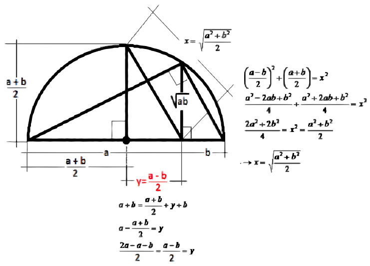
UNIVERSIDAD DEL BÍO - BÍO
FACULTAD DE EDUCACIÓN Y HUMANIDADES
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
ESCUELA DE PEDAGOGÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

UNA INTRODUCCIÓN A LAS DESIGUALDADES DEL ANÁLISIS MATEMÁTICO Y APLICACIONES



$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

Memoria para optar al título de
Profesor de Educación Media en Educación Matemática.

Autor: Ian Erwin Hess Duque.
Profesor guía: Aníbal Coronel Pérez.
Profesor supervisor: Luis Friz Roa.

CHILLÁN-DICIEMBRE-2013

Agradecimientos

En primera instancia quiero agradecerle a Dios por su apoyo incondicional y por su amor incomparable y sin límites que supera todo entendimiento, porque en todo momento ha estado para ayudarme; en los buenos y malos momentos, y sé que todo lo que tengo y soy hoy en día es por Él. También no quiero dejar de lado a mi familia que es parte fundamental de mi crecimiento como profesional; agradecerle a mis hermanos porque cada momento es valioso junto a ellos, a mis padres que han dado su mayor esfuerzo por entregarme lo mejor, a mi novia que es un pilar fundamental en mi desarrollo en todo aspecto, y por sobre todo espiritual, a mis amigos que siempre me han estado apoyando y dando energías, y a todos aquellos que en algún momento me han entregado palabras de aliento para seguir adelante.

Por otro lado, mis gratitudes también son hacia el cuerpo docente de la Universidad del Bío- Bío, en especial a los profesores que me ayudaron del departamento de Ciencias Básicas, que siempre ante cualquier duda y/o consulta estuvieron allí para responderme y ayudarme.

"Mira que te mando que te esfuerces y seas valiente;
no temas ni desmayes, porque el Señor, tu Dios
estará contigo en dondequiera que vayas". Josué 1:9.

Resumen

En este trabajo se presentan aplicaciones de algunas famosas desigualdades llamadas clásicas. Principalmente en la literatura de las desigualdades, podemos encontrar libros, páginas de internet, revistas, etc. dedicadas a la resolución y al estudio de problemas que involucran y dan solución a través de estas desigualdades, en este sentido tomamos problemas de algunas Olimpiadas Matemáticas y se les dará solución aplicando algunas de estas famosas desigualdades clásicas, y, por otro lado, también aplicamos algunas de estas desigualdades (principalmente la media aritmética-geométrica y otras medias que nombramos en el último capítulo) al campo de medias y promedios generalizados.

Tabla de contenidos

Introducción

Las matemáticas juegan un rol muy importante en la sociedad, en su gran mayoría los estudios que se hacen en los diferentes tipos de ciencias están basados bajo teorías matemáticas. En efecto, muchas respuestas de estos estudios y diversas aplicaciones, problemas, teorías, etc. en matemática, están dadas en base a las desigualdades y no igualdades como se cree.

Las desigualdades matemáticas tienen un papel muy importante, incluso, podemos encontrar textos y revistas especializadas dedicados a su estudio, diversas páginas en la web donde podemos encontrar problemas de desigualdades, también muchos artículos científicos hacen uso de desigualdades, en fin, estas a lo largo de la historia han sido estudiadas, específicamente en el área del cálculo y/o análisis matemático existen varias desigualdades que poseen una relevancia en las aplicaciones.

Hemos de encontrar, tal y como hablábamos en el párrafo anterior, muchos libros dedicados a las desigualdades; libros en los cuales encontramos un sinfín de desigualdades, otros con desigualdades clásicas, otros que aplican estas desigualdades, etc.En general haremos una compilación de algunas principales desigualdades llamadas clásicas y poder aplicar estas en diversos campos, principalmente en algunos problemas presentados en olimpiadas matemáticas y en el campo de medias y promedios generalizados.

Capítulo1

Conceptos preliminares

En este capítulo veremos algunos conceptos que nos serán necesarios para comprender lo que viene en los próximos capítulos. Es de suma importancia cada uno de los conceptos, definiciones, proposiciones, ejemplos y teoremas que se encuentran en este capítulo, pues estos nos darán el desarrollo de la teoría.

1.1 Espacios Vectoriales

El Espacio vectorial juega un rol muy importante en las matemáticas y en sus aplicaciones. En efecto, en la práctica (y teóricamente) nos encontramos con problemas donde tenemos un conjunto X cuyos elementos pueden ser vectores en el espacio de tres dimensiones, o una sucesión de números, o de funciones, y estos elementos también pueden ser multiplicados por una constante (número) naturalmente, el resultado otra vez sería un elemento de X. Tales situaciones concretas sugieren el concepto de espacio vectorial que definiremos prontamente. La definición involucra un cuerpo llamado K, pero que en el análisis funcional, K simplemente puede ser $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$. Los elementos de K, son llamados *escalares*; en nuestro caso, estos serán números reales [11].

Definición 1.1.1. *Un espacio vectorial sobre un cuerpo K es un conjunto no vacío X de elementos $x, y, \ldots$ (llamados vectores) el cual cumple con dos operaciones algebraicas. Estas operaciones son llamadas* ***suma de vectores*** *y* ***multiplicación de vector por escalar****, este último, multiplicado por un elemento de K.*

Adición de vectores: Asociamos con cada par ordenado (x, y) de vectores, un vector $x + y$, llamado *suma* de x e y. La adición de vectores es conmutativa y asociativa. Además X es un grupo abeliano con respecto a la suma:

1. $x + y = y + x, \quad \forall x, y \in X.$

2. $x + (y + z) = (x + y) + z, \quad \forall x, y, z \in X.$

   Existe un único vector 0 $(0 \in X)$, llamado vector nulo, y para cada vector x existe un vector $-x$, tal que para todos los vectores tenemos que:

3. $x + 0 = x.$

4. $x + (-x) = 0.$

Multiplicación por escalar: Asocia con cada vector x y un escalar α un vector αx, (también se puede escribir $x\alpha$), llamado el *producto* de α y x, en tal sentido para todos los vectores x, y y escalares α, β, tenemos que:

5. $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$.
6. $1 \cdot x = x$.

   La ley de distributividad:

7. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$.
8. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$.

De la definición podemos ver que la adición es representada $X \times X \longrightarrow X$, tal como la multiplicación por escalar es representada por $K \times X \longrightarrow X$. K es llamado cuerpo escalar del espacio vectorial X. Si $K = \mathbb{R}$ entonces X es llamado *Espacio Vectorial Real* y si $K = \mathbb{C}$ a X se le denomina *Espacio Vectorial Complejo*.

1.1.1 Producto interno

Definición 1.1.2. *Sean x, y, z elementos del espacio vectorial X y λ un elemento del cuerpo escalar K. Un producto interno en X es una aplicación $\langle .,. \rangle : X \times X \to K$, tal que:*

1. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$.
2. $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$.
3. $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$.
4. $\langle x, \lambda y \rangle = \overline{\lambda} \langle x, y \rangle$
5. $\langle x, x \rangle \geq 0$.
6. $\langle x, x \rangle = 0 \Longleftrightarrow x = 0$.

Podemos observar de las propiedades anteriores que:

$$\langle x, \lambda y+z\rangle = \overline{\langle \lambda y + z, x\rangle} = \overline{\langle \lambda y, x\rangle + \langle z, x\rangle} = \overline{\lambda}\,\overline{\langle y, x\rangle}+\overline{\langle z, x\rangle} = \overline{\lambda}\langle x, y\rangle+\langle x, z\rangle.$$

1.2 Espacios métricos

Definición 1.2.1. *Sea X un conjunto no vacío, y sea $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$. Decimos que d es una* ***métrica*** *en X cuando se verifican las siguientes propiedades:*

1. $d(x, y) \geq 0, \quad \forall x, y \in X.$
2. $d(x, y) = d(y, x), \quad \forall x, y \in X.$ *(Simétrica).*
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z), \quad \forall x, y, z \in X.$ *(Desigualdad Triangular).*
4. $d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y.$

Observación: El número real $d(x, y)$ recibe el nombre de *distancia* entre x e y. En este caso se dice que (X, d) es un *espacio métrico.*

1.2.1 Algunas nociones topológicas en espacios métricos

Recordemos en primera instancia que es un espacio topológico.

Definición 1.2.2. *Sea X un conjunto arbitrario no vacío y $\mathcal{S}$ una colección de todos los conjuntos abiertos de X. Un espacio topológico es aquel en el que existe una familia $\mathcal{S}$ de subconjuntos de X que verifican los siguientes axiomas:*

1. $A_\alpha \in \mathcal{S}, \ \alpha \in I \Longrightarrow \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha \in \mathcal{S}$ (I es cualquier conjunto de índices).

2. $A_1, A_2, ..., A_n \in \mathcal{S} \Longrightarrow \bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{S}$.

3. $\emptyset, X \in \mathcal{S}$.

De aquí podemos deducir que todo espacio métrico es a su vez un espacio topológico.

Sea (X, d) un espacio métrico. Si $x \in X$, $r > 0$, la *bola abierta* de centro x y radio r es el conjunto $B(x, r) = \{y \in X : \ d(x, y) < r\}$. Análogamente se definen las correspondientes *bolas cerradas* $\overline{B}(x, r) = \{y \in X : \ d(x, y) \leq r\}$ y las *esferas* $S(x, r) = \{y \in X : \ d(x, y) = r\}$. En general, se llama diámetro de un conjunto A a *diam* $A = \sup\{d(x, y) : x, y \in A\}$.

Definición 1.2.3. *Sea $A \subset X$. Se dice que $x \in A$ es punto interior de A si existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset A$. Se llama interior de A al conjunto:*

$$int\ A = \{x \in A : x \text{ es punto interior de } A\}.$$

Si $int\ A = A$, A, se llama abierto.

Definición 1.2.4. *Dada una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de puntos de X, se dice que converge al punto x, y se escribe $x_n \to x$, cuando:*

$$\forall r > 0,\ \exists N :\ x_n \in B(x, r),\ \forall n > N,$$

también podemos abreviarlo como:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x.$$

La condición anterior equivale a que la sucesión de números reales $\{d(x_n, x)\}_{n\in\mathbb{N}}$, converge a cero. Análogamente, una sucesión de subconjuntos $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de X converge a un punto $x \in X$ si para toda bola B centrada en x, existe un índice m tal que $A_n \subset B$, $\forall n > m$, de la cual desprendemos la siguiente proposición:

Proposición 1.2.5. *Dada una sucesión cualesquiera $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en X, si llamamos $A_k = \{x_n :\ n > k\}$, entonces $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x ($x_n \to x$), si y sólo si A_k converge a x.*

Definición 1.2.6. *Una sucesión* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *en* X *es acotada cuando:*

$$\sup\{d(x_n, x_m) : \ n, m \in \mathbb{N}\} < \infty.$$

Lema 1.2.7. *Supongamos un espacio métrico* (X, d)*, si* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es convergente, entonces es acotada y su límite es único.*

Demostración: Hagamos $\varepsilon > 1$, por lo tanto existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(x, y) < 1$, para todo $n > N$. Por otro lado, para aquellos valores $n \leq N$, existe $a = \text{máx}\{d(x_1, x), d(x_2, x), ..., d(x_N, x)\}$. Entonces $d(x_n, x) \leq 1 + a$, $\forall n$ y $d(x_n, x_m) \leq 2(1 + a)$, $\forall n, m$.

Si $x_n \to x$ y $x_n \to y$, $\Longrightarrow 0 \leq d(x, y) \leq d(x_n, x) + d(x_n, y) \to 0 + 0$, por lo tanto $x = y$. Por la condición de la definición 1.2.4.

$\square$

Lema 1.2.8. *Sean* x_n *y* x_m *dos sucesiones convergentes a* x *e* y *respectivamente, entonces* $d(x_n, y_m) \to d(x, y)$*.*

Demostración: Es fácil ver por la desigualdad triangular que:

$$d(x_n, y_n) \leq d(x_n, x) + d(x, y) + d(y, y_n), \text{ de la cual obtenemos:}$$

$$|d(x_n, y_n) - d(x, y)| \leq d(x_n, x) + d(y, y_n) \to 0.$$

$\square$

Definición 1.2.9. *Una sucesión* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *en un espacio métrico* (X, d)*, se dice que es de* ***Cauchy*** *(o fundamental) si para cada* $\varepsilon > 0$*, existe un* $N = N(\varepsilon)$*, tal que:*

$$d(x_m, x_n) < \varepsilon, \quad \forall m, n > N. \tag{1.1}$$

El espacio X se dice *completo* si toda sucesión de Cauchy en X converge (ver 1.4.1).

Proposición 1.2.10. *Toda sucesión convergente es de Cauchy.*

Observación: El recíproco de la proposición anterior no es cierto.

Demostración: Si $x_n \to x$, luego para cada $\varepsilon > 0$ tenemos un $N = N(\varepsilon)$ tal que:

$$d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall n > M.$$

Por la desigualdad triangular obtenemos para $m, n > N$:

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x) + d(x, x_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

esto nos muestra que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy.

□

Proposición 1.2.11. *Toda sucesión de Cauchy que tenga una subsucesión convergente resulta ser convergente. Además el límite de la sucesión coincide con el límite de la subsucesión.*

1.3 Espacios normados

Definición 1.3.1. *Un espacio normado es un par* $(X, \|\cdot\|)$ *formado por un espacio vectorial* X *y una aplicación* $\|\cdot\| : X \longrightarrow \mathbb{R}$*, llamada norma, con las siguientes propiedades:*

1. $\|x\| \geq 0$.
2. $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$.
3. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$.
4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *(Desigualdad triangular).*

Observaciones:

1. Si no se exige la condición (*2*), a la aplicación $\|\cdot\|$ se le llama *seminorma.*
2. Todo espacio normado es a su vez un espacio métrico, pues basta dado un $(X, \|\cdot\|)$ y definir $d(x, y) = \|x - y\|$. Así todas las nociones de espacios métricos están definidas también para los espacios normados.

