Universidad del Bío-Bío - Sistema de Bibliotecas - Chile

UNIVERSIDAD DEL BÍO-BÍO
FACULTAD DE EDUCACIÓN Y HUMANIDADES
ESCUELA DE PEDAGOGÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

FACTORIZACIÓN LU

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE PROFESOR EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

AUTORES: TORRES SOLÍS, MARCOS

VILLALOBOS CASTILLO, NATALIA

Profesor Guía: Friz Roa, Luis

Chillán, 2015

Universidad del Bío-Bío - Sistema de Bibliotecas - Chile

UNIVERSIDAD DEL BÍO-BÍO
FACULTAD DE EDUCACIÓN Y HUMANIDADES
ESCUELA DE PEDAGOGÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

FACTORIZACIÓN LU

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE PROFESOR EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

AUTORES: TORRES SOLÍS, MARCOS

VILLALOBOS CASTILLO, NATALIA

Profesor Guía: Alberto Friz Roa, Luis

Chillán, 2015

Universidad del Bío-Bío - Sistema de Bibliotecas - Chile

FACTORIZACIÓN LU

Autores : Marcos Torres, Natalia Villalobos

Profesor Guía : Dr. Luis Friz Roa

2015

Universidad del Bío-Bío - Sistema de Bibliotecas - Chile

Agradecimientos

Al finalizar este arduo trabajo y no exento de dificultades, te das cuenta que no hubiese sido posible sin la participación de personas e instituciones que han facilitado las cosas para que este trabajo llegue a un feliz término. Es por ello que en este espacio queremos expresarles nuestros agradecimientos.

Queremos agradecer a nuestro profesor Luis Friz Roa, por su esfuerzo, dedicación y el apoyo constante brindado durante el desarrollo de nuestra tesis. Gracias a sus conocimientos, orientación, paciencia y motivación que nos brindó, valores que han sido fundamentales para culminar nuestra etapa de formación docente. Por último, gracias por habernos aceptado como estudiantes tesistas y el apoyo a nuestro proyecto de tesis.

Finalmente, agradecemos al proyecto fondecyt 1130456 por el financiamiento para la elaboración de esta tesis.

Natalia y Marcos

Quiero agradecer a mi familia, a mi mamá, papá, hermana y mi hermano, también a mis tías y mi primo, gracias por la confianza y el apoyo incondicional que me dieron en mis años de estudio, por creer siempre en mí y por tener la certeza de que terminaría esta etapa, debo agradecerles por estar conmigo a pesar de los errores e incidentes durante este tiempo.

Agradezco también Marcos, a mi compañero de tesis, con quien decidimos asumir juntos asumir este desafío, por los conocimientos que adquirimos mientras trabajabamos, y sobre todo, gracias por la amistad durante estos 5 años.

Le doy las gracias a Guido, por su apoyo y compañía en esta etapa de mi vida. Le doy las gracias también a las personas que me brindaron su amistad y apoyo durante esta etapa y a todos quienes que creyeron en mí, a quienes están a mi lado y a quienes me apoyaron a la distancia.

Natalia

Universidad del Bío-Bío - Sistema de Bibliotecas - Chile

Debo agradecer de manera especial al Profesor Luis Friz Roa, por aceptarme para realizar esta tesis de pregrado bajo su dirección. Su apoyo y confianza en mi trabajo y su capacidad para guiarme ha sido un aporte invaluable, no solamente en el desarrollo de esta tesis, sino también n mi formación como docente. Le agradezco también el a verme facilitado siempre los medios y las ideas suficientes para llevar a cabo todas las actividades de la tesis, por eso y mucho más, muchas gracias profesor.

Quiero expresar también mis agradecimientos a mi compañera de tesis Natalia Villalobos, con quien nos hemos brindado apoyo mutuo para llevar a cabo nuestra tesis, agradecer la paciencia y la forma de superar las dificultades que se nos fueron presentando durante el desarrollo de nuestro proyecto de tesis.

Agradezco de manera especial a mi familia y novia quienes han sido un pilar fundamental a lo largo de toda la carrera. A mis padres Digna y Javier, por su ejemplo de lucha y honestidad que me han ayudado sin duda en todo lo propuesto, además de su cariño y su comprensión. A mi novia Carolina Guzmán por su fuerza, generosidad y valentía, quien ha estado en aquellos momentos de flaqueza, encargándose de subir el ánimo, ayudándome en todo con la mejor voluntad, por eso gracias.

Finalmente quiero agradecer a mis amigos y amigas quienes estuvieron en los "ires y venires" en el plano personal durante todo este proceso importante, por eso muchas gracias.

Marcos

Universidad del Bío-Bío - Sistema de Bibliotecas - Chile

Índice general

Universidad del Bío-Bío - Sistema de Bibliotecas - Chile

Universidad del Bío-Bío - Sistema de Bibliotecas - Chile

Capítulo 1

Preliminares

1.1. INTRODUCCIÓN

La matemática es un proceso de construcción y desarrollo a lo largo del tiempo. Su desarrollo se ha basado en base a necesidades especificas, así de da pie entre el 1700 a. de C. al 1700 d. de C. al desarrollo de las ecuaciones y sus soluciones, sin embargo no fue hasta el siglo III a.de C en el libro "el arte matemático" de autor chino desconocido, donde se plantearon ecuaciones simultaneas, lo que hoy conocemos como sistemas de ecuaciones. En su libro ellos presentaron soluciones a estos sistemas mediante matrices.

