UNIVERSIDAD DEL BÍO-BÍO
FACULTAD DE EDUCACIÓN Y HUMANIDADES
ESCUELA DE PEDAGOGÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

"ANÁLISIS DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS"

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE PROFESOR DE EDUCACIÓN MEDIA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA.

AUTORES: **DIEGO ANTONIO MIRANDA VALLEJOS**
DAVID ALESSANDRO ORTIZ ZÚÑIGA

Profesor Guía: **Dr. Luis Alberto Friz Roa**

Chillan, 2015

Agradecimientos

A Nuestro Profesor Guía

En primer lugar nos gustaría expresar nuestro más profundo y sincero agradecimiento a nuestro profesor Luis Friz Roa, por la orientación, motivación, y el apoyo recibido a lo largo de estos años que han sido fundamentales para nuestra formación como docentes.

Un trabajo de investigación es siempre fruto de ideas y esfuerzos. En este caso debemos agradecer al proyecto fondecyt: 1130456 que nos aportó el financiamiento para el desarrollo de nuestro proyecto.

Quiero agradecer en primer lugar a Dios por bendecirme y darme la oportunidad de cumplir este sueño tan anhelado. Agradezco de todo corazón a mis padres y mi hermano por el apoyo incondicional y confianza que depositaron en mí, siendo fundamentales para culminar de manera exitosa mi carrera profesional. Finalmente, no puedo olvidar a mis compañeros y amigos con los cuales he compartido buenos y malos momentos que hicieron de esta experiencia una de las más especiales.

Diego Antonio Miranda Vallejos

Agradezco en primer lugar a Dios por brindarme la posibilidad de haber terminado mi carrera con éxito, agradezco también a mi padre y hermana quienes fueron los dos pilares fundamentales a lo largo de toda mi carrera, apoyando en todo momento y motivándome a seguir adelante, finalmente le agradezco a mi amada señora Camila Ortiz por acompañarme en mi carrera apoyándome en buenos y malos momentos junto a mi pequeño hijo Julián Ortiz. A todos ellos y también a mi madre que está en el cielo les dedico este logro tan importante en mi vida.

David Alessandro Ortiz Zúñiga.

Índice general

Resumen

El presente trabajo de investigación realiza un análisis cualitativo de las ecuaciones diferenciales, dividiendo este objeto de estudio en tres capítulos, el primero está enfocado a estudiar los distintos tipos de ecuaciones diferenciales ya sean ecuaciones diferenciales ordinarias de variables separables, Exactas, homogéneas, etc. Basándose principalmente a cómo identificar el tipo de ecuación diferencial, analizando su forma, luego estudiaremos los métodos para solucionar estas ecuaciones diferenciales dando un ejemplo en cada caso. Al finalizar este capítulo podremos manejar los diferentes métodos de resolución para los diversos tipos de ecuaciones diferenciales, pero el tema "ecuaciones diferenciales" es demasiado amplio y complejo, por lo que en algunos casos es posible darse cuenta que para ciertos problemas de ecuaciones diferenciales no es posible encontrar la solución de este problema de una forma sencilla, es aquí donde nacen interrogantes que tienen relación con, cómo saber si una ecuación diferencial tiene o no solución. Nuestro segundo capítulo trata precisamente de este problema, analizaremos diferentes teoremas de existencia y de unicidad de soluciones, tales como el teorema del punto fijo o el teorema de Picard-Lindeof, de esta forma estaremos pasando a un análisis más cualitativo de las ecuaciones di-

ferenciales. Para concluir nuestra tesis trabajamos con un lema de gran utilidad en el análisis cualitativo de las ecuaciones diferenciales, el lema de Gronwall que nos proporciona la posibilidad de establecer cotas para las soluciones que ya sabemos cómo encontrar.

Capítulo 1

Introducción

Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden es una expresión que relaciona una variable independiente x con una variable dependiente $y(x)$ y su primera derivada $y'(x)$:

$$F(x, y(x), y'(x)) = 0, \quad x \in [a, b].$$

Por ejemplo, son ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden las siguientes:

$$y'(x) = 0, \quad \frac{dy}{dx} = y, \quad y + (y')^{1/2} + 6x = sen(x).$$

Para representar la derivada de y respecto de x usaremos indistintamente las notaciones y', $y'(x)$ o $\dfrac{dy}{dx}$. Salvo que sea necesario por claridad, en general no expresaremos la dependencia de la variable y respecto de x:

$$F(x, y, y') = 0, \quad x \in [a, b].$$

Una solución de una ecuación diferencial de primer orden es una función

$$y : [a, b] \to \mathbb{R}$$

que verifica la ecuación en cada punto $x \in [a, b]$. Para que esta definición tenga sentido, es preciso que la función $y(x)$ sea derivable en el intervalo $[a, b]$ y que dicha derivada sea una función continua: se dice entonces que $y(x)$ es de clase $C^1([a, b])$.

Ejemplo. La función $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $y(x) = e^{-x}$ es una solución de la ecuación diferencial $y' = -y$, ya que es derivable con continuidad en $\mathbb{R}$ y:

$$y'(x) = -e^{-x} = -y(x).$$

La solución general de una ecuación diferencial de primer orden es una familia de funciones $y \equiv y(x, C)$ dependiente de un parámetro (o constante arbitraria) C que nos proporciona todas las posibles soluciones de la ecuación diferencial.

Ejemplo. La solución general de la ecuación diferencial $y' = -y$ es:

$$y = Ce^{-x} \tag{1.1}$$

Siendo $C \in \mathbb{R}$ una constante arbitraria. En efecto, cualquier función de la forma anterior 1.1 es solución de la ecuación:

$$y'(x) = -Ce^{-x} = -y(x).$$

Más adelante veremos que todas las posibles soluciones de la ecuación tienen la forma anterior 1.1

Resolver una ecuación diferencial significa obtener todas sus soluciones, esto es, hay que determinar su solución general. La inmensa mayoría de ecuaciones diferenciales no pueden resolverse mediante métodos analíticos, es decir, no es posible obtener una expresión exacta de la solución $y \equiv y(x, C)$. En este tema estudiaremos diversos tipos clásicos de ecuaciones que sí pueden resolverse de forma explícita.