3. El recíproco de lo anterior no es cierto, es decir, no todo espacio métrico es normado. Por ejemplo, $X = \{(a_1, a_2, ..., a_n) : a_n \in \mathbb{C}\}$ sobre el cuerpo $\mathbb{C}$ es espacio vectorial; si definimos:

$$d(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \cdot \frac{|a_i - b_i|}{1 + |a_i - b_i|},$$

se puede ver que es espacio métrico, pero para $\lambda \in \mathbb{C}$, $d(\lambda x, \lambda y) \neq |\lambda| d(x,y)$ con lo que, si definieramos la norma a partir de la distancia, obtendríamos $\|\lambda x - \lambda y\| \neq |\lambda| \cdot \|x - y\|$ y X no sería espacio normado de esa forma.

1.4 Espacios de Banach

Definición 1.4.1. *Se llama espacio de Banach a todo espacio vectorial normado, cuyas sucesiones de Cauchy, son siempre convergentes.*

1.5 Espacios y funciones medibles

Fue Fréchet en 1915 el primero en observar que los conjuntos medibles Lebesgue no jugaban un papel esencial en la difinición de integral. Lo importante es que la familia de dichos conjuntos forme una σ-álgebra.

Definición 1.5.1. *Una σ-álgebra definida en un conjunto X es una familia $\mathcal{S}$ de subconjuntos de X que verifica:*

1. $\emptyset \in \mathcal{S}$.
2. $A \in \mathcal{S} \Longrightarrow A^c$.
3. $(A_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S} \longrightarrow \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathcal{S}$.

Definición 1.5.2. *Un espacio medible es un par* $(X, \mathcal{S})$*, formado por un conjunto* X *y una* σ*-álgebra* $\mathcal{S}$ *de subconjuntos de* X*. Un subconjunto* $A \subset X$ *es medible si* $A \in \mathcal{S}$*.*

Definición 1.5.3. *Dado un espacio medible* $(X, \mathcal{S})$*, una medida* μ *es una función* $\mu : \mathcal{S} \to \overline{\mathbb{R}}$ *tal que:*

1. $\mu(A) \geq 0, \quad \forall A \in \mathcal{S}$.
2. $\mu(\emptyset) = 0$.
3. $\mu(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(A_i)$, si $A_i \in \mathcal{S}$, $A_i \cap A_j = \emptyset$. $(i \neq j)$.

1.5.1 Funciones medibles

Proposición 1.5.4. *Sea* $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$*. Son equivalentes:*

1. $\{x : f(x) < \alpha\} \in \mathcal{S}, \ \forall \alpha$.
2. $\{x : f(x) \leq \alpha\} \in \mathcal{S}, \ \forall \alpha$.
3. $\{x : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{S}, \ \forall \alpha$.
4. $\{x : f(x) \geq \alpha\} \in \mathcal{S}, \ \forall \alpha$.

Definición 1.5.5. *Si una cualesquiera de las proposiciones anteriores se cumple, decimos que* f *es una* ***función medible****.*

Teorema 1.5.6. *Si* f, g *son medibles, entonces* $f + g$*,* $c \cdot f$ *y* $f \cdot g$ *también son medibles. Además si* (f_n) *es una sucesión de funciones medibles, entonces* $\sup f_n$*,* $\inf f_n$*,* $\limsup f_n$ *y* $\liminf f_n$*, son medibles.*

1.6 Espacio dual

En espacios vectoriales de dimensión finita, es conocido el hecho de que si $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ es una base X, entonces el dual algebraico de X definido por

$X^* = \{f : X \to \mathbb{R}; f \ lineal\}$, tiene dimensión n y el conjunto $\{f_1, f_2, ..., f_n\}$, donde $f_i(x_k) = \delta_{ik}$, es una base de X^*.

Este es un hecho que será necesario para definir el concepto de espacio dual en espacios normados.

Definición 1.6.1. *Sea X un espacio normado; llamamos espacio dual de X a:*

$$X' = \{f : X \to \mathbb{R}; \ f \ \textit{es lineal y acotado}\}.$$

Capítulo2

Desigualdades Clásicas

En el mundo de las matemáticas podemos encontrar una diversa gama de desigualdades, sin embargo, hay algunas de estas, que muchos autores las consideran "Desigualdades Clásicas"[7]. Si bien, cada una de estas desigualdades tiene una aplicación en el campo de la matemática, es de gran importancia estudiar cada una de estas desigualdades clásicas. A continuación veremos algunas de estas famosas desigualdades, comenzando por la desigualdad de la media aritmética-geométrica, que tiene diversas aplicaciones dentro de la matemática (ver capítulo 4), y además que tiene mucha relación en la aplicación en el campo de medias y promedios generalizados (ver capítulo 5). Luego, analizaremos la famosa "desigualdad de Young", que nos sirve en primera instancia cuando queremos y/o intentamos buscar una manera de normar el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$. Luego, veremos las conocidas desigualdades de Hölder y Minkoswki, desde dos puntos de vistas distintos, continuaremos luego con la desigualdad de Cauchy-Schwarz, que es simplemente un caso particular de la desigualdad de Hölder, pero que nos servirá de gran ayuda en el siguiente capítulo. Luego, para concluir, le daremos un vistazo a la desigualdad triangular que es muy conocida en el ámbito del análisis funcional.

2.1 Media aritmética-geométrica.

Si a e b son reales no negativos, entonces $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$, de la cual obtenemos $a - 2\sqrt{ab} + b \geq 0$, o bien, aun más:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \tag{2.1}$$

Otra interpretación sería:

$$2a + 2b \geq 4\sqrt{ab} \tag{2.2}$$

Esta última tiene una interpretación bastante buena; En concreto, supongamos que consideramos el conjunto de todos los rectángulos de área A, y de lados a y $b.(a \neq b)$. Dado que $A = ab$, la desigualdad 2.2, nos dice que un cuadrado de longitudes $s = \sqrt{ab}$, debe contar con el perímetro más pequeño entre todos los rectángulos de área A. Equivalentemente, la desigualdad nos dice que entre todos los rectángulos con perímetro p, el cuadrado de lado $s = p/4$ solo alcanza el área máxima. Por lo tanto, la desigualdad 2.2 no es más que una versión rectangular de la famosa propiedad isoperimétrica del círculo, que dice que entre todas las regiones planas con perímetro p, el círculo de circunferencia p tiene el área más grande. Podemos ver claramente que la desigualdad A-G tiene una vinculación directa en el campo de la simetría y optimización.

Teorema 2.1.1. ***Desigualdad de la media aritmética-geométrica.*** *Para cada sucesión de números $a_1, a_2, .., a_n$ (reales no negativos), se tiene :*

$$(a_1 a_2 ... a_n)^{1/n} \leq \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}. \tag{2.3}$$

Demostración: Para $n = 2$, la desigualdad 2.3 sale directamente de la forma básica y/o elemental $\sqrt{ab} \leq (a+b)/2$, la cual discutiamos con anterioridad. Podemos ver que la sucesión se puede aplicar dos veces, de esta forma obtenemos:

$$(a_1a_2a_3a_4)^{1/4} \leq \frac{(a_1a_2)^{1/2}+(a_3a_4)^{1/2}}{2} \leq \frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4}. \tag{2.4}$$

Esta desigualdad confirma la conjetura 2.3 cuando $n = 4$, y la nueva sucesión 2.4, puede ser utilizada otra vez con $\sqrt{ab} \leq (a+b)/2$, para encontrar que:

$$(a_1a_2...a_8)^{\frac{1}{8}} \leq \frac{(a_1a_2a_3a_4)^{1/4}+(a_5a_6a_7a_8)^{1/4}}{2} \leq \frac{a_1+a_2+...+a_8}{8},$$

lo cual confirma la conjetura 2.3, para $n = 8$.

Es evidente que vamos por un buen camino, sin perder el ritmo podemos repetir este argumento k veces (o usar inducción matemática), podemos deducir que:

$$(a_1a_2...a_{2^k})^{1/2^k} \leq \frac{(a_1+a_2+...+a_{2^k})}{2^k}, \quad \forall k \geq 1. \tag{2.5}$$

En conclusión, hemos podido demostrar la desigualdad para todo $n = 2^k$, ahora solo nos faltaría completar los vacíos que quedan entre las potencias de dos.

El plan natural es tomar un $n < 2^k$ y buscar alguna manera de utilizar los n números $a_1, a_2, ..., a_n$, para tal efecto definimos una sucesión mas larga $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{2^k}$, a la cual le podemos aplicar la desigualdad 2.5. El descubrimiento de una solución efectiva de los valores de la sucesión $\{\alpha_i\}$ puede requerir un poco de exploración, pero no es probable que se requiera mucho tiempo para obtener la idea de crear $\alpha_i = a_i$ para $1 \leq i \leq n$ y ajustando:

$$\alpha_i = \frac{a_1+a_2+...+a_n}{n} \equiv A \quad \text{para } n < i \leq 2^k$$

En otras palabras, simplemente rellenar la sucesión original $\{a_1 : 1 \leq i \leq n\}$ con bastantes copias de la media A obtenemos una sucesión $\{\alpha_i : 1 \leq i \leq 2^k\}$ que tiene una longitud igual a 2^k.

El promedio A está enumerado $2^k - n$ veces en la sucesión de relleno $\{\alpha_i\}$, ahora, cuando aplicamos la desigualdad 2.5, encontramos:

$$\left\{a_1 a_2 ... a_n . A^{2^k-n}\right\}^{1/2^k} \leq \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n + (2^k - n)A}{2^k} = \frac{2^k A}{2^k} = A$$

Ahora si despejamos las potencias de A a la mano derecha, tenemos que:

$$(a_1 a_2 ... a_n)^{1/2^k} \leq A^{n/2^k},$$

y si después elevamos ambos lados de la potencia a $2^k/n$, llegamos precisamente a nuestro objetivo:

$$(a_1 a_2 ... a_n)^{1/n} \leq \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}. \tag{2.6}$$

$\square$

Una declaración auto-generalizada.

La desigualdad MA-MG (o simplemente A-G) 2.6, tiene una cualidad de instructivo auto-generalizado. Casi sin ayuda, se tiene a si misma en camino hacia un nuevo resultado, el cual cubre casos que se quedaron sin tocar por el original. Bajo circunstancias normales, esta generalización podría parecer ser muy fácil para calificar como un problema y/o desafío, pero el resultado final es muy importante. El problema fácilmente despeja el obstáculo [17].

2.2 Desigualdad de Young.

La primera vez en que nos podemos encontrar con la desigualdad de Young, es cuando buscamos otras formas de normar el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$. La norma usual de la cual esta provista $\mathbb{R}^n$ es la norma euclidiana:

$$\|(x_1, x_2, ..., x_n)\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2}.$$

Esta norma satisface la famosa desigualdad triangular:

$$\|\bar{x} + \bar{y}\|_2 \leq \|\bar{x}\|_2 + \|\bar{y}\|_2 \ ,$$

donde $\bar{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ e $\bar{y} = (y_1, y_2, ..., y_n)$, porque se tiene la desigualdad de Cauchy-Schwarz (ver sección 2.4):

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^2\right)^{1/2}.$$

Además de la norma euclidiana, existen otras normas en $\mathbb{R}^n$ como la norma del máximo:

$$\|(x_1, x_2, ..., x_n)\|_\infty = \text{máx}\{|x_i| : i = 1, 2, ..., n\},$$

o también la conocida norma del taxista:

$$\|(x_1, x_2, ..., x_n)\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|.$$

Otras normas a considerar, son las de Minkowski, que nos dice si p es un número real y además mayor a uno, entonces tenemos que:

$$\|(x_1, x_2, ..., x_n)\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p},$$

es una norma en $\mathbb{R}^n$. La desigualdad del triángulo para las normas de Minkowski ya no se puede visualizar de forma geométrica como lo es en el caso euclidiano ($p = 2$). Podemos darnos cuenta que ahora es una desigualdad analítica y que depende de una desigualdad más generalizada de Cauchy-Schwarz, la cual se conoce como la desigualdad de Hölder (sección 2.3). Esta nos dice que si p y q son números reales, y además $p, q > 1$, tal que $1/p + 1/q = 1$, entonces:

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q\right)^{1/q}.$$

La desigualdad de Hölder, entre muchas otras, se pueden comprobar de una forma fácil si encontramos la desigualdad adecuada, en este caso comenzaremos con la desigualdad de Young.

Teorema 2.2.1. ***Desigualdad de Young.*** *Si* $a, b > 0$ *y* $1 < p, q < \infty$, *tal que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, *entonces:*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \tag{2.7}$$

Observación: La igualdad solamente se cumple si $a^p = b^q$.

Demostración: Hay diferentes formas de demostrar esta desigualdad, esta vez nos comprometeremos con tres diferentes formas:

1. Con cálculo integral.

2. Usando cálculo diferencial.

3. Apoyándonos de principios básicos y otras desigualdades.

2.2.1 Con cálculo integral.

Demostración: Bajo este punto hemos de considerar primeramente la gráfica $y = x^{p-1}$ sobre el intervalo $[0, a]$:

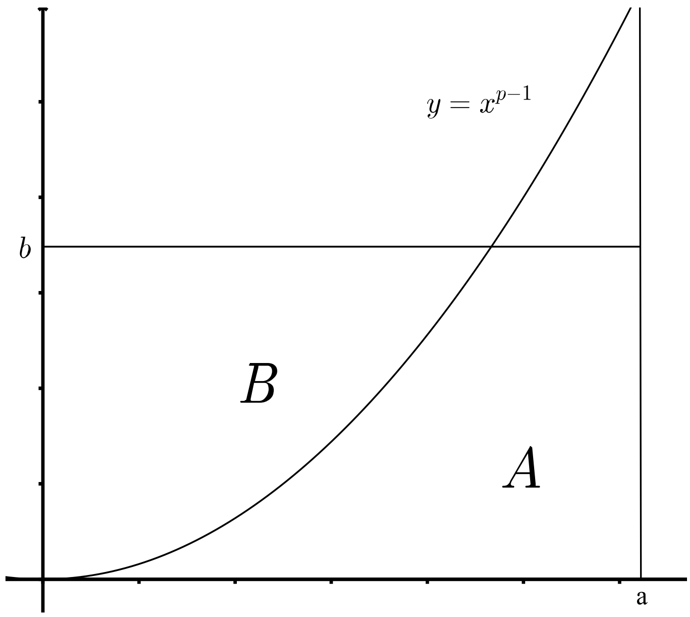


Figura 2.1: Prueba de la desigualdad de Young para el caso $b \leq a^{p-1}$.

Recordemos que $p > 1$ y marquemos el intervalo $[0, b]$ sobre el eje y. Supongamos además que $b \leq a^{p-1}$ como en la figura 2.1.