Esta palabra «matriz» fue usada por primera vez por Sylvester en 1980. Caley fue el primero en desarrollar de modo independiente el concepto de matriz en un artículo publicado en 1855, A *memoir on the theory of matrices.* Definió las matrices nula y unidad, la suma de matrices y señala que esta operación es asociativa y conmutativa. Caley toma directamente de la representación del efecto de dos transformaciones sucesivas la definición de multiplicación de dos matrices, además señala que una matriz mxn puede ser multiplicada solamente por una matriz nxp. En este mismo artículo establece que una matriz tiene inversa si y sólo si su determinante no es nulo. Este matemático aseguró que el producto de dos matrices puede ser la matriz nula

Universidad del Bío-Bío - Sistema de Bibliotecas - Chile

siendo las dos matrices invertibles.

A partir de este momento los trabajos sobre matrices comienzan a desarrollarse apoyados por Jordan (1838-1922), Rouché (1832-1910) y de Frobenius (1849-1917). En el siglo XX la teoría de matrices es muy usada por la rama de la matemática aplicada.

Este grandioso desarrollo en la teoría de matrices permitió comenzar un completo desarrollo en base a la resolución de ecuaciones simultáneas. Los sistemas de ecuaciones se presentan en todas las ramas de las matemáticas aplicadas, en algunos casos provienen directamente de la formulación inicial de un problema y en muchos otros la solución de un sistema de ecuaciones es parte del desarrollo de otro tipo de problemas, para dar solución a estos sistemas se utilizan matrices, las cuales permiten operar estos sistemas de distintas maneras para determinar sus soluciones, mediante métodos directos o iterativos. Desarrollaremos el trabajo profundizando en el concepto de matriz y básicamente las operaciones elementales efectuadas a estas, y como influyen en la reducción de operaciones en el trabajo con matrices, para luego mostrar un método de factorización de matrices el cual permite determinar soluciones de sistemas de ecuaciones de manera rápida y sencilla.

1.2. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

El desarrollo de la matemática ha implicado una serie de herramientas y métodos para la directa aplicación un problema o en ayuda del desarrollo de este. Concentraremos la atención en el desarrollo de los métodos para resolver sistemas de ecuaciones lineales.

Si analizamos el método de Gauss para resolver problema de ecuaciones lineales $Ax = B$, de n incógnitas, el número de operaciones elementales para resolver el sistema de ecuaciones utilizando este método crece con el cubo de n. Para valores grande de n resulta muy conveniente buscar algún nuevo método de resolución que reduzca el número de operaciones elementales.

Universidad del Bío-Bío - Sistema de Bibliotecas - Chile

Para reducir estas operaciones, nos concentraremos en la descomposición o factorización LU y una variación de esta, la factorización o descomposición LDU.

La factorización LU consiste en factorizar la matriz A en la forma $A = LU$, como producto de dos matrices triangulares (U superior; L inferior y con unos en la diagonal).

1.3. MARCO TEÓRICO

1.3.1. Antecedentes

Los métodos directos se utilizan para obtener resultados realizando una secuencia finita de operaciones aritméticas. La cantidad de cálculos aritméticos depende del tamaño del problema. El resultado obtenido será exacto siempre que se puedan conservar en forma exacta los valores calculados en las operaciones aritméticas. La factorización LU, método directo, se caracteriza por factorizar una matriz en dos matrices triangulares, que permite resolver un sistema mediante dos procesos de sustitución, uno hacia adelante y otro en reversa. La factorización LU se basa en separar una matriz A en dos matrices triangulares $A = LU$, donde L (lower) es una matriz triangular inferior y U (upper) es una matriz triangular superior, así, la resolución de estas dos subecuaciones es trivial. La factorización LU de una matriz es una factorización que resume el proceso de eliminación gausiana aplicado a la matriz y que es conveniente en términos del número total de operaciones de punto flotante cuando se desea calcular la inversa de una matriz o cuando se resolverá una serie de sistemas de ecuaciones con una misma matriz de coeficientes.

Universidad del Bío-Bío - Sistema de Bibliotecas - Chile

1.3.2. Antecedentes conceptuales

1.3.2.1. Descomposición LU

Una matriz cuadrada $A \in M_{nxn}(R)$ posee descomposición LU cuando existen matrices $L, U \in M_{nxn}(R)$ triangular inferior (lower) y triangular superior (upper) respectivamente, tales que $A = LU$. Tal descomposición permite resolver de forma rápida cualquier sistema compatible determinado $Ax = b$ a través de los dos algoritmos de bajada y de subida:

$$LUx = b \longleftrightarrow [Lz = b \wedge Ux = z]$$

La descomposición LU se define de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ l_{n-1,1} & l_{n-1,2} & \cdots & 1 & 0 \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1,n-1} & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2,n-1} & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{n-1,n-1} & u_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & u_{nn} \end{pmatrix}$$

1.3.3. Teorema

Descomposición LU

Teorema: Sean los menores principales aquellos determinantes de una submatriz cuadrada de A, en el que los elementos de su diagonal principal pertenecen a la diagonal principal de la matriz A. Entonces si los menores

Universidad del Bío-Bío - Sistema de Bibliotecas - Chile

principales de una matriz A de dimensión n no son nulos entonces A admite una descomposición LU. Esta descomposición es única si los elementos de la diagonal principal de L son todos unos.

Definición: Sea $A = a_{ij}$ una matriz cuadrada de nxn, Se dice que A es diagonalmente dominante en sentido estricto si:

$$\mid a_{ij} \mid > \sum_{j=1\,,j\neq i}^{n} a_{ij} \;\; para\, toda\, fila\, i = 1, ..., n$$

1.4. OBJETIVOS

1.4.1. Objetivo general

Analizar métodos de resolución de sistemas lineales para n incógnitas, enfocándose en el método de factorización LU y LDU.

