u sobre el borde: **CONDICIONES DE DIRICHLET**.

2. Las condiciones de borde especifican los valores de la derivada de la función u en la dirección normal al borde, se denota $\frac{\partial u}{\partial n}$: **CONDICIONES DE NEWMAN**.

3. Las condiciones de borde especifican una relación lineal entre la función u y sus derivadas normal al borde: **CONDICIONES DE ROBIN**.

Ejemplo 9. Un ejemplo de condiciones de borde para una EDP serían:

1. $u(0, t) = 0, \quad u(a, t) = 0,$ CONDICIONES DE DIRICHLET.

2. $\dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t)=0, \quad \dfrac{\partial u}{\partial x}(a,t)=0,$ CONDICIONES DE NEWMAN.

3. $u(0,t)+\dfrac{\partial u}{\partial t}(0,t)=0, \quad u(a,t)+\dfrac{\partial u}{\partial x}(a,t)=0,$ CONDICIONES DE ROBIN.

2.2.1 Método de Separación de Variables

Para resolver problemas de valores frontera con ecuaciones diferenciales parciales se dispone de varios procedimientos. Uno de estos es el Método de Separación de Variables, que recurre a conceptos matemáticos conocidos, y generalmente es efectivo.

La idea del *Método de Separación de Variables* es una de las primeras técnicas aprendidas en la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden. Al ser aplicado a las EDP el método es muy similar a las EDO, pero toma una forma distinta. Se pretende reducir una EDP a un número de EDOs. Finalmente el proceso nos lleva a la resolución de problemas de valores frontera mediante series de Fourier.

Sea la ecuación en derivadas parciales de segundo orden homogénea:

$$F\left(x,u,\nabla u,\Delta u\right)=0$$

Suponemos que existe una solución de la forma:

$$u\left(x_1,x_2,...,x_n\right)=u_1(x_1)u_2(x_2)...u_n(x_n)$$

donde u está dada por la multiplicación de n funciones u_i de una variable independiente x_i cada una.

Para fijar ideas consideraremos la función u de dos variables independientes x e y, solución de la ecuación diferencial, está dada por:

$$u(x,y)=X(x)Y(y)$$

donde $X(x)$ e $Y(y)$ son funciones que solo dependen de una variable, x e y respectivamente. Y las derivadas de u se definen como:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = X'Y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = XY', \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''Y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = XY''$$

.

luego se sustituye u y sus derivadas en la ecuación diferencial.

Ejemplo 10 (Método de separación de Variables). Resuelva la ecuación:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 4\frac{\partial u}{\partial y} \tag{2.2.1}$$

Sustituyendo $u(x,y) = X(x)Y(y)$ en la ecuación diferencial parcial (1) se obtiene:

$$X''Y = 4XY' \tag{2.2.2}$$

Dividiendo ambos lados por $4XY$, hemos separado las variables:

$$\frac{X''}{4X} = \frac{Y'}{Y}$$

Para que realmente se produzca una igualdad y como cada miembro de la ecuación depende de una variable independiente, y (a la derecha) y x (a la izquierda). La ecuación debe ser igual a una constante. Consideremos la **constante de separación real** $-\lambda$.

$$\frac{X''}{4X} = \frac{Y'}{Y} = -\lambda$$

Luego obtenemos dos ecuaciones diferenciales ordinarias lineales.

$$X'' + 4\lambda X = 0 \tag{2.2.3}$$

$$Y' + \lambda Y = 0 \tag{2.2.4}$$

Ahora, debemos resolver cada ecuación por separado, considerando los valores posibles que puede tomar λ. ($\lambda = 0$, $\lambda > 0$, $\lambda < 0$).

Consideremos los casos para los cuales: $\lambda = 0$, $\lambda < 0$ y $\lambda > 0$

CASO I: Para $\lambda = 0$, las ecuaciones son $X'' = 0$, con su solución $X = c_1x + c_2$ e $Y' = 0$, con su solución $Y = c_3$ e . La solución producto particular que se obtiene es :

$$u(x,y) = XY = (c_1 + c_2x)c_3 = A_1 + B_1x$$

donde $A_1 = c_1c_3$ y $B_1 = c_2c_3$.

CASO II: Para $\lambda < 0$ sustituimos $\lambda = -\alpha^2$, con α un número positivo. Luego las ecuaciones son:

$$X'' - 4\alpha^2 X = 0 \quad y \quad Y' - \alpha^2 Y = 0$$

y las respectivas soluciones generales son,

$$X = c_4 \cosh 2\alpha x + c_5 \sinh 2\alpha x, \qquad Y = c_6 e^{\alpha^2 y}$$

luego, la solución producto particular que se obtiene es:

$$u(x,y) = XY = (c_4 \cosh 2\alpha x + c_5 \sinh 2\alpha x)c_6 e^{\alpha^2 y}$$

$$u(x,y) = A_2 e^{\alpha^2 y} \cosh 2\alpha x + B_2 e^{\alpha^2 y} \sinh 2\alpha x$$

donde $A_2 = c_4c_6$ y $B_2 = c_5c_6$.

CASO III: Para $\lambda > 0$ sustituimos $\lambda = \alpha^2$, con α un número positivo. Luego las ecuaciones son:

$$X'' + 4\alpha^2 X = 0 \quad y \quad Y' + \alpha^2 Y = 0$$

y las respectivas soluciones generales son,

$$X = c_7 \cos 2\alpha x + c_8 \sin 2\alpha x, \qquad Y = c_9 e^{-\alpha^2 y}$$

luego, la solución producto particular que se obtiene es:

$$u(x,y) = XY = (c_7 \cos 2\alpha x + c_8 \sin 2\alpha x) c_6 e^{-\alpha^2 y}$$

$$u(x,y) = A_3 e^{-\alpha^2 y} \cos 2\alpha x + B_3 e^{-\alpha^2 y} \sin 2\alpha x$$

donde $A_3 = c_7 c_9$ y $B_3 = c_8 c_9$.

Teorema 2.2.4 (Principio de superposición). *Si $u_1, u_2, ..., u_k$ son soluciones de una ecuación deferencial parcial homogénea, entonces la combinación lineal*

$$u = c_1 u_1 + c_2 u_2 + ... + c_k u_k$$

,

donde c_i, con $i = 1, 2, ..., k$, son constantes, es también una solución.

Demostración:

Sean $u_1, u_2, ..., u_n$ soluciones de la ecuación diferencial parcial homogénea,

$$L[u] = 0$$

donde L es el Operador Diferencial Lineal.

