UNIVERSIDAD DEL BÍO- BÍO
FACULTAD DE EDUCACIÓN Y HUMANIDADES
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
ESCUELA DE PEDAGOGÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ECUACIONES DIFERENCIALES CON ARGUMENTO CONSTANTE A TROZOS (DEPCA)

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE PROFESOR DE ENSEÑANZA MEDIA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

AUTORA: ULLOA TORRES, CONSTANZA BEATRIZ

Profesor Guía: Coronel Pérez, Aníbal

CHILLÁN, 2016

A mi familia.

Agradecimientos

A mis padres Juan y Beatriz y mi hermana Yanira, por el apoyo tanto moral como económico, los cuales hicieron posible poder comenzar y terminar esta etapa. También por confiar en mí y darme una nueva oportunidad. Los quiero mucho. Sin ustedes esto no hubiese sido posible.
A mi profesor guía Dr. Anibal Coronel, por el apoyo y la paciencia entregada, muchas gracias profesor.
A mis amigos por entenderme las veces que no podía salir por trabajar en mi memoria, especialmente a Natalia por estar siempre conmigo en todo momento, y a Renato por apoyarme y entenderme los días que más estresada me sentía.

Muchas gracias a todos.

Resumen

En esta memoria de título, en primer lugar se explica la Ecuación Diferencial con Argumento constante a Trozos, conocida por su abreviatura DEPCA, y como encontrar la solución de esta. Se presenta la estabilidad de la solución analítica, numérica y asintótica para la DEPCA Lineal. Además, se determina la solución analítica y numérica para la DEPCA con dos avances. Finalmente consideramos la estabilidad analítica y numérica para la DEPCA con tres avances, por la técnica de resolver ecuaciones diferenciales, se deriva la forma concreta de la solución analítica. Se aplican los métodos de Runge-Kutta, utilizando la teoría de características, las condiciones bajo las cuales la solución es asintóticamente estable.

Palabras Claves: DEPCA, Estabilidad analítica, Estabilidad numérica, Estabilidad Asintótica.

Abstract

In this title memory, we firstly explain the Differential Equation with constant Argument to Piece, known by its abbreviation DEPCA, and how to find the solution of this. The stability of the analytical, numerical and asymptotic solution for the Linear depca is presented. In addition, the analytical and numerical solution for the DEPCA is determined with two advances. Finally we consider the analytical and numerical stability for depca with three advances, by the technique of solving differential equations, we derive the concrete form of the analytic solution. The Runge-Kutta methods are applied, using the characteristic theory, the conditions under which the solution is asymptotically stable.

Keywords: DEPCA, analytical stability, numerical stability, asymptotic stability.

Índice general

Introducción

En las últimas décadas las Ecuaciones Diferenciales con Argumento Constante a Trozos,conocidas por su abreviatura en inglés como DEPCA (Differencial Equation with Piecewise Constant Argument), reciben cada vez más antención. Las DEPCA tienen muchas aplicaciones, tales como la ecología, la propagación de algunas enfermades infecciosas en humanos, etc. Estas ecuaciones son similares en estructura a las que se encuentran en cierta "secuencia continua".

El estudio de las ecuaciones diferenciales con argumento DIScontinuo, en particular con argumento constante a trozos, fue porpuesto por primera vez por Myshkis [14]. Esto por su gran aplicabilidad en ecuaciones diferenciales con retardo que modelan sistemas físicos y biológicos en los cuales su ritmo de cambio depende de su pasado. El estudio de las DEPCA fue iniciado por Cook y Wiener [4] y actualmente extendida por las aportaciones de Aftabizadeh y Wiener [17].

Con respecto a una gama completa de investigación en la solución analítica, muchas investigaciones se han centrado en el comportamiento correspondiente a la solución numérica de las DEPCA. Liu [9] examinó en primer lugar la estabilidad numérica de los métodos Runge-Kutta para la DEPCA más básica

$$\frac{dx}{dt}(t) = ax(t) + a_0([t]). \tag{1}$$

Despues de eso, el análisis numérico de las DEPCA se ha desarrollado rapidamente. La estabilidad de los métodos Euler-Maclaurin para la DEPCA neutral

$$\frac{dx}{dt}(t) = ax(t) + \Sigma_{i=0}^{n} a_i x^i([t]),$$

se estudió en [18].Song y Liu [10] construyeron métodos de multiples avances lineales mejorados para la ecuacion (1) debido al mal desempeño de los métodos clásicos de multiples avances lineales para esta ecuación. Recientemente, Liang junto a otros autores [8] consideraron la estabilidad numérica del sistema

$$\frac{dx}{dt}(t) = Lx(t) + Mx([t])$$

con coeficientes de matris de norma 2. Hasta el momento, se han reportado muy pocos resultados que tratan de la estabilidad de la solución numérica para las DEPCA de tipo avanzado excepto para [15].

Una ecuación diferencial con argumento constante a trozos es una ecuación de la forma

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t), x(\gamma(t))),$$

donde $\gamma(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, es una función constante a trozos.

En esta memoria de título se estudiará la estabilidad analítica y la solución numérica de la siguiente DEPCA lineal de la forma:

$$\frac{dx}{dt}(t) = ax(t) + bx(\gamma(t)),$$

Continuando con la DEPCA con un avance:

$$\frac{dx}{dt}(t) = ax(t) + a_0x([t]) + a_1x([t+1]), \quad t \geq 0$$

y para terminar con la DEPCA con tes avances

$$\frac{dx(t)}{dt} = ax(t) + a_0x([t]) + a_1x([t+1]) + a_2x([t+2]), \quad x(0) = x_0, \quad x(1) = x_1,$$

donde a, a_i con $(i = 0, 1, 2)$, x_0 y x_1 son constantes reales.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Concepto de Ecuación Diferencial

Definición 1.1.1 *[19] Si una ecuación contiene las derivadas o diferenciales de una o más variables dependientes con respecto a una o más variables independientes, se dice que es una ecuación diferencial.*

Las ecuaciones diferenciales se clasifican de acuerdo con las propiedades siguientes.

- Clasificación según el tipo: Si una ecuación contiene solo derivadas ordinarias de una o más variables dependientes con respecto a una sola variable independiente, entonces se dice que es una *Ecuación Diferencial Ordinaria* (E.D.O). Unos ejemplo de estas ecuaciones:

$$\begin{array}{ll} 1. & \dfrac{dy}{dx} + 3y = e^x \quad , \\ 2. & \dfrac{d^2y}{dx^2} + 3y = 0. \end{array}$$

  Si la ecuación contiene derivadas parciales de una o más variables dependientes de dos o más variables independientes se llama *Ecuación Diferencial Parcial* (E.D.P). Ejemplo

$$\begin{array}{ll} 1. & \dfrac{d^2y}{dx^2} - \dfrac{d^2y}{dz^2} = 0 \quad , \\ 2. & \dfrac{du}{dx} - \dfrac{dv}{dx} = 0. \end{array}$$

- Clasificación según el orden: El orden de una ecuación diferencial viene determinado por la derivada de orden más alto que aparece en dicha ecuación. Por ejemplo la ecuación

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + 3y = 0,$$

es una eciación de orden 2. Por otro lado la ecuación

$$\frac{d^3y}{dx^3} + 3\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} - y = 0,$$

es una ecuación de orden 3.

