UNIVERSIDAD DEL BÍO-BÍO
FACULTAD DE EDUCACIÓN Y HUMANIDADES
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
ESCUELA DE PEDAGOGÍA EN MATEMÁTICA

REVISIÓN DE LOS FUNDAMENTOS DE LOS SISTEMAS NUMÉRICOS

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE PROFESOR DE EDUCACIÓN MEDIA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

AUTORES: ORTIZ CONCHA, MACARENA FRANCISCA.
AHUMADA FUENTES, PATRICIO GREGORIO

Profesor Guía: Friz Roa, Luis A.

CHILLÁN 2016

Índice general

Capítulo 1

PRELIMINARES

Las matemáticas junto con sus propiedades más básicas, son una verdad que muchos no cuestionan y suele ser para la mayoría de las personas, una amalgama de números y símbolos extraños.

A pesar de su complejidad, esta área del conocimiento es considerada un lenguaje, el que bien utilizado, ha servido para describir y predecir fenómenos que poseen intricados dinamismos en el espacio, como lo son los movimientos de los planetas, los movimientos de las masas de viento sobre la esfera terrestre o predecir comportamientos de grupos de población, dinámica de la economía mundial, etcétera.

El presente anteproyecto de tesis, hará un breve análisis de los Axiomas Matemáticos y sus consecuencias, ellos son los pilares sobre los que se fundamenta esta ciencia. Esto es, revisaremos aquellas verdades matemáticas que la gran mayoría de las personas han aceptado sin cuestionar, verdades que son afirmaciones relativamente claras y que por ende, no tienen demostración.

Este anteproyecto tendrá una descripción en cuatro partes, tres de las cuales fueron extraídas del texto de profesor Raúl Bravo Flores "Fundamentos de los Sistemas Numéricos" y de profesor Mohan Kumar en su texto "Construction of Number Systems".

Una primera parte contendrá una breve reseña histórica, una segunda parte, describirá la construcción de los números Naturales, para luego describir la construcción de los números Enteros y finalizar con la descripción de la construcción de los números Racionales.

1.1. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA.

El libro "Fundamento de los Sistemas Numéricos" del profesor Raúl Bravo Torres es un texto que fue impreso en el año 1971, el cual fue elaborado con una matemática avanzada e intrincada. Se desea entonces hacer una revisión y una actualización de los contenidos y explicaciones aparecidas en el tomo.

Al mismo tiempo se quiere abordar el problema de la enseñanza universitaria en lo que concierne a la introducción a los números reales.

Muchos autores de libros matemáticos no explicitan claramente el problema que implica fundamentar los sistemas numéricos, ello predispone a los estudiantes a aceptar principios matemáticos sin demostraciones, dejando con un sentimiento de vacío e insatisfacción a los estudiantes. Pensamos que el estudio de las formas en que se construyen y fundamentan los sistemas numéricos pueden ayudar al universitario a enfrentarse con otras formas de pensamiento matemático, donde el raciocinio y la abstracción pura se manifiestan en mayor grado.

Entonces en la presente actividad de titulación se estudiará, analizará, revisará y reescribirán las principales demostraciones aparecidas en el texto de Raúl Bravo, demostraciones que incluyen nociones de teoría de conjuntos, inducción matemática, además de abordar el concepto de estructuras algebraicas, entre otros. Estos resultados clásicos adaptados serán de utilidad para los primeros cursos universitarios de matemática, ingeniería, pedagogía, o alguna otra carrera que desee profundizar en el tema.

1.2. OBJETIVOS.

1.2.1. OBJETIVOS GENERALES

Analizar y definir una nueva descripción que abordará la construcción y fundamentación de los sistemas numéricos, específicamente el de los números naturales, los enteros y los racionales.

1.2.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS.

- Analizar los axiomas de Peano
- Investigar y profundizar la teoría de conjuntos, lógica de relaciones, leyes de composición interna y estructuras algebraicas.
- Examinar y estudiar la construcción de los números enteros en base a las relaciones de equivalencia.
- Estudiar la construcción de los números racionales como conjunto de clases de equivalencia

1.3. ANTECEDENTES HISTÓRICOS.

Desde tiempos muy remotos, el ser humano ha tenido la necesidad de contar tanto objetos inertes como seres vivos. De esta forma, dentro su cotidianeidad y rodeado en muchas ocasiones de grandes cantidades de cosas que contar, surgió la necesidad de representar estos números por medios de distintos símbolos.

La diversidad cultural existente entre los pueblos de este mundo, hizo que cada civilización concibiera sistemas de numeración y símbolos distintos para cada cantidad, los que fueron cambiando a lo largo de la historia, perpetuándose algunos y perdiéndose otros. (María Macías, 2010).

Pero no fue hasta pasado el siglo XVIII, que se comenzó la inquietud para hacer una construcción de los sistemas numéricos.

El Análisis Matemático dio grandes pasos a mediados del siglo XIX y la teoría de funciones tuvo una rápida expansión con su aritmetización rigurosa, que va de Bolzano a Weierstrass. Todo ello resultó en un nuevo álgebra, que ya había cambiado a finales del siglo XIX.

Consecuencia de esta gran transformación, existieron innumerables intentos de fundamentar el álgebra sobre bases sólidas. En esos tiempos ya los números complejos se definían sobre la base de los números reales, los que a su vez se definían en términos de números racionales y estos sobre los números enteros. El problema es que varios matemáticos (entre ellos F. L. G. Frege) se sentían insatisfechos con la definición de los números enteros pues estos estaban sobre bases que consideraban imprecisas. (Boyer, 1969).

Ante esta inquietud, Giuseppe Peano (Matemático italiano 1858 – 1932) desarrolló un lenguaje formalizado el cual nos dejó a través de su lógica matemática una de las mayores contribuciones sobre las que se han apoyado muchas construcciones rigurosas del álgebra y del análisis. (Boyer, 1969).

De esta forma a comienzos del silgo XX, se logró concebir la fundamentación lógica- matemática de los números naturales $\mathbb{N}$, los enteros $\mathbb{Z}$, los racionales $\mathbb{Q}$ y los reales $\mathbb{R}$. Para ello se utilizaron aportes de autores (no menos importantes) como Cantor, Cauchy, Gauss, Euler, Krönecker y Dedekind. Este esfuerzo en conjunto fue determinante a la hora de realizar este trabajo de construcción definitiva de la "Aritmética Elemental". (María Macías, 2010) En la mayor parte de las ciencias una generación derriba lo que otra había construido, y lo que uno parecía haber demostrado firmemente otro lo deshace. Sólo en la matemática cada generación construye un nuevo piso sobre la vieja estructura. (Hermann Hankel ,1839-1873).

De esta forma la matemática muchas veces se la ha comparado con un árbol, que crece en una estructura que se ramifica hacia arriba y que a la vez se extiende hacia el suelo. Así, vemos como sus raices se adentran cada vez más en las profundidades del pensamiento humano y en resolución de problemas cada vez más delicados.

Mientras que las ramas con sus hojas serían las distintas facetas de las matemáticas, que presentándose a simple vista, son caminos que nos conducen hacia aquellas raíces que nos permiten esclarecer, mediante elegancia matemática, las soluciones más recónditas.

1.4. MARCO TEÓRICO.

Como se mencionó anteriormente, no fue hasta el siglo XIX en el que la rigurosidad matemática impulsó la creación de un sistema de axiomas que pudiera explicar de manera lógica el fundamento de todo el sistema numérico sobre el cual se basan la matemáticas. Dicho de otra forma, que todo el cuerpo tradicional de las matemáticas puras pudieran ser construidas rigurosamente empezando por la teoría de los números naturales (Dasgupta, 2014).