Una ecuación diferencial de primer orden está escrita en forma normal (también se dice que está resuelta respecto de la derivada) si la derivada y' aparece despejada:

$$y' = f(x, y).$$

Toda ecuación en forma normal también puede escribirse en forma diferencial:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0.$$

En efecto:

$$y' = f(x,y) \implies \frac{dy}{dx} = f(x,y) \implies f(x,y)dx - dy = 0;$$

Basta con tomar $M(x,y) = f(x,y)$ y $N(x,y) = -1$

A continuación estudiaremos métodos de resolución fundamentales de ecuaciones diferenciales de primer orden.

1.1 EDO a variable separable

Un caso particular de las ecuaciones diferenciales ordinarias, son las EDO a variables separables que son aquellas en la cuales F puede expresarse como producto de una función que depende solo de x por otra que depende solo de y, es decir:

$$y' = F(x, y) = g(x)h(y)$$

Si $h(y) = 0$, la ecuación tiene solución $y = C$, con $C \in \mathbb{R}$, pero en el caso de que $h(y) \neq 0$ podríamos expresar la ecuación de la siguiente forma:

$$\frac{1}{h(y)}y' = g(x) \tag{1.2}$$

Entonces $y = \varphi(x)$ es solución de la ecuación 1.2 sí y solo sí $\dfrac{1}{h(\varphi(x))}\varphi'(x) = g(x)$, integrando respecto a x tenemos que:

$$\int \frac{1}{h(\varphi(x))}\varphi'(x)dx = \int g(x)dx$$

Si consideramos que $dy = \varphi(x)dx$, podemos expresar esto de la siguiente forma:

$$\int \frac{1}{h(y)}dy = \int g(x)dx$$

Siendo H y G primitivas de las funciones $\dfrac{1}{h}$ y g, respectivamente, tenemos lo siguiente:

$$H(y) = G(x) + C$$

Por lo tanto $y = \varphi(x)$, es solución de 1.2 sí y solo sí $H(\varphi(x)) = G(x) + C$

De esta manera hemos resuelto la ecuación diferencial dada, encontrando todas las soluciones. En este, como en otros tipos de ecuaciones, el método de resolución conduce a una expresión implícita de la solución.

Teorema 1.1.1 *Sean g y h, dos funciones continuas de variable real definidas en los intervalos $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$, respectivamente, y considere la ecuación:*

$$h(y)y' = g(x)$$

Si G y H, son dos funciones cualesquiera tales que $G' = g$, $H' = h$, y C es cualquier constante, tal que la relación:

$$H(y) = G(x) + C$$

Define para x, en cierto intervalo I, contenido en $a \leq x \leq b$, a una función derivable φ, de variable real, entonces φ será una solución de (1.1) en I. Recíprocamente, sí φ es una solución de (1.1) en I, esta va a satisfacer la relación:

$$H(y) = G(x) + C$$

En el intervalo I, para la constante C.

Ejemplo.

Consideremos la ecuación diferencial $y' = 2xy$, que es de variables separables. Para resolverla, separamos las variables e integramos:

$$\frac{dy}{dx} = 2xy \Rightarrow \frac{dy}{y} = 2x\,dx \Rightarrow \int \left(\frac{dy}{y}\right) = \int 2x\,dx \Rightarrow ln(y) = x^2{+}c,$$

siendo c una constante de integración. Despejemos la variable y:

$$y = e^{x^2+c} = e^{x^2}e^c$$

Por último, renombrando la constante e^c como una constante arbitraria C, obtenemos la solución general de la ecuación:

$$y = Ce^{x^2}.$$

1.2 Homogéneas.

Supongamos que tenemos la ecuación:

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

Para resolverla, hacemos el cambio de función $y(x)$ por $u(x)$ mediante $u = \dfrac{y}{x}$ Así, derivando $y = ux$ tenemos $y' = u'x + u$, es decir:

$$u'x + u = f(u). \tag{1.3}$$

Esta ecuación 1.3 que podemos poner como $u'x = f(u) - u$, es de variables separadas. Vamos a solucionarla:

Si $f(u) \neq u$, podemos escribir $\dfrac{\partial u}{f(u)-u} = \dfrac{\partial x}{x}$ e,

integrando $\displaystyle\int \frac{\partial u}{f(u)-u} = \log\left(\frac{x}{c}\right)$.

Despejando x obtenemos $x = Ce^{\varphi(u)}$ con $\varphi(u) = \displaystyle\int \frac{\partial u}{f(u)-u}$. Por tanto, las curvas con ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x = Ce^{\varphi(u)} \\ y = Cue^{\varphi(u)} \end{cases}$$

son solución de la ecuación diferencial 1.3 para cada $C \in \mathbb{R}$ (Esto constituye una familia de curvas homotéticas: una curva se obtiene de otra mediante una homotecia, es decir, multiplicando los valores de x e y por una constante). A veces, es conveniente expresar estas soluciones de otras formas. Siempre puede ponerse $x = Ce^{\varphi(y/x)}$, solución dada mediante una función implícita. Y, cuando en $x = Ce^{\varphi(u)}$ se logra despejar de alguna forma $u = H(x, C)$, la solución de la E.D. queda mucho más sencilla: $y = xH(x, C)$.

Supongamos ahora que existe algún u_0 tal que $f(u_0) = u_0$. En este caso, es inmediato comprobar que la recta $y = u_0\, x$ es solución:

$y' = u_0 = f(u_0) = f\left(\frac{y}{x}\right)$, luego se satisface la ecuación diferencial. Este tipo de soluciones que no se obtienen con el procedimiento general suelen denominarse soluciones singulares.

Nota: En general, una función $h(x,y)$ se dice homogénea de grado α si $h(\lambda x, \lambda y) = \lambda^\alpha h(x,y)$.

Es inmediato comprobar que una E.D. de la forma:

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

con $P(x,y)$ y $Q(x,y)$ funciones homogéneas del mismo grado es, efectivamente, una ecuación diferencial homogénea (despejar $y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{P(x,y)}{Q(x;y)} = -\frac{P(x,x(y/x)}{Q(x;x(y/x))}$ y extraer $\lambda = x$ de P y Q De aquí proviene el nombre de este tipo de ecuaciones.

Ejemplo.

$$y' = \frac{2xy - y^2}{x^2}$$

Con el cambio $y = ux$ podemos poner $y' = 2\left(\frac{y}{x}\right) - \left(\frac{y}{x}\right)^2 = 2u - u^2$. Como $y' = u'x + u$, sustituyendo tenemos $u'x + u = 2u - u^2$, es decir, $xu' = u - u^2$.