1.4.2. Objetivos específicos

- Estudiar las características de la factorización LU.
- Aplicar el método de factorización LU a la resolución de sistemas de ecuaciones lineales y a la resolución de problemas que involucren en su desarrollo un sistema de ecuaciones lineales

1.5. METODOLOGÍA

La metodología empleada para el desarrollo de nuestra tesis es principalmente el estudio teórico y su aplicación, además de discusiones sobre los contenidos con el profesor especialista.

Universidad del Bío-Bío - Sistema de Bibliotecas - Chile

1.6. RECURSOS

- Recursos bibliográficos tales como libros y apuntes matemáticos.
- Procesador de texto matemático especializado (LyX)

Universidad del Bío-Bío - Sistema de Bibliotecas - Chile

Capítulo 2

Conocimientos previos

2.1. Definiciones

2.1.1. Matriz

Una matriz A de mxn es un arreglo rectangular de mxn números dispuestos en m filas y n columnas.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

2.1.2. Igualdad de matrices

Dos matrices $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ son iguales si

1. Son del mismo tamaño.

2. Las componentes correspondientes son iguales

Universidad del Bío-Bío - Sistema de Bibliotecas - Chile

2.1.3. Suma de matrices

Sean $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ dos matrices de mxn. Entonces la suma de A y B es la matriz de mxn, $A + B$ dada por

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

Es decir $A + B$ es la matriz mxn que se obtiene al sumar los componentes de A y B.

2.1.4. Multiplicación de una matriz por un escalar

Si $A = (a_{ij})$ es una matriz de mxn y si α es un escalar, entonces la matriz mxn, αA, esta dada por:

$$\alpha A = (\alpha a_{ij}) = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \cdots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \cdots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \cdots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}$$

- ***Teorema:*** Sean A,B,C tres matrices de mxn y sen α y β dos escalares, Entonces:

1. $A + 0 = A \quad ,0 \in M_{mxn}(\mathbb{R})$
2. $0A = 0 \qquad ,0 \in \mathbb{R}$
3. $A + B = B + A$
4. $(A + B) + C = A + (B + C)$
5. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$

Universidad del Bío-Bío - Sistema de Bibliotecas - Chile

6. $1A = A$

7. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$

Estas propiedades hacen que el conjunto de las matrices $M_{nxn}(R)$ formen un espacio vectorial real.

2.1.5. Producto de dos matrices

Sea $A = (a_{ij})$ una matriz de mxn, y sea $B = (b_{ij})$ una matriz nxp. Entonces el producto de A y B es una matriz de mxp, $C = (c_{ij})$, en donde:

$$c_{ij} = (fila\, i\, de\, A) \cdot (columna\, j\, de\, B)$$

Es decir, el elemento ij de AB es el producto punto entre la fila i de A y la columna j de B. Si esto existe, se obtiene

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{q=1}^{n} a_{iq}b_{qj}$$

Si el número de columnas de A es igual al número de filas de B, entonces se dice que A y B son compatibles bajo la multiplicación.

Nota: Dos matrices se pueden multiplicar sólo si el número de columnas de la primera matriz es igual al número de filas de la segunda.

2.1.6. Matriz identidad

La matriz identidad I_n de nxn es una matriz de nxn cuyos elementos de la diagonal principal son iguales a 1 y todos los demás son 0. Esto es,

$$I_n = (b_{ij}) \quad donde \quad b_{ij} = \begin{cases} 1 & si \quad i = j, \\ 0 & si \quad i \neq j. \end{cases}$$

Universidad del Bío-Bío - Sistema de Bibliotecas - Chile

- ***Teorema:*** Sea A una matriz cuadrada de nxn. Entonces

$$AI_n = I_nA$$

Es decir, I_n conmuta con toda matriz de nxn y la deja sin cambio después de la multiplicación por la derecha o por la izquierda pues I_m es el neutro o unidad

2.1.7. La inversa de una matriz

Sean A y B dos matrices de nxn. Suponga que

$$AB = BA = I$$

Entonces B se llama la inversa de A y se denota por A^{-1}. Entonces se tiene:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

Si A tiene inversa entonces se dice que A es invertible.

Esta definición no establece que toda matriz cuadrada tiene inversa.

Una matriz cuadrada que no es invertible se llama singular y una matriz invertible se llama también no singular.

2.1.8. Transpuesta de un matriz

Sea $A = (a_{ij})$ una matriz de mxn. Entonces la transpuesta de A, que se escribe A^t, es la matriz de nxm obtenida al intercambiar las filas por las columnas de A. De manera breve, se puede escribir $A^t = (a_{ji})$

- Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$, entonces $A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$

Universidad del Bío-Bío - Sistema de Bibliotecas - Chile

- ***Teorema:*** Suponga que $A = (a_{ij})$ es una matriz de nxm y $B = (b_{ij})$ es un matriz de mxp. Entonces
  1. $(A^t)^t = A$
  2. $(AB)^t = B^tA^t$
  3. Si A y B son de nxm, entonces $(A+B)^t = A^t + B^t$
  4. Si A es invertible, entonces A^t es invertible y $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$

2.1.9. Matriz simétrica

La matriz cuadrada A de nxn se llama simétrica si $A^t = A$. Es decir, las columnas de A son también las filas de A.

2.1.10. Matriz permutación

Una matriz de permutación P es una matriz que tiene las mismas filas de la matriz identidad, pero no necesariamente en el mismo orden. Una matriz de permutación resulta del intercambio de filas de una matriz identidad. El efecto de premultiplicar una matriz A por esta matriz es intercambiar las filas de A.