Es sabido que en existen desarrollos bastante cuidadosos que prueban muchas de las proposiciones y teoremas en matemáticas. Por ejemplo el teorema de aproximación de Weierstrass. Ellas nos sirven como herramientas para expresar resultados que sabemos que son ciertos. Sin embargo estos teoremas que tomamos por ciertos deben ser probados como tal en algún punto. Esas afirmaciones, por supuesto están basadas sobre otras afirmaciones verdaderas. Así, si continuamos yendo hacia atrás en esas pruebas matemáticas, llegaremos a un punto en el que nos daremos cuenta que existen un conjunto inicial de afirmaciones verdaderas que no pueden ser probadas. Esas afirmaciones se conocen como axiomas, ellas son el punto de partida de toda la teoría matemática. (Pelayo, 2010).

Hermann Grassmann, fue uno de los pioneros al mostrar en 1860, que muchos elementos de la aritmética se derivaban de elementos aún más básicos, en 1881, Charles Sanders Peirce entregó una axiomatización de la aritmética de los números naturales y en 1888, Richard Dedekind propuso otra axiomatización de la aritmética de este conjunto numérico.

Así en 1889, Peano publico una versión más precisa que reformulaba este conjunto de propuestas como una colección de axiomas en su libro "Arithmetices principia, nova methodo exposita". De este modo los principios de la aritmética fueron presentados con un Nuevo método. (Shields, 1997).

Dedekind con sus trabajos profundos y Peano con su desarrollo axiomático bastante moderno y claro, nos mostraba como la teoría entera de los números naturales podía derivarse de unos cuantos axiomas básicos y nociones primitivas (Pelayo, 2010).

La teoría resultante se conoce como hoy como Aritmética de Peano. Se explicarán a continuación desarrollos de la aritmética de Peano tratando las propiedades de los números naturales.

Asumiremos en esta sección que solamente las nociones y axiomas de Dedekind-Peano están dadas y que ningún otro tipo de número o su propiedades son conocidas.

Todas las nociones familiares como adición, serán explicadas formalmente y sus propiedades se derivarán de esos axiomas. Diversos autores plantean definiciones desde diferentes puntos de 7 vista de los axiomas de Peano. Estos autores revisados son:

- Raúl Bravo Flores, profesor de Matemáticas de la Universidad de Chile
- N. Mohan Kumar, profesor de Matemáticas y Director de Estudios Graduados. Universidad de Washington en San Luis USA.

Estos axiomas nos ayudarán a entender la manera en que se construyen estos sistemas numéricos.

Durante el desarrollo de nuestra tesis se deseará obtener una formulación rigurosa para un conjunto que tenga suma y producto "manejable" y que se verifique el principio de inducción. La construcción que se hará de los números naturales no se hará mediante teoremas o de conceptos primitivos anteriores, como lo son las definiciones de conjunto, sino que se definirá mediante un sistema de axiomas.

1.5. NÚMEROS NATURALES.

Así el trabajo de Peano postula la existencia de un conjunto $\mathbb{N}$ no vacío. Se define entonces $\mathbb{N}$ como un conjunto con las siguientes propiedades.

(1) $\mathbb{N}$ tiene un elemento distintivo, al que llamaremos "1"

(2) Existe una función s tal que $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Esto quiere decir que cada número natural " n " tiene un único sucesor (n) el que también es un número natural.

(3) σ es uno a uno (inyectiva).

(4) No existe un elemento $n \in \mathbb{N}$ tal que $\sigma(n) = 1$. (1 no es sucesor de ningún número natural)

(5) (Principio de inducción) Sea $M \subset \mathbb{N}$ tal que

a) $1 \in M$

b) Si $n \in M$, luego $s(n) \in \mathbb{N}$. Entonces $M = \mathbb{N}$.(Kumar, 2012)

De estos axiomas se derivan una serie de teoremas que irán permitiendo de la construcción del conjunto $\mathbb{N}$ así como sus operaciones aritméticas.

Para entender más acerca de los elementos matemáticos que usaremos en el desarrollo de nuestra tesis, hablaremos previamente de los siguientes conceptos útiles.

1.6. NÚMEROS ENTEROS.

Para definir los números enteros necesitamos los conceptos de relación de equivalencia.

DEFINICIÓN 1: Una relación de equivalencia en el conjunto $X = \phi$es una relación $\sim \subset X \times X$ que satisface:

1. $\sim$ es refleja. Esto es $\forall\, a \in X$ tenemos $(a.a) \in X$.
2. $\sim$ es simétrica. Esto es si $(a, b) \in X$ entonces $(b, a) \in X$.
3. $\sim$ es transitiva. Esto es si $(a, b) \in X$ y $(b, c) \in X$ entonces $(a, c) \in X$.

Daremos un ejemplo no trivial de relación de equivalencia.

En $X = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definimos la relación.

$$(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow a + d = b + c$$

Problemos que la relación $\sim$ así definida es una relación de equivalencia.

1. Refleja. Se cumple que $\forall\,(a, b) \in X$ que $(a, b) \sim (a, b)$ ya que $a + b = b + a$
2. Simétrica. Si $(a, b) \sim (c, d)$ entonces $a + d = b{+}c$ o lo que es lo mismo que $c + d = b + a$, luego $(c, d) \sim (a, b)$.
3. Transitiva. Suponemos que $(a, b) \sim (c, d)$ y que $(c, d) \sim (e, f)$.

$$\begin{array}{ccccccccc}
a+d & = & b+c & \text{y} & c+f & = & d+e & & \text{luego,} \\
a+d & = & b+c & /+f & & & & & \text{tenemos,} \\
(a+d)+f & = & (b+c)+f & = & a+(d+f) & = & & & \\
b+(c+f) & = & b+(d+e) & = & (b+e)+d & & & & \text{concluimos} \\
(a+d)+f & = & a+d+f & = & (a+f)+d & = & (b+e)+d & & \text{esto es,} \\
 & & a+f & = b+e & & & & &
\end{array}$$

Lo que implica que $(a, b) \sim (e, f)$.

Estos resultados son parte del engranaje matemático que nos permitirán demostrar la construcción lógica de los tres sistemas numéricos que trataremos en nuestra tesis $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$.

Una vez construidos y definidos los números naturales, comenzará a establecerse un nuevo conjunto $\mathbb{Z}$, llamado el conjunto de los números enteros. Así los números naturales los usaremos como apoyo para "contar" y comparar otros conjuntos, ya que la relación de orden definida en$\mathbb{N}$ permite en cierta forma medir el "tamaño" de un conjunto.

Sin embargo $\mathbb{N}$ adolece de ciertos defectos. Por ejemplo $m + n \neq m \; \forall n \in \mathbb{N}$. Se tiene entonces que no hay un elemento neutro para la suma, menos pensar en inversos aditivos.

Ambas fallas se corrigen creando un nuevo conjunto con estructura algebraica que "extiende" la estructura de $\mathbb{N}$ en el sentido que el nuevo conjunto $\mathbb{Z}$ contiene a $\mathbb{N}$ y a su estructura algebraica en un sentido que se explicará más adelante en la elaboración de nuestra tesis.
\

De este modo, el punto de partida será el conjunto $S = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, producto cartesiano de $\mathbb{N}$ por $\mathbb{N}$, en el que se define la siguiente relación.

(i) $(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow a + d = b + c$

Como es usual, anotaremos a un elemento de S como un par ordenado de números naturales.

Obsérvese que esta es una relación de equivalencia en S, dicho de otro modo $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es un conjunto de clases de equivalencia, y le llamaremos conjunto de los números enteros.