El área A en la figura 2.1 es:

$$\int_0^a y\ dx = \int_0^a x^{p-1} dx = \frac{a^p}{p},$$

mientras que el área B es:

$$\int_0^b x\ dy = \int_0^b y^{1/(p-1)} dy = \frac{(p-1)b^{p/(p-1)}}{p} = \frac{b^q}{q}.$$

La suma de estas dos áreas ciertamente es mayor o igual al área ab que sería el rectángulo $[0, a] \times [0, b]$ y de ahí la desigualdad de Young. La misma figura nos sugiere cual es la condición para que se tenga la igualdad en la desigualdad de Young. Por otro lado, el caso $b \geq a^{p-1}$ corresponde a $b^{q-1} \geq a$ y se resuelve de manera similar.

$\square$

La figura 2.1, nos ayuda a comprender que fácilmente podemos enunciar la versión de la desigualdad de Young, para una función que sea continua en el intervalo $[0, a]$ y que sea estrictamente creciente. Bien la podemos definir como: $f : [0, a] \to \mathbb{R}$ es una función y $f(0) = 0$ entonces:

$$\int_0^a f(z)dz + \int_0^b f^{-1}(z)dz \geq ab.$$

2.2.2 Usando cálculo diferencial.

Demostración: Una versión llamativa de la demostración de la desigualdad de Young, es mediante la noción de derivada. Para aquello usaremos la siguiente desigualdad:

$$t^\alpha \leq \alpha t + (1 - \alpha) \quad si \quad 0 < \alpha < 1 \quad y \quad t > 0. \tag{2.8}$$

El lado derecho de la desigualdad 2.8, es la ecuación de la recta tangente a la gráfica de t^α en el punto $(1, 1)$. Notemos que la función $g(t) = \alpha t + (1 - \alpha) - t^\alpha$ tiene un mínimo absoluto en $t = 1$ y es convexa (cóncava hacia arriba), luego $g(t) \geq g(1) = 0$ y de aquí resulta la desigualdad. Particularmente para $t = a^p/b^q$ y $\alpha = 1/p$, la desigualdad 2.8 nos implica que:

$$t^{1/p} \leq \frac{1}{p}t + \frac{1}{q}$$

por lo cual tenemos al reemplazar:

$$\frac{a}{b^{q/p}} \leq \frac{1}{p}\frac{a^p}{b^q} + \frac{1}{q} \tag{2.9}$$

Notemos algo: $\frac{b^q}{b^{q/p}} = b^{q-\frac{q}{p}} = b$, ya que $q - \frac{q}{p} = 1$.

Ahora, si multiplicamos 2.9 por b^q, obtenemos la desigualdad de Young:

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \ .$$

$\square$

2.2.3 Con principios básicos de potencias.

Hemos hecho dos demostraciones de la desigualdad de Young, la primera usando el cálculo integral y la segunda con cálculo diferencial, pero, ¿Cómo podríamos comprobarla sin recurrir al cálculo? Partiremos de principios básicos, usando la definición de potencias para números reales.

Demostración: Podemos ver que se cumple que, si $t > 1$ y $0 < \alpha < 1$ entonces:

$$t^{\alpha} := \sup\{t^q : q \in \mathbb{Q},\ q \leq \alpha\} \tag{2.10}$$

Para llegar a obtener la definición 2.10, se comprueba o bien se define la existencia, según sea el caso, de las potencias: $t^{\alpha}, \alpha \in \mathbb{N}$; $t^{\alpha}, \alpha \in \mathbb{Z}$ y $t^{\alpha}, \alpha = 1/n,\ n \in \mathbb{N}$ (la raíz n-ésima de t). En gran manera, a pesar de la extensión naturales de 2.10, a rangos más grandes de t y α , el rango que eligiremos será solamente para $t > 1$ y $0 < \alpha < 1$, lo cual será suficiente para nuestro trabajo.

Ahora veremos una demostración de la desigualdad de Young, usando la definición de potencia de un número real. El objetivo es deducir 2.8 apropiándonos de una desigualdad elemental; la "Desigualdad de Bernoulli".

Proposición 2.2.2. ***Desigualdad de Bernoulli:*** *Si* $x > -1$ *entonces* :

$$(1+x)^n \geq 1 + nx\ , \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2.11}$$

La desigualdad es fácil comprobarla si $x \geq 0$, pues si hacemos la expansión del binomio $(1+x)^n$, podemos darnos cuenta que el lado derecho de la desigualdad está compuesto solamente por los dos primeros sumandos del lado izquierdo. Para $-1 < x < 0$ podemos dar respuesta a través de inducción matemática (de hecho nos sirve para cualquier $x > -1$). Dicho de tal forma, sea $S = \{n \in \mathbb{N} : (1+x)^n \geq 1 + nx\}$. Primero, $(1+x)^1 = 1 + 1 \cdot x$, luego $1 \in S$. Ahora bien, si $k \in S$, es decir, $(1+x)^k \geq 1 + kx$, entonces:

$$\begin{aligned} (1+x)^{k+1} &= (1+x)(1+x)^k \geq (1+x)(1+kx) \\ &= 1 + (k+1)x + kx^2 \geq 1 + (k+1)x. \end{aligned}$$

Luego, por el principio de inducción se puede concluir que $S = \mathbb{N}$; entonces podemos decir que la fórmula nos sirve para todo número natural.

Ya tenemos la información necesaria para la demostración de la desigualdad de Young. En los próximos tres pasos la hemos de concretar.

El primer paso para demostrar la desigualdad de Young, lo encontraremos usando la desigualdad de Bernoulli en la siguiente proposición:

Proposición 2.2.3. *Sea $m \in \mathbb{N}$ y $z > -m$. Entonces, para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq m$ se cumple que :*

$$\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \geq \left(1 + \frac{z}{m}\right)^m. \tag{2.12}$$

Hemos de notar que en esta desigualdad aparecen términos de la conocida sucesión asociada a la función exponencial. No es una mera coincidencia, pues si recordamos en la desigualdad de Young trabajamos con potencias reales de números reales. La desigualdad anterior es muy ventajosa, pues nos lleva de manera casi inmediata a la definición de función exponencial y sus propiedades. La historia nos relata que los términos de la forma $\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$ fueron asociados a la función exponencial en primera instancia por Euler, quién además fue el primero en entender el papel fundamental del número e y la función exponencial $y = e^z$ en el análisis. Euler fue el primero en definir e^z como el límite de la sucesión $\left[\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n\right]$.

La demostración de la proposición anterior es por inducción sobre n. Es decir, notemos que para todo $n \geq m$ se cumple que $1 + \frac{z}{n} > 0$. Luego, la inducción se sigue de la desigualdad de Bernoulli 2.11, en otras palabras:

$$(1 + x)^{n+1} \geq 1 + (n + 1)x, \tag{2.13}$$

denotaremos a x como:

$$x = \frac{-z}{(n + 1)} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^{-1}.$$

Ocupando un poco de álgebra, logramos mostrar que:

$$1+x=\left(1+\frac{z}{n+1}\right)\left(1+\frac{z}{n}\right)^{-1}>0,$$

luego aplicamos 2.13 y también:

$$1+(n+1)x=\left(1+\frac{z}{n}\right)^{-1}.$$

De esta forma obtenemos la desigualdad:

$$(1+x)^{n+1}\geq\left(1+\frac{z}{n}\right)^{-1}.$$

Al multiplicar ambos lados de la desigualdad por $\left(1+\frac{z}{n}\right)^{n+1}$, obtenemos:

$$\left(1+\frac{z}{n+1}\right)^{n+1}\geq\left(1+\frac{z}{n}\right)^{n}.$$

Pero además por hipótesis de inducción tenemos que:

$$\left(1+\frac{z}{n}\right)^{n}\geq\left(1+\frac{z}{m}\right)^{m}. \tag{2.14}$$

El segundo paso es usar la desigualdad anterior para comprobar la desigualdad $t^{\alpha}\leq\alpha t+(1-\alpha)$ 2.8. Lo cual teníamos que $t\geq 1$ y $0<\alpha<1$. Consideremos un número racional $m/n\in\mathbb{Q}$, con $m/n\leq\alpha$ y $m<n$. Ahora definimos $z=m(t-1)$. Se desprende fácilmente que $z>-m$ y por la desigualdad 2.14 obtenemos que:

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{z}{n}\right)^{n} &\geq \left(1+\frac{z}{m}\right)^{m}\\ \left(1+\frac{m}{n}(t-1)\right)^{n} &\geq t^{m},\end{aligned}$$

por lo tanto:

$$t^{m/n}\leq 1+\tfrac{m}{n}(t-1)\leq 1+\alpha(t-1).$$

De esta forma, al tomar el supremo se obtiene la desigualdad nombrada anteriormente:

$$t^{\alpha} \leq \alpha t + (1-\alpha) \ .$$

Ya finalizando, el tercer y último paso, es observar que si $a^p \geq b^q$ entonces al sustituir $t = a^p/b^q \geq 1$ y $\alpha = 1/p$ en $t^{\alpha} \leq \alpha t + (1-\alpha)$ se obtiene la desigualdad de Young. En caso contrario cuando $a^p < b^q$ se obtiene de una manera muy similar, pero ahora usando a $t = b^q/a^p$ y $\alpha = 1/q$. Ahora bien, si hablamos de la igualdad en la desigualdad de Young, ocurre de la consecuencia de que la igualdad en $t^{\alpha} \leq \alpha t + (1-\alpha)$ ocurre si y sólo si $t = 1$. $\square$

2.3 Desigualdades de Hölder y Minkowski.

En algunos ejemplos de espacios normados la desigualdad triangular (2.5) se deduce fácilmente de la desigualdad de Minkowski, que probaremos en las siguientes lineas como una consecuencia de la desigualdad de Hölder.

Antes de comenzar con la demostración, haremos un recordatorio de una desigualdad que se ocupó en la sección anterior para demostrar la desigualdad de Young. Haremos una pequeña extensión de esta que nos ayudará a demostrar la desigualdad de Minkowski.

Proposición 2.3.1. *Sean* $t, v > 0$, $0 < \alpha < 1$. *Entonces* :

$$t^{\alpha} v^{1-\alpha} \leq \alpha t + (1-\alpha) v. \tag{2.15}$$

Observación: La igualdad es cierta si y sólo si $t = v$.

Demostración: Definimos $g(h) = (1-\alpha) + \alpha h - h^{\alpha}$ para $h \geq 0$. Ahora, si derivamos obtenemos: $g'(h) = \alpha - \alpha h^{\alpha - 1}$ que será negativo si $h < 1$ y positivo si $h > 1$. Por lo tanto, el punto $h = 1$ corresponde a un mínimo. Como $g(h) \geq g(1) = 0$, entonces $1 - \alpha + \alpha h \geq h^{\alpha}$.

Haciendo $h = t/v$ se deduce el resultado (para $v \neq 0$). Si $v = 0$, el resultado es trivial. $\square$

Observación: La desigualdad anterior expresa que la media geométrica es menor o igual a la media aritmética, porque si hacemos $\alpha = k/n$, $1-\alpha = (n-k)/n$, tenemos $t^{k/n}, v^{n-k/n} \leq kt/n + (n-k)v/n$ de donde

$$\sqrt[n]{t^{(k-veces)}_{\cdots} t v^{(n-k)}_{\cdots} v} \leq \frac{t + \overset{(k)}{\cdots} + t + v + \overset{(n-k)}{\cdots} + v}{n}.$$

Sean (X, S, μ) *un espacio medible*, $f, g : X \to [0, \infty]$ *funciones medibles*, $1 < p < \infty$ *y* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Entonces :*

Desigualdad de Hölder:

$$\int_X (fg)d\mu \leq \left(\int_X f^p d\mu\right)^{1/p} \cdot \left(\int_X g^q d\mu\right)^{1/q}. \tag{2.16}$$

Desigualdad de Minkowski:

$$\left(\int_X (f+g)^p d\mu\right)^{1/p} \leq \left(\int_X f^p d\mu\right)^{1/p} + \left(\int_X g^p d\mu\right)^{1/p}. \tag{2.17}$$

Desigualdad de Hölder.

Demostración: Llamamos $A = \left(\int_X f^p d\mu\right)^{1/p}$, $B = \left(\int_X g^q d\mu\right)^{1/q}$, y distinguimos tres casos:

1. Primer caso: $A = 0$ (ó $B = 0$). Como $f \geq 0$, $f^p = 0$ $c.s.$ $\Longrightarrow f = 0$ $c.s.$ $\Longrightarrow f \cdot g = 0$ $c.s.$ Así pues $\int_X fg d\mu = 0$.

2. Segundo caso: $A = \infty$ (ó $B = \infty$). Es evidente que $\int_X fg d\mu \leq \infty$.

3. Tercer caso: $0 < A, B < \infty$. Debemos probar que: $\int_X fg d\mu \leq A \cdot B$, o bien $\int_X \frac{f}{A} \cdot \frac{g}{B} d\mu \leq 1$.

Si aplicamos la desigualdad anterior 2.15 a $t = f^p/A^p$, $v = g^q/B^q$, $\alpha = 1/p$, $1-\alpha = 1/q$, resulta:

$$\frac{f}{A}\cdot\frac{g}{B} \leq \frac{1}{p}\frac{f^p}{A^p} + \frac{1}{q}\frac{g^q}{B^q},$$

la desigualdad es válida $\forall x \in X$. Integrando miembro a miembro, obtenemos:

$$\int_X \frac{f}{A}\frac{g}{B}d\mu \leq \frac{1}{pA^p}A^p + \frac{1}{qB^q}B^q = 1,$$

que es lo que queríamos demostrar. $\square$

Desigualdad de Minkowski.

Demostración: Debido a que $(f+g)^p = (f+g)(f+g)^{p-1} = f(f+g)^{p-1} + g(f+g)^{p-1}$, aplicando la desigualdad 2.16 (Hölder) a cada uno de los sumandos, tenemos:

$$\int_X f(f+g)^{p-1}d\mu \leq \left(\int_X f^p d\mu\right)^{1/p}\left(\int_X (f+g)^{q(p-1)}d\mu\right)^{1/q} \tag{2.18}$$

$$\int_X g(f+g)^{p-1}d\mu \leq \left(\int_X g^p d\mu\right)^{1/p}\left(\int_X (f+g)^{q(p-1)}d\mu\right)^{1/q} \tag{2.19}$$

Al sumar 2.18 y 2.19, obtenemos lo siguiente:

$$\int_X (f+g)^p d\mu \leq \left[\left(\int_X f^p d\mu\right)^{1/p} + \left(\int_X g^p d\mu\right)^{1/p}\right]\left(\int_X (f+g)^p d\mu\right)^{1/q},$$

Debido a que $q(p-1) = p$. Si llamamos ahora $C = \left(\int_X (f+g)^p d\mu\right)^{1/q}$, caben los siguientes casos:

1. Primer caso: $C = 0 \Longrightarrow \int_X (f+g)^p d\mu = 0$ y la desigualdad es clara.

2. Segundo caso: $C = \infty \Longrightarrow \int_X (f+g)^p d\mu = \infty$. Como la función $y = x^p$ es convexa, $\left(\frac{f(x)}{2} + \frac{g(x)}{2}\right)^p \leq \frac{f(x)^p}{2} + \frac{g(x)^p}{2}$, de donde:
   $\frac{1}{2^p}(f+g)^p \leq \frac{1}{2}(f^p + g^p) \Longrightarrow \frac{1}{2^p}\int_X (f+g)^p d\mu \leq \frac{1}{2}\left[\int_X f^p d\mu + \int_X g^p d\mu\right]$.
   Como $\int_X (f+g)^p d\mu = \infty$, debe ser $\int_X f^p d\mu = \infty$ ó $\int_X g^p d\mu = \infty$.