- Clasificación según el grado: El grado de una ecuación diferencial está dado por el exponente del mayor orden de su derivada.

- Clasificación según la linealidad: Se dice que una ecuación diferencial ordinaria de orden n es lineal si F es lineal en $y, y', ..., y^{(n)}$.). Esto significa que una ecuacií diferencial ordinaria de orden n es lineal cuando $F(x, y, y', ..., y^{(n)})$=0 es:

$$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + ... + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x) \tag{1.1}$$

de aqui podemos afirmar que la variable dependiente y y todas sus derivadas $(y', y'', ..., y^{(n)})$ son de primer grado. Y los coeficientes $a_0, a_1, ..., a_n$ dependen solo de la variable x. Algunos ejemplos de ecuaciones diferenciales lineales:

$$\begin{array}{ll} 1. & \dfrac{d^2y}{dx^2} + x\dfrac{dy}{dx} - 3y = e^{2x} \quad , \\ 2. & \dfrac{d^3y}{dx^3} + \dfrac{d^2y}{dx^2} + y = 0. \end{array}$$

Por otro lado una ecuación diferencial no es lineal cuando el coeficiente de la variable dependiente y también depende de y. un ejemplo de una ecuación diferencial no lineal sería:

$$\begin{array}{ll} 1. & (1-y)\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2y = e^x \quad , \\ 2. & \dfrac{d^2y}{dx^2} + seny = 0. \end{array}$$

1.2. Ecuación lineal de primer orden y primer grado

Definición 1.2.1 *[3] Se llama ecuación diferencial lineal de primer orden a toda ecuación de la forma*

$$a(x)y' + b(x)y = c(x) \tag{1.2}$$

donde $a(x)$, $b(x)$ y $c(x)$ son funciones de primer orden expresadas en su forma normal:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x) \tag{1.3}$$

se cuenta con el siguiente teorema de existencia y unicidad de soluciones de un problema de valor inicial (caso particular del Teorema de Picard).

Teorema 1.2.2 *[3] Si $p(x)$ y $q(x)$ son funciones continuas en algún intervalo (a, b) que contiene al punto x_0, entonces para cualquier $y_0 \in R$ existe una única solución del problema de valor inicial:*

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} + p(x)y &= q(x) \\ y(x_0) &= y_0 \end{cases}$$

Veremos a continuación dos métodos para resolver las ecuaciones lineales de la forma (1.3), que verifican las hipótesis del teorema anterior.

Primer Método: Mediante factores integrantes:

Las ecuaciones lineales siempre poseen un factor integrante del tipo $\mu = \mu(x)$, y por tanto, se pueden integrar utilizando este hecho. En efecto, escribiendo la ecuacion diferencial lineal (1.3) en la forma:

$$[p(x)y - q(x)]\,dx + dy = 0,$$

y llamando $M(x, y) = [p(x)y - q(x)]$, $N(x, y) = 1$ se tiene que

$$\frac{1}{N}\left[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right] = p(x),$$

es únicamente función de x y, utilizando un resultado anterior, podemos asegurar que la ecuación posee un factor integrante que sólo es función de x. Por otra parte, se puede comprobar que un factor integrante de la ecuación (1.3) es:

$$\mu(x) = e^{\int p(x)dx}$$

Segundo Método: Por variación de la constante:

Este método se basa en el hecho de que todas las soluciones de la ecuación lineal (1.3) se pueden expresar como suma de la solución de la ecuación

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0, \tag{1.4}$$

la cual se denomina ecuación incompleta u homogénea. Y una solución particular de la ecuación completa (1.3). La solución general de la ecuación homogénea (1.4) se puede obtener fácilmente, teniendo en cuenta que es una ecuación de variables separables:

$$\begin{array}{rl} & \dfrac{dy}{dx} + p(x)y = 0 \\ \Rightarrow & \dfrac{dy}{y} = -p(x)dx \\ \Rightarrow & ln|y| = \int -p(x)dx + c_1 \\ \Rightarrow & y = Ce^{\int -p(x)dx} \qquad , \quad C \in \mathbb{R} \end{array}$$

Para obtener una solución particular de la ecuación completa se puede utilizar el que se denomina método de variación de la constante, y que se basa en que siempre existe, como comprobaremos, una funcón $C(x)$ tal que

$$y = C(x)e^{\int -p(x)dx}, \tag{1.5}$$

es una solución de la ecuación completa. Así, una vez determinada $C(x)$ se tendrá una solución particular de la ecuación completa. (Obsérvese que el nombre del método se debe a que la expresión (1.5) se obtiene de la solución general de la ecuación incompleta, considerando la constante ahora como una función).

Escribamos, para simplificar, la expresión (1.5) en la forma

$$y = C(x)\eta(x), \tag{1.6}$$

y comprobemos que la ecuación completa tiene una solución de este tipo. La función $y = C(x)\eta(x)$ es solucion de (1.3) cuando

$$[C'(x)\eta(x) + C(x)\eta'(x)] + p(x)C(x)\eta(x) = q(x)$$

si, y sólo si,

$$C'(x)\eta(x) + C(x)\left[\eta'(x) + p(x)\eta(x)\right] = q(x),$$

y como $\eta(x)$ es solución de la ecuación incompleta

$$C'(x)\eta(x) = q(x).$$

Ahora, como $\eta(x) = e^{\int -p(x)dx}$ no se anula nunca, entonces integrando conseguimos que una $C(x)$ es

$$C(x) = \int e^{\int p(x)dx} q(x)dx,$$

y, por lo tanto

$$y = e^{\int -p(x)dx} \int e^{\int p(x)dx} q(x)dx,$$

es una solución particular de la completa.
Entonces, la solución general de la ecuación se puede expresar de la forma

$$y = Ce^{\int -p(x)dx} + e^{\int -p(x)dx} \int e^{\int p(x)dx} q(x)dx.$$

1.3. Métodos numéricos para EDO de primer orden

A menudo, existen problemas prácticos que conducen a ecuaciones diferenciales que no pueden resolverse mediante los procedimientos expuestos anteriormente o también a ecuaciones cuyas soluciones vienen expresadas en términos tan complicados que, con frecuencia, es preferible obtener una tabla de valores aproximados de la solución en los puntos de un determinado intervalo. Si suponemos que existe una solución de una ecuación diferencial dada, entonces aquella representa un lugar geométrico (curva) en el plano.