Queremos demostrar que: $c_1 u_1 + c_2 u_2 + ... + c_n u_n$ tanbien es solución de la ecuación anterior. Es decir,

$$L[c_1 u_1 + c_2 u_2 + ... + c_n u_n] = 0$$

Por la linealidad del operador diferencial se tiene que,

$$\begin{aligned} L[c_1 u_1 + c_2 u_2 + ... + c_n u_n] &= L[c_1 u_1] + L[c_2 u_2] + ... + L[c_n u_n] \\ &= c_1 L[u_1] + c_2 L[u_2] + ... + c_n L[u_n] \end{aligned}$$

Como u_i es solución de la ecuación diferencial, con $i = 1, 2, ...n$, entonces,

$$c_i L[u_i] = 0$$

por lo tanto:

$$L[c_1u_1 + c_2u_2 + ... + c_nu_n] = 0$$

Observación 2.2.5. *El Principio de superposición no aplica a las ecuaciones no-homogéneas. Por ejemplo, si* u_1, u_2 *son soluciones de la ecuación de Poisson* $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 y}{\partial y^2} = 1$, *entonces* $u_1 + u_2$ *es una solución para una ecuación diferente:*

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial y^2} = 2$$

No obstante, existe un importante principio que ralaciona ecuaciones no-homogéneas.

Proposición 2.2.6 (Principio de Sustracción para Ecuaciones No-Homogéneas). *Si* u_1, u_2 *son soluciones de la ecuación no-homogéneas, entonces* $u_1 - u_2$ *es una solución de la ecuación homogénea asociada.*

Así, si u_1, u_2 son soluciones de la ecuación de Poisson, entonces $u_1 - u_2$ es una solución de la ecuación de Laplace.

2.2.2 Clasificación de Ecuaciones

Una ecuación diferencial parcial lineal de segundo orden con dos variables independientes y con coeficientes constantes se puede clasificar en uno de los tres tipos. Esta clasificación solo depende de los coeficientes de las derivadas de segundo orden.

Definición 2.2.7 (Clasificación de Ecuaciones). La ecuación diferencial parcial lineal de segundo orden:

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} + Fu = 0$$

donde A, B, C, D, E y F son constantes reales, se dice que es:

hiperbólica	si $B^2 - 4AC > 0$
parabólica	si $B^2 - 4AC = 0$
elíptica	si $B^2 - 4AC < 0$

Ejemplo 11. Clasifique las siguentes ecuaciones:

$$\textbf{1)}\ 3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial y} \qquad \textbf{2)}\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad \textbf{3)}\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

SOLUCIÓN:

1. Escribimos la ecuación dada como:

$$3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

Podemos identificar que $A = 3,\ B = 0$ y $C = 0$.

Luego $B^2 - 4AC = 0$, por lo tanto, la ecuación es parabólica.

2. Escribimos la ecuación dada como:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Podemos identificar que $A = 1,\ B = 0$ y $C = -1$.

Luego $B^2 - 4AC = -4(1)(-1) = 4 > 0$, por lo tanto, la ecuación es hiperbólica.

3. Escribimos la ecuación dada como:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Podemos identificar que $A = 1,\ B = 0$ y $C = -1$.

Luego $B^2 - 4AC = -4(1)(1) = 4 < 0$, por lo tanto, la ecuación es elíptica.

Ecuaciones Hiperbólicas

Los fenómenos *oscilatorios* de diferente naturaleza (vibraciones de cuerdas, membranas, oscilaciones acústicas del gas de los tubos, oscilaciones electromagnéticas) se describen por ecuaciones de tipo hiperbólico.

La más simple es la ecuación de vibración de la cuerda (ecuación ondulatoria unidimensional).

$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x}, \quad u = u(x,t)$$

Siendo x la coordenada espacial, t el tiempo y $a^2 = \frac{t}{\rho}$ donde T es la tensión de la cuerda y ρ su densidad lineal.

Ecuaciones Parabólicas

Los procesos de *conductividad térmica* y de difusión conducen a las ecuaciones de tipo parabólico. En el caso unidimensional la ecuación más simple de conductividad térmica tiene la forma

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x}, \quad u = u(x,t)$$

Aquí $a^2 = \frac{K}{c\rho}$, donde ρ es la densidad del medio, c es el calor específico y K es el coeficiente de conducción térmica.

Ecuaciones Elípticas

Los procesos a ciclo fijo, cuando la función buscada no depende del tiempo, se determinan por las ecuaciones de tipo elíptico, el representante típico de estas es la ecuación de **Laplace**

$$\Delta u = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = 0, \quad u = u(x,y)$$

Algunas de las ecuaciones mencionadas anteriormente, serán el objeto de estudio en los siguientes capitulos.

Capítulo 3

Ecuación del Calor

Consideremos la ecuación de calor

$$u_t - \Delta u = 0 \tag{3.0.1}$$

y la ecuación del calor no-homogénea

$$u_t - \Delta u = f \tag{3.0.2}$$

sujetas a condiciones iniciales y de frontera apropiadas. Donde $t > 0$, $x \in U$, donde $U \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto.

La solución es la función $u(x,t)$, donde $u : \bar{U} \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$, y el Laplaciano Δ depende de las variables $x = (x_1, ..., x_n)$, es decir

$$\Delta u = \Delta_x u = \sum_{i=1}^{\infty} u_{x_i x_i}.$$

La ecuación del calor describe cómo se distribuye la temperatura en un cuerpo sólido en función del tiempo y el espacio. El interés de su estudio radica en las múltiples aplicaciones que tiene en diversas ramas de la ciencia. Matemáticamente, representa una ecuación en derivadas parciales de tipo parabólica.

3.1 Planteamiento del Problema

3.1.1 Conocimientos Previos

Para el planteamiento de la ecuación del calor, es necesario recurrir a ciertas definiciones y leyes de la física, estas nos permitirán deducir una expresión para dicha ecuación. Es por esta razón que a continuación se enuncian algunos conceptos y leyes de la física, los que serán empleados en dicha deducción.

Definición 3.1.1 (Calor). Es la energía que se trasmite de un cuerpo a otro, en virtud únicamente de la diferencia de temperatura entre ellos, y se denota Q.

Definición 3.1.2 (Calor Específico). Si un cuerpo de masa m tiene una capacidad térmica C, el calor específico, c del material, que constituye un cuerpo está dada por

$$c = \frac{C}{m}$$

Es una constante y respesenta la cantidad de calor necesaria para elevar la temperatura de un cuerpo de masa m.