3. Tercer caso: $0 < C < \infty \Longrightarrow \left[\int_X (f+g)^p d\mu\right]^{1-1/q} \leq \left(\int_X f^p d\mu\right)^{1/p} + \left(\int_X g^p d\mu\right)^{1/p}$, lo que da lugar al resultado deseado.

$\square$

Observaciones:

1. Si X es un conjunto numerable, digamos por comodidad $X = \mathbb{N}$, $P(\mathbb{N})$ la σ-álgebra formada por los subconjuntos de $\mathbb{N}$, $\mu : P(\mathbb{N}) \to [0,\infty]$ la medida de contar, definida por $\mu(A) = \#A$, toda aplicación $f : \mathbb{N} \to [0,\infty]$ es medible, $f(n) = |x_n|$,
   $$\int_{\mathbb{N}} f^p d\mu = \int_{n\in\mathbb{N}\{n\}} f^p d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{\{n\}} f^p d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} f(n)^p = \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^p.$$

   Esto permite escribir las desigualdades de Hölder y Minkoswki para sumas finitas o series numéricas. Estas Serían:

   $$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q\right)^{1/q},$$

   $$\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p\right)^{1/p}.$$

2. En el caso de $p = 1$ ó $p = \infty$ se prueban también desigualdades análogas que quedan de la forma:

   $$\sum_{i\in\mathbb{N}}^{n} |x_i y_i| \leq \sum_{i\in\mathbb{N}}^{n} |x_i| \cdot \sup_{i\in\mathbb{N}} |y_i|,$$

$$\sup_{i\in\mathbb{N}}|x_i+y_i| \leq \sup_{i\in\mathbb{N}}|x_i| + \sup_{i\in\mathbb{N}}|y_i|.$$

3. En el caso específico de que $p = q = 2$, la desigualdad de Hölder pasa a llamarse "desigualdad de Cauchy-Schawrz"(sección 2.4), la que es de suma importancia en espacios dotados de una estructura geométrica.

Hemos visto las demostraciones de las desigualdades de Hölder y Minkoswki para un espacio de funciones medibles, pero, tal como decíamos líneas atrás, estas desigualdades también se pueden expresar a través de series finitas o sucesiones numéricas. Por tanto es de utilidad también saber las demostraciones en estos casos.

Otra demostración de la desigualdad de Hölder:

Proposición 2.3.2. *Sean* $x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_n \geq 0$ *y* $p, q > 1$ *con la condición de que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, *entonces* :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} {x_i}^p\right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} {y_i}^q\right)^{1/q}$$

Demostración:

Según la gráfica de la figura 2.1 podemos ver que se cumple:

$$a \cdot b \leq A + B \tag{2.20}$$

Además:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^a x^{p-1}dx = \left(\frac{x^p}{p}\right)_{[a,0]} = \frac{a^p}{p}, \\ B &= \int_0^b y^{\frac{1}{p-1}}dy = \left(\frac{x^{p/p-1}}{p/(p-1)}\right)_{[0,b]} = \frac{b^{p/(p-1)}}{p/(p-1)}. \end{aligned}$$

Recordemos que: $1/p + 1/q = 1 \Longrightarrow p/(p-1) = q$, por tanto $B = \dfrac{b^q}{q}$, luego si reemplazamos en 2.20, obtenemos lo siguiente:

$$a \cdot b \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \tag{2.21}$$

Observación: Nótese que la desigualdad 2.21 que se formó en este paso, es nada más ni nada menos que la desigualdad de Young.

Ahora, hagamos de a y b números finitos, es decir:

$$a = \mu x_i \text{ , con } \mu \text{ constante positiva, } \forall i = 1, 2, ..., n. \text{ y,}$$

$$b = \lambda y_i \text{ , con } \lambda \text{ constante positiva, } \forall i = 1, 2, ..., n.$$

Reemplazando en 2.21, obtenemos el siguiente resultado:

$$\mu x_i \cdot \lambda y_i \leq \frac{(\mu x_i)^p}{p} + \frac{(\lambda y_i)^q}{q},$$

haciendo un poco de arreglos algebráicos:

$$\mu\lambda(x_i y_i) \leq \frac{\mu^p}{p} x_i^p + \frac{\lambda^q}{q} y_i^q$$

Ahora bien, podemos transcribir la desigualdad anterior como:

$$\mu\lambda \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leq \frac{\mu^p}{p} \sum_{i=1}^{n} (x_i)^p + \frac{\lambda^q}{q} \sum_{i=1}^{n} (y_i)^q \tag{2.22}$$

Sea: $\mu = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i)^p \right)^{-1/p}$ y $\lambda = \left(\sum_{i=1}^{n} (y_i)^q \right)^{-1/q}$, ahora reemplazamos en 2.22:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (x_i)^p \right)^{-1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} (y_i)^q \right)^{-1/q} \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leq \frac{1}{p} \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i)^p \right)^{-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i)^p + \frac{1}{q} \left(\sum_{i=1}^{n} (y_i)^q \right)^{-1} \sum_{i=1}^{n} (y_i)^q$$

Podemos ver claramente que en el lado derecho de la desigualdad, simplemente nos queda $1/p + 1/q = 1$, luego se despeja $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ del lado izquierdo, dando como resultado la desigualdad deseada. $\square$

Otra prueba de la desigualdad de Minkowski.

Proposición 2.3.3. *Sean* $x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_n \geq 0$ *y* $p > 1$, *entonces se cumple que :*

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^{n}(x_i)^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n}(y_i)^p\right)^{1/p}. \tag{2.23}$$

Demostración: Sabemos que:

$$\begin{aligned}(x_i+y_i)^p &= (x_i+y_i)^{p-1}(x_i+y_i)\\ (x_i+y_i)^p &= x_i(x_i+y_i)^{p-1}+y_i(x_i+y_i)^{p-1}.\end{aligned}$$

Ahora apliquemos las propiedades de las sumatorias, es decir:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^p \leq \sum_{i=1}^{n}x_i(x_i+y_i)^{p-1}+\sum_{i=1}^{n}y_i(x_i+y_i)^{p-1}, \tag{2.24}$$

para continuar con la demostración, necesitaremos aplicar la desigualdad de Hölder a la primera suma de la derecha:

$$\sum_{i=1}^{n}x_i(x_i+y_i)^{p-1} \leq \left(\sum_{i=1}^{n}(x_i)^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^{(p-1)\cdot q}\right)^{1/q},$$

ahora de forma similar lo hacemos para el segundo sumando de la parte derecha de 2.24:

$$\sum_{i=1}^{n}y_i(x_i+y_i)^{p-1} \leq \left(\sum_{i=1}^{n}(y_i)^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^{(p-1)\cdot q}\right)^{1/q}.$$

De las dos desigualdades anteriores, obtenemos la siguiente:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^p \leq \left(\sum_{i=1}^{n}(x_i)^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^{(p-1)\cdot q}\right)^{1/q} +$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(y_i)^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^{(p-1)\cdot q}\right)^{1/q}$$

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^p \leq \left(\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^{(p-1)\cdot q}\right)^{1/q}\left[\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i)^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{i=1}^{n}(y_i)^p\right)^{1/p}\right].$$

Tengamos presente que $1/p + 1/q = 1$, de esto podemos deducir que $(p-1)q = p$. De tal manera:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^p \leq \left(\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^{p}\right)^{1/q}\left[\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i)^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{i=1}^{n}(y_i)^p\right)^{1/p}\right].$$

Solo nos queda hacer un par de arreglos algebraicos, y ya casi obtendríamos nuestra desigualdad deseada.

$$\frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^p}{\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^p\right)^{1/q}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n}(x_i)^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{i=1}^{n}(y_i)^p\right)^{1/p}$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^p\right)^{1-1/q} \leq \left(\sum_{i=1}^{n}(x_i)^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{i=1}^{n}(y_i)^p\right)^{1/p},$$

nuevamente usaremos el hecho de que $1/p+1/q=1$, de esta forma si despejamos $1-1/q$ obtenemos que es igual a $1/p$, ahora solamente nos quedaría reemplazar el valor obtenido, y ya está. $\square$

2.4 Desigualdad de Cauchy-Schwarz.

Un caso particular de la desigualdad de Hölder, es cuando $p = q = 2$, y esta se llama desigualdad de Cauchy-Schwarz. Esta desigualdad tiene una gran importancia en los espacios que son dotados de una estructura algebraica.

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2\right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} {y_i}^2\right)^{1/2}. \tag{2.25}$$

Es trivial la demostración en esta desigualdad, pues como hemos venido diciendo, la desigualdad de Cauchy-Scharwz es sólo un caso particular de la desigualdad de Hölder. En efecto, haremos una demostración simple de esta.

Demostración:
Consideremos la siguiente desigualdad:

$$(x_1 - ty_1)^2 + (x_2 - ty_2)^2 + ... + (x_n - ty_n)^2 \geq 0,$$

de donde:

$$(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2)t^2(y_1^2 + y_2^2 + ... + y_n^2) \geq 2t(x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n),$$

es claro ver que si todos los y_i son nulos, se cumple la igualdad. En caso contrario tomamos:

$$t = \frac{x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n}{y_1^2 + y_2^2 + ... + y_n^2},$$

luego al reemplazar el valor de t en la desigualdad anterior, y simplificando, obtenemos:

$$(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2)(y_1^2 + y_2^2 + ... + y_n^2) \geq (x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n)^2,$$

solo bastaría aplicar raíz cuadrada y se llega fácilmente a la desigualdad deseada.Recordemos que:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n,$$

análogamente para

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2,$$

y

$$\sum_{i=1}^{n} y_i^2 = y_1^2 + y_2^2 + ... + y_n^2.$$

$\square$

Observación: Obviamente la igualdad se dará si y sólo si $x_i = ty_i$, para $i = 1, 2, ..., n$.

2.5 Desigualdad triangular.

Una de las propiedades más básicas partiendo de la geometría, es la desigualdad triangular, que nos dice claramente que la suma de dos lados de un triángulo, es mayor o igual al lado restante. Esta famosa desigualdad la podemos encontrar de forma generalizada en $\mathbb{R}^n$ y aún más, nos sirve como una propiedad fundamental en espacios dotados de una métrcia y por consiguiente, en espacios normados.

Proposición 2.5.1. ***Desigualdad triangular.*** *Para todo número real x_i e y_i, con $i = 1, 2, ...n$, se cumple:*

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^{1/2} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i \right)^{1/2}. \tag{2.26}$$

Podemos ver claramente que la desigualdad anterior es una consecuencia inmediata de la desigualdad de Minkowski 2.23.

Capítulo3

Espacios L^p

El espacio de funciones integrables respecto de una medida arbitraria es un caso particular de una familia de espacios de funciones integrables, los llamados espacios L^p [1] que estudiaremos en este capítulo. Los ejemplos que son más utilizados en los espacios normados son estos famosos espacios L^p. Fueron estos además los que dieron el impulso al desarrollo de la teoría de espacios de Hilbert y espacios normados.

3.0.1 Propiedades elementales.

Sea $(X, \mathcal{S}, \mu)$ un espacio de medida. Es conocido el espacio de funciones de módulo integrable, representado por:

$$L^1 = \{f : X \to \mathbb{C} : f \ \ \textit{medible} \ \ y \ \ \int_X |f| d\mu < \infty\}.$$

Si ahora hacemos $1 \leq p < \infty$, definimos análogamente el espacio de funciones de potencia p-ésima integrable, como:

$$L^p(\mu) = \{f : X \to \mathbb{C} : f \ \ \textit{medible} \ \ y \ \ \int_X |f|^p d\mu < \infty\}.$$

En este conjunto definimos la aplicación $\| \cdot \|_p : L^p(\mu) \to \mathbb{R}$ por $\|f\|_p = (\int_X |f|^p d\mu)^{1/p}$, es evidente que $L^p(\mu) = \{f : X \to \mathbb{C} : f \ \ \textit{medible} \ \ y \ \ \|f\|_p < \infty\}$.

En el caso de $p = \infty$ procedemos de una forma un tanto diferente: Si $g : X \to \mathbb{C}$ es una función medible, también es medible $|g|$; sabemos que $\forall \alpha \in \mathbb{R}, |g|^{-1}(\alpha, \infty]$ es medible y podemos definir el conjunto:

$$S = \{\alpha \in \mathbb{R} : \mu(|g|^{-1}(\alpha, \infty]) = 0\}.$$

Se le llama *supremo esencial* de $|g|$ a $\|g\|_\infty = \text{ínf}\, S$, cuando $S \neq \emptyset$, y $\|g\|_\infty = \infty$, cuando $S = \emptyset$. Probemos en primer lugar la existencia de dicho ínfimo; para tal efecto hemos de probar que 0 es una cota inferior de S:

Bajo tal punto, si existiera $\alpha \in S$ tal que $\alpha < 0$, entonces de la inclusión $[0, \infty] \subset (\alpha, \infty]$ se deduce que:

$$\begin{aligned} |g|^{-1}[0, \alpha] \subset |g|^{-1}(\alpha, \infty] \ &\Longrightarrow \ \mu(X) = \mu(|g|^{-1}[0, \infty]) \leq \mu(|g|^{-1}(\alpha, \infty]) = 0 \\ &\Longrightarrow \ \mu(X) = 0, \end{aligned}$$

lo cual sería absurdo.

De lo anterior, podemos definir el espacio:

$$L^\infty(\mu) = \{f : X \to \mathbb{C} : \ \ \textit{medible} \ \ y \ \ \|f\|_\infty < \infty\},$$

que llamaremos espacio de las *funciones medibles esencialmente acotadas.*

Una caracterización del supremo esencial la proporciona el siguiente lema:

Lema 3.0.2. *Dada* $f : X \to \mathbb{C}$ *medible, se tiene :*

$$|f(x)| \leq \lambda \;\; para \;\; casi \;\; todo \;\; x \Longleftrightarrow \|f\|_\infty \leq \lambda.$$

En consecuencia, $|f(x)| \leq \|f\|_\infty$, para casi todo x, haciendo $\lambda = \|f\|_\infty$ y $\|f\|_\infty$ es la mínima cota superior (c.s.) de $|f|$.