De esta forma definimos una nueva notación que es la siguiente. $S = \mathbb{Z}$ para $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

Que es lo mismo decir que de ahora en adelante $\mathbb{Z}$el conjunto de clases equivalentes bajo la relación (i)

Para construir una estructura algebraica se definirá la operación de adición en $\mathbb{Z}$ como sigue:

$$\begin{array}{ccccc} [a, b] & \oplus & [c, d] & = & [a + c, b + d] \\ [a, b] & \otimes & [c, d] & = & [ac + bd, ad + bc] \end{array}$$

Se observa que esta afirmación adolece de un defecto potencial, que consiste en definir operaciones entre clases mediante operaciones con ciertos elementos particulares de clase (representantes). Debemos asegurarnos que las operaciones $\oplus$ y $\otimes$ deben estar bien definidas.

Se supone que la operación de la suma debe ser una función que va desde $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, dando dos números enteros, pues al realizar esta suma deberemos obtener un entero bien definido. (Kumar, 2012)

En nuestra tesis probaremos que las operaciones $\oplus$ y $\otimes$ se encuentran bien definidas en $\mathbb{Z}$. Demostraremos que los resultados serán independientes de los representantes que se elijan para los elementos de $\mathbb{Z}$ y que participan en las operaciones.

1.7. NÚMEROS RACIONALES.

Con los enteros se resuelve el problema de encontrar una solución para la ecuación $x + a = b$. Sin embargo aún no tenemos una solución para la ecuación $cx + a = b$, con lo cual el problema de escribir operaciones con *fracciones de una unidad* no está a nuestro alcance. Para ello es necesario definir los números racionales, de tal manera que incluyan a los enteros y respete su estructura algebraica y de orden. La idea en este capítulo será la misma realizar una construcción de un nuevo conjunto numérico a partir de un conjunto $Q = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, donde $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} - \{0\}$ es el conjunto de los enteros no nulos. (Bravo, 1971).

El conjunto $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ se define de la siguiente relación.

$$(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow ad = bc$$

De esta forma la relación $\sim$ en $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ es una relación de equivalencia en Q . A esta se le llamará números racionales y se denotará con $\mathbb{Q}$.
Se deberá comprobar si la suma como la multimplicación de racionales están bien definidas y cumplen con todas las propiedades estándar.

Veremos que tenemos una función uno a uno, pues $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ dado por $f(a) = [(a, 1)]$ y luego $f : (a + b) = f(a) \oplus f(b)$ y $f(ab) = f(a) \otimes f(b)$. (Kumar, 2012).

Usando f , podemos identificar de manera usual a $\mathbb{Z}$ como un subconjunto de $\mathbb{Q}$. En este nuevo conjunto tenemos una nueva operación, la división, que es usualmente anotada como $\dfrac{a}{b}$ para $a, b \in \mathbb{Q}$ y $b \neq 0$. (Kumar, 2012)

Los diversos teoremas derivados de estar afirmaciones así como de sus demostraciones se profundizarán en cada capítulo a continuación, para caer en la cuenta de que tanto $\mathbb{N}, \mathbb{Q}$ y $\mathbb{Z}$ en realidad, son conjuntos que cumplen con todas las propiedades de estructuras algebraicas y poseen operaciones de suma y multiplicación bien definidas.

Capítulo 2

REFLEXIONES ACERCA DE LOS NÚMEROS NATURALES

2.1. Reflexiones del pensamiento numérico primitivo.

Hagamos la construcción desde la psicología del pensamiento primitivo.

Una etapa humana se vivió en las cavernas, estas personas deseaban contar cosas, y la primera herramienta que usaron para contar fueron sus dedos. Si deseaban contar, asociaban la cantidad de esa cosa con el número de sus dedos.

De esta forma automáticamente se crea un orden en los números, aunque sea que estos estén representados por la cantidad de dedos.

Se sabe que hay un *"primero"*, un primer elemento, el que es *uno,* la cantidad primigenea.

Después está *"el que viene después del primero*", el que está al lado del primero, *"el Segundo", "el número Dos".* El que se cuenta con el siguiente dedo.

¿Qué pasa si hay uno más? Simplemente se cuenta con un tercer dedo.

Muchas veces las cantidades eran mayores y los primitivos preferían registrar sus cuentas marcando "palitos" en las murallas de sus cuevas.

Dibujando una línea vertical para la primera cantidad, luego agregaban otro más hasta completar lo deseado.

|||||||||| |||||||||| ||. Actualmente esto se representa como 22.

Continuando con el pensamiento matemático riguroso, tenemos que el pensamiento primitivo operó de esta forma.

$1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1 = 22.$

Dicho de otra forma, primeramente tenían $1 \in \mathbb{N}$, luego aplicó $s(1) = 1 + 1$, luego, $s(s(1))$, $s(s(s(1)))$, hasta completar 22.

Para efectos de aplicar el principio de inducción vamos a establecer un orden en $\mathbb{N}$.

Sea $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ...\}$, hasta el infinito.

¿ Qué quiere decir infinito? En este contexto arcaico, una cantidad muy grande, mucho más que todos los granos de arena del desierto y de las playas.

¿Cómo contaban los primitivos? ¿Decían acaso desordenadamente, este es el uno, este es el cinco, este es el tres, este es el ocho?

Es claro que no, los siete primeros días del universo del génesis tienen un orden.

Volvamos al principio de inducción.

Se tiene que $1 \in \mathbb{N}$, luego $s(1)$ pertenece a los naturales y se sabe que $s(s(1))$ también pertenece a $\mathbb{N}$, de esta forma se repetirá el procedimiento hasta donde se desee para crear a los naturales.

Demostraremos la unicidad de este conjunto.

Creamos entonces un conjunto $M \subset \mathbb{N}$ tal que M tenga ese primer elemento ó en lenguaje matemático $1 \in M$.

Si tenemos un primer elemento, habrá un segundo, o el que viene después, esto es $s(1)$.

Ahora bien, no sabemos el símbolo de ese segundo elemento. Sea $s(1) = n$ segundo elemento tal que $n \in M$. Luego $s(n)$, también pertenecerá a M, de esta forma si tomamos sus siguientes, hasta el infinito, se tendrá finalmente que el conjunto M que elegimos inicialmente podrá ser igual de numeroso o tener los mismos elementos que $\mathbb{N}$, es por ello que tarde o temprano efectuando los cálculos tendremos que $M = \mathbb{N}$.

Este principio de inducción (el que tiene un orden implícito) se utilizará para demostrar que dado un número natural n con una propiedad P, tendrá que todos sus siguientes tendrán también esa propiedad.

Capítulo 3

LOS NÚMEROS NATURALES

Teorema 3.0.1 *Hay una única función* $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ *que verifica lo siguiente*

1. $f(x,\, 1) = s(x)$
2. $f(x,\, s(y)) = s(f(x,\, y))$, para todo $x,\, y \in \mathbb{N}$

Esta única aplicación se llama *suma* y $f(x,\, y)$ se denota $x + y$, o sea,

$$\begin{aligned} x + 1 &= s(x) \\ x + s(y) &= s(x + y) \end{aligned}$$

Lo que hemos hecho es definir una de las operaciones más básicas para los números naturales, este es sin duda un gran paso para la construcción de las matemáticas. El lector sabe que este libro trata acerca de los fundamentos de las matemáticas. Todos sabemos sumar números, pero ¿Qué pasa si empezamos a construir las matemáticas sobre la nada?. Acá el razonamiento lógico ocupado se basa en considerar a LA SUMA como una función. Este es el pilar del resto de las operaciones y la construcción del resto de los sistemas numéricos que iremos definiendo conforme avanzamos en los próximos capítulos.