Definición 3.1.3 (Calor absorvido por un cuerpo). la cantidad de calor ΔQ absorvida o liberada por un cuerpo de masa m y calor específico c, cuando su temperatura varía en Δt, se calcula por la relación

$$\Delta Q = cm\Delta t$$

Teorema 3.1.4 (Primera ley de la termodinámica (Conservación de la Energía)). *Cuando cierta cantidad de calor Q es absorvida o cedida por un sistema, y un trabajo T es realizado por el sistema o sobre él, la variación de la energía interna, ΔU del sistema está dada por*

$$\Delta U = Q - T$$

Teorema 3.1.5 (Ley de la Fourier(Conductividad térmica)**).** *El flujo de transferencia de calor por conducción en un medio isótropo es proporcional y de sentido contrario al* *gradiente de temperatura en esa dirección.*

$$Q = -k\nabla T$$

*donde k es una constante de proporcionalidad, llamada **conductividad térmica**.*

3.1.2 Deducción de la Ecuación del Calor

Se pretende deducir una expresión final para la ecuación del calor en una dimensión. Imaginemos que tenemos una vara fina de longitud L, ver Figura 3.1, sección transversal S, completamente aislada del exterior y compuesta del mismo material.

A partir de estas condiciones y empleando algunas leyes físicas, deduciremos una expresión para la temperatura que dependa del tiempo y la posición.

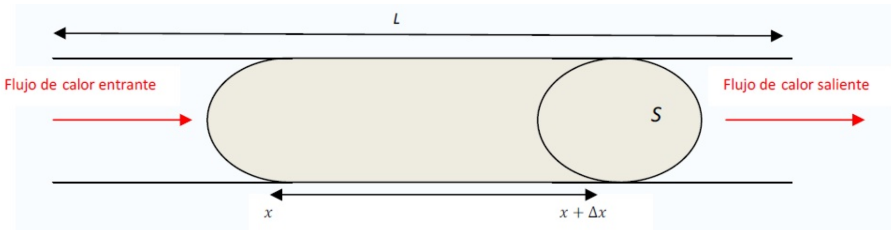

Figura 3.1: Flujo de Calor.

Para el proceso de deducción de la ecuación del calor, definiremos las siguientes magnitudes:

$u(x,t) \equiv$ Temperatura de la barra en una posisción x y un instante de tiempo t.
$Q(x,t) \equiv$ Flujo de calor en una dirección positiva para la posición x y tiempo t.

Si aplicamos la primera ley de la termodinámica sobre el segmentro $x + \Delta x$, la variación de energía interna está dada por:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = Q(x,t)S - Q(x+\Delta x,t)S$$

donde $Q(x,t)$ es el flujo calor entrante y $Q(x+\Delta x,t)$ el flujo de calor saliente.

Por otro lado, el calor absorvido por un cuerpo está dado por:

$$Q(x,t) = \lambda m u(x,t)$$

donde m es la masa y λ el calor específico.

Derivando con respecto al tiempo y reemplazando la masa $m = \rho S \Delta x$ se tiene:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \lambda \rho S \Delta x \frac{\partial u}{\partial t}$$

donde $S\Delta x$ es el volumen y ρ la densidad.

Igualando las expresiones se obtiene:

$$\lambda \rho S \Delta x \frac{\partial u}{\partial t} = S(Q(x,t) - Q(x + \Delta x, t))$$

Dividiendo por $S\Delta x$,

$$\lambda \rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{Q(x,t) - Q(x + \Delta x, t)}{\delta x}$$

Si ahora extraemos el signo menos como factor común del miembro de la derecha nos queda,

$$\lambda \rho \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{Q(x + \Delta x, t) - Q(x,t)}{\delta x}$$

Haciendo tender Δx a 0

$$\lambda \rho \frac{\partial u}{\partial t} = -\lim_{\Delta x \to 0} \frac{Q(x + \Delta x, t) - Q(x,t)}{\delta x}$$

El resultado es la derivada parcial de $Q(x,t)$ respecto a x, lo que nos da la siguiente expresión,

$$\lambda \rho \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial Q}{\partial x}$$

Por su parte, la ley de conducción de calor, señala que el flujo de calor se traslada en dirección opuesta al gradiante y es proporcional a él, esto es:

$$Q(x,t) = -k\frac{\partial u}{\partial x}$$

donde k es conductividad térmica y $u(x,t)$ depende de una variable espacial.

Finalmente, sustituyendo la expresión anterior en la ecuación , nos quedará:

$$\lambda\rho\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{\partial - k\frac{\partial u}{\partial x}}{\partial x} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Agrupando todas las constantes en un miembro de la ecuación, llegamos a una expresión para **la ecuación del calor unidimensional**.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

3.2 Solución de la Ecuación del Calor

3.2.1 Solución Fundamental

Para determinar la solución fundamental de la ecuación del calor (3.0.1), se observa en primer lugar que esta ecuación involucra la derivada con respecto al tiempo t, y dos derivadas con recpecto a las coordenadas espaciales $x_i,\ i = 1,2,3,...,n$.
Luego si u es una solución, también $u(\lambda x, \lambda^2 t)$ es una solución para $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$u(x,t) = v\left(\frac{r^2}{t}\right) = v\left(\frac{|x|^2}{t}\right),\quad x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0$$

donde hay que determinar la función v. Este planteamiento nos lleva finalmente al resultado deseado, pero será más eficiente buscar una solución de la forma:

$$u(x,t) = \frac{1}{t^\alpha}v\left(\frac{1}{t^\beta}x\right),\quad x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0 \tag{3.2.1}$$

donde hay que determinar las constantes α, β y la función v. La sustitución (3.2.1) resulta si buscamos una solución u que sea invariante bajo el, escalamiento de dilatación

$u(x,t) \mapsto \lambda^\alpha u(\lambda^\beta x, \lambda t)$, es decir, que satisfaga que:

$$\forall \lambda > 0: \ \forall x \in \mathbb{R}^n, \ t > 0: \quad u(x,t) = \lambda^\alpha u(\lambda^\beta x, \lambda t).$$

Poniendo $\lambda = \frac{1}{t}$ Obtenemos (3.2.1) para $v(y) := u(y,1)$.
Insertando (3.2.1) en (3.0.1) obtenemos:

$$\lambda t^{-(\alpha+1)} v(y) + \beta t^{-(\alpha+1)} y \cdot Dv(y) + t^{-(\alpha+2\beta)} \Delta v(y) = 0, \quad y = t^{-\beta} \tag{3.2.2}$$

Haciendo, $\beta = \frac{1}{2}$ reducimos expresión (3.2.2) a la variable y, la expresión entonces se reduce a:

$$\alpha v + \frac{1}{2} y \cdot Dv + \Delta v = 0 \tag{3.2.3}$$

Suponiendo ahora que v es radical, es decir, $v(y) = w(|y|)$ para alguna función $w : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$. Así (3.2.3) se convierte en,

$$\alpha w + \frac{1}{2} r w' + w'' + \frac{n-1}{r} = 0.$$

para $\alpha = \frac{n}{2}$ la expresión se reduce a

$$(r^{n-1} w')' + \frac{1}{2}(r^n w)' = 0$$

Integrando una vez, tenemos,

$$r^{n-1} w' + \frac{1}{2} r^n w = a$$

donde a es una constante. Y suponiendo que

$$\lim_{r \to \infty} w = \lim_{r \to \infty} w' = 0$$

entonces $a = 0$, luego

$$w' = -\frac{1}{2} r w$$

La solución de esta ecuación está dada por

$$w = be^{-\frac{r^2}{4}} \tag{3.2.4}$$

Combinando (3.2.1) , (3.2.4) y $\alpha = \frac{n}{2}$, $\beta = \frac{1}{2}$ obtenemos que

$$u(x,t) = \frac{b}{t^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{r^2}{4}}$$

es una solución de la ecuación calor (3.0.1).