Demostración:

Supongamos que $|f| \leq \lambda$ c.s., es decir $|f(x)| \leq \lambda$, $\forall x \in A^c$ con $\mu(A) = 0$. Entonces, si $|f(x)| > \lambda$, es $x \in A$ y

$$|f|^{-1}(\lambda, \infty] \subset A \Longrightarrow \mu(|f|^{-1}(\lambda, \infty]) \leq \mu(A) = 0 \Longrightarrow \lambda \in S \;\; y \;\; \|f\|_\infty \leq \lambda.$$

Recíprocamente, suponiendo que $\|f\|_\infty \leq \lambda$, veamos que $|f| \leq \lambda$ c.s.. lo que equivale a probar que $\mu(A) = 0$, siendo $A = \{x : |f| > \lambda\}$.

Por hipótesis, existe $\alpha \in S$ tal que $\alpha \leq \lambda$ pues si fuese $\alpha > \lambda$, $\forall \alpha \in S$, λ sería cota inferior de S y $\lambda < \|f\|_\infty$, lo que sería absurdo. Entonces:

$$A = |f|^{-1}(\lambda, \infty] \subset |f|^{-1}(\alpha, \infty] \Longrightarrow \mu(A) \leq \mu(|f|^{-1}(\alpha, \infty]) = 0.$$

$\square$

Aplicando las desigualdades de Hölder y Minkowski, se prueban los siguientes resultados.

Proposición 3.0.3. *Sean* p, q *tales que* $1/p + 1/q = 1$, *(*p, q *se les denomina exponentes conjugados), con* $1 < p, q \leq \infty$. *Si* $f \in L^p(\mu)$ *y* $g \in L^q(\mu)$, *entonces se comprueba que* $fg \in L^1(\mu)$ *y* $\int_X |fg| d\mu = \|fg\|_1 \;\leq\; \|f\|_p \|g\|_q$.

Demostración: Si $p = 1$, formalmente $q = +\infty$ y entonces:

$$\begin{aligned} \int_X |fg|d\mu &= \int_X |f| \cdot |g|d\mu \\ &\leq \|g\|_\infty \int_X |f|d\mu = \|f\|_1 \|g\|_\infty \end{aligned}$$

Análogamente, la desigualdad se cumple para $q = 1$ y $p = +\infty$.

Ahora, si $1 < p < \infty$, simplemente debemos dirigirnos a la desigualdad de Hölder, es decir, tenemos que:

$$\int_X |fg|d\mu = \int_X |f| \cdot |g|d\mu \leq \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{1/p} \cdot \left(\int_X |g|^q d\mu\right)^{1/q} = \|f\|_p \|g\| < \infty.$$

□

Proposición 3.0.4. *L^p es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ y $\| \cdot \|_p$ es una seminorma para todo $1 \leq p \leq \infty$.*

Demostración: Tenemos varios casos que estudiar, para llevar un mejor orden, los estudiaremos individualmente.

1. Supongamos que $1 \leq p < \infty$ y sean $f, g \in L_p$. Se tiene:

$$\begin{aligned} |f+g|^p &\leq (|f| + |g|)^p \\ &\leq (2 \max\{|f|, |g|\})^p \\ &\leq 2^p \left(|f|^p + |g|^p\right), \end{aligned}$$

   de donde:

$$\int_X |f+g|^p d\mu \leq 2^p \int_X |f|^p d\mu + 2^p \int_X |g|^p d\mu < \infty,$$

   y por consiguiente $(f + g) \in L^p$.

2. Analicemos el caso cuando $p = \infty$. Sabemos que $|f| \leq \|f\|_\infty$ y que $|g| \leq \|g\|_\infty$ c.s., entonces obviamente ocurre que $|f + g| \leq |f| + |g| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ c.s., (o por desigualdad triangular). Esto nos conlleva a que $\|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ es cota superior esencial de $|f + g|$. Al ser $\|f + g\|_\infty$ la mínima, entonces podemos deducir que $\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.

□

Observación: En general no podemos comprobar que $\|\cdot\|_p$ es una norma, ya que no se verifica que $\|f\|_p = 0 \longrightarrow f(x) = 0,\ \forall x \in X$. Sin embargo, cuando vemos el caso de las funciones continuas en un intervalo $[a, b]$, $X = C[a, b]$, $\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|dx = 0 \longrightarrow f = 0$. También en los espacios ℓ^p es una norma.

Proposición 3.0.5. *Si* $1 \leq p < \infty$*, entonces* $(L^p, \|\cdot\|_p)$ *es un Espacio de Banach.*

Demostración: Analicemos dos casos:

1. Supongamos primero que $p = \infty$. Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $L^\infty(\mu)$. En efecto, $\|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon, \forall\, n, m > N(\varepsilon)$

   Si $A_{m,n} = \{x : |f_n(x) - f_m(x)| \geq \|f_n - f_m\|_\infty + \varepsilon\}$, resulta que $\mu(A_{m,n}) = 0$, se observa que, si $A = \bigcup_{m,n} A_{m,n}$, entonces $\mu(A) = 0$, es decir es de medida cero. Esto nos implica que $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ es uniformemente convergente en $E \setminus A$.

   Si definimos $f(x) = \begin{cases} \lim f_n(x), & \text{si } x \in E \setminus A; \\ 0, & \text{si } x \in A. \end{cases}$, se ve inmediatamente que $\lim \|f_n - f\|_\infty = 0$, ya que:

$$\begin{aligned} |f(x) - f_m(x)| &= |\lim_n f_n(x) - f_m(x)| \\ &= \lim_n |f_n(x) - f_m(x)| \overset{c.s.}{\leq} \lim_n \|f_n - f_m\|_\infty + \varepsilon < 2\varepsilon,\ \forall m, n \geq N. \end{aligned}$$

   Por lo tanto podemos ver que 2ε es cota superior esencial de $f - f_m$, de modo que $\|f - f_m\|_\infty < 2\varepsilon,\ \forall m \geq N \longrightarrow f - f_m \in L^\infty(\mu) \longrightarrow f \in L^\infty(\mu)$ y $f_m \to f$ en $L^\infty(\mu)$.

2. Ahora analicemos el caso cuando $1 \leq p < \infty$.

   Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesíon de Cauchy en L^p. Consideremos un $\varepsilon = 1/2^i$, de lo anterior sabemos que existe un n que depende de i, tal que $\|f_n - f_m\|_p < 1/2^i,\ \forall n, m \geq n_i$. Ahora podemos extraer una subsucesión $(f_{n_i})_{k\geq 1}$ tal que $\|f_{n_{i+1}} - f_{n_i}\| < 1/2^i,\ \forall i$.

Llamamos ahora $g_k = \sum_{i=1}^{k} |f_{n_{i+1}} - f_{n_i}|$ y $g = \sum_{i=1}^{\infty} |f_{n_{i+1}} - f_{n_i}|$. Debido a que $|f_{n_{i+1}} - f_{n_i}| \in L^p(\mu)$, se deduce que $g_k \in L^p(\mu)$. De esta forma,

$$\begin{aligned}
\|g_k\|_p &= \left(\int_X |g_k|^p d\mu\right)^{1/p} = \left[\int_X \left(\sum_{i=1}^{k} |f_{n_{i+1}} - f_{n_i}|\right)^p d\mu\right]^{1/p} \\
&\leq \sum_{i=1}^{k} \left[\int_X |f_{n_{i+1}} - f_{n_i}|^p d\mu\right]^{1/p} = \sum_{i=1}^{k} \|f_{n_{i+1}} - f_{n_i}\|_p < \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{2^i} < 1.
\end{aligned}$$

Como además $\text{lím}_k |g_k| = g$, también el $\text{lím}_k |g_k|^p = |g|^p$ y deducimos que:

$$\int_X |g|^p d\mu = \int_X |g_k|^p d\mu \leq \liminf_k \int_X |g_k|^p d\mu \leq 1 \longrightarrow \|g\|_p \leq 1,$$

por lo que $|g|^p$ es finita cota superior, y además $g(x) < \infty$c.s.

Lo anterior indica que la serie $\sum_{i\geq 1}(f_{n_{i+1}} - f_{n_i})$ es totalmente convergente c.s., así como también lo es la serie $f_{n_1} + \sum_{i\geq 1}(f_{n_{i+1}} - f_{n_i})$. Definimos:

$$\begin{cases} f_{n_1}(x) + \sum_{i\geq 1}(f_{n_{i+1}}(x) - f_{n_i}(x)), & \text{si } x \in A^c; \\ 0, & \text{si } x \in A. \end{cases} \text{, donde } \mu(A) = 0.$$

Debido a que $f_{n_1} + \sum_{i=1}^{k-1}(f_{n_{i+1}} - f_{n_i}) = f_{n_k}$, resulta que $f(x) = \text{lím}_i f_{n_i}(x)$ c.s.. Veamos que $f_n \to f$ y que $f \in L^p(\mu)$. Dado $\varepsilon > 0$, sabemos

entonces que $\exists N$ tal que $\|f_n - f_m\|_p < \varepsilon$, $\forall n, m \geq N$. Si tomamos un $m \geq N$, tenemos:

$$\begin{aligned}
\|f - f_m\|_p^p &= \int_X |f - f_m|^p d\mu = \int_X |\lim_i f_{n_i} - f_m|^p d\mu = \int_X \lim_i |f_{n_i} - f_m|^p d\mu \\
&\leq \liminf_i \int_X |f_{n_i} - f_m|^p d\mu = \liminf_i \|f_{n_i} - f_m\|_p^p \leq \varepsilon^p,
\end{aligned}$$

Tomando $n_i \geq N$. Esto nos implica que $f - f_m \in L^p(\mu)$ y en consecuencia $f \in L^p(\mu)$ debido a que $f = (f - f_m) + f_m$. Por otro lado, al ser $\|f - f_m\|_p \geq \varepsilon$, $\forall m \leq N$, la sucesión, original converge a f.

$\square$

3.0.2 Reflexividad.

Sea E un espacio normado, E' su dual dotado de la norma

$$\|f\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |\langle f, x\rangle| = \sup_{\|x\|=1} |\langle f, x\rangle|$$

E'' su bidual, i.e., dual de E'; dotado de la norma:

$$\|f\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |\langle \xi, x\rangle| = \sup_{\|x\|=1} |\langle \xi, x\rangle|,$$

con $f \in E'$.

La aplicación:

$$\begin{array}{rcl} J : E & \longrightarrow & E'' \\ x & \longrightarrow & Jx \ , \end{array}$$

luego,

$$\begin{array}{rcl} Jx : E' & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longrightarrow & \langle Jx, f\rangle = \langle f, x\rangle \ , \end{array}$$

$\forall x \in E$, $\forall f \in E'$, se llama **inyección canónica**.

1. J es lineal: Si $x, y \in E$, se tiene que demostrar que para todo $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$J_{\alpha x + y} = \alpha J_x + J_y.$$

Demostración: Para todo $f \in E'$:

$$\begin{aligned} \langle J_{\alpha x+y}, f \rangle = \langle f, \alpha x + y \rangle &= \langle f, \alpha x \rangle + \langle f, y \rangle \\ &= \alpha \langle f, x \rangle + \langle f, y \rangle \\ &= \alpha J_x f + J_y f \\ &= \langle \alpha J_x + J_y, f \rangle \ , \end{aligned}$$

luego, $J_{\alpha x+y} = \alpha J_x + J_y$. $\square$

2. J es una isometría: Se tiene que demostrar que:

$$\|J\| = \|x\|, \quad \forall x \in E.$$

Demostración: Es fácil ver que :

$$\|J_x\| = \sup_{\|f\| \leq 1} |\langle J_x, f \rangle| = \sup_{\|f\| \leq 1} |\langle f, x \rangle| = \|x\|.$$

$\square$

3. J es inyectiva: es decir, si $x \neq y \Longrightarrow J_x \neq J_y$.

Demostración: En efecto, si $x \neq y$, entonces:

$$\|x\| \neq \|y\| \Longrightarrow \|J_x\| = \|x\| \neq \|y\| = \|J_y\| \Longrightarrow J_x \neq J_y.$$

$\square$

Observaciones:

1. Mediante J, siempre se puede identificar a E con un subespacio de E''.
2. J no es necesariamente sobreyectivo.

Definición 3.0.6. *Sea E un espacio normado y $J : E \longrightarrow E''$ la inyección canónica. Se dice que E es reflexivo si $J(E) = E''$.*

Cuando E es reflexivo se identifica implícitamente E con E'' (con ayuda del isomorfismo J). En la definición de espacio reflexivo es importante usar J.

Definición 3.0.7. *Se dice que un espacio de Banach E es uniformemente convexo si* $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,$ *tal que:*

$$x, y \in E,\ \|x\| \leq 1,\ \|y\| \leq 1,\ \|x - y\| > \varepsilon \Longrightarrow \left\| \frac{x+y}{2} \right\| < 1 - \delta.$$

Ejemplos:

(a) $E = \mathbb{R}^2$, es uniformemente convexa.

(b) $\|x\|_2 = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$, no es uniformemente convexa.

Observación: Nótese que $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$, son equivalentes.

Proposición 3.0.8. *Todo espacio de Banach uniformemente convexo es reflexivo.*

Teorema 3.0.9. ***Desigualdad de Clarkson:*** *Para todo* $f, g \in L^p$, *con* $2 \leq p < \infty$ *se cumple* :

$$\left\| \frac{f+g}{2} \right\|_p^p + \left\| \frac{f-g}{2} \right\|_p^p \leq \left\| \frac{\|f\|_p^p + \|g\|_p^p}{2} \right\|.$$

Proposición 3.0.10. L^p *es* $reflexivo$ *para* $1 < p < \infty$.

Demostración: Primero demostraremos que L^p es reflexivo para $2 \leq p < \infty$. En efecto, dado un $\varepsilon > 0$ y consideremos $f, g \in L^p$, tal que $\|f\| \leq 1,\ \|g\| \leq 1,\ y\ \|f - g\|_p > \varepsilon$, usando la desigualdad de Clarkson se deduce que:

$$\left\| \frac{f+g}{2} \right\|_p^p \leq \left\| \frac{\|f\|_p^p + \|g\|_p^p}{2} \right\| - \left\| \frac{f-g}{2} \right\|_p^p < 1 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p,$$

y entonces:

$$\left\| \frac{f+g}{2} \right\|_p < 1 - \left(1 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p\right)^{1/p} = 1 - \delta.$$

Por consiguiente, L^p es uniformemente convexo, y por tanto reflexivo.