Ahora bien, se han definido los enunciados 1 y 2, pero necesitamos que esta conjetura sea sólida para seguir avanzando en el proceso de esta construcción, de lo contrario estaremos fundamentando nuestras matemáticas sobre bases inestables. Para asegurarnos de su rigurosidad, haremos las siguientes demostraciones.

Demostraciones:

(1) Unicidad: O sea, demostraremos que no existen multiplicidad de funciones (dadas las condiciones 1 y 2) en los naturales, y si hay dos o más, estas terminan siendo las mismas. Además se definirá una propiedad para un conjunto M supuestamente distinto a $\mathbb{N}$, pero se terminará la demostración usando principio de inducción y comprobando finalmente que $M = \mathbb{N}$, comencemos.

Sean dos funciones $f, g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ y que verifican las condiciones 1 y 2.

Sea $x \in \mathbb{N}$, y creamos un conjunto $M = \{y \in \mathbb{N};\, f(x, y) = g(x, y)\}$.

Es claro que $f(x, 1) = x + 1 = s(x) = g(x, 1) \Rightarrow 1 \in M$.

Además si tomamos un $y \in M$, entonces $f(x, y) = g(x, y)$.

O sea $f(x, s(y)) = s(f(x, y)) = g(x, s(y))$. (Por enunciado 2.)

Luego, por principio de inducción $s(y) \in M$. Por tanto $M = \mathbb{N}$. Es decir se prueba que $f = g$ dentro de los números naturales.

(2) Existencia: Sea $L = \{x \in \mathbb{N};\ \textit{existe } f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} \textit{ con condiciones } 1 \textit{ y } 2\}$.

En primer lugar, $1 \in L$, entonces $s(x) \in L$, ya que la función $f(1, y) = s(y)$ satisface ambas condiciones.

Esto es tomar un elemento $1 \in L$

(i) $f(1, y) = 1 + y = s(y)$. Esto es así, pues si suponemos por la definición anterior que $f(1, y) = s(1)$ estaremos ante un error, pues $s(1) = 1+1 \neq f(1, y)$, además $y \in \mathbb{N}$ es un valor cualquiera dando un resultado arbitrario. Se tiene pues, por lógica que $f(1, y) = f(y, 1)$.

(ii) $f(1, s(y)) = s(s(y)) = s(f(1, y))$, lo que satisface ambas condiciones.

Para la operación (ii) se toma la operación (i) para poder demostrar que $f(1, s(y)) = s(f(1, y))$, pues se reemplaza $s(s(y)) = f(1, s(y))$.

Si $x \in L$ entonces $s(x) \in L$, de esta forma se define una nueva función $h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Se tiene que $h : (s(x), y) = s(x) + y = s(x + y) = s(f(x, y))$ que satisface las condiciones 1 y 2 del teorema.

Teorema 3.0.2 *$\mathbb{N}$ con respecto a la suma es un semigrupo abeliano. Es decir, la suma es asociativa y conmutativa.*

Probemos primeramente la asociatividad

1) Sean x, y números naturales y $M = \{z \in \mathbb{N};\, (x + y) + z = x + (y + z)\}$

Se sabe que $1 \in M$ ya que

Se tiene entonces

$$(x+y)+1 = s(x+y) = x+s(y) = x+(y+1)$$

Como se aprecia, solamente se están utilizando (y se utilizarán) propiedades derivadas del teorema 3.0.1. Luego se tiene que:

$$(x+y)+1 = x+(y+1)$$

Más generalmente si $z \in M \Rightarrow s(z) \in M$ pues $z \in M \Rightarrow (x+y)+z = x+(y+z)$

Luego (para ampliar la propiedad al resto de los números usamos $s(z)$, para ocupar de esta forma el principio de inducción.

$$(x+y)+s(z) = s((x+y)+z) = s(x+(y+z)) = x+s(y+z) = x+(y+s(z))$$

Con todo esto se tiene finalmente que $M = \mathbb{N}$ quedando demostrada la asociatividad.

Se prueba ahora la conmutatividad

2) Sean $x,\ y \in \mathbb{N}$ y $L = \{x \in \mathbb{N};\ x+y = y+x\}$

Desde luego $1 \in L$. Además si $x = 1$ e $y = 1$entonces $1+1 = 1+1$. (Lo que es obvio)

Ahora bien, para $1 \in L$ y $x \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$\begin{aligned}
1+s(x) &= s(1+x) \\
&= s(x+1) \text{ pues } x \in L \\
&= s(s(x)) \\
&= s(x)+1
\end{aligned}$$

Ahora si $y \in L \Rightarrow s(y) \in L$ (por principio de inducción)

Para $x \in L$ se tiene

$$\begin{aligned}
x+s(x) &= x+(y+1) \\
&= (x+y)+1 \\
&= (y+x)+1 \\
&= 1+(y+x) \\
&= (1+y)+x \\
&= s(y)+x
\end{aligned}$$

Se tiene entonces que $L = \mathbb{N}$ quedando demostrada la conmutatividad

Teorema 3.0.3

Sean x, y, $z \in \mathbb{N}$. Entonces
(1) $y \neq x + z$
(2) $y \neq z \Rightarrow x + y \neq x + z$
Esto quiere decir que no existe un neutro aditivo en $\mathbb{N}$
Demostracion de (1): Considerando x fijo, poner $M = \{y \in \mathbb{N};\, y \neq x + y\}$. Se sabe que $s(x) \neq 1$, es decir, $1 \neq x + 1$. Luego $1 \in M$. Además, si $y \in M$, entonces $y \neq x + y$ y, por tanto, $s(y) \neq s(x + y) = x + s(y)$, es decir, $s(y) \in M$. Luego al igual que en los casos anteriores, por el principio de inducción se tiene $M = \mathbb{N}$.
Demostracion de (2): Consideramos y, z fijos, tales que $y \neq z$ y sea $L = \{x \in \mathbb{N}; a + y \neq x + z\}$.
[...] Por lo tanto $L = \mathbb{N}$

Observación 3.0.1

(1) El principio de inducción puede formularse ahora así: Si $A \subseteq \mathbb{N}$verifica:

(i) $1 \in A$
(ii) $x \in A \Rightarrow x + 1 \in A$, entonces $A = \mathbb{N}$

(2) Los teoremas anteriores permiten afirmar que si $x \in \mathbb{N}$, entonces la traslación

$$f_x : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

$$y \mapsto x + y$$

es inyección sin punto fijo, es decir, $f_x(y) \neq y \ \forall y \in \mathbb{N}$

Teorema 3.0.4 *En esta parte vamos a crear la multiplicación y definir algunas de sus propiedades más básicas.*
Diremos que hay una única función F: $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *que verifica*

(1) $F(x, 1) = x$
(2) $F(x, s(y)) = F(x, y) + x, \ \forall x, y \in \mathbb{N}$.
Esta única aplicación se llama *producto* y $F(x, y)$ se puede escribir xy o $x \cdot y$, separados por un punto.

Demostración: 1) Unicidad: Sean F, $G : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ satisfaciendo 1 y 2. Sea $x \in \mathbb{N}$ y $M = \{y \in \mathbb{N};\ F(x, y) = G(x, y)\}$.

Es claro que $1 \in M$ y que $y \in M \Rightarrow s(y) \in M$.