Si $u \neq u^2$, podemos poner $\frac{du}{u - u^2} = \frac{dx}{x}$.Para integrar, descomponemos$\frac{1}{u - u^2} = \frac{A}{u} + \frac{B}{1 - u}$ lo se satisface para $A = B = 1$.

Entonces, integrando, $log\ u$ - $log\ (1 - u) = log\left(\frac{x}{c}\right)$, es decir,$\frac{u}{1 - u} = \frac{x}{c}$, y sustituyendo $u = \frac{y}{x}$ tenemos $\frac{y/x}{1 - y/x} = \frac{x}{c}$, de donde $C_y = x(x - y)$.

De aquí es fácil despejar explícitamente y si así se desea.

Por otra parte, a partir de $u_0 = 0$ y $u_0 = 1$ (para las cuales $u = u^2$), se tienen las soluciones singulares $y = 0$ e $y = x$

1.3 Reducibles a homogéneas.

Consideremos la ecuación:

$$y' = f\left(\frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{ax + bx + c}\right) \tag{1.4}$$

Para resolverla, hay que distinguir dos casos:

Supongamos en primer lugar que las rectas $ax+bx+c=0$ y $a_1x+b_1x+c_1=0$ se cortan en el punto (x_0,y_0).

Así, tendremos que $ax+bx+c=a(x-x_0)+b(x-y_0)$ y $a_1x+b_1x+c_1=a_1(x-x_0)+b_1(x-y_0)$.

Hagamos ahora el cambio de variable y de función $X=x-x_0$, $Y=(x-y_0)$, con lo cual

$$Y'=y'=f\left(\frac{a_1(x-x_0)+b_1(x-y_0)}{a(x-x_0)+b(x-y_0)}\right)$$

$$=f\left(\frac{a_1X+b_1Y}{aX+bY}\right)=f\left(\frac{a_1+b_1\left(\dfrac{Y}{X}\right)}{a+b\left(\dfrac{Y}{X}\right)}\right),$$

es decir, hemos reducido la ecuación 1.4 a una homogénea.

En segundo lugar, supongamos que $ax+bx+c=0$ y $a_1x+b_1x+c_1=0$ son rectas paralelas, con lo cual podrá ponerse $(a_1,b_1)=K(a,b)$ para algún $K\in\mathbb{R}$. Efectuemos ahora el cambio de función $z=ax+by$.

Derivando, $z'=a+by'$,o sea , $y'=\dfrac{z'-a}{b}$. Si sustituimos en 1.4 obtenemos

$$\frac{dz}{dx} = a + bf\left(\frac{Kz + c_1}{z + c}\right)$$

que es de variables separadas.

Ejemplo.

$$y' = \frac{-2x + 4y - 6}{x + y - 3}$$

Las rectas $-2x+4y-6=0$ y $x+y-3=0$ se cortan en el punto $(x, y) = (1, 2)$, con lo que efectuamos el cambio $X = x - 1$, $Y = y - 2$, $Y' = y'$. Sustituyendo, obtenemos la ecuación homogénea:

$$y' = \frac{-2X + 4Y}{X + Y} = \frac{-2 + \dfrac{4Y}{X}}{1 + \dfrac{Y}{X}}.$$

Para resolverla, hacemos un nuevo cambio $u = \dfrac{Y}{X}$, de donde $Y = uX$, $Y' = u'X + u$.

Tras sustituir, tenemos $u'X + u = \dfrac{-2 + 4u}{1 + u}$ que posteriormente podemos poner como $-X\left(\dfrac{du}{dX}\right) = \dfrac{u^2 - 3u + 2}{u + 1}$.

Tenemos ahora que distinguir cuándo, y cuándo no, se anula la expresión $u^2 - 3u + 2$.

Resolviendo $u^2 - 3u + 2 = 0$, esto ocurre para $u = 1$ y $u = 2$.

Analicemos en primer lugar el caso $u^2 - 3u + 2 \neq 0$. Así, podemos escribir

$$\frac{dX}{X} = \frac{-(u+1)}{u^2 - 3u + 2}du = \frac{A}{u-1}du + \frac{B}{u-2}du = \frac{2}{u-1}du - \frac{3}{u-2}du$$

de donde, integrando, $2log(u-1) - 3log(u-2) = log(KX)$ y por consecuencia $\dfrac{(u-1)^2}{(u-1)^3} = KX$. Sustituyendo ahora $u = \dfrac{Y}{X}$ llegamos fácilmente a $(Y - X)^2 = K(Y - 2X)^3$; y volviendo a las variables originales x e y obtenemos las soluciones $(y - x - 1)^2 = K(y - 2x)^3$ de la E.D. de partida.

Finalmente, con $u_o = 1$ y $u_o = 2$ tenemos, respectivamente, las soluciones $Y = X$ e $Y = 2X$ que, sustituyendo X e Y por su valor, se traducen en $y = x + 1$ e $y = 2x$.

1.4 Homogéneas implícitas.

Sea la ecuación:

$$F\left(\frac{y}{x}, y'\right) = 0$$

Para resolverla, consideremos la curva $F(\alpha, \beta) = 0$ y supongamos que hemos logrado encontrar una representación paramétrica de la curva dada por $\alpha = \varphi(t)$, $\beta = \psi(t)$ Es decir, que se verifica $F(\varphi(t), \psi(t)) = 0$. Hagamos ahora el cambio de función y por t mediante $\dfrac{y}{x} = \varphi(t)$, teniendo en cuenta que $y' = \psi(t)$.

Si derivamos $y = x\varphi(t)$ respecto de x tenemos $y' = \varphi(t) + x\varphi'(t)\dfrac{dt}{dx}$, es decir, $\psi(t) = \varphi(t) + x\varphi'(t)\dfrac{dt}{dx}$, o

$$\psi(t) - \varphi(t) = x\varphi'(t)\frac{\mathrm{dt}}{dx}$$

que, en principio, es una ecuación en variables separadas.