2.1.11. Definición

Sea $A \in M_{mxn}(\mathbb{R})$

- A es triangular superior si los elementos que están por debajo de la diagonal principal son nulos.
- A es triangular inferior si los elementos que están por ensima de la diagonal principal son nulos.
- A es diagonal si triangular si es triangular superior e inferior.

Universidad del Bío-Bío - Sistema de Bibliotecas - Chile

Capítulo 3

Operaciones y matrices elementales

3.1. Operaciones elementales

Sea la matriz $A \in M_{nxn}(\mathbb{R})$, efectuamos una operación elemental sobre una fila o columna de A cuando realizamos una de estas tres operaciones:

a) Intercambiar entre sí la fila i y j, también se denomina transposición o permutación. (e_1=$[i \to j]$)

b) Multiplicar la fila i por un escalar $\lambda \neq 0$, denominado escalamiento o linea-homotecia. (e_2=$[i \to \lambda i]$)

c) Sumar a la fila i la fila j multiplicada por un escalar $\lambda \neq 0$. (e_3=$[i \to i + \lambda j]$)

Las operaciones de fila se pueden aplicar a cualquier matriz. Decimos que dos matrices A y B del mismo orden A,$B \in M_{nxn}(\mathbb{R})$ son equivalentes por filas y se escribe

$$A \sim B,$$

Cuando la matriz B se obtiene a partir de A mediante un número finito de operaciones elementales de filas, es decir, existe una sucesión de operaciones

Universidad del Bío-Bío - Sistema de Bibliotecas - Chile

elementales de fila que transforme una matriz en otra.

3.2. Matriz elemental

La matriz $A \in M_{nxn}(\mathbb{R})$, se denomina una matriz elemental si se puede obtener a partir de la matriz identidad, I_n mediante una sola operación elemental de filas.

3.2.1. Teorema

Sea A una matriz de m filas, para realizar una operación elemental sobre A basta realizar dicha operación elemental sobre las filas de la matriz identidad I_m y multiplicar el resultado por A.

Sean las operaciones elementales
e_1=$[i \to j]$
e_2=$[i \to \lambda i]$
e_3=$[i \to i + \lambda j]$
Consideremos la matriz A_{nxn}

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .... & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & .... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

y supongamos que I_n es la matriz identidad de nxn.

3.2.1.1. Demostración: intercambio de filas

Probando para e_1 donde a la identidad se le han intercambiado la fila i con la j. Realizamos la multiplicación $PA = B$, donde B es una matriz de nxn

Universidad del Bío-Bío - Sistema de Bibliotecas - Chile

Sea $l \neq i$ y $l \neq j$, en este caso $p_{lq} = 0$, si $l \neq q$ y $p_{ll} = 1$. Luego P es I intercabiando la fila i con la fila j.

$$b_{lk} = \sum_{q=1}^{n} p_{lq} a_{qk} = a_{lk}$$

O sea, las filas de A distintas de i o j no sufren modificación al multiplicar por P.

En el caso de la fila i, se tiene que $p_{iq} = 0$, si $q \neq j$ y $p_{ij} = 1$, así :

$$b_{ik} = \sum_{q=1}^{n} p_{iq} a_{qk} = a_{jk}$$

O sea, las filas i y j quedan intercambiadas al multiplicar por P , análogamente se puede probar para la fila j

3.2.1.2. Demostración: multiplicación de una fila por un escalar

Probando para e_2, consideremos una matriz $A \in M_{nxn}(\mathbb{R})$ y supongamos que P es la matriz identidad de nxn a la cual se le ha multiplicado la fila i por un escalar α.

Vamos a multiplicar $PA = B$, donde B también es una matriz de nxn.

Sea $l \neq i$, en este caso $p_{lq} = 0$ si $l \neq q$ y $p_{ll} = 1$

$$b_{lq} = \sum_{q=1}^{n} p_{lq} a_{qk} = a_{lq}$$

Es decir, las filas distintas de i no sufren modificaciones

En la caso de la fila i tenemos que $p_{iq} = 0$ si $i \neq q$ y $p_{ii} = \alpha$. Luego,

$$b_{iq} = \sum_{q=1}^{n} p_{iq} a_{qi}$$

Universidad del Bío-Bío - Sistema de Bibliotecas - Chile

Como $p_{ii} = \alpha$ y $p_{ik} = 0$, si $k \neq i$ entonces:

$$\sum_{k=1}^{n} p_{ik} a_{kq} = \alpha a_{iq}$$

$$b_{iq} = \alpha a_{iq}$$

3.2.1.3. Demostración: sumar una fila a otra fila multiplicada por un escalar

Ahora probando para e_3 donde a la fila i se le suma la fila j multiplicada por un escalar α. Supongamos que P es la matriz identidad de nxn a la cual se le multiplica la fila j por un escalar α y se le suma a la fila i. Si realizamos la multiplicación $PA = B$ tenemos lo siguiente. Como

$$p_{ik} \begin{cases} 0, & k \neq i, \ k \neq j \\ \alpha, & k = j \\ 1, & k = i \end{cases}$$

Entonces

$$b_{ik} = \sum_{q=1}^{n} p_{iq} a_{qk} = \alpha a_{jk} + a_{ik}$$

Dicho teorema es aplicable de igual modo para matrices rectangulares de mxn y su demostración es semejante a lo explicitado anteriormente.