Luego $M = \mathbb{N}$y así $F = G$

Esta demostración bastante corta, deja en claro que todos los "y" pasan a pertenecer al conjunto M y por principio de inducción se tiene que los siguientes de y también pertenecen a M. De esta forma se llega a la igualdad de M con $\mathbb{N}$. Al ser iguales los conjuntos, la afirmación $M = \{y \in \mathbb{N};\ F(x, y) = G(x, y)\}$pasa a ser válida para $\mathbb{N}$, esto es $\mathbb{N} = \{F(x, y) = G(x, y), \forall x, y \in \mathbb{N}\}$. Finalmente por razonamiento lógico, si se afirmó anteriormente que $F(x, y) = G(x, y)$, para el conjunto M, se tiene que $F = G$ para el conjunto $\mathbb{N}$.

2) Existencia: Vamos a probar la existencia del teorema, esto es demostrar que existen elementos del conjunto $\mathbb{N}$ con esta propiedad. Pero primero definiremos un conjunto L arbitrario.

Sea $L = \{x \in \mathbb{N},\ \textit{existe } F : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N} \textit{ con condición } 1 \textit{ y } 2\}$.

Se tiene que $x = 1 \in L$, ya que 1 es el resultado de la función F, pues

$$\begin{aligned} F : \mathbb{N}\times\mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\ (1, y) &\mapsto y \ \text{ satisface } (1) \end{aligned}$$

Esto es verdadero y nuevamente nos encontramos con la fuerte lógica matemática, pues si seguimos estrictamente (2) tendremos que $F(1, y) = 1$, lo que es verdadero sólo para un caso, pero esto no sirve de mucho pues estamos en estos momentos generalizando para todos los números naturales. También de manera implícita estamos viendo que $F(x, 1) = F(1, x)$.

Así $F(x, 1) = F(1, 1) = 1 = x$ además

$$F(x, s(y)) = F(1, s(y)) = \ \text{(Pues se está desarrollando con } x = 1)$$
$$s(y) = y + 1 = 1 \cdot y + 1 = xy + x = F(x, y) + x$$

También $x \in L \Rightarrow s(x) \in L$ implica que hay F con condición (1) y (2). En otras palabras tenemos a $x \in L$ y a sus siguientes que también cumplen con la condición, por ende la validez de esta función se extiende para para el resto de los números.

Vamos a generalizar por inducción al resto de los números. Recordemos que estos aún no tienen asignado un orden y simplemente ellos existen dentro de una categoría que llamamos $\mathbb{N}$.

Consideremos ahora una nueva función

$$\begin{aligned} G : \mathbb{N}\times\mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\ s((x), y) &\mapsto xy + y \end{aligned}$$

cuyas propiedades y operaciones también satisfacen (1) y (2). El lector está en la libertad de comprobar la validez de esta función G asignando valores numéricos a los coeficientes literales. Luego $s(x) \in L$. En resumen $L = \mathbb{N}$.

Obsérvese que hemos creado la multiplicación, la que además queda definida con las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} x \cdot 1 &= x, \\ x \cdot (y+1) &= xy + x \quad \text{y} \\ (x+1) \cdot y &= xy + y, \quad \forall x,\, y \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Todas ellas están demostradas y hemos verificado que no existen contradicciones ni elementos ambiguos.

Teorema 3.0.5 $\mathbb{N}$ *con respecto al producto, es un semigrupo abeliano con unidad. además la multiplicación es distributiva con respecto a la suma, es decir:*

$$x(y+z) = xy + xz$$

$$(y+z)x = yx + zx$$

Demostración. 1) Conmutatividad de la multiplicación: Demostraremos ahora una de las propiedades más usadas en matemáticas y que casi prácticamente ninguna persona se cuestiona. Todos sabemos que $2 \cdot 5 = 5 \cdot 2$ es verdadero, pero ahora demostrémoslo de una marea elegante y que sirve para cualquier número.

Sea un $y \in \mathbb{N}$, e inventemos un conjunto M con la siguiente propiedad $M = \{x \in \mathbb{N};\ yx = xy\}$. ¿Será cierto y lógico afirmar que $xy = yx$? Vemos que con el número 1 no hay problemas pues se tiene que $1 \in M$, además ya probamos que $y \cdot 1 = y$ y $1 \cdot y = y$ por tanto $y \cdot 1 = 1 \cdot y$, lo que cumple.

También como $x \in M$ implica obviamente que $yx = xy$. Luego para aplicar ley de inducción tomamos los siguientes de x $y \cdot s(x) = y(x+1) = yx + y = xy + y = (x+1)y = s(x) \cdot y$. Nótese que todo esto ha sido realizado con las propiedades que hemos estado construyendo de a poco en este capítulo.

Así $s(x) \in M$. Por tanto la ley de inducción extiende la propiedad para el resto de los números y finalmente $M = \mathbb{N}$.

Nótese que probada la conmutatividad, basta con demostrar solo una de las reglas de distributividad.

2) Distributividad y asociatividad: Sean x, y números naturales.

$$M = \{z \in \mathbb{N};\ x(y+z) = xy + xz\}$$

$$L = \{z \in \mathbb{N};\ (xy)z = z(xy)\}$$

Exactamente igual que en los casos anteriores, se prueba que $M = L = \mathbb{N}$

3) Es claro que la unidad es el $1 \in \mathbb{N}$

Comentario Cuando en un conjunto E se tiene una ley asociativa, podemos escribir abc, sin paréntesis, para denotar el producto $(ab)c = a(bc)$.

Del mismo modo si hay cuatro factores a, b, c, d se tiene:

$$a(bcd) = (ab)(cd) = (abc)d = a(bc)d$$

y podemos entonces utilizar para este valor el símbolo $abcd$. Si además la ley es conmutativa se tiene que:

$$abcd = abdc = acbd = acdb$$

$$= bacd = badc = bcad = bcda$$

$$= cabd = cadb = cbad = cbda$$

$$= dabc = dacb = dbac = dbca$$

Luego el símbolo $abcd$ puede representar el producto en cualquier orden de los factores. Consensuaremos que para cualquier producto que involucre factores literales, estos de preferencia serán ordenados de forma alfabética y es de libre uso para el matemático separarlos por puntos según convenga.

Observación 3.0.2

1) Considerar, para $z \in \mathbb{N}$, la función $\bar{z}$ donde:

$$\begin{array}{rccc} \bar{z}: & \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ & x & \mapsto & zx \end{array}$$

Si $z = 1$, entonces $\bar{z}$ es la función idéntica. Si $z \neq 1$, entonces $\bar{z}$ es inyección "respetuosa" de la estructura aditiva de $\mathbb{N}$, es decir,

$$\bar{z}(x+y) = \bar{z}(x) + \bar{z}(y)$$

También se dice que la función $\bar{z}$ es compatible con la estructura aditiva de $\mathbb{N}$.

2) Hasta el momento, el conjunto $\mathbb{N}$ con sus dos operaciones, suma y producto, tiene todas las propiedades deseables para un conjunto numérico. Ahora hay que tratar de dar respuesta al problema de comparación de números naturales, es decir, hay que introducir en $\mathbb{N}$ una estructura de orden. El orden a introducir será respetuoso de la estructura algebraica de $\mathbb{N}$.

Definición. Definiremos un nuevo concepto dentro de las matemáticas, y es cuando un número es igual, más grande o pequeño que otro, comencemos.

Sean x, $y \in \mathbb{N}$.

1) x es mayor que $y \iff x = y + n$, para algún $n \in \mathbb{N}$.

Su notación de ahora en adelante será: $x > y$.

2) x es menor que $y \iff y$ es mayor que x. Su notación será $x < y$.