Si $\psi(t) \neq \varphi(t)$,podemos poner $\dfrac{\varphi'(t)dt}{\psi(t) - \varphi(t)} = \dfrac{dx}{x}$, cuya solución será $x = Ce^{\phi(\mathrm{t})}$ con $\phi(t) = \displaystyle\int \frac{\varphi'(t)dt}{\psi(t) - \varphi(t)}$. De aquí que la E.D. de partida tiene las soluciones

$$\begin{cases} x = Ce^{\phi(\mathrm{t})} \\ y = C\varphi(t)e^{\phi(t)} \end{cases} \quad , \; C \in \mathbb{R}$$

Si existe t_o tal que $\psi(t_o) = \varphi(t_o)$, formalmente, podemos pensar $0 = x\varphi'(t)\dfrac{dt}{dx}$, luego $\varphi'(t) = 0$ y por tanto $\varphi(t) = cte = \varphi(t_o)$ lo que nos llevaría a la solución $y = x\varphi(t_o)$. Esta recta es, efectivamente, una solución de la E. D., como podemos comprobar directamente:

$$F(\frac{y}{x}, y') = F(\varphi(t_o), \varphi(t_o)) = F(\varphi(t_o), \psi(t_o)) = 0$$

Ejemplo.

$$x^2(y')^2(y^2 + x^2) = 0.$$

Si ponemos la ecuación en la forma $(y')^2 - \left(\dfrac{y}{x}\right)^2 = 1$, podemos recordar que el coseno y el seno hiperbólicos satisfacen la relación $(cht)^2 - (sht)^2 = 1$, lo que se adecua a nuestras necesidades. Así, tomemos ahora $\dfrac{y}{x} = sht \; y' = cht$. Si derivamos $y = xsht$ tenemos $y' = sh\,t + xch\,t$, o sea, $cht = sht + xcht\dfrac{dt}{dx}$. Despejando, $\dfrac{dx}{x} = \dfrac{cht}{cht - sht}$ (notar que, en esta ecuación, el denominador no se anula nunca ya que $cht > sht$, luego no hay que preocuparse de analizar por separado las raíces de $cht - sht = 0$) e, integrando, $x = Ce^{\phi(\mathrm{t})}$ con:

$$\phi(t) = \int \frac{cht}{cht - sht} dt = \int \frac{e^t + e^{-t}}{2e^{-t}} = \frac{1}{2} \int (1+e^{2t}) dt = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}e^{2t}$$

Entonces, la E. D. original tiene como soluciones las curvas:

$$\begin{cases} x = Ce^{t/2+e^{2t}/4} \\ y = C(sht)e^{t/2+e^{2t}/4} \end{cases}$$

1.5 Ecuación de Bernoulli.

Consideremos:

$$y' + a(x)y + b(x)y^{\alpha} = 0 \qquad (1.5)$$

Es claro que, si $\alpha = 0$, la E. D. anterior 1.5 es lineal y, si $\alpha = 1$, es de variables separadas. En otro caso, veamos cómo resolverla:

En efectuaremos el cambio de función $y^{1-\alpha} = z$ para el cual $(1-\alpha)y^{-\alpha}y' = z'$, es decir, $\frac{1}{y^{\alpha}}y' = \frac{z'}{1-\alpha}$ sustituyendo en $\frac{1}{y^{\alpha}}y' + a(x)y^{1-\alpha} + b(x) = 0$ tenemos $\frac{z'}{1-\alpha}a(x)z + b(x) = 0$ con lo que hemos transformado la ecuación de Bernoulli en la E. D. lineal

$$z' + (1 - \alpha)a(x)z = (\alpha - 1)b(x).$$

Puede seguirse un segundo método de resolución sin más que aplicar un procedimiento análogo al último de los que hemos visto para ecuaciones lineales. Partimos de la descomposición $y(x) = u(x)v(x)$ Derivando, $y' = u'v + uv'$ y, sustituyendo en la E.D., $u'v + uv' + a(x)uv + b(x)u^\alpha v^\alpha = 0$ que escribimos como $u'v + (v' + a(x)v)u + b(x)u^\alpha v^\alpha = 0$. Ahora, igualamos a 0 el coeficiente de u, con lo cual tenemos $v' + a(x)v = 0$, que es una ecuación en $v(x)$ de variables separadas; resolviéndola determinamos $v(x)$. Con esta v, la ecuación de la que partíamos ha quedado $u'v + b(x)u^\alpha v^\alpha = 0$, que es una ecuación en $u(x)$ de variables separadas. Resolviéndola encontramos $u(x)$, con lo que ya tenemos completamente solucionada la ecuación de Bernoulli.

Ejemplo.

$$xy' + 2y + x^5y^3e^x = 0.$$

Puesta en la forma $y' + \dfrac{2}{x}y + x^4y^3e^x = 0$, es claro que la ecuación es de Bernoulli con $\alpha = 3$.

Hacemos el cambio de función $y^{-2} = z$, para el cual $z' = -2y^{-3}y'$, es decir, $\dfrac{y'}{y^3} = -\dfrac{z'}{2}$

Si sustituimos esto en $\dfrac{y'}{y^3} + \dfrac{2}{x}y^{-2} + x^4e^x = 0$ queda $z' = \dfrac{4}{x}z = 2x^4e^x$, que es lineal $a(x) = \dfrac{-4}{x}$ y $b(x) = 2x^4e^x$.

Tal como sabemos, la solución de la ecuación lineal es $z = exp(\displaystyle\int a(x)dx)$ x$\left[\displaystyle\int b(x)exp(\int a(x)dx)\ dx + C\right]$.

Como $\displaystyle\int a(x)dx = \int \frac{-4}{x} = 4log\,x = log\,x^{-4}$, se sigue $z = x^4\left(\displaystyle\int \frac{2x^4e^x}{x^4}\,dx + C\right) = x^4(2e^x + C)$.

Por tanto, la solución de la E. D. de Bernoulli es $y^{-2} = x^4(2e^x + C)$, es decir, $y = x^{-2}(2e^x + C)^{-1/2}$.

1.6 E.D.O exactas.

Las ecuaciones diferenciales se llaman exactas cuando son de la siguiente forma:

$$y' = \frac{p(x,y)}{q(x,y)}$$

Lo que es equivalente a $p(x,y) + q(x,y)y'$.

Supongamos también que las funciones p y q son continuas en un disco D, con q no idénticamente nula en D.

Definición. Una ecuación diferencial del tipo $p(x,y) + q(x,y)y' = 0$, se dice exacta sobre el disco D si existe una función f, llamada función potencial, tal que $\nabla f(x,y) = (p(x,y), q(x,y))$ en D.