Universidad del Bío-Bío - Sistema de Bibliotecas - Chile

3.3. Matriz inversa como el producto de matrices elementales

3.3.1. Teorema:

Sean A y B dos matrices de nxn. suponga que

$$AB = BA = I$$

entonces B se llama la inversa de A y se denota por A^{-1}

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

Si A tiene inversa, entonces se dice que A es invertible.

Para determinar la inversa de una matriz A, se forma la matriz nx$2n$ $\left[A \vdots I_n\right]$, que se obtiene al adjuntar la matriz identidad I_n con la matriz dada A, luego se transforma la matriz obtenida a su forma escalonada reducida por filas mediante operaciones elementales por filas (toda operación realizada a una fila de A también debe ser aplicada a la fila correspondiente de I_n). Supongamos que se ha producido la matriz $[C \vdots D]$en forma escalonada reducida por filas.

a) Si $C = I_n$ entonces $D = A^{-1}$

b) Si $C \neq I_n$ entonces C tiene una fila de ceros. En este caso, A es singular y A^{-1} no existe.

quedando de este modo:

$$[A \vdots I] \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \left[I \vdots A^{-1}\right]$$

Como para realizar una operación elemental sobre A basta realizar dicha operación elemental sobre las filas de la matriz identidad I_m y premultiplicar el resultado por A, entonces podemos establecer lo siguiente:

Universidad del Bío-Bío - Sistema de Bibliotecas - Chile

$$(E_n \ldots\ldots E_3E_2E_1)A = I$$

donde $E_1E_2E_3.....E_n$ son matrices elementales y su producto corresponde a la inversa de la matriz A.

$$E_n \ldots\ldots E_3E_2E_1 = A^{-1}, \quad luego \quad A^{-1}A = I$$

3.3.1.1. EJEMPLO

Cálculo de la inversa de una matriz de 3x3

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ Calcule A^{-1} si existe.

Solución: Primero se pone A seguido de I en la forma de matriz aumentada

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aplicando operaciones elementales:

$E_1 = F_2 \rightarrow F_2 - F_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \vdots & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Universidad del Bío-Bío - Sistema de Bibliotecas - Chile

$E_2 = F_3 \rightarrow F_3 + F_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$E_3 = F_2 \rightarrow F_2 - F_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$E_4 = F_1 \rightarrow F_1 + F_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$E_5 = F_2 \rightarrow (-1)F_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Universidad del Bío-Bío - Sistema de Bibliotecas - Chile

La inversa de la matriz A es:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Asi: $E_5E_4E_3E_2E_1 = A^{-1}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\text{x}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Universidad del Bío-Bío - Sistema de Bibliotecas - Chile

Capítulo 4

Factorización o Descomposición LU

La factorización o descomposición LU, está directamente relacionada con las operaciones elementales aplicadas a una matriz para llevarla a una forma triangular superior. En términos generales, supongamos que se conoce como factorizar una matriz A, nxn en la forma:

$$A = LU$$

donde L es una matriz triangular inferior (del inglés lower) n x n y U es una matriz escalonada nxn (del inglés upper). Entonces el sistema

$$Ax = b$$

puede resolverse utilizando $A = LU$. El sistema $Ax = b$ se puede escribir en la forma

$$L(Ux) = b$$

donde podemos introducir una nueva variable $y = Ux$ obteniendo así el nuevo sistema

Universidad del Bío-Bío - Sistema de Bibliotecas - Chile

$$Ly = b$$

Podemos resolver dicho sistema para la variable y, mediante sustitución hacia adelante. Finalmente, usamos sustitución hacia atrás para resolver el sistema

$$Ux = y$$

Estos sistemas no tienen mayor dificultad de resolverse, pues se trata de matrices de coeficientes triangulares inferiores y superiores respectivamente. La factorización LU es útil cuando se requiere resolver de manera simultánea varios sistemas de ecuaciones que difieren en la parte no homogénea.

Teorema

Sea A una matriz cuadrada de nxn. Supongamos que A se puede reducir por filas a una matriz triangular superior, U aplicando operaciones elementales. Entonces existe un matriz triangular inferior L que es invertible y posee unos en su diagonal principal, tal que

$$A = LU$$

Si A es invertible, entonces esta descomposición es única.

DEMOSTRACIÓN:

Existen matrices elementales $E_{1,}E_2, ..., E_k$ y una matriz U (triangular superior) tales que

$$E_k E_{k-1} \cdots E_2 E_1 = U$$

De aquí obtenemos $A = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_k^{-1} U$.

Universidad del Bío-Bío - Sistema de Bibliotecas - Chile

Ahora bien, por construcción, cada matriz elemental $E_1, E_2, ..., E_k$ es triangular inferior y tiene unos en su diagonal principal, por consiguiente sus inversas $E_1^{-1}, E_2^{-1}, \cdots, E_k^{-1}$ y la matriz $L= E_1^{-1}E_2^{-1}\cdots E_k^{-1}$ también tienen las mismas características

Lo que implica que hemos obtenido la factorización LU buscada para la matriz A, es decir:

$$A = LU$$

Consideremos ahora una matriz invertible A y demostremos la unicidad de dicha factorización. Supongamos que tenemos dos factorizaciones LU para A de la forma

$$A = L_1U_1 = L_2U_2,$$

Como U_1, U_2 son matrices triangulares superiores, más aún sus inversas son igualmente triangulares superiores. De esta última igualdad obtenemos entonces

$$L_2^{-1}L_1 = U_2U_1^{-1}$$

El lado izquierdo de esta igualdad es producto de matrices triangulares inferiores con unos en la diagonal, por lo tanto es triangular inferior y tiene unos en la diagonal principal. Igualmente, el lado derecho es una matriz triangular superior, pues es producto de matrices triangulares superiores. Entonces $L_2^{-1}L_1 = I$, de eso sigue que $L_1 = L_2$ y por ende,

$$U_1 = U_2$$

Universidad del Bío-Bío - Sistema de Bibliotecas - Chile

4.1. Matriz U

Analicemos la eliminación Gaussiana de matrices y lo que significa en términos de matrices. Comenzamos de una matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$F_2 \to F_2 - 2F_1$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$F_3 \to F_3 + F_1$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$F_3 \to F_3 + 3F_2$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