En esta sección estudiaremos procedimientos numéricos que utiliza la ecuación diferencial para obtener una sucesión de puntos cuyas coordenadas aproximan las coordenadas de los puntos de la curva que efectivamente es la solución. Dado un problema de valor inicial

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{dy}{dx} & = & f(x,y) \\ y(x_0) & = & y_0 \end{array} \right.$$

se trata de obtener aproximadamente los valores de la soluciń, si existe, en un conjunto de puntos del intervalo $[a,b]$ que interese, entre los cuales ha de estar el punto $x = x_0$. Para ello, se fija un $h > 0$ y se obtiene un conjunto de puntos $x_0, x_1, ..., x_n \subset [a,b]$, de la forma

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & x_0 + h \\ x_2 & = & x_0 + 2h \\ x_3 & = & x_0 + 3h \\ \ldots & & \end{array}$$

$$x_n \;=\; x_0 + nh$$

para los que se calcularán los valores aproximados de la solución $y_1, y_2, ..., y_n$ de la ecuación diferencial, con la condición $y(x_0) = y_0$. A la longitud h de cada subintervalo $[x_i, x_{i+1}]$ se le llama **paso**.

Una forma general de efectuar el cálculo de los valores aproximados de la solución en cada paso es mediante el uso de polinomios de Taylor

$$y(x+h) \approx y(x) + h\frac{dy}{dx}(x) + \frac{h^2}{2!}\frac{d^2y}{dx^2}(x) + ... + \frac{h^k}{k!}\frac{d^ky}{dx^k}(x), \tag{1.7}$$

teniendo en cuenta que si el valor de h es pequeño, las potencias más altas $h^2, h^3, ...$ son muy pequeñas. Veamos algunos casos particulares.

Método de Euler

El método de Euler o método de las tangentes es una de las técnicas más simples. Consiste en considerar la aproximación

$$y(x+h) \approx y(x) + h\frac{dy}{dx}(x) = y(x) + hf(x,y)$$

(en donde el lado derecho se obtiene a partir de la ecuación diferencial dada) y el siguiente proceso de iteraciónn. En el primer paso se calcula

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0),$$

que se aproxima a $y(x_1) = y(x_0 + h)$. En el segundo paso se calcula

$$y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1),$$

que se aproxima a $y(x_2) = y(x_0 + 2h)$. Así sucesivamente, se calcula

$$y_n = y_{n-1} + hf(x_{n-1}, y_{n-1}),$$

que se aproxima a $y(x_n)$ y, de esta forma, obtenemos una tabla de valores aproximados de la solución.

A continuación veremos un ejemplo del método de Euler.

Ejemplo: Usaremos el método de Euler para obtener el valor aproximado de y(0,5) para la solución del problema de valor inicial

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= (x+y-1)^2 \\ y(0) &= 2 \end{aligned}$$

Si tomamos $h = 0{,}1$, se tiene

$$y_1 = y_0 + 0{,}1(x_0 + y_0 - 1)^2 = 2 + (0{,}1)1 = 2{,}1$$

lo cual es una estimación de $y(0{,}1)$. Si calculamos ahora

$$y_2 = y_1 + 0{,}1(x_1 + y_1 - 1)^2 = 2{,}2440$$

que es una estimación de $y(0{,}2)$.

En las tablas siguientes se muestran los demás valores para $h = 0{,}1$ así como todos los cálculos para $h = 0{,}05$.

x_n	y_n
0.00	2.0000
0.10	2.1000
0.20	2.2440
0.30	2.4525
0.40	2.7596
0.50	3.2261

Tabla 1.1: Método de Euler con $h = 0{,}1$

x_n	y_n
0.00	2.0000
0.50	2.0500
0.10	2.1105
0.15	2.1838
0.20	2.2727
0.25	2.3812
0.30	2.5142
0.35	2.6788
0.40	2.8845
0.45	3.1451
0.50	3.4823

Tabla 1.2: Método de Euler con $h = 0{,}05$

El método de Euler no es lo suficientemente exacto para justificar su uso en la práctica. Se trata de un método de primer orden ya que sólo se consideran en la aproximación los términos constantes y el término que contiene a la primera potencia de h. La omisión de los demás términos produce un error denominado error de truncamiento del método.

Como el proceso es iterativo y el valor aproximado y_i se basa en el anterior y_{i-1}, al error cometido en un paso se le llama error de truncamiento por paso o error de truncamiento local que en el método de Euler será del orden de h^2. Estos errores locales se van acumulando a medida que se opera en los subintervalos sucesivos, generando el error de truncamiento global. Además, existen también los errores de redondeo que afectan a la exactitud de los valores que se van obteniendo.

Método de Runge-Kutta

Un método más exacto que el anterior es el método de Runge-Kutta de cuarto orden (hay métodos de Runge-Kutta de varios órdenes). Este método calcula en cada paso cuatro cantidades auxiliares y luego se calcula el nuevo valor

$$y_{n+1} = y_n + ak_1 + bk_2 + ck_3 + dk_4$$

Estas constantes k_1, k_2, k_3, k_4 se calculan de manera que el desarrollo anterior coincida con el polinomio de Taylor de cuarto orden. Como la deducción del método es bastante tediosa, solo damos los resultados:

$$\begin{aligned}
k_1 &= hf(x_n, y_n)\\
k_2 &= hf(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_1)\\
k_3 &= hf(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_2)\\
k_4 &= hf(x_n + h, y_n + k_3)\\
x_{n+1} &= x_n + h\\
y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)
\end{aligned}$$

Se puede demostrar que el error por truncamiento por paso de orden de h^5 y el método es, en consecuencia, de cuarto orden.

Ejemplo: Si usamos el método de Runge-Kutta de cuarto orden para obtener el valor aproximado de $y(0{,}5)$ para la solución del problema de valor inicial de los ejemplos anteriores obtenemos las siguientes tablas donde podemos comparar los valores aproximados que se obtienen con los valores reales.

x_n	y_n	Valor real
0.00	2.0000	2.0000
0.10	2.1230	2.1230
0.20	2.3085	2.3085
0.30	2.5958	2.5058
0.40	3.0649	3.0650
0.50	3.9078	3.9082

Tabla 1.3: Método de Runge-Kutta con $h = 0{,}1$

x_n	y_n	Valor real
0.00	2.0000	2.0000
0.50	2.0554	2.0554
0.10	2.1230	2.1230
0.15	2.2061	2.2061
0.20	2.3085	2.3085
0.25	2.4358	2.4358
0.30	2.5958	2.5058
0.35	2.7998	2.7997
0.40	3.0650	3.0650
0.45	3.4189	3.4189
0.50	3.9082	3.9082

Tabla 1.4: Método de Runge-Kutta con $h = 0{,}05$

1.4. Funciones Constantes a Trozos

Una ecuación diferencial con argumento constante a trozos es una ecuación diferencial en la cual dentro de sus argumentos nos encontramoscon funciones constantes a trozos, es decir una función que es localmente constante. La función parte entera es un ejemplo clásico de las funciones constantes a trozos. La función parte entera a cada número real le asocia el número entero menor mas cercano, la función $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que denotamos $\gamma(t) = [t]$ y es tal que:

$$\gamma(t) = n, \quad para \quad n \leq t < n+1, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

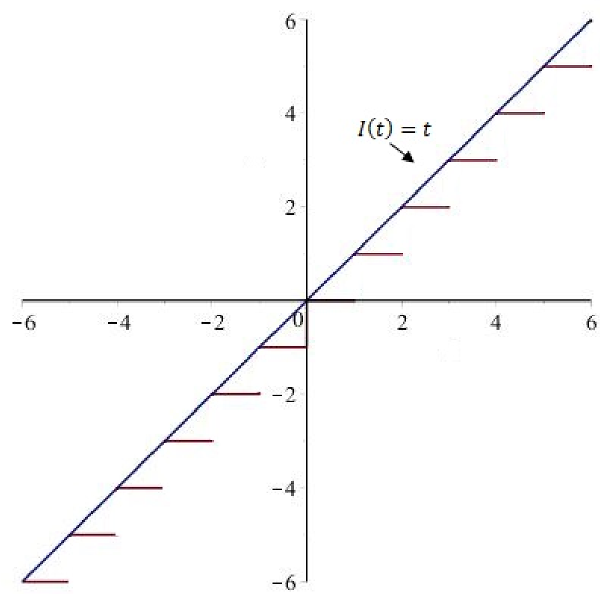

Figura 1.1: $\gamma(t) = [t]$ [5].