Teorema 3.0.6 *Si x, $y \in \mathbb{N}$, entonces se cumple* UNA Y SOLO UNA *de las siguientes posibilidades.*

$$\textit{I)}\ x = y \quad o \quad \textit{II)}\ x < y \quad o \quad \textit{III)}\ y < x$$

Esta se llamará Ley de tricotomía de la desigualdad.

Demostración: Ahora bien, del teorema 3.0.3 se desprende que si intentamos tomar las condiciones I y II a la vez, veremos que son incompatibles, lo mismo si intentamos aplicar I y III así como II y III.

Recordemos que estamos construyendo las matemáticas. Signos como $\leq$ y $\geq$ no están aún definidos.

La ley de la tricotomía de la desigualdad nos está diciendo que si tomamos dos números cualesquiera del conjunto de los naturales, tendremos alguna de las tres condiciones, pero no dos simultáneamente. Un par de números no pueden ser iguales y a la vez uno menor que otro, mucho menos que uno de esos números sea menor que el otro y viceversa, es decir, $x < y$ y a la vez $y < x$.

Continuemos.

II) $\Rightarrow y = x + n$

III) $\Rightarrow x = y + m$, para cierto m, $n \in \mathbb{N}$

Luego si II y III rigen simultáneamente:

$$y = x + n = (y + m) + n = y + (m + n) = (m + n) + y$$
$$\Rightarrow y = (m + n) + y$$

Vamos a suponer que si $y = (m + n) + y$ entonces estamos viendo que $m + n$ es neutro aditivo o que $m = n = 0$, lo que no puede ser, pues aún no hemos creado el número cero y $0 \notin \mathbb{N}$, además no tiene sentido que si II) $x < y$ se tenga que $y = x + n$, pero como dijimos $n = 0$, eso implicaría que $x = y$, es decir la afirmación I).

Claramente si hacemos II y III es una contradicción con el Teorema 3.0.3. Es decir, está probado que a lo sumo uno de los casos I, II o III puede regir.

Vemos que la Ley de la Tricotomía de la Desigualdad tiene una lógica sólida y prácticamente no se puede refutar, a menos que deseemos incorporar algún principio o axioma que hagan ciertas propiedades relativas, pero este no es el caso.

Ahora bien, para $x \in \mathbb{N}$, definiremos y consideraremos el conjunto M con esta tricotomía (la que nos parece un interesante elemento) y que deseamos agregar como propiedad a nuestro conjunto de los números naturales.

Sea $M = \{x, y \in \mathbb{N}; x = y \text{ o } x < y \text{ o } y < x\}$. Sabemos que $1 \in M$, y hay dos posibilidades para $x \in \mathbb{N} \Rightarrow x = 1$ o $x \neq 1$.

Para la primera ley de tricotomía puede ocurrir que $x = y = 1$.

Si $y = 1$, sabemos que debe existir un $z \in \mathbb{N}$ tal que

$$x = s(z) = 1 + z = y + z$$

$$\Rightarrow x = y + z \text{ o sea } y < x,$$

¿Que significa esto?, dice para que y pueda igualar a x necesariamente se debe sumar un número z.

Además si $y \in M$ entonces $y + 1 \in M$. En efecto si $x = y$, entonces

$$y + 1 = x + 1, \text{ es decir, } x < y + 1$$

Para la segunda ley de tricotomía $x < y$, entonces $y = x + n$, para algún n número natural, luego si sumamos 1 en ambos lados a la derecha:

$$y + 1 = (x + n) + 1 = x + (n + 1), \text{ y así } x < y + 1$$

Explicaremos esto: Si $y + 1 = x + (n + 1)$ nos dice que si x quiere igualar a $y + 1$ se debe sumar un número natural $n + 1$, por esta razón se tiene que $x < y + 1$.

Para la tercera Ley de Tricotomía, si $y < x$, entonces $x = y + n$ para algún n número natural, luego separamos en dos casos:

i) Si $n = 1$, entonces $x = y + 1$ y todo está bien.

ii) Si $n \neq 1$, entonces $n = s(t) = t + 1$ para algún $t \in \mathbb{N}$.

Por tanto: $x = y + (t + 1) = (y + 1) + t$, o sea, $y + 1 < x$.

Con todo esto, M satisface el postulado de inducción y se tiene que $M = \mathbb{N}$.

Observación 3.0.3

Ahora definiremos el símbolo $\leq$.

1) Si para x, y números naturales se pone $x \leq y \iff x < y$ o $x = y$, el teorema 3.0.6 afirma que $x, y \in \mathbb{N}$, entonces $x \leq y$ o $y \leq x$

2) El símbolo $x \leq y$ se lee *x es menor o igual que y* (o y es mayor o igual que x). Cuando sea $x < y$ diremos que se tiene una desigualdad *estricta.*

3) Como $x + y = y + x$, se tiene que para todo x, y en $\mathbb{N}$: $x < x + y$, está claro que x es menor que la suma de sí mismo con otro número y. Está demás decir que $y \neq 0$ pues $0 \notin \mathbb{N}$.

4) $u \in \mathbb{N} \Rightarrow u \geq 1$. Es decir, 1 es el menor elemento de $\mathbb{N}$.

Teorema 3.0.7

La relación $x \leq y$ es una relación de orden total sobre $\mathbb{N}$

Demostración: Demostraremos que este nuevo símbolo cumple con las propiedades de reflexividad, antisimetría y transitividad.

1) $x = x \Rightarrow x \leq x$, es decir se cumple la reflexividad.

2) $x \leq y$ e $y \leq x \Rightarrow x = y$, porque si $x \neq y$, entonces $x < y$ e $y < x$, lo cual es imposible por la ley de tricotomía. Esto prueba la la antisimetría.

3) La transitividad $x \leq y$, $y \leq z \Rightarrow x \leq z$.

Caso 1. Si $x = y$, entonces x puede escribirse en lugar de y. Luego $x \leq z$. Análogamente, si $y = z$.

Caso 2. Si $x \neq y$, $y \neq z$, se tiene $x < y$ e $y < z$, o sea $y = x + u$, $z = y + v$, para u, $v \in \mathbb{N}$. De aquí que $z = y + v = (x + u) + v = x + (u + v)$. Luego $x < z$, pues a x se le debe sumar $u + v$ para igualar a z, y finalmente se tiene que $x \leq z$.

Con esto $\mathbb{N}$ está parcialmente ordenado por $\leq$. El teorema 3.0.6 garantiza la estructura de orden total del conjunto de los naturales.

Teorema 3.0.8

El orden $\leq$ sobre $\mathbb{N}$ es estable con respecto a la estructura algebraica de $\mathbb{N}$, es decir:

1) $x \leq y, \quad z \in \mathbb{N} \Rightarrow x + z \leq y + z$

2) $x \leq y, \quad z \in \mathbb{N} \Rightarrow xz \leq yz$

Demostración Es claro que si en la hipótesis se verifica $x = y$, las conclusiones se cumplen obviamente. Luego es suficiente demostrar que:

$$x < y,\ z \in \mathbb{N} \Rightarrow x + z < y + z \qquad \text{y}$$
$$xz < yz$$

Pero $x < y \Rightarrow y = x + u$, para algún $u \in \mathbb{N}$, entonces

$$\begin{aligned} y + z &= (x + u) + z \\ y + z &= (x + z) + u \\ &\Rightarrow x + z < y + z \end{aligned}$$

Segunda conlusión.

Si $x < y \Rightarrow y = x + u$, para algún $u \in \mathbb{N}$, esto implica que

$$\begin{aligned} yz &= (x + u)z \\ yz &= xz + uz \\ &\Rightarrow xz < yz \end{aligned}$$

esto significa que para que xz sea igual a yz, se debe sumar $uz \in \mathbb{N}$.