En este caso la ecuación:

$$p(x,y) + q(x,y)y' = 0$$

Se puede escribir de la siguiente forma:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)y' = 0 \; en \, D. \tag{1.6}$$

Si una función definida sobre un intervalo I es solución de la ecuación 1.6 entonces:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, \varphi(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x))\varphi'(x) = 0$$

Sí $w(x) = f(x, \varphi(x))$, la ecuación 1.6 puede escribirse como $w'(x) = 0$. Resulta que $w(x) = C$, para todo $x \in I$. O sea $f(x, \varphi'(x)) = C$, donde C es una constante. Por lo tanto la solución de la ecuación debería ser una función definida implícitamente por la ecuación $f(x, y) = C$.

Recíprocamente, sí $y = \varphi'(x)$ es una función derivable sobre un intervalo I definida implícitamente por la ecuación $f(x, y) = C$, entonces $f(x, \varphi'(x)) = C$ para todo $x \in I$. Derivando miembro a miembro respecto de x, para todo $x \in I$ se tiene que:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, \varphi(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x))\varphi'(x) = 0$$
$$p(x, \varphi'(x)) + q(x, \varphi'(x))\varphi'(x) = 0$$

Lo que demuestra que la función $y = \varphi'(x)$ es solución de la ecuación diferencial.

Resumiendo:

Sí la ecuación diferencial $p(x, y) + q(x, y)y' = 0$ es exacta, su solución general $y = y(x)$ viene expresada implícitamente por la ecuación $f(x, y) = C$, donde la función f

es tal que $\nabla f(x,y) = (p(x,y), q(x,y))$.

Es posible plantearse dos interrogantes:

a) ¿Cómo saber si una ecuación es exacta?

b) ¿Cómo hallar una función potencial f que nos permita expresar la solución general?

El siguiente teorema da una respuesta a la primera cuestión.

Teorema 1.6.1 *Si $p(x,y)$ y $q(x,y)$son continuas y tienen derivadas parciales de primer orden continuas en un disco $D \in \mathbb{R}^2$, entonces la condición necesaria y suficiente para que la ecuación diferencial $p(x,y) + q(x,y)y' = 0$ sea exacta, es que:*

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x} \;\; \forall\,(x,y) \, \in \, D.$$

La segunda cuestión que nos planteamos es la obtención de la función potencial f tal que:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = p(x,y) \;\; y \;\; \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = q(x,y)$$

Considerando la primera igualdad, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = p(x,y)$, e integrando con respecto a x dejando a y constante:

$$f(x,y) = \int p(x,y)dx + g(y).$$

Derivando con respecto a y la ecuación anterior y consideramos la segunda igualdad, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = q(x,y)$.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\int p(x,y)dx\right) + g'(y) = q(x,y).$$

Despejando:

$$g'(y) = q(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}(\int p(x,y)dx)$$

Resolvemos esta última ecuación para hallar g y reemplazamos.

Ejemplo.

$$3y + e^x + (3x + cos\, y)y' = 0.$$

Si ponemos la ecuación en la forma $Pdx + Qdy = 0$ con $P(x,y) = 3y + e^x$ y $Q(x,y) = 3x + cos\, y$, es claro que $P_y = Q_x = 3$, luego la E. D. es exacta. Calculemos la función potencial F (que nos dará directamente las soluciones $F(x,y) = C$). Como $F_x = 3y + e^x$, integrando respecto de x, $F(x,y) = 3yx + e^x + \varphi(y)$. Derivando respecto de y e igualando a Q queda $3x + \varphi^{'}(y) = 3x + cos\, y$, es decir,

φ'$(y) = cos\, y$, de donde basta tomar $\varphi(y) = sen\, y$, y por tanto $F(x, y) = 3yx + e^x + sen\, y$.

Así, la solución de la E. D. viene dada, implícitamente, por $3yx + e^x + sen\, y = C$.

1.7 Reducibles a exactas, Factores integrantes.

Si tenemos una ecuación $p(x, y)dx + q(x, y)dy = 0$ que no es exacta, una idea para intentar resolverla seria tratar de encontrar alguna función $\mu(x, y)$ no idénticamente nula nula tal que:

$$\mu(x, y)p(x, y)dx + \mu(x, y)q(x, y)dy = 0. \qquad (1.7)$$

Sea exacta.

Como esta ecuación 1.7 es equivalente a la de partida, sus soluciones y las de $p(x, y)dx + q(x, y)dy = 0$ serán las mismas.

Desgraciadamente, no hay ningún procedimiento general que permita encontrar factores integrantes. Sin embargo, si que es posible hacerlo, y de manera sencilla:

Existencia de factor integrante de la forma $\mu(x)$.

Queremos que la ecuación 1.7 sea exacta, esto es:

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu(x)p(x, y)) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu(x)q(x, y)).$$

Derivando, $\mu(x)\ p_y(x,y) = \mu'(x)q(x,y) + \mu(x)q_x(x,y)$, o sea, $\mu(x)(p_y(x,y) - q_x(x,y) = \mu'(x)q(x,y)$. Para que esto tenga sentido:

$$\frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = \frac{p_y(x,y) - q_x(x,y)}{q(x,y)}$$

Tiene que resultar ser una función que dependa exclusivamente de x, que denotamos $h(x)$. Cuando éste es el caso, es claro que la función μ que satisface la relación anterior es:

$$\mu(x) = \exp\left(\int h(x)dx\right)$$

Con lo cual hemos encontrado el factor integrante buscado.

Existencia de factor integrante de la forma $\mu(y)$. repitiendo el proceso anterior, buscamos $\dfrac{\partial}{\partial y}(\mu(y)P(x,y)) = \dfrac{\partial}{\partial x}(\mu(y)Q(x,y))$,es decir, $\mu'(y)P + \mu(y)P_y = \mu(y)Q_x$ y por lo tanto $\dfrac{\mu'(x)}{\mu(x)} = \dfrac{Q_x - P_y}{p}$, que tiene que ser función solo de y, que denotamos $h(y)$. En estas condiciones el factor integrante es:

$$\mu(y) = \exp\left(\int h(y)dy\right).$$

Aparte de los casos anteriormente tratados, para algunos tipos de problemas se puede intentar encontrar factores integrantes imponiendo a $\mu(x,y)$ condiciones restrictivas de muy diverso tipo. Por ejemplo, exigiendo que sea de la forma $\mu(x,y) = x^\alpha y^\beta$ con α y β constantes a determinar, que sea $\mu(x+y)$ o $\mu(xy)$, etc. Para estudiar estos casos, lo que hay que hacer siempre es igualar $\dfrac{\partial}{\partial y}(\mu P) = \dfrac{\partial}{\partial x}(\mu Q)$ e intentar resolver la nueva ecuación que aparece, teniendo en cuenta, sobre todo, si tiene sentido. Por ser generalmente procedimientos bastante particulares, no comentaremos aquí nada más sobre ellos.