A partir de la función parte entera podemos definir un gran número de interesantes funciones constantes a trozos, a continuación presentaremos un ejemplo de una de ellas.

Ejemplo Consideremos $\gamma(t) = 2\left[\dfrac{t+1}{2}\right]$.

Los intervalos de constancia para esta función constante a trozos son de la forma $J_n = [2n-1, 2n+1)$, con $n \in \mathbb{Z}$, esto ya que si $n \in \mathbb{Z}$, entonces

$$\begin{aligned} \left[\frac{t+1}{2}\right] = n \quad &\Longleftrightarrow \quad n \leq \frac{t+1}{2} < n+1 \\ &\Longleftrightarrow \quad 2n-1 \leq t < 2n+1, \end{aligned}$$

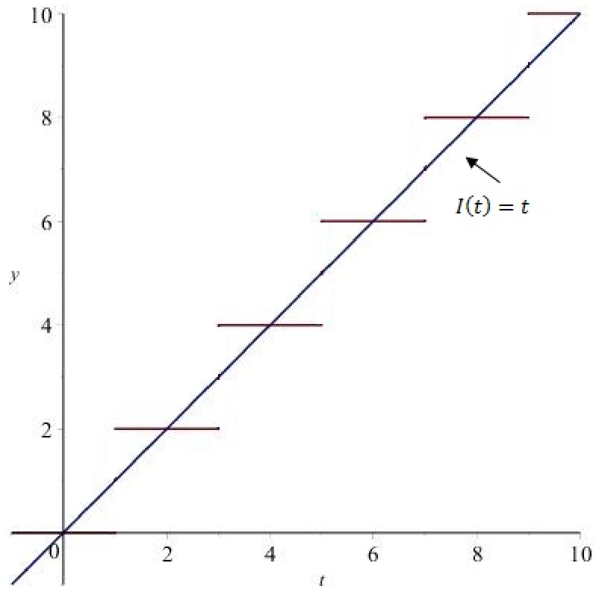

Figura 1.2: $\gamma(t) = 2\left[\dfrac{t+1}{2}\right]$.

por lo tanto

$$\gamma(t) = 2n \Longleftrightarrow 2n - 1 \leq t < 2n + 1.$$

Una característica importante a destacar de la función $\gamma(t)$ es, como se puede ver en la figura, que dentro de cada intervlao J_n existe un sub-intervalo donde la gráfica de $\gamma(t)$ está sobre la gráfica de la función identidad y otro sub-intervalo donde su gráfrica está bajo la gráfica de la función identidad, es decir, podemos hablar de intervalos donde la función $\gamma(t)$ presenta un avance o un retardo con respecto a la identidad. Específicamente tenemos avance en ${J_n}^+ = (2n-1, 2n)$ y retardo en ${J_n}^- = (2n, 2n+1)$, ya que

$$\begin{cases} \gamma(t) - t &= 2n - t > 0, \quad si \quad 2n - 1 < t < 2n \\ \gamma(t) - t &= 2n - t < 0, \quad si \quad 2n < t < 2n + 1. \end{cases}$$

1.5. Ecuaciones en Recurrencia

Las relaciones de recurrencia pueden considerarse como técnicas avanzadas de conteo. Resuelven problemas cuya solución no puede obtenerse usando variaciones, permutaciones, combinaciones o con las técnicas derivadas del principio de inclusión-exclusión.
Una sucesión es una función $f:\mathbb{N}$. Para indicar la imagen en el cojunto A de n, esto es $f(n)$, se emplea el símbolo a_n.

Una sucesión puede denotarse por $a_0, a_1, a_2, a_3, ...$, por $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, por $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ o por $\{a_n\}$. Los elementos $a_0, a_1, a_2, ...$ se les llama *términos* de la sucesión y a_n se dice que es el término general. Un ejemplo de ecuaciones de recurrencia es la conocida sucesión de Finonacci $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...$, donde cada término, a partir del tercero, se obtiene sumando los dos anteriores, esto es:

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \quad n \geq 3,$$

Una expresión de este tipo, en la que el término general de la sucesión se escribe en función de algunos otros términos anteriores, recibe los nombres de Relación de Recurrencia, Ecuación de Recurrencia o Ecuación en diferencias. La relación de recurrencia no determina de manera única la sucesión. Para ellos es necesario conocer algunos términos de la sucesión, lo que llamaremos condiciones iniciales o condiciones fronteras. En el caso anterior $a_1 = 1$ y $a_2 = 1$.

Definición 1.5.1 *[6] Una ecuación de recurrencia lineal de orden k con coeficientes constantes es una relación*

$$c_n a_n + c_{n-1}a_{n-1} + ... + c_{n-k}a_{n-k} = b_n, \quad n \geq 0, \tag{1.8}$$

donde $c_n, c_{n-1}, ..., c_{n-k}$ son constanres con $c \neq 0$, $c_{n-k} \neq 0$ y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión conocida. diremos que (1.8) *es homogenea si $b_n = 0$.*

Existen diferentes formas de resolver una ecuación de recurrencia, y esto depende de que tipo de ecuación de recurrencia es la que tenemos que trabajar. A continuación presentaremos la clasificación de las ecuaciones de recurrencia:

1.5.1. La ecuación de recurrencia homogénea de primer orden

$$a_n = ca_{n-1}, \quad n \geq 1, \quad c \neq 0$$

verifica $a_n = ca_{n-1} = c^2 a_{n-3} = ... = c^n a_0$. Por lo tanto la solución es de la forma $a_n = \alpha c^n$ con $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$. el valor de α viene determinado por la condición frontera.

Ejemplo: Sea $a_n = 3_{n-1}$, con $n \geq 1$ y $a_0 = 5$. Esta ecuación de recurrencia depende del elemento inmediato anterior, es por esto que decimos que es de primer orden. Como sabemos que $a_0 = 5$ entonces:

$$\begin{aligned}
a_1 &= 3a_0 = 3 \cdot 5 \\
a_2 &= 3a_1 = 3(3a_0) = 3 \cdot 3 \cdot 5 = 3^2 \cdot 5 \\
a_3 &= 3a_2 = 3(3(3a_0)) = 3^3 \cdot 5 \\
&. \\
&. \\
&. \\
a_n &= 3^n \cdot 5.
\end{aligned}$$

Donde esta última es la ecuación de recurrencia.