Definición 3.2.1 (**Solución Fundamental de la Ecuación del Calor**).

$$\Phi(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}, & para\ x \in \mathbb{R}^n,\ t < 0 \\ 0, & para\ x \in \mathbb{R}^n,\ t < 0 \end{cases}$$

se llama solución fundamental de la ecuación del calor.

3.2.2 Separación de Variables

Se tiene una barra de material homogéneo de longitud L, ver Figura 3.2,recubierta por una envoltura aislante en los extremos. Fijamos en ella un sistema de coordenadas unidimensional, llamaremos $u(x,t)$ a la temperatura en punto x de la barra en un instante t.

Si los extremos de la barra son mantenidos en temperatuta 0 y en un instante inicial la temperatura del punto x está dada por la función continua $f(x)$, entonces:

Encuentre la función $u(x,t)$ de la temperatura de la barra para un punto x y un momento t.

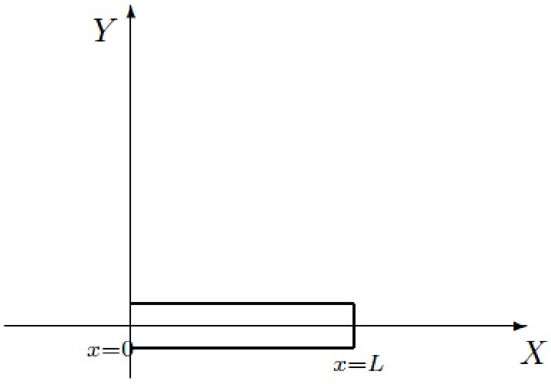

Figura 3.2: Gráfica del problema.

Consideremos a partir de los datos del Problema de la Figura 3.2, el siguiente problema de valores frontera tipo Dirichlet

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} &= a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \quad 0 < x < L \\ u(0,t) &= 0 = u(L,t) \quad 0 \leq t \\ u(x,0) &= f(x) \quad 0 < x < L, t = 0 \end{aligned}$$

Usando el método de separación de variables, buscamos una solución de la forma:

$$u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$$

sustituyendo en la ecuación diferencial se tiene,

$$X(x) \cdot T'(t) = a^2 X''(x) \cdot T(t)$$

entonces,

$$\frac{1}{c^2} \frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

luego,

$$\begin{aligned} X''(x) - \lambda X(x) &= 0 \\ T'(x) - \lambda a^2 T(x) &= 0 \end{aligned}$$

De lo anterior se obtiene el siguiente problema de valores fontera,

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0 \quad 0 < x < L$$

$$X(0) = X(L) = 0$$

Resolviendo el problema anterior, la solución es de la forma,

$$X_n(x) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}x$$

A partir de las condiciones de frontera, se tiene que los autovalores son de la forma $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$, para $n \geq 1$ luego las autofunciones serán,

$$X_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{L} \quad n = 1, 2, 3, ...$$

Luego reemplazando $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$ en la ecuación,

$$T'(x) - \lambda c^2 T(x) = 0$$

obtenemos que,

$$T_n(t) = a_n e^{\frac{an\pi}{L}t} \quad n = 1, 2, 3, ...$$

Construyendo la solución $u_n(x,t)$ por variables separables se tiene,

$$u_n(x,t) = T_n(t) \cdot X_n(x)$$

$$u_n(x,t) = a_n e^{\frac{an\pi}{L}t} \sin\frac{n\pi x}{L}$$

por el principio de superposición hacemos que,

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\frac{an\pi}{L}t} \sin\frac{n\pi x}{L}$$

Ahora debemos determinar a_n, lo haremos considerando ahora la condición inicial

$$u(x,0) = f(x), \quad 0 < x < L, t = 0$$
$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\frac{an\pi}{L}0} \sin\frac{n\pi x}{L}$$

esto implica,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{n\pi x}{L}$$

entonces a_n está dado por,

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^l f(s)\sin\frac{n\pi x}{L}ds \qquad \forall n \geq 1$$

Finalmente, la solución del problema es,

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\frac{an\pi}{L}t} \sin\frac{n\pi x}{L}$$

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^l f(s)\sin\frac{n\pi x}{L}ds \qquad \forall n \geq 1$$

Capítulo 4

Ecuación de Ondas

La ecuación de ondas es otro de los modelos más importantes que se describe en términos de EDP, pues interviene en muchos de la Mécanica, la Física, y la Ingeniería.
Desde el punto de vista matemático, la ecuación de ondas es el opuesto exacto de la ecuación del calor, pues se trata de un sistema reversible en el tiempo, conservativo y en el que la velocidad de propagación es finita.

Consideremos la ecuación de Ondas

$$u_{tt} - \Delta u = 0 \tag{4.0.1}$$

cuando esta ecuación es no-homogénea, es de la forma.

$$u_{tt} - \Delta u = f \tag{4.0.2}$$

donde $t > 0$ y $x \in U$, donde $U \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto dado.
La solución es la función $u(x)$, donde $u : \bar{U} \to \mathbb{R}$, y el Laplaciano Δ depende de las variables $x = (x_1, ..., x_n)$, es decir

$$\Delta u = \Delta_x u = \sum_{i=1}^{\infty} u_{x_i x_i}.$$

4.1 Planteamiento del Problema

4.1.1 Conocimientos Previos

Para el planteamiento de la ecuación de ondas, es necesario recurrir a ciertas definiciones y leyes de la física, estas nos permitirán deducir una expresión para dicha ecuación. Es por esta razón que a continuación se enuncian algunos conceptos y leyes de la física, los que serán empleados en dicha deducción.

Definición 4.1.1 (Onda). En física, una *onda* consiste en la propagación de una perturbación de alguna propiedad de un medio.