Ejemplo.

$$(2x^2 + y)\,dx + (x^2yx)\,dy = 0.$$

En este caso, $P(x,y) = 2x^2 + y$ y $Q(x,y) = x^2y - x$. Esta ecuación no es exacta ya que $P_y = 1$ y $Q_x = 2xy - 1$.

Para intentar encontrar un factor integrante se calcula:

$$\frac{Py - Qx}{Q} = \frac{1 - (2xy - 1)}{x^2yx} = \frac{2(1 - xy)}{x(1xy)} = \frac{-2}{x}.$$

Ya que se obtiene una expresión que depende sólo de x, podemos asegurar que existe un factor integrante dado por la fórmula $\mu(x) = exp\left(\displaystyle\int \frac{-2}{x}\,dx\right) = x^{-2}$. Entonces, si multiplicamos la E.D. por $\mu(x) = x^{-2}$ se obtiene la ecuación exacta$(2 + yx^{-2})\,dx + (y - x^{-1})\,dy = 0$. Por el método usual, encontramos que la función F tal que $F_x = 2 + yx^{-2}$ y $F_y = y - x^{-1}$ es $F(x, y) = 2x - yx^{-1} + \frac{1}{2}y^2$. Por tanto, la solución de la E.D. exacta, y también de la de partida, resulta ser $2x - yx^{-1} + \frac{1}{2}y^2 = C$.

Capítulo 2

Existencia y Unicidad

2.1 Problema de Cauchy:

Un problema de Cauchy o problema de valor inicial, consiste en la búsqueda de una función $y(x)$ definida para los valores x del intervalo $[A, B]$, y que en el punto $x_0$del intervalo $[A, B]$ tome el valor y_0.

Se presenta de la siguiente forma:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad donde\, x \in [A, B].$$

El problema es, bajo que condiciones de regularidad para $f(x, y)$ se puede asegurar que el problema de valor inicial planteado tiene solución y cuando se puede asegurar que esta solución sea única.

Resolver el problema de Cauchy:

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad donde\, x \in [A,B].$$

Es equivalente a encontrar la solución de la siguiente ecuación:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))ds$$

Si existe una función $y(x)$ que sea solución del problema de Cauchy se debe verificar que $y\prime(x) = f(x, y(x))$. Integrando esta expresión e imponiendo la condición $y(x_0) = y_0$ se tiene:

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x} y'(s) = \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))ds &\Longrightarrow y(x) - y_0 = \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))ds \\ &\Longrightarrow y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))ds. \end{aligned}$$

Para encontrar la solución se puede definir una transformación T sobre el conjunto de todas las funciones φ continuas en $[A, B]$ en R^n de manera que:

$$T\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, \varphi(s))ds.$$

Si existe una función φ, tal que $T(\varphi) = \varphi$, es decir, si la transformación T tiene un punto fijo, φ es precisamente la solución del problema de Cauchy propuesto.

2.2 Aplicaciones contractivas. Teorema del punto fijo.

No toda transformación tiene un punto fijo. Pero existen transformaciones para las que se puede garantizar su existencia. Un ejemplo de ellas son las transformaciones contractivas, que serán de utilidad para garantizar la existencia y unicidad de solución de un problema de Cauchy.

Definición. Sea T una aplicación definida en un espacio métrico E en si mismo. T es una aplicación contractiva si existe α, $0 < \alpha < 1$, tal que para todo $(x, y) \in E$ se verifica que $d(T(x), T(y)) \leq \alpha d(x, y)$.

De la propia definición se deduce que una aplicación contractiva es continua. El siguiente teorema asegura la existencia de un punto fijo para las transformaciones contractivas

Teorema 2.2.1 *Toda aplicación contractiva T definida de un espacio métrico completo E en sí mismo tiene un único punto fijo. Es decir, existe un punto $x \in E$ tal que $T(x) = x$.*

Demostración. Sea $x_0 \in E$ un punto de partida. Si se aplica la transformación T sucesivamente se tiene: $T(x_0) = x_1, T(x_1) = x_2, ..., T(x_n) = x_{n+1}...$

La sucesión resultante es una sucesión de Cauchy, pues en efecto, se tiene que:

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(T(x_n), T(x_{n-1})) \leq \alpha d(x_n, x_{n-1}) \leq ... \leq \alpha^n d(x_1, x_0).$$

Utilizando la propiedad triangular de la distancia se obtiene que la distancia entre dos elementos cualesquiera de la sucesión es:

$$d(x_{n+k}, x_n) \leq d(x_{n+k}, x_{n+k-1}) + d(x_{n+k-1}, x_{n+k-2}) + ... + d(x_{n+1}, x)_n$$

$$\leq (\alpha^{n+k-1} + \alpha^{n+k-2} + ... + \alpha)^n d(x_1, x_0) \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} d(x_1, x_0)$$

Como α es menor que 1, para un valor de n suficientemente grande la distancia $d(x_{n+k}, x_n)$ se puede hacer tan pequeña como se quiera; por tanto la sucesión es de Cauchy, y como E es un espacio métrico completo la sucesión es convergente.

Sea x el límite de la sucesión. Como T es continua:

$$T(x) = T(\text{lím}\, x_n) = \text{lím}\, T(x_n) = \text{lím}\, x_{n+1} = x.$$

Se tiene entonces que el límite de la sucesión es un punto fijo T.

Sólo falta demostrar que es el único punto fijo de la transformación. Esto es así por que si existiera otro punto fijo z distinto de x, al ser T contractiva:

$d(x,z) = d(T(x), T(z)) \leq \alpha d(x,z) < d(x,z)$, lo cual es una contradicción. Por tanto el punto fijo es único.

Una observación de interés es que la demostración anterior proporciona un camino para hallar el punto fijo de una transformación contractiva, basta aplicar la transformación a un punto arbitrario de E, volverla a aplicar de manera indefinida y calcular su límite.

2.3 Condición de Lipschitz

La condición de Lipschitz fue introducida e el año 1876.

Esta condición garantiza un grado de regularidad intermedio entre la continuidad y la derivabilidad, además se utiliza como condición suficiente para asegurar la unicidad de soluciones de un problema de Cauchy.