1.5.2. La ecuación de recurrencia homogénea de segundo orden

$$c_n a_n + c_{n-1} a_{n-1} + c_{n-2} a_{n-2} = 0, \quad n \geq 2,$$

con $c_n \neq 0$ y c_{n-k}, y su solución general es de la forma

$$a_n = \alpha s1_n + \beta s2_n$$

con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y donde $\{s1_n\}$ y $\{s2_n\}$ son dos sucesiones solución independientes de la ecuación (una no es múltiplo escalar de otra). Para obtener las soluciones particulares nos centramos en la ecuacion de orden 1. Probamos con una de la forma $a_n = r^n$, siendo $r \neq 0$, se tiene,

$$\begin{aligned}
c_n r^n + c_{n-1} r^{n-1} + c_{n-2} r^{n-2} &= 0 \\
r^{n-2}(c_n r^2 + c_{n-1} r + c_{n-2}) &= 0
\end{aligned}$$

y como $r \neq 0$, para que r^n sea solución debe ser raíz del polinomio

$$P(x) = c_n x^2 + c_{n-1} x + c_{n-2}$$

Al polinomio $P(x)$ se le llama *polinomio característico* de la ecuación de recurrencia y sus raíces determinan la forma de la solución. Así tenemos los casos siguientes: (a) las raíces son números reales o complejas distintas, (b) las raíces son reales iguales.

A continuacíon mostraremos como resolver cada uno de estos casos.

Raíces reales o complejas distintas.

Si $P(x)$ tiene sus dos raíces distintas r_1 y r_2 (ambas reales o ambas complejas), entonces ${r_1}^n$ y ${r_2}^n$ son las soluciones independientes buscadas y la solución general es

$$a_n = \alpha {r_1}^n + \beta {r_2}^n$$

Ejemplo 1 Resolvamos

$$\begin{cases} a_n + a_{n-1} - 6a_{n-2} = 0, n \geq 2 \\ \hfill a_0 = 1, a_1 = 2 \end{cases}$$

La ecuación característica $x^2 + x - 6 = 0$ tiene *dos raíces reales distintas* que son 2 y -3 y por tanto la solución general es

$$a_n = \alpha 2^n + \beta(-3)^n$$

Para determinar α y β con las condiciones frontera para $n = 0$ ($a_0 = \alpha 2^0 + \beta(-3)^0 = 1$) y $n = 1$ ($a_1 = \alpha 2^1 + \beta(-3)^1 = 2$) obtenemos el sistema

$$\begin{cases} \alpha + \beta & = & 1 \\ 2\alpha - 3\beta & = & 2 \end{cases}$$

Cuya solución, $\alpha = 1$ y $\beta = 0$, nos permite establecer que la solución única de la ecuación de recurrencia dada es $a_n = 2^n$.

Ejemplo 2. Resolvamos

$$\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} - 2a_{n-2}, n \geq 2 \\ \hfill a_0 = 1, a_1 = 2 \end{cases}$$

El polinomio característico $x^2 - 2x + 2 = 0$ tiene *dos raíces distintas complejas* las que son $1 + i$ y $1 - i$, por lo tanto la solución general es de la forma

$$a_n = \alpha(1 + i)^n + \beta(1 - i)^n$$

luego utilizando propiedades de los números complejos se tiene

$$(1 + i) = \sqrt{2}\left(cos\frac{\Pi}{4} + isen\frac{\Pi}{4}\right) \quad y \quad (1 - i) = \sqrt{2}\left(cos\frac{\Pi}{4} - isen\frac{\Pi}{4}\right)$$

as'i

$$(1+i)^n = \sqrt{2}^n\left(cosn\frac{\Pi}{4} + isenn\frac{\Pi}{4}\right) \quad y \quad (1-i)^n = \sqrt{2}^n\left(cosn\frac{\Pi}{4} - isenn\frac{\Pi}{4}\right)$$

de donde

$$a_n = \sqrt{2}^n\left[(\alpha+\beta)cosn\frac{\Pi}{4} + (\alpha-\beta)isenn\frac{\Pi}{4}\right]$$

y llamando $k_1 = \alpha+\beta$ y $k_2 = (\alpha-\beta)i$, las condiciones frontera para $n=0$ y $n=1$ determinan el sistema

$$\left\{\begin{array}{rcl} k_1cos0 + k_2sen0 & = & 1 \\ \sqrt{2}\left[k_1cos\frac{\Pi}{4} + k_2sen\frac{\Pi}{4}\right] & = & 2 \end{array}\right.$$

cuya solución es $k_1 = 1$ y $k_2 = 1$.
Finalmente la solución de la ecuación de recurrencia es

$$a_n = \sqrt{2}^n\left[cosn\frac{\Pi}{4} + senn\frac{\Pi}{4}\right].$$

Raíces reales iguales

Si $P(x)$ tiene una única raíz real r de multiplicidad 2, entonces la sucesión r^n es una solución y se puede probar que nr^n es otra solución independiente de la aneterior. Luego la solución general es

$$a_n = \alpha r^n + \beta r^n$$

Ejemplo. Resolvamos

$$\left\{\begin{array}{r} a_n - 6a_{n-1} + 9a_{n-2} = 0, n \geq 2 \\ a_0 = 5, a_1 = 12 \end{array}\right.$$

El polinomio característico $x^2 - 6x + 9 = 0$ tiene dos raíces iguales que es 3 con multiplicidad 2, de aqui tenemos soluciones indepentienes las cuales son 3^n y $n3^n$ y por lo tanto la solución general es

$$a_n = \alpha 3^n + \beta n 3^n$$

Las condiciones frontera para $n=0$ y $n=1$ determinan el sistema

$$\left\{\begin{array}{r} \alpha = 5 \\ 3\alpha + 3\beta = 12 \end{array}\right.$$

cuya solucion es $\alpha = 5$ y $\beta = -1$. Finalente la ecuación de recurrencia es $a_n = 5 \cdot 3^n - n3^n$.

Capítulo 2

DEPCA

2.1. Ecuaciones Diferenciales con Argumento Constante a Trozos (DEPCA)

Una ecuación diferencial con argumento constante a trozos, es una ecuación de la forma

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t), x(\gamma(t))) \tag{2.1}$$

donde $\gamma(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, es una función constante a trozos.
El estudio de las ecuaciones diferenciales con argumento discontinuo, en particular con argumento constante a trozos, fue propuesto por primera vez por Myshkis [14] . Esto por su gran aplicabilidad en ecuaciones diferenciales con retardo que modelan sistemas físicos y biológicos en los cuales su ritmo de cambio depende de su pasado. Por otro lado, el estudio de las DEPCA fue iniciado por Cook y Wiener [4]. En 1993, Wiener publica su libro recopilatorio [17] con los trabajos sobre DEPCAs publicados hasta ese momento. En el nos encontramos con un estudio sobre existencia, estabilidad y oscilación de soluciones de la ecuación (2.1) para los casos:

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= [t] \\ \gamma(t) &= 2\left[\frac{t+1}{2}\right], \end{aligned}$$

y en generalización de estas últimas

$$\gamma(t) = m\left[\frac{t+k}{m}\right].$$

También podemos referir trabajos que hablan sobre la existencia de soluciones periódicas de DEPCA [1, 2] . Dadas las sucesiones $\{\xi_i\} \subset \mathbb{R}$ y $\{t_i\} \subset \mathbb{R}$, tales que $t_i \leq \xi_i \leq t_{i+1}$ y donde

$$\lim_{i\to\infty} t_i = \pm\infty,$$

definimos la función escalonada generalizada $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por

$$\gamma(t) = \xi_i, \quad si \quad t_i = [t_i, ti + 1). \tag{2.2}$$

2.2. Solución de la DEPCA

Definición 2.2.1 *Diremos que x es solución de la DEPCAG (2.1), donde $\gamma(t)$ está dada por (2.2), si*

(i) x es continua en R.