Definición 4.1.2 (Masa). La masa de un cuerpo m es el cociente entre la fuerza F que actúa sobre el mismo y la aceleración a que produce en él, o sea:

$$m = \frac{F}{a}$$

Definición 4.1.3 (Densidad). La densidad ρ (o masa específica) de un cuerpo, es la relación entre la masa m y su volumen V, o sea:

$$\rho = \frac{m}{V}$$

Teorema 4.1.4 (Segunda ley de Newton). *La aceleración que un cuerpo adquiere es directamente proporcional a la fuerza que actúa sobre él, e inversamente proporcional a su masa.*

$$a = \frac{\sum F}{m}$$

Es posible expresar la segunda ley de Newton como,

$$\sum F = ma$$

donde a es la aceleración del objeto, m es su masa y $\sum F$ representa la suma de todas las fuerzas que actúan sobre el objeto.

4.1.2 Deducción de la Ecuación de Ondas

Se pretende deducir una expresión final para la ecuación de ondas en una dimensión. Imaginemos que tenemos una cuerda fina de longitud L, ver Figura 4.1, sección transversal Δx, tan delgada como una línea y que solo está sometida a fuerzas internas, por lo tanto la gravedad y otras fuerzas no intervienen. Se pretende deducir una expresión que nos permita estimar la posición de la cuerda y un momento y tiempo determinado.

A partir de estas condiciones y empleando algunas leyes físicas, deduciremos una expresión para la temperatura que dependa del tiempo y la posición.

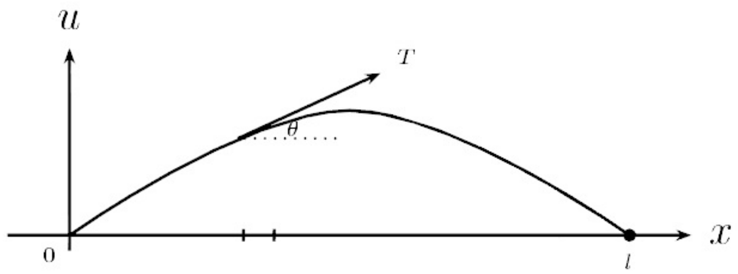

Figura 4.1: Gráfica del problema a modelar.

Para el proceso de deducción de la ecuación del calor, definiremos las siguientes magnitudes:

$u(x,t) \equiv$ El desplazamiento de la cuerda en una posisción x y un instante de tiempo t.
$\Theta(x,t) \equiv$ El ángulo que forma la tangente en cualquier punto de elemento con el eje positivo de las X.
$\tau(x,t) \equiv$ La tensión de la cuerda en una posición x y un instante de tiempo t.
$\rho(x) \equiv$ La densidad de la cuerda.

Según la segunda ley de Newton,

$$m \cdot a = \sum F \tag{4.1.1}$$

considerando que $m = \rho(x) \cdot V$, para nuestro caso el volumen será reemplazado por la longitud, pues se trata de una cuerda muy delgada. Entonces se tiene,

$$m = \rho(x) \cdot \Delta x \tag{4.1.2}$$

además la aceleración viene dada por,

$$a = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{4.1.3}$$

Como la cuerda es flexible, la tensión $T(x,t)$ en cualquier punto esta dirigida a lo largo de la tangente y tiene componente, $T(x,t)\sin\Theta(x,t)$.

Supongamos que el movimiento de la cuerda solo se debe a la tensión, luego F es la diferencia de los valores de $T(x,t)\sin\Theta(x,t)$ en los extremos del fragmento,

$$F = T(x+\Delta x,t)\sin\Theta(x+\Delta x,t) - T(x,t)\sin\Theta(x,t) \tag{4.1.4}$$

Sustituyendo (4.1.2), (4.1.3) y (4.1.4)en la ecuación (4.1.1) se tiene que,

$$\rho(x) \cdot \Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T(x+\Delta x,t)\sin\Theta(x+\Delta x,t) - T(x,t)\sin\Theta(x,t) \tag{4.1.5}$$

dividiendo la ecuación anterior por Δx, haciéndolo tender a cero se tiene,

$$\rho(x) \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial T(x,t)\sin\Theta(x,t)}{\partial x} \tag{4.1.6}$$

Si las vibraciones son muy pequeñas, $\Theta(x,t)$ es muy pequeño ($\Theta(x,t) \approx 0$). Entonces $\tan\Theta(x,t) \approx 0$ y $\dfrac{\partial u}{\partial x} \approx 0$, y $\tan\Theta(x,t) \approx \sin\Theta(x,t)$ por tanto, se puede simplificar la ecuación (4.1.6),

$$\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial\left(T(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right)}{\partial x} \tag{4.1.7}$$

Asumiendo que las tensión $T(x,t)$ y la densidad $\rho(x)$ son constantes,

$$\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T(x,t)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$$

Finalmente obtenemos:

$$\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$$

donde $c^2 = \sqrt{\dfrac{T(x,t)}{\rho(x)}}$, que es la ecuación de ondas unidimensional.

4.2 Solución de la Ecuación de Ondas

4.2.1 Fórmula de D'Alembert

Consideremos el problema de condiciones iniciales:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} &= c^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \quad x\in\mathbb{R}, t=0 && (4.2.1)\\ u(x,0) &= f(x) \quad x\in\mathbb{R}, t=0 && (4.2.2)\\ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} &= g(x) \quad x\in\mathbb{R}, t=0 && (4.2.3)\end{aligned}$$

Para encontrar la solución al problema utilizaremos el cambio de variables, $v(w,z) = u(x,t)$, donde:

$$w = x + ct, \quad z = x - ct$$

Buscando las derivadas de la ecuación se obtiene,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\\ \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial w}\cdot 1 + \frac{\partial v}{\partial z}\cdot 1\end{aligned}$$

tal que $\dfrac{\partial w}{\partial x} = \dfrac{\partial z}{\partial x} = 1$, luego,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= (\frac{\partial v}{\partial w} + \frac{\partial v}{\partial z})' \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 v}{\partial w^2}\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial w \partial z}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial w \partial z}\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\frac{\partial z}{\partial x} \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 v}{\partial w^2} + 2\frac{\partial^2 v}{\partial w \partial z} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}
\end{aligned}
$$

Por otro lado,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} &= c\frac{\partial v}{\partial w} - c\frac{\partial v}{\partial z} \\
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= c^2\frac{\partial^2 v}{\partial w^2} - 2c^2\frac{\partial^2 v}{\partial w \partial z} + c^2\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}
\end{aligned}
$$

Sustituyendo en la ecuación se obtiene,

$$
\begin{aligned}
c^2\frac{\partial^2 v}{\partial w^2} - 2c^2\frac{\partial^2 v}{\partial w \partial z} + c^2\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} &= c^2\left(\frac{\partial^2 v}{\partial w^2} + 2\frac{\partial^2 v}{\partial w \partial z} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) \\
-2c^2\frac{\partial^2 v}{\partial w \partial z} &= 2c^2\frac{\partial^2 v}{\partial w \partial z} \\
-4c^2\frac{\partial^2 v}{\partial w \partial z} &= 0
\end{aligned}
$$

Integrando con respecto a z,

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\partial^2 v}{\partial w \partial z}\partial z &= \int 0 \partial z \\
\frac{\partial v}{\partial w} &= C(w)
\end{aligned}
$$

integrando ahora con respecto a w,

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\partial v}{\partial w}\partial w &= \int C(w)\partial w \\
v &= \mathcal{C}(w) + C(z)
\end{aligned}
$$

donde $\mathcal{C}$ es la primitiva de C.