La matriz que se obtiene es equivalente a A pero más simple, a la cual denotaremos por U.

$$Ux = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Universidad del Bío-Bío - Sistema de Bibliotecas - Chile

La matriz obtenida es "*triangular superior*" donde son cero todos los valores por debajo de la diagonal principal.

Es importante analizar la relación que existe entre la matriz A y U.

Anteriormente definimos una matriz E denominada matriz elemental, entonces el paso (i) cuando se multiplica la fila uno por 2 y se sustrae a la segunda podemos denotarla por E_1 donde a la matriz identidad se le aplicó el paso (i).

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

análogamente podemos describir los pasos (ii) y (iii) de la eliminación en términos de matrices elementales.

$$E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad y \qquad E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

estas matrices E_1, E_2 y E_3 denominadas matrices elementales que en general funcionan aplicando una sola operación elemental sobre filas a la matriz identidad I. Nótese que todas estas matrices elementales son triangulares inferiores y con unos en la diagonal principal.

Por lo tanto, las tres operaciones que convierten a A en U son:

$$E_3E_2E_1A = U$$

si sólo multiplicamos las matrices elementales, encontramos una sola matriz que convierte a A en U.

$$E_3E_2E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Universidad del Bío-Bío - Sistema de Bibliotecas - Chile

4.2. Matriz L

Mediante los pasos aplicados anteriormente se logra llegar de una matriz A a U, lo que es bueno, pero una pregunta importante es ¿como podemos llegar de la matriz U a A?, ¿Se podrá de algún modo deshacer los pasos realizados anteriormente?

Para deshacer el paso (i) en lugar de sustraer *sumamos* a la segunda fila el doble de la primera, de esta manera se invierte la matriz elemental E_1.

$$E_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

El producto de E_1 y E_1^{-1}tomado en cualquier orden, es la identidad, en términos de matrices E_1^{-1}es la inversa de E_1.

$$E_1 E_1^{-1} = I, \qquad E_1^{-1} E_1 = I.$$

de manera análoga se puede invertir E_2 y E_3, resultando

$$E_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad E_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

De este modo se han encontrado matrices que deshacen por separado cada uno de los pasos (i), (ii) y (iii). Para deshacer simultáneamente todos los pasos se debe conocer que matriz transforma la matriz U en A. Como el paso (iii) fue el ultimo aplicado para ir de A a U, debe ser el primero en aplicarse si vamos de U a A. Entonces pera regresar a la matriz A se debe multiplicar las matrices elementales inversas por izquierda a la matriz U.

$$A = E_1^{-1} E_2^{-1} E_3^{-1} U$$

si se realiza el producto de las tres matrices que invierten cada paso indivi-

Universidad del Bío-Bío - Sistema de Bibliotecas - Chile

dual, se obtiene una matriz que denominaremos L, la cual lleva a la matriz U de regreso a A.

$$E_1^{-1}E_2^{-1}E_3^{-1} = L, \quad de\, este\, modo \;\; A = LU$$

calculando el producto tenemos:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Notamos que la matriz L obtenida es triangular inferior, con unos en la diagonal principal y ceros en los valores sobre la diagonal principal. Si efectuamos el producto de las matrices elementales utilizadas para obtener U por L tenemos:

$$E_3E_2E_1L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -5 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

entonces $E_3E_2E_1 = L^{-1}$

De este modo podemos factorizar una matriz cualquiera de la forma $A = LU$, ahora bien, para poder determinar las soluciones del sistema lineal se mostrará el siguiente ejemplo:

4.2.1. *Ejemplo:*

Sea el sistema:

$$\begin{aligned} 60x_1 + 30x_2 + 20x_3 &= 180 \\ 30x_1 + 20x_2 + 15x_3 &= 115 \\ 20x_1 + 15x_2 + 12x_3 &= 86 \end{aligned}$$

Universidad del Bío-Bío - Sistema de Bibliotecas - Chile

Escribiendo el sistema de ecuaciones de la forma $Ax = b$

$$\begin{pmatrix} 60 & 30 & 20 \\ 30 & 20 & 15 \\ 20 & 15 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 180 \\ 115 \\ 86 \end{pmatrix}$$

Utilizando operaciones elementales encontramos la matriz U

$\mathrm{E}_1 = \mathrm{F}_2 \rightarrow \mathrm{F}_2 - \frac{1}{2}\,\mathrm{F}_1$

$$\begin{pmatrix} 60 & 30 & 20 \\ 0 & 5 & 5 \\ 20 & 15 & 12 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{E}_2 = \mathrm{F}_3 \rightarrow \mathrm{F}_3 - \frac{1}{3}\mathrm{F}_1$

$$\begin{pmatrix} 60 & 30 & 20 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 5 & \frac{16}{3} \end{pmatrix}$$

$\mathrm{E}_3 = \mathrm{F}_3 \rightarrow \mathrm{F}_3 - \mathrm{F}_2$

$$\begin{pmatrix} 60 & 30 & 20 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Asi, la matriz U es:

$$U = \begin{pmatrix} 60 & 30 & 20 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Universidad del Bío-Bío - Sistema de Bibliotecas - Chile