Por ende está probada una relación de orden para x, y, z, u perteneciente a los naturales.

Observación 3.0.4

1) La demostración anterior implica.
i) $x < y \Rightarrow x + z < y + z$
ii) $x = y \Rightarrow x + z = y + z$
iii) $x > y \Rightarrow x + z > y + z$
Con esto es inmediato entonces que todas las recíprocas de las implicaciones anteriores son válidas, es decir:

$$\begin{aligned} x + z < y + z \quad &\Rightarrow x < y \\ x + z = y + z \quad &\Rightarrow x = y \quad (\textit{ley de cancelación aditiva}) \\ x + z > y + z \quad &\Rightarrow x > y \end{aligned}$$

Ya que por el teorema 2.0.6 vale la ley de tricotomía de la desigualdad.
2) Análoga observación para el producto, es decir, x, y, z son números naturales se tiene:

$$\begin{aligned} xz < yz \quad &\Rightarrow x < y \\ xz = yz \quad &\Rightarrow x = y \quad (\textit{ley de cancelación multiplicativa}) \\ xz > yz \quad &\Rightarrow x > y \end{aligned}$$

3) El caso 2 de la demostración del Teorema 3.0.7 dice:

$$x < y \quad \text{e} \quad y < z \Rightarrow x < z$$

Luego es claro que $(x \leq y$ e $y < z)$ o $(x < y$ e $y \leq z) \Rightarrow x < z$

Teorema 3.0.9

Sean x, y, z, u números naturales. 1.

$$\begin{aligned} &1) \text{ Si } x < y \quad \text{y} \quad z < u, \text{ entonces} \\ &x + z \; < \; y + u \end{aligned}$$

(es decir, dos desigualdades estrictas del mismo sentido pueden sumarse miembro a miembro, obteniéndose una desigualdad estricta del mismo sentido).

$$\begin{aligned} 2) \text{ Si } x \leq y \quad &\text{y} \quad z < u \\ x < y \quad &\text{y} \quad z \leq u \\ \text{entonces } x + z \quad &< \quad y + u \end{aligned}$$

Lo anterior es, dos desigualdades con una de ellas estricta pueden sumarse miembro a miembro, el resultado será una desigualdad estricta.

$$\begin{aligned} &3) \text{ Si } x \leq y \quad \text{y} \quad z \leq u \\ &\Rightarrow x + z \; \leq \; y + u \end{aligned}$$

Demostración 1) $x < y$, $z < u$, entonces

$$\begin{aligned} x + z &< y + z, \text{ así} \\ y + z &< y + u \end{aligned}$$

Luego $x + z < y + u$

2) Si no hay igualdad, estamos en el caso 1 recién tratado. Si hay igualdad, nuevamente la parte i) de la observación 3.0.4 demuestra la afirmación.

3) Si $x = y$ y $z = u$, entonces $x + z = y + u$ y el teorema queda demostrado.

Si no son ambos iguales, la afirmación se reduce al caso 2 recién tratado.

Teorema 3.0.10

Sean x, y números naturales.

1. Si $x < y$, entonces $x + 1 \leq y$
2. Si $y < x + 1$, entonces $y \leq x$

Demostración 1) $x < y \Rightarrow y = x + u$, para algún u perteneciente a los naturales, el que verifica $u \geq 1$. Luego $x + u \geq x + 1$, es decir, $x + 1 \leq y$.

2) Se demostrará este enunciado por contradicción, esto es vamos a negar $y < x + 1 \Rightarrow y \leq x$, y negar una implicancia $p \Rightarrow q$ equivale a escribir $p \wedge \sim q$, lo que se traduce a :

$$y < x + 1 \wedge y > x$$

Desarrollando $y < x + y \Rightarrow y + u = x + 1$ para algún $u \geq 1$. De esto se desprenden dos casos.

i) $u = 1 \Rightarrow y + 1 = x + 1 \Rightarrow y = x$ lo que se contradice con nuestro enunciado de que $y > x$, por lo tanto es verdadero para $y < x + 1$entonces $y \leq x$. En el segundo caso ocurre algo parecido.

ii) $u > 1 \Rightarrow y + u = x + 1 \Rightarrow y < x \quad \Rightarrow\Leftarrow$

Observación 3.0.5

1) Las propiedades establecidas en el Teorema 3.0.9 surgieron, esencialmente de las propiedades anotadas en la parte 1 de la observación anterior. Pero también quedó establecida allí la validez de la propiedad análoga para la multiplicación, luego rigen propiedades como las siguientes:

1. $\left.\begin{array}{r} x < y \\ z < u \end{array}\right\} \Rightarrow xz < yu$
2. $\left.\begin{array}{r} x \leq y \\ z < u \end{array}\right\} \Rightarrow xz < yu$
3. $\left.\begin{array}{r} x \leq y \\ z \leq u \end{array}\right\} \Rightarrow xz \leq yu$

2) Anteriormente se notó que 1 es el menor elemento de $\mathbb{N}$.

Es claro que si un conjunto de M de números naturales contiene al 1, entonces 1 es el menor elemento de M.

Ahora presentaremos una de las más importantes propiedades de los números naturales.

Teorema 3.0.11

$\mathbb{N}$ con el orden $\leq$ es un conjunto bien ordenado, es decir, dado un conjunto no vacío M de números naturales, entonces M tiene un menor elemento.

Demostración: Sea L un subconjunto de $\mathbb{N}$, definido por

$$x \in L \text{ si y sólo si, } x \leq m, \text{ para todo } m \in M$$

Desde luego, $1 \in L$. Además $L \neq \mathbb{N}$ ya que si y está en M, entonces $y+1 \notin L$ porque $y+1 > y$. Por el postulado de inducción, esto implica que hay t en L tal que $t+1 \notin L$.

Afirmación: $t \in M$ y $t \leq m$ $\forall m \in M$, se tendría $t < m$ $\forall m \in M$. Luego $t+1 \leq m$ para todo m en M, con lo cual $t+1 \in L$ contradiciendo la forma de elgir t. Con esto $t = \min M$ y el teorema está demostrado.

Observación 3.0.6

El teorema 3.0.11 se llama a veces *teorema del número minimal.* Como aplicación mostraremos que:

"Si $2 = 1+1 = s(1)$, entonces no hay números naturales entre 1 y 2, es decir, no hay $m \in \mathbb{N}$ tal que $1 < m < 2$"

En efecto, si los hubiera entonces el conjunto $M = \{m \in \mathbb{N};\ 1 < m < 2\}$ sería no vacío y tendría un menor elemento p, es decir p sería el menor número natural tal que $1 < p < 2$. Luego $p = 1 + q$ para cierto $q \in \mathbb{N}$, con $q < p < 2$, es decir $1 \leq q < 2$, y como p ya que era el menor satisfaciendo la desiguldad estricta, se tiene que $q = 1$. Por tanto $p = 2$ lo que es una contradicción.

Es claro que la afirmación también se mostrará el Segundo Principio de Inducción. Para ello se define para cada n número natural el segmento incial I_n como el conjunto de los números naturales menores o iguales que n.

Teorema 3.0.12

Sea $M \subseteq \mathbb{N}$

Si i) $1 \in M$ y

ii) $I_n \subseteq \mathbb{N} \Rightarrow n+1 \in M$, entonces $M = \mathbb{N}$.

Demostración: Si fuera $M \neq \mathbb{N}$, habrían números naturales r que no estarían en M. Sea n el menor de ellos, es decir

$$I_{n-1} \subseteq M \text{ y } n \notin M$$

contradiciento la hipótesis ii)

Observación 3.0.7

Existen dos principios de inducción, los que hemos utilizando y que seguiremos utlizando a lo largo de esta tesis.