En resumen, $v(w,z)$ es la suma de dos funciones, una dependiente de w y la otra de z. Donde $w = x + ct$ y $z = x - ct$. A partir de lo anterior podemos reescribir la función $u(x,t)$ como,

$$u(x,t) = F(x+ct) + G(x-ct)$$

Imponiendo ahora las condiciones iniciales del problema:

$$\begin{aligned} u(x,0) &= f(x) \quad x \in \mathbb{R}, t = 0 \\ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} &= g(x) \quad x \in \mathbb{R}, t = 0 \end{aligned}$$

se obtiene que,

$$\begin{aligned} f(x) &= F(x) + G(x) \\ g(x) &= c(F'(x) - G'(x)) \end{aligned}$$

donde se cumple el siguiente sistema de ecuaciones,

$$\begin{aligned} F(x) + G(x) &= f(x) \\ F'(x+) - G'(x) &= \frac{1}{c}\int_0^x g(s)ds \end{aligned}$$

De donde se obtiene las expresiones para $F(x)$ y $G(x)$.

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{2}\left[f(x) + \frac{1}{c}\int_0^x g(s)ds\right] \\ G(x) &= \frac{1}{2}\left[f(x) - \frac{1}{c}\int_0^x g(s)ds\right] \end{aligned}$$

Luego es posible reescribir la solución $u(x,t) = F(x+ct) + G(x-ct)$ en función de $f(x)$ y $g(x)$,

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[f(x+ct) + \frac{1}{c}\int_0^x g(s)ds\right] + \frac{1}{2}\left[f(x-ct) - \frac{1}{c}\int_0^x g(s)ds\right]$$

$$u(x,t) = \frac{f(x+ct) - f(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c}\left[\int_0^{x+ct} g(s)ds - \int_0^{x-ct} g(s)ds\right]$$

Como $\displaystyle\int_0^{x+ct} g(s)ds - \int_0^{x-ct} g(s)ds = \int_{x-ct}^{x+ct} g(s)ds$ la solución final es:

$$u(x,t) = \frac{f(x+ct) - f(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c}\left[\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)ds\right] \tag{4.2.4}$$

Esta solución (4.2.4), se conoce como la *Fórmula de D'Alembert de la Ecuación de Ondas.*

Proposición 4.2.1. *Sean $F, G : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ funciones continuas por partes y dos veces derivables. Entonces cualquier función de la forma:*

$$u(x,t) = \alpha[F(x+ct) - F(x-ct)] + \frac{\beta}{c}\left[\int_{x-ct}^{x+ct} G(\tau)d\tau\right] \tag{4.2.5}$$

Verifica la ecuación:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \tag{4.2.6}$$

Demostración: Como F y G funciones continuas por partes y dos veces derivables, podemos encontrar sus derivadas:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} &= \alpha\left[F'(x+ct)\cdot c + F'(x-ct)\cdot(-c)\right] + \frac{\beta}{c}\left[G(x+ct)\cdot c - G(x+ct)\cdot(-c)\right] \\
\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} &= \alpha\left[F''(x+ct)\cdot c^2 + F''(x-ct)\cdot(-c)^2\right] + \frac{\beta}{c}\left[G'(x+ct)\cdot c^2 - G'(x+ct)\cdot(-c)^2\right] \\
\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} &= c^2\alpha\left[F''(x+ct) + F''(x-ct)\right] + \frac{\beta}{c}\left[G'(x+ct) - G'(x+ct)\right]
\end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} &= \alpha\left[F'(x+ct) + F'(x-ct)\right] + \frac{\beta}{c}\left[G(x+ct) - G(x+ct)\right] \\
\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} &= \alpha\left[F''(x+ct) + F''(x-ct)\right] + \frac{\beta}{c}\left[G'(x+ct) - G'(x+ct)\right]
\end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$$

4.2.2 Separación de Variables

Consideremos el problema de valores frontera tipo Dirichlet

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L \tag{4.2.7}$$

sujeto a:

$$\begin{aligned} u(0,t) = u(L,t) &= 0, \quad t > 0 \\ u(x,0) &= f(x), \quad 0 < x < L, t = 0 \\ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} &= g(x), \quad 0 < x < L, t = 0 \end{aligned}$$

Usando el método de separación de variables, e ignorando momentáneamente las condiciones iniciales podemos decir:

$$u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$$

luego la ecuación diferencial sería

$$X(x) \cdot T''(t) = c^2 X''(x) \cdot T(t)$$

entonces,

$$\frac{1}{c^2} \frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

De lo anterior se obtiene que,

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad 0 < x < L$$

$$X(0) = X(L) = 0$$

Resolviendo el problema de valores frontera anterior, la solución es de la forma,

$$X_n(x) = C_1 \cos \sqrt{\lambda} x + C_2 \sin \sqrt{\lambda} x$$

donde los autovalores son de la forma $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$ luego las autofunciones serán,

$$X_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{L}, \qquad n = 1, 2, 3, ...$$

Luego reemplazando $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$ en la solución de la ecuación,

$$T''(x) - \lambda c^2 T(x) = 0$$

obtenemos que,

$$T_n(t) = a_n \cos\frac{n\pi ct}{L} + b_n \sin\frac{n\pi ct}{L} \qquad n = 1, 2, 3, ...$$

Entonces la solución $u_n(x,t)$ de variables separables es,

$$u_n(x,t) = \sin\frac{n\pi x}{L}\left(a_n \cos\frac{n\pi ct}{L} + b_n \sin\frac{n\pi ct}{L}\right)$$

por el principio de superposición hacemos que,

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{n\pi x}{L}\left(a_n \cos\frac{n\pi ct}{L} + b_n \sin\frac{n\pi ct}{L}\right)$$

Considerando ahora las condiciones iniciales, determinaremos a_n y b_n a partir del desplazamiento inicial $f(x)$ y la velocidad inicial $g(x)$.