Ahora veremos que L^p es reflexivo para $1 < p \leq 2$. Para aquello, consideremos el operador:

$$\begin{array}{rcl} T : L^p & \longrightarrow & (L^q)' \\ u & \longrightarrow & Tu, \end{array}$$

luego

$$\begin{array}{rcl} Tu : L^q & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longrightarrow & \langle Tu, f\rangle = \displaystyle\int uf, \end{array}$$

por la desigualdad de Hölder, se tiene:

$$|\langle Tu, f\rangle| \leq \int |u||f| \leq \|u\|_p\|f\|_p, \tag{3.1}$$

y entonces:

$$\|Tu\|_{(L^q)'} = \sup_{f\in L^q} \frac{|\langle Tu, f\rangle|}{\|f\|_q}.$$

Por otro lado, hagamos:

$$f_0(x) = \begin{cases} u(x)^{p-2}u(x), & \text{si } u(x) \neq 0; \\ 0, & \text{si } u(x) = 0. \end{cases} \quad \text{se tiene que:}$$

1. $f_0 \in L^q$ y

$$\begin{aligned} \int |f_0(x)|^q dx &= \int |u(x)|^q |u(x)|^{q(p-2)} dx \\ &= \int |u(x)|^{q(p-1)} dx \\ &= \int |u(x)|^p dx < \infty. \end{aligned}$$

en vista que $u \in L^p$.

2. $\|f_0\|_q = \|u\|_p^{p-1}$

$$\begin{aligned}
\|f_0\| &= \left(\int |f_0(x)|^q dx\right)^{1/q} \\
&= \left(\int |u(x)|^p dx\right)^{1/q} \\
&= \left(\int |u(x)|^p dx\right)^{(p-1)/p} \\
&= \left\{\left(\int |u(x)|^p dx\right)^{1/p}\right\}^{p-1} \\
&= \|u\|_p^{p-1}
\end{aligned}$$

3. $|\langle Tu, f_0\rangle| = \|u\|_p^p$

$$\begin{aligned}
\langle Tu, f_0\rangle &= \int u f_0 dx \\
&= \int u(x)|u(x)|^{p-2}u(x)dx \\
&= \int |u(x)|^p dx \\
&= \|u\|_p^p,
\end{aligned}$$

entonces, se deduce de (2) y (3) que:

$$\|Tu\|_{(L^q)} = \sup_{f\in L^q} \frac{\langle Tu, f\rangle}{\|f\|_q} \geq \frac{|\langle Tu, f_0\rangle|}{\|f_0\|_q} = \frac{\|u\|_p^p}{\|u\|_p^{p-1}} = \|u\|_p. \tag{3.2}$$

Luego al comparar 3.1 y 3.2, se obtiene:

$$\|Tu\|_{(L^q)'} = \|u\|_p.$$

□

Proposición 3.0.11. ***Teorema de representación de Riesz:*** *Sea $1 < p < \infty$ y sea $\phi \in (L^p)'$. Entonces existe una única $u \in L^q$ tal que:*

$$\langle \phi, f \rangle = \int uf, \quad \forall f \in L^p,$$

además se verifica:

$$\|u\|_q = \|\phi\|_{(L^p)'}.$$

Observaciones:

Sea $1 \leq p \leq \infty$ y q tal que $1/p + 1/q = 1$. Tomemos $g \in L^q$, y definamos:

$$\begin{aligned} F_g : L^p &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longrightarrow F_g(f) = \int fg, \quad \forall f \in L^p. \end{aligned}$$

1. F_g, es obviamente lineal.

2. Se verifica la siguiente desigualdad:

$$|F_g(f)| \leq \int |fg| \leq \|g\|_q \|f\|_p,$$

   es decir, F_g es continua.

En conclusión, cada $g \in L^q$ determina un elemento F_g en $(L^p)'$, dual de L^p. Esto lo indicamos por:

$$\begin{aligned} F : L^q &\longrightarrow (L^p)' \\ g &\longrightarrow F_g. \end{aligned}$$

Recíprocamente, el teorema de Riesz dice que si $1 < p < \infty$, también es válido para $p = 1$, y $F \in (L^p)'$, entonces existe un único $g \in L^q$, tal que:

$$F(f) = \int fg \quad \forall f \in L^p.$$

Debido a estos resultados, existe una biyección entre L^q y su dual $(L^p)'$, permitiendo la identificación entre ambos.

$$(L^p)' = L^q.$$

Demostración: Se define el operador:

$$\begin{array}{rcl} \tau : L^q & \longrightarrow & (L^p)' \\ u & \longrightarrow & \tau_u, \end{array}$$

luego:

$$\begin{array}{rcl} \tau_u : L^p & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longrightarrow & \langle \tau_u, f \rangle = \displaystyle\int uf. \end{array}$$

Procederemos de una forma similar a la demostración de la proposición anterior, i.e., se tiene:

$$\|\tau_u\|_{(L^p)'} = \|u\|_q, \quad \forall u \in L^q.$$

Probaremos que τ es sobreyectivo. Hagamos $E = \tau(L^q)$; E es un subespacio cerrado de $(L^p)'$, por ser L^p completo y τ una isometría. Deseamos demostrar que $E = \tau(l^q) = (L^p)'$. Asumamos que E es un subespacio que no es igual a $(L^p)'$. De ser así, existe un funcional $\Phi \in (L^p)''$ tal que Φ es igual a

cero en E pero no es el funcional nulo. Como L^p es reflexivo, $T(L^p) = (L^p)''$, entonces existe $u \in L^p$ tal que $Tu = \Phi$, es decir:

$$\langle Tu, F \rangle = \langle \Phi, F \rangle \ \ \forall F \in (L^p)'.$$

En particular, para $F \in E \subsetneq (L^p)'$ existe $v \in L^q$ tal que $\tau_v = F$, o sea:

$$\langle \tau_v, u \rangle = \langle F, u \rangle = \int vu,$$

pero $\langle \Phi, F \rangle = 0, \forall F \in \tau(L^q)$, entonces:

$$\int vu = 0 \ \ \forall v \in L^q,$$

se concluye que $u = 0$ eligiendo $v = |u|^{p-2}u$. Entonces:

$$\Phi(F) = F(u) = 0, \quad \forall F \in (L^p)'',$$

es decir, todo funcional que se anula en $E = \tau(L^q)$, debe ser igual al funcional nulo $\to\leftarrow$. De esta manera $\tau(L^q) = (L^p)'$. $\square$

Definición 3.0.12. *Un espacio de Hilbert es un espacio vectorial H dotado de un producto escalar (u, v) y que es completo para la norma $(u, u)^{1/2}$. En un espacio de Hilbert se cumple:*

1. *La desigualdad de Cauchy-Schwarz:*

$$|(u, v)| \leq (u, u)^{1/2}(v, v)^{1/2}, \quad \forall u, v \in H.$$

2. *La identidad del Paralelogramo:*

$$\left\|\frac{u+v}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{u-v}{2}\right\|^2 = \frac{1}{2}\left(\|u\|^2 + \|v\|^2\right), \ \forall u, v \in H, \ donde \ \|u\| = (u, u)^{1/2}.$$

Ejemplo:
El espacio $L^2(X)$ dotado del producto escalar:

$$(u, v)_2 = \int_X uv d\mu \ ,$$

es un espacio de Hilbert.

Proposición 3.0.13. *Todo espacio de Hilbert H es uniformemente convexo, y por tanto reflexivo.*

Demostración:
Sea $\varepsilon > 0, \ u, v \in H$ tales que $\|u\| \leq 1, \ \|v\| \leq 1$ y $\|u - v\| > \varepsilon$. En virtud de la identidad del paralelogramo, se tiene:

$$\left\|\frac{u+v}{2}\right\|^2 < 1 - \delta, \text{ y entonces } \left\|\frac{u+v}{2}\right\| < 1 - \delta, \text{ con}$$

$$\delta = 1 - \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{4}\right)^{1/2} > 0.$$

$\square$

Definición 3.0.14. *Se dice que una forma bilineal:*

$$\begin{array}{rcl} a : H \times H & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (u,v) & \longrightarrow & a(u,v), \quad es: \end{array}$$

1. *Continua si existe una constante c tal que:*
$$|a(u,v)| \leq c\|u\|\|v\|, \quad \forall u, v \in H.$$
2. *Coercitiva si existe una constante $\alpha > 0$ tal que:*
$$a(v,v) \geq \alpha\|v\|^2, \quad \forall v \in H.$$

Proposición 3.0.15. ***Teorema de Stampacchia.*** *Sea $a(u,v)$ una forma bilineal continua y coercitiva. Sea k un conjunto convexo, cerrado y no vacío.*

Dado $\varphi \in H$, existe un único $u \in K$, tal que:

$$a(u, u-v) \geq \langle \varphi, u-v \rangle, \quad \forall v \in K.$$

Además, si a es simétrica, entonces u se caracteriza por la propiedad:

$$\left\{ \begin{array}{ll} u \in K & ; \\ \frac{1}{2}a(u,v) - \langle \varphi, u \rangle = \min\limits_{v \in K} \left\{ \frac{1}{2}a(v,v) - \langle \varphi, v \rangle \right\} & . \end{array} \right.$$

Proposición 3.0.16. ***Teorema de Lax - Milgram.*** *Sea $a(u,v)$ una forma bilineal continua y coercitiva. Entonces para todo $\varphi \in H'$ existe un único $u \in H$ tal que:*

$$a(u,v) = \langle \varphi, u \rangle, \quad \forall v \in H. \tag{3.3}$$

Además, si a es simétrica, entonces u se caracteriza por la propiedad:

$$\left\{ \begin{array}{ll} u \in H & ; \\ \frac{1}{2}a(u,v) - \langle \varphi, u \rangle = \min\limits_{v \in H} \left\{ \frac{1}{2}a(v,v) - \langle \varphi, v \rangle \right\} & . \end{array} \right. \tag{3.4}$$

Observación: El teorema de Lax - Milgram es una herramienta sencilla y eficaz para la resolución de ecuaciones lineales elípticas en derivadas parciales [4]. Es interesante observar la relación entre la ecuación 3.3 y el problema de minimización 3.4. En la terminología del Cálculo de variaciones. La ecuación 3.3 es ni nada más ni nada menos que la ecuación de Euler del problema de minimización 3.4. Obsérvese también, sobre esto, que la ecuación 3.3 aparece cuando se escribe "$F'(u) = 0$", donde $F(v) = \frac{1}{2}a(v,v) - \langle \varphi, v \rangle$.

Capítulo4

Aplicaciones de las desigualdades clásicas

En este capítulo veremos algunas aplicaciones y/o problemas de algunas de las desigualdad vistas en el capítulo 2. Podremos ver que estas desigualdad clásicas pueden ser aplicadas en diversas ramas de las matemática. Analizaremos y daremos solución a problemas que fueron expuestos en algunas olimpiadas de matemáticas. Especialmente en este capítulo aplicaremos la desigualdad de la media aritmética-geométrica (AG) que tiene aplicaciones bastante buenas en el área de la geometría como comentabamos en el capítulo anterior, la desigualdad de Minkowski y la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

Veíamos en el comienzo del capítulo 2, que si tenemos dos reales x e y no negativos entonces obviamente se cumple que $(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 \geq 0$. Al desarrollar obtenemos que $x - 2\sqrt{xy} + y \geq 0$, o escrito de otra forma:

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}.$$

La desigualdad anterior nos dice que la Media Aritmética $A = (x+y)/2$ de dos números reales no negativos, es mayor o igual que la media geométrica $G = \sqrt{xy}$ (ver sección 2.1). Otras medias que son importantes y que han sido estudiadas por diversos autores son las siguientes:

Armónica $\quad H = \dfrac{2xy}{x+y}$

Logarítmica $\quad L = \dfrac{y-x}{\ln y - \ln x}$

Cuadrática $\quad C = \left(\dfrac{x^2+y^2}{2}\right)^{1/2}$

Se puede ver fácilmente que se cumple $C \geq A \geq G \geq H$, y que la igualdad en todas se da solamente si $x = y$. En el próximo capítulo se hará un estudio más profundo sobre algunas de estas medias, las cuales tienen propiedades bastante buenas, y se intentará asociar una función a estas. Mientras tanto, el objetivo de este capítulo como bien decíamos, es poder darle algunas aplicaciones a las desigualdades clásicas trabajadas en el capítulo 2. Para comenzar daremos un ejemplo para entrar en confianza con estas aplicaciones.

Ejemplo 4.0.17. *Sean a, b, c lados de un triángulo, y Ω su área. Probar que:*

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}\Omega.$$

Demostración: Hay numerosas soluciones para este ejemplo, en este caso, vamos a resolverlo con los recursos más elementales. Tenemos que examinar dos casos:

1. Un primer caso sería si el triángulo fuese equilátero, pues la solución en tal caso, será trivial, pues $a = b = c$ y por lo tanto su altura sería de $a\sqrt{3}/2$ y su área $a^2\sqrt{3}/4$, en este caso se cumpliría la igualdad.

2. Ahora examinemos el caso para un triángulo cualquiera. Supongamos que a es el lado mayor y sea P el pie de la altura trazada desde el vértice A. Ahora, sea $x = BP - a/2$ y por lo tanto $BP = a/2 + x$ y $PC = a/2 - x$. Sea $y = h_a - a\sqrt{3}/2$ (donde $h_a = y + a\sqrt{3}/2$). La idea de introducir x e y, es que estas cantidades representan la desviación del triángulo respecto a uno equilátero [13]. Entonces , si aplicamos el Teorema de Pitágoras a los triángulos ABP y APC, tenemos:

$$\begin{aligned} a^2+b^2+c^2-4\Omega\sqrt{3} &= a^2+\left(\frac{a}{2}+x\right)^2+\left(\frac{a}{2}-x\right)^2+2h_a^2-2a\sqrt{3}h_a \\ &= \frac{3}{2}a^2+2x^2+2h_a(h_a-a\sqrt{3}) \\ &= \frac{3}{2}a^2+2x^2+2\left(a\frac{\sqrt{3}}{2}+y\right)\left(-a\frac{\sqrt{3}}{2}+y\right) \\ &= \frac{3}{2}a^2+2x^2+2y^2-\frac{3}{2}a^2 = 2(x^2+y^2) \geq 0. \end{aligned}$$

Esto prueba la desigualdad y obviamente si $x = y = 0$ se nos cumple la igualdad, vale decir cuando el triángulo es equilátero.