(ii) x es diferenciable en R, excepto posiblemente en los puntos $t = t_n$ con $n \in \mathbb{Z}$, donde sus derivadas laterales existen.

(iii) x es una solución de $x'(t) = f(t, x(\gamma(t)))$, en cada intervalo J_n, excepto posiblemtne en los puntos $t = t_n$ con $n \in \mathbb{Z}$.

2.3. La ecuación lineal

En esta sección analizaremos la ecuación diferencial con dos avances, y luego su estabilidad asintótica.
Para $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por (2.2), consideremos la ecuación lineal escalar con coeficientes constantes

$$\frac{dx}{dt}(t) = ax(t) + bx(\gamma(t)), \tag{2.3}$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$. Si $x_n(t)$ es solución de (2.3) en el intervalo J_n, con la condición $x_n(\xi_n)$, debe satisfacer

$$\frac{dx_n}{dt}(t) = ax_n(t) + bx_n(\xi_n),$$

ecuación lineal, cuya solución satisface

$$x_n(t) = x_n(\xi_n)\left\{e^{a(t-\xi_n)} + \frac{a}{b}\left(e^{a(t-\xi_n)} - 1\right)\right\}.$$

Definiendo

$$\lambda(t) = e^{at} + \frac{a}{b}\left\{e^{at} - 1\right\},$$

tenemos

$$x_n(t) = x_n(\xi_n)\lambda(t - \xi_n).$$

Evaluando en esta última para $t = t_n$ tenemos

$$x_n(t_n) = x_n(\xi_n)\lambda(t_n - \xi_n),$$

y como la solución de (2.3) debe ser continua, para $t = t_{n+1}$ se debe cumplir

$$x_n(t_{n+1}) = x_n(\xi_n)\lambda(t_{n+1} - \xi_n).$$

Estas dos últimas ecuaciones, para $\lambda(t_n - \xi_n) \neq 0$, nos permiten formar la siguiente ecuacion de recurrencia

$$x_n(t_n + 1) = \frac{\lambda(t_{n+1} - \xi_n)}{\lambda(t_n - \xi_n)} x_n(t_n),$$

cuya solución está dada por

$$x_n(t_n) = \prod_{k=1}^{n-1} \left\{ \frac{\lambda(t_{k+1} - \xi_k)}{\lambda(t_k - \xi_k)} \right\} x_1(t_1), \quad para \quad n \geq 1.$$

Luego, usando las relaciones anteriores, tenemos para $x_n(\xi_n)$

$$x_n(\xi_n) = \lambda^{-1}(t_n - \xi_n) \prod_{k=1}^{n-1} \left\{ \frac{\lambda(t_{k+1} - \xi_k)}{\lambda(t_k - \xi_k)} \right\} x_1(t_1)$$

y como

$$x_1(t_1) = x_0(t_1) = x_0(\xi_o)\lambda(t_1 - \xi_0),$$

tenemos finalmente

$$x_n(\xi_n) = x_0(\xi_0) \frac{\lambda(t_1 - \xi_0)}{\lambda(t_n - \xi_n)} \prod_{k=1}^{n-1} \left\{ \frac{\lambda(t_{k+1} - \xi_k)}{\lambda(t_k - \xi_k)} \right\},$$

lo cual podemos reescribir como

$$x_n(\xi_n) = x_0(\xi_0) \prod_{k=1}^{n-1} \left\{ \frac{\lambda(t_{k+1} - \xi_k)}{\lambda(t_{k+1} - \xi_{k+1})} \right\} \tag{2.4}$$

Por lo tanto, la solución de la DEPCA (2.3) es

$$x_t = \lambda(t - \gamma(t)) \prod_{k=0}^{n-1} \left\{ \frac{\lambda(t_{k+1} - \xi_k)}{\lambda(t_{k+1} - \xi_{k+1})} \right\} x_0(\xi_0), \quad para \quad \mathrm{t}_n.$$

(2.5)

Como se mencionó anteriormente, $\gamma(t) = \frac{1}{m}[mt + l]$, con $m \in \mathbb{Z}$ y $0 \leq l \leq 1$, nos será de gran interes, ya que nos permite aproximar la identidad. Estudiaremos (2.4), para este caso.

Para $\gamma(t) = \frac{1}{m}[mt + l]$, tenemos $t_n = \frac{n-l}{m}$ y $\xi_n = \frac{n}{m}$, luego (2.4) nos queda:

$$x\left(\frac{n}{m}\right) = \left\{ \frac{\lambda\left(\frac{1-l}{m}\right)}{\lambda\left(-\frac{l}{m}\right)} \right\}^n x(0).$$

Luego para t_n, la solución de 2.3 está dada por:

$$x(t) = \lambda(t - \xi_n) \left\{ \frac{\lambda\left(\frac{1-l}{m}\right)}{\lambda\left(-\frac{l}{m}\right)} \right\}^n x(0). \tag{2.6}$$

Una vez determinada ésta, establecemos el siguiente resultado.

Teorema 2.3.1 *La solución $x \equiv 0$ de* (2.3) *es asintóticamente estable, si y sólo si*

$$\left| \frac{\lambda\left(\frac{1-l}{m}\right)}{\lambda\left(-\frac{l}{m}\right)} \right| < 1$$

Demostración.