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{n\pi x}{L}(a_n \cos\frac{n\pi 0}{L} + b_n \sin\frac{n\pi 0}{L})$$

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{n\pi x}{L}$$

luego,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{n\pi x}{L}$$

entonces a_n está dado por,

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx$$

Por otro lado,

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi x}{L}\left(-a_n\frac{n\pi c}{L}\sin\frac{n\pi t}{L} + b_n\frac{n\pi c}{L}\cos\frac{n\pi ct}{L}\right)$$

entonces,

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi x}{L}\left(-a_n\frac{n\pi c}{L}\sin\frac{n\pi c0}{L} + b_n\frac{n\pi c}{L}\cos\frac{n\pi c0}{L}\right)$$

La segunda condición inicial se cumple entonces cuando,

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L}$$

$$b_n = \frac{2}{n\pi c}\int_0^t g(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx$$

Finalmente, la solución del problema de condiciones frontera (4.2.7) es,

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi x}{L}\left(a_n\cos\frac{n\pi ct}{L} + b_n\sin\frac{n\pi ct}{L}\right) \quad (4.2.8)$$

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx \quad (4.2.9)$$

$$b_n = \frac{2}{n\pi c}\int_0^t g(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx \quad (4.2.10)$$

Capítulo 5

Ecuación de Laplace

Las ecuaciones elípticas aparecen cuando se estudian procesos estacionarios,es decir, que no dependen del tiempo. Una de ellas es la ecuación de Laplace (5.0.1), la cual estudiaremos en este capítulo:

Consideremos la ecuación de Laplace

$$\Delta u = 0 \tag{5.0.1}$$

cuando esta ecuación es no-homogénea, se le conoce como ecuación de Poisson.

$$\Delta u = f \tag{5.0.2}$$

donde $x \in U$, donde $U \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto dado.
La solución es la función $u(x)$, donde $u : \bar{U} \to \mathbb{R}$, y el Laplaciano Δ depende de las variables $x = (x_1, ..., x_n)$, es decir

$$\Delta u = \Delta_x u = \sum_{i=1}^{\infty} u_{x_i x_i}.$$

Definición 5.0.1 (Función Armónica). Una función $u \in \mathcal{C}^2$ que satisface la ecuación de Laplace (5.0.1), se llama armónoca.

5.1 Planteamiento del Problema

Para el planteamiento de la ecuación de Lapalce, es necesario recurrir a ciertas definiciones y leyes de la física, estas nos permitirán deducir una expresión para dicha ecuación. Es por esta razón que a continuación se enuncian algunos conceptos y leyes de la física, los que serán empleados en dicha deducción.

5.1.1 Conocimientos Previos

Definición 5.1.1 (Campo Eléctrico). En un punto en el espacio, existe un campo eléctrico E cuando una carga q es colocada en dicho punto, se ejerce una fuerza de origen eléctrico F. Y su intensidad está dada por:

$$E = \frac{F}{q}$$

Definición 5.1.2 (Flujo Eléctrico). El Flujo Eléctrico, Φ_E es una cantidad escalar que expresa una medida del campo eléctrico que atraviesa una determinada superficie S, o expresado de otra forma, es la medida del número de líneas de campo eléctrico que penetran una superficie, se expresa como:

$$\Phi_E = \int_S E dS$$

Teorema 5.1.3 (Ley de Gauss). *El Flujo eléctrico que atraviesa cualquier superficie cerrada es igual a la carga neta Q en el interior de la superficie dividido entre ϵ_0*

$$\Phi_E = \oint_S \overrightarrow{E} d\overrightarrow{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

donde ϵ_0 es la permitividad del vacío.

Consideremos una densidad de carga $\rho(x)$ contenida al interior de un volumen V rodeado por una superficie cerrada S. La ley de Gauss se escribe como:

$$\oint_S \overrightarrow{E} d\overrightarrow{A} = \int_V d^3 \overrightarrow{\nabla} \overrightarrow{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V d^3 \rho(x)$$

Hemos usado el teorema de la divergencia para transformar el flujo del campo eléctrico en una integral de volumen. Como V es arbitrario, se sigue que:

$$\vec{\nabla}\vec{E} = \frac{\rho(x)}{\epsilon_0}$$

Esta es la forma diferencial de la ley de Gauss.

5.1.2 Deducción de la Ecuación de Laplace

Consideremos la forma diferencial de la ley de Gauss,

$$\nabla E = \frac{\rho(x)}{\epsilon_0}$$

De la relación de gradiente se tiene que

$$E = -\nabla u$$

Sustituyendo en la expresión anterior tenemos

$$\nabla E = \nabla \cdot (-\nabla u) = \frac{\rho(x)}{\epsilon_0}$$

luego,

$$\nabla \cdot \nabla u = -\frac{\rho(x)}{\epsilon_0}$$

La operación $\nabla\cdot\nabla$ se abrevia escribiendo ∇^2 ; esa abreviatura nos recuerda las derivadas parciales de segundo orden, por lo tanto:

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\frac{\rho(x)}{\epsilon_0}$$

5.2 Solución de la Ecuación de Laplace

5.2.1 Solución Fundamental

Una buena estrategia para resolver una EDP consiste en identificar algunas soluciones explícitas y luego, si la ecuación es lineal, generar soluciones más complicadas a partir, de las soluciones antes determinadas. Además, resulta muy útil limitarse a soluciones con ciertas propiedades de simetría

Dado que la ecuación de Laplace es invariante bajo rotaciones,buscaremos soluciones radicales, es decir soluciones que dependan de $r = |x|$.
Buscamos una solución de la forma,

$$u(\mathbf{x}) = v(r), \quad r = |x| = \left(x_1^2 + ... + x_n^2\right)^{-\frac{1}{2}} \tag{5.2.1}$$

que satisfaga la ecuación, $\Delta u = 0$. De lo cual tenemos que,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x_i} &= v'(r)\frac{\partial r}{\partial x_i} \\
\frac{\partial u}{\partial x_i} &= v'(r)\frac{1}{2}\left(x_1^2 + ... + x_n^2\right)^{-\frac{1}{2}} 2x_i \\
\frac{\partial u}{\partial x_i} &= v'(r)\frac{x_i}{r}
\end{aligned}$$

ahora,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} &= (v'(r))'\frac{x_i}{r} + v'(r)\left(\frac{x_i}{r}\right)' \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} &= v''(r)\frac{\partial r}{\partial x_i}\frac{x_i}{r} + v'(r)\left(\frac{1}{r} + x_i\left(\frac{1}{r}\right)'\right) \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} &= v''(r)\frac{x_i^2}{r^2} + v'(r)\left(\frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3}\right)
\end{aligned}$$