Definición. Sea $f(x)$ una función definida en un subconjunto $D \subset \mathbb{R}^n$, con valores en $\mathbb{R}^n$. se dice que $f(x)$ verifica la condición de Lipschitz, o es Lipschitziana en D, si existe una constante L tal que para todo $x_1, x_2 \in D$.

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq L\,|x_1 - x_2| \tag{2.1}$$

Las funciones que verifican la condición de Lipschitz 2.1 se llaman funciones globalmente Lipschizianas en D, o simplemente Lipschizianas en D.

La constante L se denomina constante de Liptschitz de la función D.

La condición de Lipschitz puede ser una condición demasiado fuerte si lo que se estudia es un problema local. En estos casos es suficiente que se verifique una condición de Lipschitz local, que se define a continuación.

Definición. Sea $f(x)$ una función definida en un subconjunto abierto $D \subset \mathbb{R}^n$, con valores en $\mathbb{R}^n$. Se dice que $f(x)$ es localmente Lipschiziana en D si para cada rectángulo $\mathbb{R} \subset D$ existe una constante L, tal que si $x_1, x_2 \in R$.

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq L\,|x_1 - x_2|$$

De la propia definición se deduce que si una función $f(x)$ es Lipschiziana (local o globalmente) en un dominio D, es continua en D. En sentido inverso, existen funciones continuas que no son Lipschiziana, Por lo tanto la condición de Lipschitz es mas fuerte que la continuidad.

En cuanto a su relación con la derivada, se puede medir sin más que tener en cuenta que la condición de Lipschitz respecto de la segunda variable indica que el cociente incrementa.

$$\frac{|f(x_2) - f(x_1)|}{|x_2 - x_1|}, x_1, x_2 \in D.$$

Está acotado por la constante de Lipschitz L en todo el dominio D de definición de la función. Esto lleva a pensar que la condición de Lipschitz está directamente relacionada con el comportamiento de la derivada o las derivadas parciales de la función, si es que existen.

2.4 Unicidad

El teorema de Cauchy-Peano asegura la existencia de solución del problema de Cauchy propuesto. Pero no asegura la unicidad, pueden existir distintas funciones que verifiquen el mismo problema de Cauchy.

El teorema de Picard-Lindeöf resuelve el problema de la unicidad de solución si la función $f(x, y)$ verifica además una condición mas fuerte que la requerida en las hipótesis del teorema de Cauchy-Peano: La condición de Lipschitz respecto de la segunda variable.

Teorema de Picard-Lindeöf

Teorema 2.4.1 *Se considera el problema de valor inicial:*

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad \textit{donde}\, x \in [A, B].$$

Donde la función $f(x, y) : [x_0, b] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *es continua en* $[x_0, b] \times \mathbb{R}^n$ *y verifica la condición de Lipschitz respecto de la segunda variable en* $[x_0, b] \times \mathbb{R}^n$*, es decir, existe una constante* L *tal que para todo* $x \in [x_0, b]$ *y todo* $y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n$*, se verifica que* $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L\,|y_1 - y_2|$ *.Entonces el problema de valor inicial propuesto tiene una única solución.*

Demostracion. Se considera el espacio vectorial $E = C([x_0, b], \mathbb{R}^n)$ de las funciones continuas en el intervalo $[x_0, b]$. Dadas dos funciones $\varphi_1, \varphi_2 \in E$, se define la distancia:

$$d(\varphi_1, \varphi_2) = \sup\{e^{-k(x-x_0)} \left|\varphi_1(x) - \varphi_2(x)\right| : x \in [x_0, b]\}.$$

Siendo K una constante fija tal que $K > L$, se puede demostrar fácilmente que es una distancia y que el espacio vectorial E con esta distancia es completo. Se tiene entonces que E es un espacio métrico completo.

se define ahora sobre E la aplicación T tal que dada la función $\varphi \in E$,

$$T\varphi(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(s, \varphi(s))ds.$$

$T(\varphi)$ es también una función continua definida en el intervalo $[x_0, b]$, y por tanto pertenece a E.

Entonces, si $\varphi_1, \varphi_2 \in E$,

$$e^{-k(x-x_0)} \left|T\varphi_1(x) - T\varphi_2(x)\right| \leq \int_{x_0}^{x} {}^{-k(x-x_0)} \left|f(s, \varphi_1(s)) - f(s, \varphi_2(s))\right| ds =$$

$$\int_{x_0}^{x} e^{-k(x-s)} e^{-k(s-x_0)} \left|f(s, \varphi_1(s)) - f(s, \varphi_2(s))\right| ds$$

$$\leq L d(\varphi_1, \varphi_2) \int_{x_0}^{x} e^{-k(x-s)} ds \leq \frac{L}{k} d(\varphi_1, \varphi_2)$$

Se tiene entonces que:

$$d(T(\varphi_1), T(\varphi_2)) = \sup\{e^{-k(x-x_0)}\,|\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| : x\,\epsilon\,[x_0, b]\} \leq \frac{L}{k} d(\varphi_1, \varphi_2).$$

Como $k > L$, la aplicación es contractiva y tiene un único punto fijo que es la única solución del problema de valor inicial propuesto.

Nota: Si el problema de Cauchy es de la forma:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad donde\, x \,\in\, [A, x_0].$$

También se verifica el teorema anterior 2 y el razonamiento empleado sigue siendo válido. Únicamente hay que modificar la definición de distancia:

$$d(\varphi_1, \varphi_2) = \sup\{e^{-k(x_0-x)}\,|\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| :\, x \in [x_0, b]\},$$

para que las acotaciones sigan siendo válidas.

Capítulo 3

Desigualdad Gronwall-Bellman

Este capítulo esta dedicada a una notable desigualdad conocida como desigualdad de Gronwall que es de gran utilidad en muchas aplicaciones. La idea esta basada en la integración de las ecuaciones diferenciales lineales de primer orden mediante un factor integrante. Consideremos la ecuación $y'(t) + a(t)y(t) + f(t) = 0$ donde

f , $a : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}$; son funciones continuas.

Buscamos un factor integrante $\mu = \mu(t)$, es decir, una función distinta de cero tal que la ecuación

$$\mu(t)y'(t) + (t)(a(t)y(t) + f(t)) = 0. \tag{3.1}$$

Sea Exacta.