Y la matriz L:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz A se puede factorizar como:

$$\begin{pmatrix} 60 & 30 & 20 \\ 30 & 20 & 15 \\ 20 & 15 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 60 & 30 & 20 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

El primer paso es resolver la ecuación $Ly = b$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 180 \\ 115 \\ 86 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{llll} y_1 & & & = 180 \\ \frac{1}{2}y_1+ & y_2 & & = 115 \\ \frac{1}{3}y_1+ & y_2+ & y_3 & = 86 \end{array}$$

Utilizando la sustitución hacia adelante se obtiene:

$$y_1 = 180 \qquad y_2 = 25 \qquad y_{3=}1$$

Luego:

$$y = \begin{pmatrix} 180 \\ 25 \\ 1 \end{pmatrix}$$

El segundo paso es resolver el sistema $Ux = y$

Universidad del Bío-Bío - Sistema de Bibliotecas - Chile

$$\begin{pmatrix} 60 & 30 & 20 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 180 \\ 25 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{rcrcrcr} 60x_1 & + & 30x_2 & + & 20x_3 & = & 180 \\ & & 5x_2 & + & 5x_3 & = & 25 \\ & & & & \frac{1}{3}x_3 & = & 1 \end{array}$$

Utilizando la sustitución hacia atrás se otiene:

$$x_3 = 3 \qquad x_2 = 2 \qquad x_1 = 1$$

y la solución del sistema es

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

En estos casos es posible escalonar una matriz solo con operaciones de eliminación para poder llegar a la factorización LU, pero frecuentemente, no es posible escalonar una matriz sólo con operaciones de eliminación. En estos casos se requiere realizar un intercambio de filas. Para este tipo de matrices no existe la factorización LU.

4.3. Factorización $PA = LU$

Cuando no es posible factorizar una matriz de la forma LU, lo que se aplica es la factorización $PA = LU$, donde P es una matriz de permutación. Las matrices de permutación se obtienen de la matriz identidad intercambiando filas. Análogamente a la factorización LU se obtiene la factorización

Universidad del Bío-Bío - Sistema de Bibliotecas - Chile

$PA = LU$, pero se lleva un registro de las filas que se intercambian y se efectúan los intercambios en una matriz que registra los inversos de las operaciones de eliminación.

Para la factorización $PA = LU$, tenemos:

Entrada:

- Matriz $A \in M_{nxn}(\mathbb{R})$

Salida:

- P matriz de permutación nxn
- L matriz triangular inferior nxn ($l_{ii} = 1$)
- U matriz triangualar superior nxn

que cumplen:

$$PA = LU$$

Universidad del Bío-Bío - Sistema de Bibliotecas - Chile

4.3.1. *Ejemplo*

Encontrar una factorización de la forma $PA = LU$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ 3 & 6 & 7 \end{bmatrix},$$

utilizando pivoteo parcial.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ 3 & 6 & 7 \end{bmatrix} F_1 \longleftrightarrow F_3 \begin{bmatrix} 3 & 6 & 7 \\ -1 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$F_2 \longrightarrow \left(\frac{1}{3}\right) F_1 + F_2 \begin{bmatrix} 3 & 6 & 7 \\ 0 & 7 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Entonces

$$U = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 7 \\ 0 & 7 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

luego, la matriz L es

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matriz P se obtiene de realizar a la matriz identidad la operación $F_1 \longleftrightarrow F_3$ (intercambiar la fila 1 por la 3), es decir:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} F_1 \longleftrightarrow F_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Universidad del Bío-Bío - Sistema de Bibliotecas - Chile

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Se comprueba que:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ 3 & 6 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 6 & 7 \\ 0 & 7 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

de este modo queda la matriz $PA = LU$

Universidad del Bío-Bío - Sistema de Bibliotecas - Chile

Capítulo 5

Factorización LDU

La forma LU es «asimétrica» en un sentido: a lo largo de su diagonal principal. U contiene los pivotes mientras que L siempre unos. Esto es fácil de corregir, basta factorizar de U una matriz diagonal D constituida por pivotes $d_{1,}d_2, ..., d_n$.

Entonces podemos descomponer ahora la matriz A como $A = LDU$, donde L es una matriz triangular inferior con unos en la diagonal, y U triangular superior con unos en la diagonal, y donde D es una matriz diagonal de pivotes. (puede ser confuso denotar con la letra U esta nueva matriz triangular superior.)

Tomando el ejemplo anterior donde se factorizó la matriz $A = LU$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = LDU$$

Notemos que las entradas de la matriz D al multiplicarla por nuestra

Universidad del Bío-Bío - Sistema de Bibliotecas - Chile

nueva U triangular superior, nos da la matriz U original.

5.0.1. Teorema

Sea $A \in \mathcal{M}_{nxn}(\mathbb{R})$una matriz cuadrada y sea $PA = LU$ factorización LU de A (donde:$L \in \mathcal{M}_{nxn}(\mathbb{R})$ es triangular superior; y $P \in \mathcal{M}_{nxn}(\mathbb{R})$ es una matriz permutación). Sea $d_1, d_2, ..., d_n$ la diagonal de U y llamemos D a la matriz diagonal cuya diagonal es $d_1, d_2, ..., d_n$. Entonces A admite factorización del tipo $A = LDU\acute{}$, donde: L es matriz trianguar inferior con su diagomal formada por unos (L es la misma matriz anterior); D es la matriz diagonal que tiene por diagonal a la diagonal de U; y $U\acute{}$ es una matriz triangular superior con su diagonal formada por unos.