Para t_n, sea $T(t) = t - \xi_n = t - \frac{n}{m}$. Si t_n tenemos

$$\frac{n}{m} - \frac{l}{m} = \xi_n - \frac{l}{m} \leq t < \frac{n+1}{m} - \frac{l}{m} = \frac{n}{m} + \frac{1-l}{m} = \xi_n + \frac{1-l}{m},$$

luego

$$-\frac{l}{m} \leq t - \xi_n < \frac{1-l}{m}.$$

Así tenemos $T(t)$ es acotada, de lo cual concluimos que $\lambda(T(t))$ es acotada. Esto es suficiente para establecer lo que se quiere, ya que si miramos (2.6) podemos ver que esto nos dice que

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$$

si y sólo si

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{\lambda\left(\frac{1-l}{m}\right)}{\lambda\left(-\frac{l}{m}\right)}^{n}\right\}=0,$$

y a su vez

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{\lambda\left(\frac{1-l}{m}\right)}{\lambda\left(-\frac{l}{m}\right)}^{n}\right\}=0,$$

si y sólo si

$$\left|\frac{\lambda\left(\frac{1-l}{m}\right)}{\lambda\left(-\frac{l}{m}\right)}\right|<1.$$

2.4. DEPCA con dos avances

En esta sección demostrará la estabilidad analítica y la solución numérica de la siguiente DEPCA con dos avances:

$$\frac{dx}{dt}(t) = ax(t) + a_0x([t]) + a_1x([t+1]), \quad t \geq 0 \tag{2.7}$$

Suponiendo que $x_n(t)$ es una solución de (2.7) en el intervalo $[n, n+1)$, con las condiciones $c_n = x(n)$, entonces

$$\frac{dx}{dt}(t) = ax_n(t) + a_0c_n + a_1c_{n+1} \tag{2.8}$$

por lo tanto, la solución general de (2.8) en $[n, n+1)$ es

$$x_n(t) = ce^{a(t-n)} - a^{-1}(a_0c_n + a_1c_{n+1})$$

con una constante arbitratia c, escribiendo $x(n))c_n$, entonces

$$c - a^{-1}(a_0c_n + a_1c_{n+1}) = c_n$$

Así

$$c = c_n + a^{-1}(a_oc_n + a_1c_{n+1})$$

entonces

$$x_n(t) = m_0(t-n)c_n + m_1(t-n)c_{n+1}$$

donde la fucnión $m_i(t), i = 0, 1, 2$ se define en (2.14).

Si $x_{n-1}(t)$ designa la solución de (2.7) en $[n-1, n)$, entonces

$$x_{n-1}(t) = m_0\{t-n+1\}c_{n-1} + m_1\{t-n+1\}c_n, \tag{2.9}$$

por la continuidad de la solución, que es $x_{n-1}(n) = x_n(n)$, tenemos

$$m_0(1)c_{n-1} + m_1(1)c_n = m_0(0)c_n + m_1(0)c_{n+1}$$

Obteniendo la siguiente relación de recurrencia.

$$(1 - m_1(1))c_n - m_0(1)c_{n-1} = 0 \tag{2.10}$$

Buscamos una solución particular de (2.10) en la forma $c_n = \lambda^n$

$$(1 - m_1(1))\lambda^n + m_0(1)\lambda^{n-1} = 0$$

así

$$(1 - m_1(1))\lambda^n + m_0(1) = 0$$

luego, depejando λ, tenemos

$$\lambda = \frac{-m_o(1)}{1 - m_1(1)}$$

luego,

$$\lambda = \frac{m_o(1)}{m_1(1) - 1}$$

entonces, finalmente

$$c_n = \left\{ \frac{m_o(1)}{m_1(1) - 1} \right\}^n x_0.$$

2.5. DEPCA con tres avances

En esta sección demostrará la estabilidad analítica y la solución numérica de la siguiente DEPCA con tres avances:

$$\frac{dx}{dt}(t) = ax(t) + a_0x([t]) + a_1x([t+1]) + a_2x([t+2]), \quad t \geq 0, \tag{2.11}$$

con $x(0) = x_0$ y $x(1) = x_1$.

Suponiendo que $x_n(t)$ es una solución de (2.11) en el intervalo $[n, n+1)$, con las condiciones $c_n = x(n)$, entonces

$$x(t) = m_0(t)c_{[t]} + m_1(t)c_{[t+1]} + m_2(t)c_{[t+2]},$$

donde t es la parte fraccionaria de t y

$$c_{[t]} = \frac{\lambda_1(x_1 - \lambda_2 x_0) + \lambda_2(\lambda_1 x_0 - x_1)}{\lambda_1 - \lambda_2} \tag{2.12}$$

de aquí

$$\begin{aligned} m_0(t) &= e^{at} + \frac{a_0}{a}(e^{at} - 1), \\ m_1(t) &= \frac{a_1}{a}(e^{at} - 1), \\ m_2(t) &= \frac{a_2}{a}(e^{at} - 1), \end{aligned} \tag{2.13}$$

λ_1 y λ_2 son las raíces de la ecuación

$$m_2(1)\lambda^2 + (m_1(1) - 1)\lambda + m_0(1) = 0. \tag{2.14}$$

Suponiendo que $x_n(t)$ es una solución de (2.11) en el intervalo $[n, n+1)$, con las condiciones $c_n = x(n)$, entonces

$$\frac{dx}{dt}(t) = ax_n(t) + a_0c_n + a_1c_{n+1} + a_2c_{n+2}, \tag{2.15}$$

por lo tanto, la solución general de (2.15) on $[n, n+1)$ es

$$x_n(t) = ce^{a(t-n)} - a^{-1}(a_0c_n + a_1c_{n+1} + a_2c_{n+2}),$$

con una constante arbitraria c.

Escrbiendo $t = n$ obtenemos

$$c_n = c - a^{-1}(a_0c_n + a_1c_{n+1} + a_2c_{n+2}),$$

Así

$$c = (1 + a^{-1}a_0)c_n + a^{-1}a_1c_{n+1} + a^{-1}a_2c_{n+2},$$

entonces

$$x_n(t) = m_0(t-n)c_n + m_1(t-n)c_{n+1} + m_2(t-n)c_{n+2},$$

donde la fucnión $m_i(t), i = 0, 1, 2$ se define en (2.14).

Si $x_{n-1}(t)$ designa la solución de (2.11) en $[n-1, n)$, entonces

$$x_{n-1}(t) = m_0\{t-n+1\}c_{n-1} + m_1\{t-n+1\}c_n + m_2\{t-n+1\}c_{n+1},$$

por la continuidad de la solución, que es $x_{n-1}(n) = x_n(n)$, tenemos la siguiente relación de recurrencia:

$$(1 - m_1(1))c_n - m_0(1)c_{n-1} - m_2(1)c_{n+1} = 0. \tag{2.16}$$

Buscamos una solución particular de (2.16) en la forma $c_n = \lambda^n$, onteniendo (2.14). Si las raíces λ_1 y λ_2 de (2.14) son diferentes, la solución general de (2.16) es

$$c_n = p_1\lambda_1^n + p_2\lambda_2^n, \tag{2.17}$$

con constantes arbitrarias p_1 y p_2. Donde $n = 0$ y $n = 1$ en (2.17), así

$$\begin{aligned} p_1 + p_2 &= c_0 = x_0, \\ p_1\lambda_1 + p_2\lambda_2 &= c_1 = x_1, \end{aligned}$$

respectivamente, por lo tanto

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{x_1 - x_0\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \\ p_2 &= \frac{x_0\lambda_1 - x_1}{\lambda_1 - \lambda_2}, \end{aligned}$$

por lo que de (2.17), obtenemos

$$c_n = \frac{\lambda_1^n(x_1 - \lambda_2x_0) + \lambda_2^n(\lambda_1x_0 - x_1)}{\lambda_1 - \lambda_2},$$

finalmente concluimos que (2.12) se cumple.

A continuación analizaremos la estabilidad asintotica.