$\square$

A continuación un problema presentado en la Olimpiada Internacional de Matemática (OIM) en el año 1964.

Problema 4.0.18. *Sean a, b y c los lados de un triángulo. Probar que:*

$$a^2(-a+b+c)+b^2(a-b+c)+c^2(a+b-c) \leq 3abc. \tag{4.1}$$

Demostración: en primera instancia tenemos que:

$$\begin{aligned} (-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c) &= (-a+b+c)(a^2-(b-c)^2) \\ &= a^2(-a+b+c)+a(b-c)^2-(b^2-c^2)(b-c) \\ &= a^2(-a+b+c)+b^2(a-b+c)+c^2(a+b-c)-2abc, \end{aligned}$$

la desigualdad propuesta es equivalente a:

$$(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c) \leq abc. \tag{4.2}$$

Sabemos que los tres factores del lado izquierdo de la desigualdad son positivos (por ser lados de un triángulo o desigualdad triangular), entonces aplicando la desigualdad A-G, obtenemos:

$$(-a+b+c)(a-b+c) \leq \left(\frac{-a+b+c+a-b+c}{2}\right)^2 = c^2,$$

y análogamente

$$\begin{aligned} (a-b+c)(a+b-c) &\leq a^2, \\ (-a+b+c)(a+b-c) &\leq b^2, \end{aligned}$$

luego, al multiplicar estas tres desigualdades y al extraer la raíz cuadrada, queda probada la desigualdad 4.2. La igualdad se da solamente si $a=b=c$.

Cabe señalar que en realidad 4.1 y 4.2 valen para reales no negativos cualesquiera. En efecto, si dos de los factores del lado izquierdo de 4.2 fuesen negativos, sumándoles se llega a que a, b o c, es negativo, lo cual sería absurdo. Por lo tanto a lo sumo uno de los tres factores puede ser negativo. Acabamos de probar que si ninguno de los tres factores son negativos, la desigualdad es cierta. Pero, si uno es negativo y los otros dos no fuesen negativos, el lado izquierdo es no positivo y el derecho no negativo, por lo cual también se cumpliría la desigualdad. $\square$

Problema 4.0.19. *Sean a, b, c reales positivos. Probar que:*

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right)\left(1+\frac{c}{a}\right) \geq 2\left(1+\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}\right)$$

Demostración: Desarrollando el lado izquierdo y simplificando la desigualdad, se reduce a:

$$\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{a+c}{b} \geq 2\left(\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}\right).$$

Escribiendo $(a+b)/c$ como $(a+b+c)/c-1$, y procediendo análogamente con los otros dos términos del lado izquierdo, entonces podemos rescribir esta desigualdad como:

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)-3 \geq 2\left(\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}\right),$$

pero si aplicamos AG, se tiene:

$$\begin{aligned}(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) &\geq 3\left(\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}\right)=2\left(\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}\right)+\left(\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}\right)\\ &\geq 2\left(\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}\right)+3.\end{aligned}$$

□

Los siguientes dos problemas se presentarón en APMO (Asian Pacific Mathematics Olympiad) en el año 2003:

Problema 4.0.20. *Para a, b, c longitudes de los lados de un triángulo con perímetro uno, y $n \in \mathbb{N}$; $n > 1$, mostrar que:*

$$(a^n+b^n)^{1/n}+(b^n+c^n)^{1/n}+(c^n+a^n)^{1/n} < 1+\frac{2^{1/n}}{2}.$$

Demostración: Recordemos que a, b, c son las longitudes de los lados de un triángulo si y sólo si existen números positivos x, y, z con $a = y + z$, $b = z + x$ y $c = x + y$. Como $a + b + c = 1$, se tiene que $x + y + z = \frac{1}{2}$. Ahora usemos la desigualdad de Minkowski 2.23, para obtener:

$$(a^n+b^n)^{1/n}=[(y+z)^n+(z+x)^n]^{1/n} \leq (x^n+y^n)^{1/n}+(2z^n)^{1/n} < c+\sqrt[n]{2}z,$$

análogamente para:

$$(b^n+c^n)^{1/n} < a+\sqrt[n]{2}x,$$

y

$$(c^n+a^n)^{1/n} < b+\sqrt[n]{2}y.$$

Por lo tanto:

$$(a^n+b^n)^{1/n}+(b^n+c^n)^{1/n}+(c^n+a^n)^{1/n} < a+b+c+\sqrt[n]{2}(x+y+z)=1+\frac{\sqrt[n]{2}}{2}.$$

□

Problema 4.0.21. *Dada $n > 2$ y números reales $x_1 \leq x_2 \leq ... \leq x_n$, muestre que:*

$$\left(\sum_{i,j} |x_i - x_j|\right)^2 \leq \frac{2}{3}(n^2 - 1)\sum_{i,j}(x_i - x_j)^2,$$

donde la igualdad se da si y sólo si $x_1, x_2, ..., x_n$ forman una progresión aritmética.

Demostración: Notemos primero que si se restringe las sumas con $i < j$, entonces ellas suman la mitad. La suma de la izquierda está elevada al cuadrado y la suma de la derecha no, entonces la desigualdad deseada con sumas restringidas a $i < j$, tiene $1/3$ en lugar de $2/3$, en el lado derecho. Considere las sumas de todos los $|x_i - x_j|$, con $i < j$. El término x_1 aparece en $n - 1$ términos con signo negativo, x_2 aparece en un término con signo positivo y en $n-2$ términos con signo negativo, y así sucesivamente. Entonces, se obtiene que:

$$-(n-1)x_1 - (n-3)x_2 - (n-5)x_3 - ... - (n-1)x_n = \sum(2i - 1 - n)x_i.$$

Ahora, podemos usar la desigualdad de Cauchy-Schwarz (2.25) para mostrar que el cuadrado de esta suma es menor que $\sum x_i^2 \sum(2i-1-n)^2$. Analizando la suma del otro lado de la desigualdad deseada, observe inmediatamente que es $n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2$. Nos gustaría que desapareciera el segundo término, pero esto es fácil, ya que si suma h a cada x_i, las sumas en la desigualdad deseada no se veen afectadas, ya que ellas usan sólo diferencias de x_i. Luego, podemos escoger h tal que $\sum x_i$ sea cero. Luego, la demostración se termina si se puede mostrar que $\sum(2i - 1 - n)^2 = \frac{n(n^2-1)}{3}$:

$$\begin{aligned}
\sum(2i-1-n)^2 &= 4\sum i^2 - 4(n+1)\sum i + n(n+1)^2 \\
&= \frac{2}{3}n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1)^2 + n(n+1)^2 \\
&= \frac{1}{3}n(n+1)[2(2n+1) - 6(n+1) + 3(n+1)] \\
&= \frac{1}{3}n(n^2-1).
\end{aligned}$$

Con lo cual se obtiene la desigualdad que se quería. $\square$

Capítulo5

Funciones asociadas a medias y promedios generalizados

Conocemos bastante acerca de algunas/os medias y o promedios que se caracterizan por representar cierta cantidad de datos. Durante toda nuestra enseñanza, comenzando de muy pequeños, nos han enseñado a sacar el "promedio de notas", ya sea en la escuela, colegio y/o universidad; este famoso promedio que hemos llevado por largos años, es nada más ni nada menos que la famosa "media aritmética". Sin embargo, la media aritmética (MA), es solamente una de las muchas medias (promedios) que existen en las matemáticas. Por ejemplo, hemos visto en los dos capítulos anteriores la media geométrica (MG), y su relación con la MA. También existe el promedio generalizado de Hölder, y una de las más estudiadas por sus propiedades es la media logarítmica.

En este capítulo, lo que se pretende es estudiar algunas de estas medias y/o promedios (o también se le pueden llamar funciones de dos variables o bien aplicaciones), y asociarles a estas, una función de una sola variable a través de métodos bastante entretenidos como lo son la alineación gráfica de Moskovitz y el Teorema del Valor Medio para integrales.

5.1 Conceptos previos.

Definición 5.1.1. *Definimos una media $m(a,b)$ como una función de dos variables positivas, que satisfacen las siguientes propiedades:*

1. **Intermedia:** $\min(a,b) \leq m(a,b) \leq \max(a,b)$.
2. **Simétrica:** $m(a,b) = m(b,a)$.

A continuación algunas medias conocidas que satisfacen las propiedades nombradas:

Aritmética	$A(a,b) = \dfrac{a+b}{2}$
Geométrica	$G(a,b) = \sqrt{ab}$
Armónica	$H(a,b) = \dfrac{2ab}{a+b}$
Logarítmica	$L(a,b) = \dfrac{b-a}{\ln b - \ln a}$
Media cuadrática	$C(a,b) = \left(\dfrac{a^2+b^2}{2}\right)^{1/2}$
Contrarmónica	$Ca(a,b) = \dfrac{a^2+b^2}{a+b}$
Heroniana	$He(a,b) = \dfrac{a+\sqrt{ab}+b}{3}$
Identrica	$I(a,b) = \left(\dfrac{a^a}{b^b}\right)^{1/(a-b)} : e$
Máximo	$\max(a,b)$
Mínimo	$\min(a,b)$

La media logarítmica ha sido estudiada por diversos autores, entre ellos Lin y Carlson. Fue generalizada por Stolarsky, y luego estudiada por Leach y Sholander [12].

Todas las medias nombradas anteriormente satisfacen una tercera propiedad también:

3. **Homogeneidad:** $m(a,b) = am(1, b/a)$, $\forall a, b$.

Queremos determinar las condiciones de una función tal que la media asociada a esta función sea homogénea. Por otro lado, queremos buscar funciones asociadas a las medias nombradas anteriormente. La técnica que vamos a ocupar para asociar medias con funciones de una sola variable incluye la técnica gráfica de Moskovitz y una aplicación del Teorema del Valor Medio para integrales que está relatado más específicamente en [18], y el clásico trabajo de Hardy, Littlewood y Pólya [9].

5.2 La alineación gráfica de Moskovitz.

Sea f una función definida de $(0,\infty)$ en $(0,\infty)$, y se define a $M_f(a,b)$ la intersección de x con la línea que conecta $(a, f(a))$ y $(b, -f(b))$. Es fácil ver que la propiedad intermedia y la propiedad simétrica se mantienen para M_f. Buscaremos la media asociada con esta f dada, calculando la pendiente a través de la línea $(a, f(a))$, $(M_f(a,b), 0)$ y $(b, -f(b))$. Hay dos maneras de obtenerla (ver también figura 5.1):

$$\frac{f(a)}{a - M_f(a,b)} = \frac{f(b)}{M_f(a,b) - b}.$$

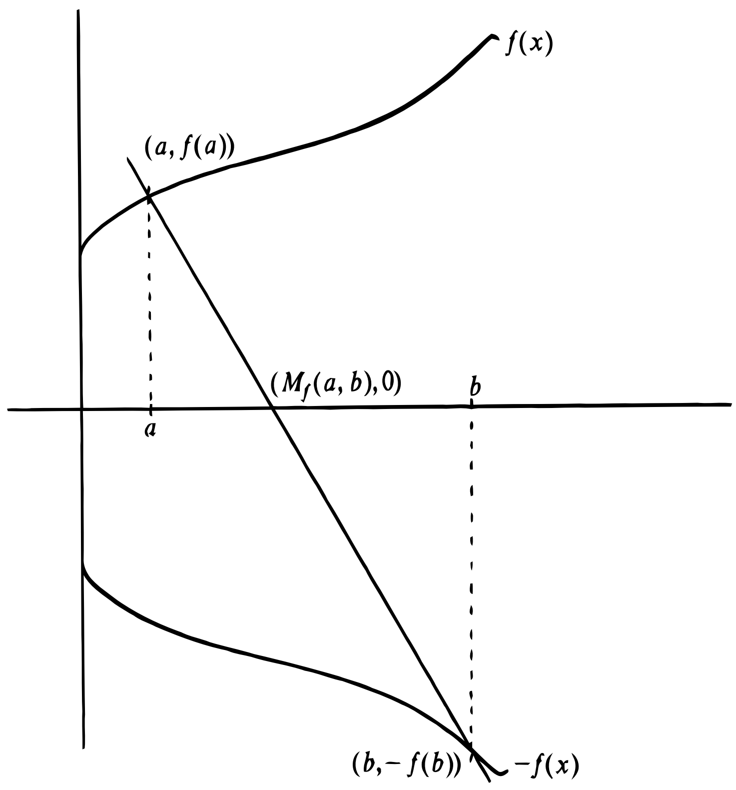


Figura 5.1: Alineación gráfica de Moskovitz.

Esto puede ser escrito como:

$$M_f(a,b) = \frac{af(b)+bf(a)}{f(a)+f(b)}. \tag{5.1}$$

Diferentes funciones pueden determinar la misma media.

Teorema 5.2.1. $M_f = M_g \iff g = kf$ *para algún* $k > 0$

Demostración: Si $g = kf$, k se cancela en el lado derecho de 5.1, lo que da como resultado que $M_f = M_g$. Ahora si $g \neq kf$ para cualquier k, tomamos a, b y k de manera que $g(a) = kf(a)$, pero $g(b) \neq kf(b)$. Luego, si $M_f(a,b) = M_g(a,b)$:

$$\frac{af(b)+bf(a)}{f(a)+f(b)} = \frac{ag(b)+bkf(a)}{kf(a)+g(b)}, \tag{5.2}$$

luego multiplicando y reagrupando los términos, obtenemos:

$$af(a)[kf(b)-g(b)] = bf(a)[kf(b)-g(b)],$$

ya que $kf(b)-g(b) \neq 0$ y $f(a) \neq 0$, debemos tener que $a=b$, lo que sería una contradicción. $\square$

Observación: Cuando asociamos M_f con una f dada, podríamos asumir sin perdida de generalidad que $f(1)=1$.

Cualquier función f determina una media M_f (por la fórmula 5.1), pero no cualquier media es determinada por una función. Obviamente tenemos dificultades con el máx y el mín, y otras poco menos dificultosas de algunas otras medias homogéneas.

Teorema 5.2.2. *Sea $m(a,b)$ una media homogénea, y definamos $f(x)$ como:*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-m(1,x)}{m(1,x)-1}, & \text{si } x \neq 1; \\ 1, & \text{si } x = 1. \end{cases} \tag{5.3}$$

Si $f(x)$ es multiplicativo, entonces $m = M_f$. Si $f(x)$ no es multiplicativo, entonces $m \neq M_f$ para cualquier f.