Para el caso $n = 2$, tenemos que,

$$u(x, y) = v(r), \quad r = \left(x^2 + x_n^2\right)^{-\frac{1}{2}} \tag{5.2.2}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= v''(r)\frac{x^2}{r^2} + v'(r)\left(\frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3}\right) \\
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= v''(r)\frac{y^2}{r^2} + v'(r)\left(\frac{1}{r} - \frac{y^2}{r^3}\right)
\end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\Delta u &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\
\Delta u &= v''(r)\frac{x^2}{r^2} + v'(r)\left(\frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3}\right) + v''(r)\frac{y^2}{r^2} + v'(r)\left(\frac{1}{r} - \frac{y^2}{r^3}\right) \\
\Delta u &= v''(r) + v'(r)\left(\frac{1}{r}\right)
\end{aligned}$$

lo que implica que $\Delta u = 0$ si y sólo si,

$$v''(r) + v'(r)\left(\frac{1}{r}\right) = 0 \tag{5.2.3}$$

Si $v' \neq 0$ concluimos que,

$$(\log(|v'|))' = \frac{v''}{v'} = -\frac{1}{r} \tag{5.2.4}$$

entonces $v' = \dfrac{a}{r}$ para alguna constante a. Si $r > 0$, sabemos que,

$$v(r) = b\log r + c, \quad para\ n = 2 \tag{5.2.5}$$

Luego la solución de la ecuación de Laplace (5.0.1), para $n = 2$ es,

$$u(x, y) = b \log\left((x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}\right) + c, \quad para\ n = 2 \tag{5.2.6}$$

donde b y c son constantes.

Definición 5.2.1 (Solución Fundamental de la Ecuación de Laplace). Sea $\alpha(n)$ el volumen de un bola unitaria en $\mathbb{R}^n$. Entonces la siguiente función se llama solución fundemental de la ecuación de Laplace.

$$\Phi(x) := \begin{cases} -\dfrac{1}{2\pi} \log |x|, & n = 2 \\ \dfrac{1}{n(n-2)\alpha(n)} \dfrac{1}{|x|^{n-2}}, & n \geq 3 \end{cases}$$

5.2.2 Separación de Variables

Consideremos el problema de valores frontera tipo Dirichlet

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = 0 \quad 0 < x < L,\ 0 < y < M \tag{5.2.7}$$

sujeto a:

$$u(0, y) = 0 = u(L, y) \quad 0 < y < M$$

$$u(x, 0) = f(x) \quad 0 < x < L, t = 0$$

$$u(x, M) = 0 \quad 0 < x < L, t = 0$$

Usando el método de separación de variables, e ignorando momentáneamente las condiciones iniciales podemos decir:

$$u(x, y) = X(x) \cdot Y(y)$$

luego la ecuación diferencial sería

$$X''(x) \cdot Y(y) + X(x) \cdot Y''(Y) = 0 \tag{5.2.8}$$

entonces,

$$-\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\lambda$$

De lo anterior se obtiene que,

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0 \quad 0 < x < L$$

$$X(0) = X(L) = 0$$

Resolviendo el problema de valores frontera anterior, la solución es de la forma,

$$X_n(x) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}x$$

donde los autovalores son de la forma $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$ luego las autofunciones serán,

$$X_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{L} \qquad n = 1, 2, 3, ...$$

Luego reemplazando $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$ en la ecuación,

$$Y''(y) - \lambda Y(y) = 0$$

obtenemos que,

$$Y_n(y) = A_n e^{\frac{n\pi y}{L}} + B_n e^{-\frac{n\pi y}{L}} \qquad n = 1, 2, 3, ...$$

Imponiendo la condición de contorno $Y_n(M) = 0$ se tiene:

$$\begin{aligned}
0 &= A_n e^{\frac{n\pi M}{L}} + B_n e^{-\frac{n\pi M}{L}} \\
B_n e^{-\frac{n\pi M}{L}} &= -A_n e^{\frac{n\pi M}{L}} \\
B_n &= -A_n e^{\frac{2n\pi M}{L}}
\end{aligned}$$

luego,

$$\begin{aligned}
Y_n(y) &= A_n\left(e^{\frac{n\pi y}{L}} - e^{-\frac{n\pi y}{L}} e^{\frac{2n\pi M}{L}}\right) \\
Y_n(y) &= a_n \sinh\frac{n\pi}{L}(M - y)
\end{aligned}$$

donde $a_n = -2A_n e^{\frac{n\pi M}{L}}$.

Entonces la solución $u(x,y)$ por el principio de superposición está dada por,

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sinh \frac{n\pi}{L}(M-y) \sin \frac{n\pi x}{L} \tag{5.2.9}$$

Ahora imponiendo la condición $u(x,0) = f(x)$,

$$f(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sinh \frac{n\pi}{L} M \sin \frac{n\pi x}{L}$$

Por lo tanto, si la función $f(x)$ admite desarrollo de Fourier en base de senos,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin \frac{n\pi x}{L}$$

$$f_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx = a_n \sinh \frac{n\pi M}{L}.$$

tenemos que la solución del problema de contorno (5.2.7):

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \frac{\sinh \frac{n\pi}{L}(M-y)}{\sinh \frac{n\pi M}{L}} \sin \frac{n\pi x}{L} \tag{5.2.10}$$

Bibliografía

[1] G. F. Simmons. *Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones y notas históricas.* Segunda edición, Colorado College, Colorado, 1993.

[2] M. R. Spiegel. *Ecuaciones Diferenciales Aplicadas.* Tercera edición, Departamento de Matemáticas Rensselaer Polytechnic Institute Hartfort Graduate Center, 1983.

[3] E. Zauderer. *Partial Differential Equations of Applied Mathematics.* Second edition, Polytechnic University, New York, 1998.

[4] D. G. Zill, M. R. Cullen. *Ecuaciones Diferenciales con problemas con valores en la frontera.* Séptima edición, Brooks and Cole / Cengage Learning, México, 2009.

[5] R. V. Churchill. *Series de Fourier y Problemas de Contorno.* Segunda edición, McGraw-Hill, Madrid, 1966.

[6] A. Máximo, B. Alvarenga. *Física General Con Experimentos Sencillos.* Cuarta edición, Oxford University Press México, S.A. de C.V., México, 1998.

[7] R. A. Serway, J. S. Faughn. *Física.* Sexta edición, Cengage Learning, México, 2005.

[8] L. C. Evans. *Partial Differential Equations.* Second edition, American Mathematical Society, California, 2010.

[9] F. Toledo, B. Valiño. *Ecuaciones Diferenciales.* Primera Edición, Fondo de Desarrollo de la Docencia Universidad del Bío-Bío, Concepción, 2002.

[10] H. Aimar, B. Bongionni, P. Morin. *Matemática Aplicada Ecuaciones en Derivadas Parciales.* Primera Edición, Posgrados de la Universidad del Litoral, Santa Fe, 2013.

[11] S. Romero, F. M. Moreno, I. M. Rodríguez. *Introducción a las Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales (EDP's).* Primera Edición, Universidad de Huelva, Huelva, 2001.

[12] V. Guíñez, R. Labarca, M. Martínez. *Ecuaciones Diferenciales .* Segunda Edición, Universidad de Santiago de Chile, Santiago, 2000.