Para ello se ha de verificar que $\mu(t) = a(t)\mu(t)$, o bien, integrando:

$$\mu(t) = exp\left(\int_{t_0}^{t} a(s)ds\right).$$

De esta forma la ecuación 3.1 se convierte en:

$$\frac{d}{dt}(y(t)exp\left(\int_{t_0}^{t} a(s)ds\right) = -f(t)exp\left(\int_{t_0}^{t} a(s)ds\right)$$

integrando resulta

$$y(t)exp\left(\int_{t_0}^{t} a(s)ds\right) - y(t_0) = -\int_{t_0}^{t} f(u)exp\left(\int_{t_0}^{u} a(s)ds\right)du$$

y despejando $y(t)$ resulta

$$y(t) = y(t_0)exp\left(-\int_{t_0}^{t} a(s)ds\right) - \int_{t0}^{t} f(u)exp\left(-\int_{u}^{t} a(s)ds\right)du$$

Queremos seguir la misma estrategia para pasar de desigualdades integrales que involucran a una función en ambos miembros, a desigualdades en que tal función no esta en el miembro derecho. Mas precisamente se tiene el siguiente resultado.

3.1 Lema de Gronwall.

Sean f , $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ funciones continuas y tal que

$$g(t) \geq 0 \; \forall \, t \in [a,b].$$

Sea: $y : [a,b] \to \mathbb{R}$ funciones continuas tal que

$$y(t) \leq \; f(t) + \int_a^t g(s)y(s)ds; \;\; \forall \, t \in [a,b]$$

entonces

$$y(t) \leq f(t) + \int_a^t f(s)\, g(s) exp\left(\int_s^t g(u)du\right) ds.$$

Demostración. Sea $z(t) = \displaystyle\int_a^t g(s)y(s)ds$,entonces

$$z'(t) - g(t)z(t) \equiv g(t)y(t) - g(t)\int_a^t g(s)y(s)ds \equiv$$

$$g(t)(y(t) - \int_a^t g(s)y(s)ds) \leq g(t)f(t),$$

es decir

$$z'(t) - g(t)z(t) \leq g(t)f(t).$$

Ahora tenemos una desigualdad diferencial lineal por lo que tomamos el mismo factor integrante que en el caso de las ecuaciones lineales. Mas precisamente, consideramos

$$w(t) = z(t)exp\left(-\int_a^t g(s)ds\right)$$

de donde resulta

$$w'(t) = z'(t)exp\left(-\int_a^t g(s)ds\right) - z(t)g(t)exp\left(-\int g(s)ds\right)$$

$$\leq f(t)g(t)exp\left(-\int g(s)ds\right)$$

y teniendo en cuenta que $w(a) = z(a) = 0$ obtenemos,

$$w(t) \leq \int_a^t f(s)g(s)exp\left(-\int g(u)du)\right) ds$$

y, por tanto,

$$z(t) \leq \int_a^t f(s)g(s)exp\left(\int_t^s g(u)du\right) ds.$$

Como $y(t) \leq f(t) + z(t)$, se concluye el resultado.

En muchas aplicaciones aparece el caso particular siguiente.

Corolario 3.1.1 *Si en las hipótesis del Lema se supone ademas $f(t) \equiv k$, constante, entonces*

$$y(t) \leq k\,exp\left(\int_a^t g(s)ds\right).$$

Demostración. Aplicando el Lema obtenemos, integrando,

$$y(t) \leq k(1 + \int_a^t g(s)exp\left(\int_a^s g(u)du)ds\right) =$$

$$k(1 - \int_a^t exp\left(\int_s^t g(u)du\right)\left(-d\left(\int_s^t g(u)du\right)\right) =$$

$$k\,exp\left(\int_a^t g(s)ds\right)$$

El lema de Gronwall establece una cota superior para las funciones no negativas que puedan acotarse por una función lineal de su integral. Este lema es de gran utilidad para probar el teorema de unicidad, la dependencia continua de las soluciones de parámetros presentes en la ecuación diferencial, y de las condiciones iniciales, así como también en numerosos resultados referentes a la acotación y a la estabilidad.

Conclusión

A lo largo de nuestra investigación nos percatamos que son muy pocos los estudios enfocados al análisis de las ecuaciones diferenciales, por lo general son estudios enfocados al cálculo de las soluciones de estas ecuaciones.

Las ecuaciones diferenciales se clasifican de acuerdo a su forma y conforme a ello se desarrollan distintos métodos de solución, en algunos casos es necesario aplicar algunas estrategias matemáticas para poder resolver estas ecuaciones diferenciales cuando tienen una forma muy compleja, una de estas estrategias y la más importante es el uso del factor integrante, que es de gran utilidad en aquellas ecuaciones que por su forma no se podían clasificar dentro de los tipos de ecuaciones diferenciales ya conocidas (Edo a variables separables, exactas, bernoulli, etc.).

Nuestra investigación mostró como poder asegurar la existencia y unicidad de soluciones en ecuaciones diferenciales, sin tener la necesidad de calcularlas, esto se logra aplicando los teoremas que en ella se describen y es una herramienta eficiente totalmente demostrada para todas las ecuaciones diferenciales ordinarias, es decir, estamos en condiciones de establecer si una ecuación diferencial tiene o no solución y si esta es única, sin tener que trabajar tratando de buscar esta solución de forma explícita. Mostramos como en algunos casos es muy complejo encontrar la solución de una ecuación diferencial, pero si el problema es solamente saber si esta solución existe, podemos ocupar los teoremas de existencia antes mencionados para dar respuesta a esta interrogante, pero, ¿cómo saber más sobre esta solución?, una idea de gran utilidad para saber un poco más de esta solución es introducida por el lema de Gronwall, quien nos ayuda a establecer ciertas cotas para esta solución, de esta manera podemos analizar dentro de que parámetros se encuentra nuestra solución.

Bibliografía

[1] Varona Malumbres, Juan Luis. Metodos clasicos de resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias. La rioja, 1996.

[2] Gracia Rivas, Ignacio; Roman-Roy, Narciso. Ecuaciones diferenciales.Barcelona ,2008.

[3] Molero. M; Salvador. A; Menarguez. T; Garmendia. L. Cap. 8, Existencia y unicidad de soluciones.2003.

[4] Gallardo, José M. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias,introducción con SAGE. España,2012.

[5] Macia, Fabricio. Ecuaciones diferenciales. Madrid, 2012.

[6] Peral Alonso, Ireneo; Walias Cuadrado, Magdalena. Ecuaciones diferenciales ordinarias Madrid,2002.