Demostración: Si $m = M_f$, f está determinada por 5.1 con $a=1$, $b=x$ y $f(1)=1$, sería 5.3. Entonces, m es homogénea:

$$m(x,xy) = xm(1,y),$$

además,

$$\frac{xf(xy)+xyf(x)}{f(x)+f(xy)} = x\frac{f(y)+y}{1+f(y)},$$

luego, haciendo arreglos algebraicos y simplificando, obtenemos:

$$f(xy) = f(x)f(y).$$

□

Esto nos quiere decir que la única posibilidad de producir una función homogénea M_f son con constantes múltiplos de las potencias de x. Esto es enfatizando siempre que $m(1,x) \neq 1$ la función obtenida por 5.3 podría ser usada para calcular correctamente la media de 1 y x. Solo cuando ningún argumento de la media sea 1 ya que nos traería problemas.

Por ejemplo, la media Heroniana asociada a la función 5.3:

$$f(x) = \frac{x - \dfrac{x+\sqrt{x}+1}{3}}{\dfrac{x+\sqrt{x}+1}{3} - 1} = \frac{1+2\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}} \ ,$$

la cual podemos ver que no es multiplicativa.

$$\begin{aligned} He(3,7) = \frac{3+\sqrt{21}+7}{3} &= 4861 \ , \ pero \\ \frac{3f(7)+7f(3)}{f(3)+f(7)} &= 4876. \end{aligned}$$

La media considerada por Moskovitz, sólo las siguientes funciones multiplicativas tienen asociadas consigo 5.3:

M_f	f
A	1
G	$\sqrt{x}$
H	x
C	$1/x.$

La técnica de Moskovitz proporciona un conjunto de medias parametrizadas por una sola variable, dada por:

$$M_s(a,b) = M_{x^s}(a,b) = \frac{ab^s + ba^s}{a^s + b^s}. \tag{5.4}$$

Ya sea una geométrica o analítica, para a y b fijos, M_s es una función decreciente de s, es decir:

$$\lim_{s\to\infty} M_s = \min \quad y \quad \lim_{s\to-\infty} M_s = \max\,.$$

La propiedad de monotonía está compartida por muchos otros conjuntos de medias que encontramos en la literatura. A continuación un listado de estas:

1. Media potencial:

$$P_s(a,b) = \left(\frac{a^s + b^s}{2}\right)^{1/s}. \tag{5.5}$$

2. La media de Gini:

$$G_s(a,b) = \frac{a^s + b^s}{a^{s-1} + b^{s-1}}, \tag{5.6}$$

   también estudiada por Beckenbach [3] y Lehmer.

3. La media logarítmica generalizada de Stolarsky:

$$U_s(a,b) = \left(\frac{a^s - b^s}{s(a-b)}\right)^{1/(s-1)}. \tag{5.7}$$

   Dado que $M_s(a,b)$ y $G_s(a,b)$ tienen propiedades similares, entonces se puede escribir como una identidad:

$$M_s(a,b) = G_{1-s}(a,b).$$

4. Las familias de dos parámetros también existen. Varios de la media de Gini, de varias variables, reducido en el caso de dos variables:

$$G(r,s;a,b) = \left(\frac{a^s + b^s}{a^r + b^r}\right)^{1/(s-r)}, \tag{5.8}$$

   lo cual generaliza 5.6.

5. Leach y Sholander, trabajaron con:

$$E(r,s;a,b)=\left(\frac{r(a^s-b^s)}{s(a^r-b^r)}\right)^{1/(s-r)}, \tag{5.9}$$

lo cual generaliza 5.7. La media 5.5 es un caso especial de 5.8 y 5.9. Los dos parámetros en las medias son monótonas en cada parámetro si a y b y los otros parámetros están fijos.

5.3 Medias y el Teorema del Valor Medio.

La fórmula 5.7 origina un caso especial de un método general para una media asociada con una función en [18], tal como la 5.4 se origina de la técnica de alineación de Moskovitz. Ahora sea g una función estrictamente monótona, diferenciable y convexa en $(0,\infty)$. Luego el Teorema del Valor Medio garantiza para las derivadas, que para cada par de números a y b existe una única $c\in(a,b)$, que satisface:

$$g'(c)=\frac{g(b)-g(a)}{b-a}.$$

Al escribir $c=U_g(a,b)$. El c elegido, claramente se encuentra entre a y b, y obviamente que también es simétrico, tal como lo muestra la figura 5.2:

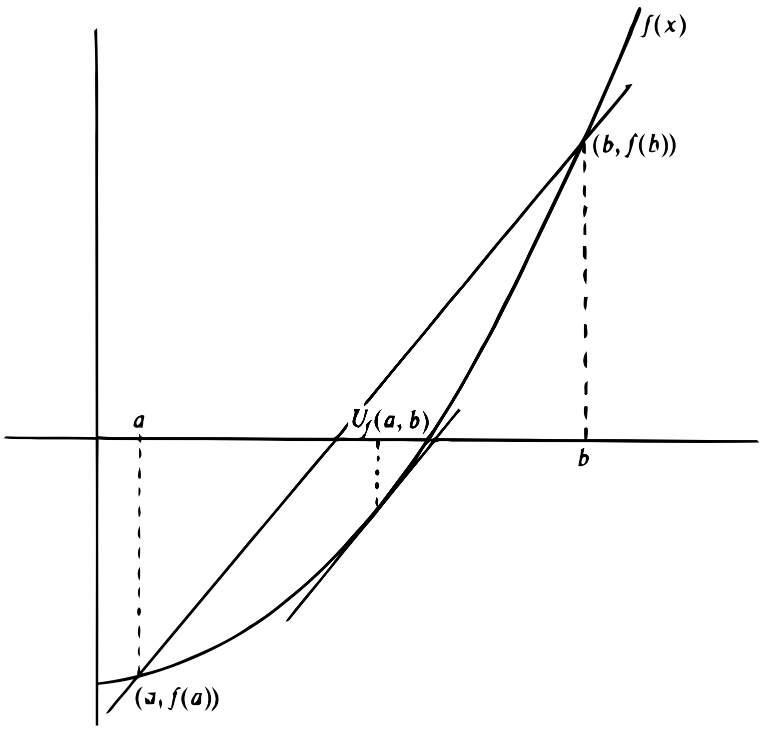


Figura 5.2: $f(x)$, monótona, convexa y diferenciable en $(0, \infty)$.

El Teorema del Valor Medio para las integrales, genera valores medios, también. Solo necesitamos asumir que f es (estrictamente) monótona y continua en $(0, \infty)$, es seguro que existe una única c en (a, b), que satisface:

$$f(c)(b-a) = \int_a^b f(x)dx.$$

Definimos la media v_f por:

$$V_f(a,b) = f^{-1}\left[\frac{\displaystyle\int_a^b f(x)dx}{b-a}\right].$$

El siguiente teorema muestra el conjunto de medias:

$$\{U_g | g \text{ es monótona, diferenciable y convexa}\}$$

y,

$$\{V_f | f \text{ es monótona y continua}\},$$

son lo mismo, pero usaremos la forma V_f exclusivamente en adelante porque, tenemos una clase amplia de funciones que nos permiten generar medias (al menos superficialmente). hay una más elegante caracterización de esas funciones las cuales generan la misma media, la integral tiene un más claro enlace al trabajo de Hardy, Littlewood y Pólya [9], y todas las medias "buenas.ªsociadas a las potencias de x (ver figura 5.3).

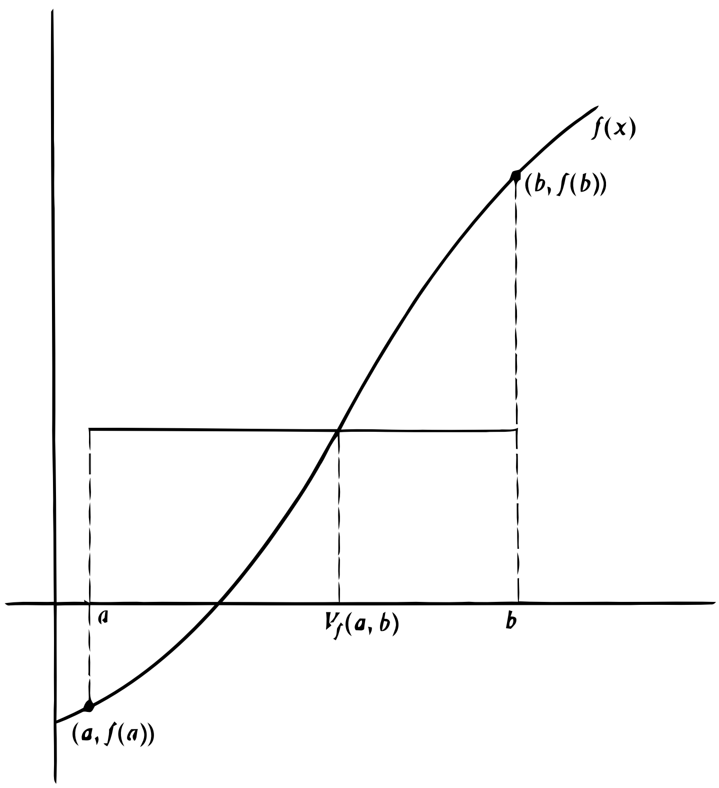


Figura 5.3: .

Teorema 5.3.1. *Si f es monótona y continua, entonces:*

$$V_f = U_{\int f(x)dx}.$$

Si g es monótona, diferenciable y convexa, entonces:

$$U_g = V_{D_x g}.$$

La demostración es una aplicación de las propiedades de las funciones reales y del Teorema Fundamental del Cálculo. Hardy, Littlewood y Pólya asocian una media de varios números con una función continua y monótona. Para los números (no negativos) $a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n$ y la sucesión $q_1, q_2, ..., q_n$ y su suma es 1, $\Re_f(a_1, a_2, ..., a_n)$ está definido por:

$$\Re_f(a_1, a_2, ..., a_n) = f^{-1}\left[\sum_{i=1}^{n} q_i f(a_i)\right].$$

Tomamos $a_1 = a$, $a_2 = a + \dfrac{b-a}{n}$, hasta un $a_n = a + \dfrac{(b-a)(n-1)}{n}$, y $q_i = \dfrac{1}{n}$, para cada i, así obtenemos:

$$\sum_{i=1}^{n} q_i f(a_i),$$

una suma de Riemann para

$$\int_a^b \frac{f(x)}{b-a} dx.$$

Es una suma superior si f es decreciente e inferior si f es creciente. Fancier elige para el q_i obteniendo una integral de Stieltjes en el límite. En efecto, tenemos construida una media de dos variables como una generalización de una media de n variables. Las propiedades de $\Re_f$ desarrolladas en [9] resultan las propiedades de V_f. El teorema 16 de [9] nos dice que, V_{x^s} puede ser abreviado como V_s, V_s es una función creciente de s para a y b fijos. A continuación algunas medias para V_s para algún s:

s	V_s
$\to \infty$	máx
1	A
$\to 0$	I
$-1/2$	$(A+G)/2$
-1	L
-2	G
-3	$(HG^2)^{1/3}$
$\to -\infty$	mín

Teorema 5.3.2. *$V_f(a,b) = V_g(a,b)$ para todo a y b si y solamente si, existe una constante $c \neq 0$ tal que $f = cg + k$.*

Una consecuencia de este teorema es que podemos asumir que f es una función creciente sin perdida de generalidad. De seguro podemos tomar $f(1) = 1$, y si f es diferenciable en 1, $f'(1) = 1$, para una elección apropiada de c y de k.

Teorema 5.3.3. *Supongamos que f es continua y monótona en $(0,\infty)$, y que V_f es homogénea. Entonces, $V_f = V_s$ para todo número real s.*

Teorema 5.3.4. *$H \neq V_f$ para todo f.*

Demostración: Por el teorema anterior 5.3.4, como H es homogénea solo necesitamos mirar la media de V_s. Si $V_s(1,2) = H(1,2) = 4/3$, resolviendo:

$$\left(\frac{2^{s+1}-1}{s+1}\right)^{1/s} = \frac{4}{3},$$

obtenemos como resultado que $s = -5,14$, pero si $V_s(1,3) = H(1,3) = 3/2$,

$$\left(\frac{3^{s+1}-1}{2s+2}\right)^{1/s} = \frac{3}{2},$$

la solución $s = -5,36$. $\square$

Bibliografía

[1] Alegría P. (2007). *Teoría de la medida*. Universidad del País Vasco.

[2] APMO. *Asian Pacific Mathematics Olympiad*. http://cms.math.ca/Competitions/APMO/.

[3] Beckenbach E., Bellman, R. (1961). *An Introduction to Inequalities*, Random House inc, The L. W. Singer Company.

[4] Brézis H. (1983). *Análisis Funcional. Teoría y aplicaciones*. Alianza Universidad Textos.

[5] Bruzual R., Domínguez M. (2005). *Espacios de Banach*. Universidad central de Venezuela.

[6] Bruzual R., Domínguez M. (2005). *Espacios de Hilbert*. Universidad central de Venezuela.

[7] Bulajich R., Gómez J., Valdez R. (2007). *Desigualdades*. UNAM.

[8] García L. C., Lomelí H. E. (2011). *Miscelánea de desigualdades: Bernoulli, Young y varias más*. Departamento de Matemáticas Instituto Tecnológico Autónomo de México. (Pág. 63-73).

[9] Hardy G., Littlewood J. E., Polya, G. (1999). *Inequalities*, Cambridge Mathematical Library, Cambridge University Press.

[10] Korovkin P. P.(1976). *Lecciones populares de matemáticas. Desigualdades*. Moscú.

[11] Kreyszig E. (1989). *Introductory Functional Analysis with applications*. University of Windsor. Wiley Classics Library.

[12] Mays M. E. (2013). *Which Parametrize Means*, The American Mathematical Monthly, Vol. 90, No. 10 (Dec. 1983). pp. 677-683, Mathematical Association of America.

[13] Nieto J. H. *Desigualdades*.

[14] OIM. *Olimpiada Internacional de Matemática.* http://www.imo-official.org/?language=es.

[15] Ph Mendoza F.*Curso de Topología.* Universidad de Los Andes. Facultad de Ciencias. http://webdelprofesor.ula.ve/ciencias/lico/web-topologia/curso-topologia.htm

[16] Real Academia Española.(2001). *Diccionario de la Lengua Española*, Vigésima segunda edición.

[17] Steele J. M. (2004). THE CAUCHY–SCHWARZ MASTER CLASS, *An Introduction to the Art of Mathematical Inequalities*, The Mathematical Association Of America.(Pág. 19-26, 135-154).

[18] Stolarsky K. B. (1975). *Generalizations of the logarithmic mean.*(pp 87-92).

[19] S/A.*Capítulo 2: Espacios Topológicos.* http://matematicas.reduaz.mx/home/materiales/topologia/libro/TopoConjuntos02.pdf