5.0.1.1. *Demostración*:

Como A es regular, también lo es PA (pues P es regular por ser matriz de permutación), luego lo es LU, lo que lleva a que también U es regular, es decir a que todos los elementos de su diagonal son no nulos ($d_i \neq 0$ para $i = 1, 2, ..., n$). Sean $U\acute{}$ la matriz que resulta de dividir la fila i- ésima de U, para $i = 1, 2, ..., n$, por d_i (que no es nulo); es evidente que $U = DU\acute{}$, con lo cual resulta:

$$PA = LU = LDU\acute{}$$

NOTAS.

- Si la matriz A no es invertible entonces no posee factorización LDU
- Si A tiene factorización LDU, entonces es única

COROLARIO: si $A = L_1 D_1 U_1$ y $A = L_2 D_2 U_2$, donde las L son triangulares inferiores con diagonal unitaria, las U son triangulares superiores con diagonal unitaria y las D son matrices diagonales sin ceros en la diagonal, entonces $L_1 = L_2$, $D_1 = D_2$, $U_1 = U_2$. Así la factorización LDU está determinada de manera única por A.

Universidad del Bío-Bío - Sistema de Bibliotecas - Chile

Demostración: Tenemos que $L_1D_1U_1 = L_2D_2U_2$. Debemos usar el hecho de que L_1^{-1} tiene las mismas propiedades (triangular inferior, diagonal unitaria) que L_1; ambas son productos de matrices elementales. Análogamente existe una U_2^{-1}, triangular superior con diagonal unitaria, tal que $U_2U_2^{-1} = I$. Y evidentemente cada matriz diagonal como D_1 tiene una inversa que también es diagonal:

$$\begin{bmatrix} d_1 & & & & & \\ & d_2 & & & & \\ & & \cdot & & & \\ & & & \cdot & & \\ & & & & \cdot & \\ & & & & & d_n \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{d_1} & & & & & \\ & \frac{1}{d_2} & & & & \\ & & \cdot & & & \\ & & & \cdot & & \\ & & & & \cdot & \\ & & & & & \frac{1}{d_n} \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, premultiplicando por L_1^{-1} y por D_1^{-1}, y postmultiplicando por U_2^{-1}, nuestra ecuación se transforma en:

$$U_1U_2^{-1} = D_1^{-1}L_1^{-1}L_2D_2$$

donde el lado izquierdo es un producto de dos matrices triangulares superiores con diagonal unitaria. Dicho producto debe ser otra matriz del mismo tipo. Mientras que el lado derecho es una matriz triangular inferior. Esto obliga a que ambos lados sean la matriz identidad. Así $U_1U_2^{-1} = I$, y después de multiplicar por U_2 tenemos $U_1 = U_2$.

Análogamente $L_1 = L_2$ y, finalmente, $D_1 = D_2$.

Universidad del Bío-Bío - Sistema de Bibliotecas - Chile

5.0.2. *Ejemplo*

Encuentre la descomposición LDU de $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -3 \\ -1 & 7 & -1 \end{pmatrix}$

Solución.

- Comenzamos escalonando la matriz

$$A \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -3 \\ -1 & 7 & -1 \end{pmatrix}$$

- Premultiplicamos por

$$E_{12}(-2) \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 7 & -1 \end{pmatrix},$$

- Premultimplicamos por

$$E_{13}(1) \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

- Premultiplicamos por

$$E_{23}(-3) \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

NOTA: denotaremos $\bar{A}$ a la matriz A escalonada

una vez escalonada la matriz A podemos escribir L como:

Universidad del Bío-Bío - Sistema de Bibliotecas - Chile

$$L = [E_{23}(-3)E_{13}(1)E_{12}(-2)]^{-1}$$

$$= E_{12}(-2)^{-1}E_{13}(1)^{-1}E_{23}(-3)^{-1}$$

$$= E_{12}(2)E_{13}(-1)E_{23}(3)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Si sólo nos interesa calcular la descomposición LU de A, podríamos decir que:

$$U = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Y así:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sería la descomposición LU de A. Pero lo que nos interesa es conocer y calcular la descomposición LDU de A.

Como ya tenemos L, sólo falta encontrar U y D. Encontrar D es relativamente sencillo, pues D es la matriz diagonal cuya diagonal es igual a la de la matriz $\overline{A}$:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Universidad del Bío-Bío - Sistema de Bibliotecas - Chile

Finalmente, U es la matriz triangular superior con unos en la diagonal, tal que al multiplicar DU obtengamos la matriz $\overline{A}$. Con esto, podemos escribir U:

$$U = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

entonces la descomposición LDU de A queda:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Universidad del Bío-Bío - Sistema de Bibliotecas - Chile

Bibliografía

[1] Burgos,J, (2006), *Algebra lineal y geometría cartesiana*, España, Madrid, McGraw-Hill.

[2] Grossman, S, (2012), *Algebra lineal*, México DF, México, McGraw-Hill.

[3] Stran, L, (1982), *Algebra lineal y sus aplicaciones*, México DF, México, Fondo educativo.

[4] Zill, D, (1999), *Algebra lineal*, España, Bogotá, McGraw-Hill.

[5] Kolman, B, (2006), *Algebra lineal*, México DF, México, Person Educación.

[6] Figueroa, J & Pardo, H. Pontificia Universidad Javeriana. http://www.javerianacali.edu.co

[7] (2011) *Factorización LU*, Departamento de Matemáticas, CCIR/ITESM

[8] Pintos, S & Urdena, G, *Breves de álgebra lineal*