Definición 2.5.1 *Si alguna solución* $x(t)$ *de* (2.11) *satisface*

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0,$$

entonces la solución cero de (2.11) *se llama asintóticamente estable.*

Lemma 2.5.2 *[13] Los módulos de las raíces de la ecuación* $x^2 - Ax - B = 0$ *son menores que* 1 *si y sólo si* $|B| < 1$ *y* $|A| < 1 - B$.

Lemma 2.5.3 *[17] La solución de* (2.11) *es asintóticamente estable, es equivalente a los módulos de las raíces de* (2.14), *son menores que* 1

$$|\lambda_1| < 1, \quad |\lambda_2| < 1.$$

Teorema 2.5.4 *La solución cero de* (2.11) *es asintóticamente estable si y sólo si*

$$\begin{aligned} \left(a_0 - a_2 + \frac{ae^a}{e^a - 1}\right)\left(a_0 + a_2 + \frac{ae^a}{e^a - 1}\right) &< 0 \\ (a + a_0 + a_1 + a_2)\left(a_1 - a_0 + a_1 - a_2 - \frac{a(e^a + 1)}{e^a - 1}\right) &< 0 \quad si \quad a \neq 0 \end{aligned} \tag{2.18}$$

Y

$$\begin{aligned} (a_0 - a_2 + 1)(a_0 + a_2 + 1) &< 0 \quad si \quad a = 0 \\ (a_0 + a_1 + a_2)(a_1 - a_0 - a_2 + 2) &< 0 \end{aligned}$$

Probaremos si $a \neq 0$, entonces utilizando los lemas anteriores mencionados en (2.14) nos queda lo sieguiente

$$\begin{aligned} \left|\frac{m_0(1)}{m_2(1)}\right| &< 1, \\ \left|\frac{m_1(1) - 1}{m_2(1)}\right| &< 1 + \frac{m_0(1)}{m_2(1)}. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Ahora analizaremos la primera desigualdad de (2.20), así:

$$\left(\frac{m_0(1)}{m_2(1)}\right)^2 < 1$$

es decir

$$\left(\frac{m_0(1)}{m_2(1)} - 1\right)\left(\frac{m_0(1)}{m_2(1)} + 11\right) < 0,$$

as tenemos

$$\left(\frac{ae^a + (e^a - 1)a_0}{(e^a - 1)a_2} - 1\right)\left(\frac{ae^a + (e^a - 1)a_0}{(e^a - 1)a_2} + 11\right) < 0,$$

luego, de la desigualdad de (2.20), tenemos

$$\left(a_0 - a_2 + \frac{ae^a}{e^a - 1}\right)\left(a_0 + a_2 + \frac{ae^a}{e^a - 1}\right) < 0.$$

Ahora de la segunda desigualdad de (2.20) tenemos

$$\left(\frac{m_1(1) - 1}{m_2(1)}\right)^2 < \left(1 + \frac{m_0(1)}{m_2(1)}\right)^2,$$

es decir

$$(m_0(1) + m_1(1) + m_2(1) - 1)(m_1(1) - m_0(1) - m_2(1) - 1) < 0.$$

Luego, sustituyendo las expresiones de $m_0(1)$, $m_1(1)$ y $m_2(1)$ en esta desigualdad, despues de algunas operaciones simples, tenemos:

$$(a + a_0 + a_1 + a_2)\left(a_1 - a_0 - a_2 - \frac{a(e^a + 1)}{e^a - 1}\right) < 0.$$

El caso de $a = 0$ se puede obtener dejando $a \Rightarrow 0$ en el primer caso de (2.19). finalmente, el problema está completo.

Capítulo 3

Bibliografía

Bibliografía

AFTABIZEDEH, A. R., WIENER, J., & XU, J. M.(1987). Oscillatory and periodic solutions of delay differential equations with piecewise constant argument. *Proceedings of the american mathematical society*, 99-673.

AKHMET, M. U., BUYUKADAH C.(2008). On periodic solutions of differential equations with piecewise constant argument. *Computers Mathematics with Applications*, 56(8), 2034-2042.

BOYCE, W.E., R.C DIPRIMA.(1972). *Introducción a las Ecuaciones Diferenciales.* México. Limusa Noriega Editores.

COOKE, K.L. WIENER, J .(1984). Retarded Differential Equations with Piecewise constant delays. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 99(1), 256-297.

GONZÁLEZ, L(2013). Aproximación de Soluciones Casi Periódicas de Ecuaciones Diferenciales mediante Argumento Constante a Trozos. *Universidad de Chile.*

GRIMALDI, R.P.(1998). *Matemáticas discreta y combinatoria: una introducción con aplicaciones.* Pearson Prentice Hall 3ra edicion.

KUPPER, T., YUAN, R. (2002). On Quasi-Periodic Solutions of Differential Equations whit Piecewise Constant Argument. *Journal of Mathematical Analysis and Applications.* 267, 173-193.

LIANG, H., LIU, M.Z., YANG, Z.W. (2014). Stability analysis of Runge-Kutta methods for systems $u'(t) = Lu(t) + Mu([t])$. *Applied mathematics and computation*, 228, 463-476.

LIU, M.Z., SONG, M.H. (2004). Stability of Runge-Kutta methods in the numerical solution of equation $u'(t) = au(t) + a_0u([t])$. *Journal of Mathematical Analysis and*

Applications. 166, 361-370.

LIU, M.Z., SONG, M.H.(2010). The improved linear multistep methods for differential equations with piecewise continuous arguments. *Applied mathematics and computation*. 217(8), 4002-4009.

LIU, M.Z., GAO, J.F., & YANG, Z.W.(2007). Oscillation analysis of numerical solution in the methods for equation $x'(t) + ax(t) + a_1x([t-1]) = 0$. *Applied mathematics and computation*, 186(1), 566-578.

LIU, M.Z., GAO, J.F., & YANG, Z.W.(2009). Preservation of oscillations of the Runge-Kutta methods for equation $x'(t) + ax(t) + a_1x([t-1]) = 0$.*Applied mathematics and computation*, 58(6), 1113-1125.

MILLER, J.J. (1971). On the location of zeros of certion classes of polynomial with applications to numerical analysis. *IMA Journal of Applied Mathematics*, 8(3), 397-406.

MYSHKIS, A.D.(1977). On certain problems in the theory of diferential equations with deviating argument. Uspekhi. Nauk, 32.173-202.

SONG, M.H., YANG, Z.W., & LIU, M.Z.(2005). Stability of θ-methods for advanced differential equations with piecewise continuous arguments. *Computers Mathematics with Applications*, 49(9), 1295-1301.

WIENER,J. AFTABIZADEH, A.R .(1988) . An equation alternately of retarded and advanced type. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 129, 243-255.

WIENER,J.(1993). *Generalized Solution of Functional Differential Equations*. Singapore: World Scientific.

YANG, Z.W., LIU, M.Z.(2007). Stability of the Euler-Maclaurin methods for neutral differential equations with piecewise continuous arguments. *Applied mathematics and computation*. 186(2), 1480-1487.

ZILL, D.(1988).Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones. *México. D. F: Grupo Editorial Iberoamericana.*