Uno de ellos es el de la observación 3.0.1 y el otro del teorema 3.0.12. A modo de explicación estos dos principios se suelen presentar de la siguiente manera:

1. Sea P_n una proposición donde n es número natural.

Si i) P_1 es verdadera y

ii) P_n verdadera $\Rightarrow P_{n+1}$verdadera, entonces P_n es verdadera para todo n.

2. Sea P_n una proposición donde n es número natural.

Si i) P_1 es verdadera y

ii) P_r verdadera para todo $r < n \Rightarrow P_n$verdadera, entonces:

P_n es verdadera para todo n.

3.0.1. RESUMEN

Partiendo de los postulados de Peano, se ha demostrado que en el conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales hay una suma y un producto bien definidos tales que:

1. La suma es asociativa y conmutativa.

2. El producto es asociativo, conmutativo, tiene elemento neutro 1 y es distributivo con respecto a la suma

3. Hay un orden $\leq$ en $\mathbb{N}$ que es respetuoso de la estructura algebraica de $\mathbb{N}$ (ver el Teorema 3.0.8)

4. Rige el principio de inducción.

5. Cada conjunto no vacío de números naturales tiene un menor elemento.

DEFINICIÓN:

$$\begin{array}{rcll} 2 & = & s(1) & = 1+1 \\ 3 & = & s(2) & = 2+1 \\ 4 & = & s(3) & = 3+1 \\ 5 & = & s(4) & = 4+1 \\ 7 & = & s(5) & = 5+1 \\ 8 & = & s(6) & = 6+1 \\ 9 & = & s(7) & = 7+1 \\ 10 & = & s(9) & = 9+1 \end{array}$$

Observación 3.0.8 *(1.10)*

En el conjunto $\mathbb{N}$, la desigualdad $x < 10$ es equivalente con la desigualdad $x \leq 9$ y se verifica sólo para los números del siguiente conjunto $C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

PROPIEDADES COMPLEMENTARIAS

Se desea probar que una función de $\mathbb{N} \rightarrow A$ queda bien definida por $f(1)$ y por una regla que permite obtener $f(n+1)$ conociendo $f(n)$. Más precisamente.

Teorema 3.0.13

(de definición recursiva). Sea A conjunto no vacío y $g : A \to A$. Dado un $a \in A$ hay una única función $f : \mathbb{N} \to A$ tal que $f(1) = a$ y que hace conmutativo el diagrama:

Es decir, tal que $f(1) = a$ y $g(f(n)) = f(n+1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demostración: Unicidad. Si f y $h : \mathbb{N} \to A$ satisfacen condiciones, y fueran distintas habría un menor número natural r tal que $f(r) \neq h(r)$. Luego $r \neq 1$. Entonces, $f(r') = h(r') \Rightarrow f(r) = h(r)$, donde r' es tal que $r = r' + 1$. Lo que es una contradicción. Esto quiere decir entonces que $f = h$.

Existencia. Para ello es necesario especificar el conjunto $F \subseteq \mathbb{N}\times A$ tal que $b = f(n) \iff (n, b) \in F$.

Llamemos conjunto a-recursivo a un conjunto $T \subseteq \mathbb{N}\times A$. Que verifique:

1. $(1, a) \in T$

2. $(n, b) \in T \Rightarrow (s(n), g(b)) \in T$. Es claro que $\mathbb{N}\times A$ mismo es un conjunto a-recursivo, e intersecciones arbitrarias de conjunto a-recursivo son conjuntos a-recursivos. Poniendo F =intersección de todos los conjuntos a-recursivos, se puede demostrar que F es una función que satisface la conclusión del teorema.

Observación 3.0.9

1) Nótese que las definiciones de suma y producto son, estrictamente hablando, definiciones recursivas.

2) Usando el teorema 3.0.13 puede definirse para cada elemento a de un anillo A, y cada número natural n :

1. a^n : mediante $a^1 = a$

$$a^{n+1} = a^n \cdot a \quad \text{y}$$

2. $n \cdot a$: mediante $1 \cdot a = a$

$$(n+1)a = n \cdot a + a$$

Con esto se tiene, por ejemplo:

$$\begin{aligned} a^2 &= a \cdot a \\ a^3 &= a \cdot a \cdot a \\ 2a &= a + a \\ 3a &= a + a + a \end{aligned}$$

Capítulo 4

LOS NÚMEROS ENTEROS.

Más adelante se verá que los números naturales sirven para "contar" en el sentido de servir como conjunto básico para la "comparación" con otros conjuntos y que la relación de orden definida en $\mathbb{N}$ permite medir el "porte" de un conjunto.

Sin embargo, $\mathbb{N}$ adolece de ciertos defectos, por ejemplo como $m + n \neq m$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que no hay un elemento neutro para la suma y menos podrá haber entonces opuestos aditivos de los números naturales.

Ambas fallas se corrigen creando un nuevo conjunto con estructura algebraica que "extiende" la estructura de $\mathbb{N}$, en el sentido que el nuevo conjunto $\mathbb{Z}$, "contiene" a $\mathbb{N}$ y a su estructura algebraica, en un sentido que aparece claro más adelante. (véase teorema 2.5).

El punto de partida es el conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, que es el producto cartesiano de $\mathbb{N}$ por $\mathbb{N}$, o dicho de otra forma el conjunto de todos las combinaciones posibles de los pares ordenados de la forma (a, b) tales que $a, b \in \mathbb{N}$.

Observación 4.0.1

Se define entonces la siguiente relación:

$$(a, b) \sim (c, d) \iff a + d = b + c \tag{4.1}$$

Se están tomando cuatro elementos del conjunto de los números naturales y se los está relacionando mediante una suma. Suma que los matemáticos encontraron que tenían ciertas propiedades útiles.

Antes de continuar y para mayor claridad, se detallará a continuación una definición de la Relación de Equivalencia y Clase de Equivalencia.

Relación de Equivalencia Una relación de equivalencia sobre un conjunto X es un subconjunto $X \times X \geq C$ de pares ordenados con elementos de X, los cuales satisfacen ciertas propiedades. Estas propiedades permiten establecer una relación entre elementos del conjunto, los cuales pueden ser reagrupados en CLASES DE EQUIVALENCIA, es decir agrupados en subconjuntos de elementos similares. Es de esta forma que vamos a construir un nuevo conjunto numérico juntando a todos los elementos de esta misma clase de equivalencia y convirtiéndolos en un solo elemento que los representará.

Se escribe xRy para representar $(x, y) \in C$, y decimos que x está relacionado con y, y sus propiedades son.

1. Reflexiva: $aRa\ \forall a \in X$
2. Simétrica: aRb implica bRa para todo $a, b \in X$
3. Transitiva: Si aRb y bRc implica que $aRc\ \forall a, b, c \in X$

Donde estas tres propiedades son completamente independientes. Otras notaciones son usadas para indicar una relación, por ejemplo $a \equiv b$ o $a \sim b$, esta última es la usada en esta tesis. Definamos ahora lo que son las clases de equivalencia.

Clases de Equivalencia Una clase de equivalencia se define como un subconjunto de la forma $\{x \in X : xRa\}$, donde a es un elemento de X y la notación xRy es usada para denotar que hay una relación de equivalencia entre x e y. Se puede demostrar que dos clases de equivalencias pueden ser iguales o disjuntas. De ahí una colección de clases de equivalencias forman una partición de X . Para todo $a, b \in X$, tenemos que aRb si y solo si a y b pertenecen a la misma clase de equivalencia.

Un conjunto de clase representativa es un subconjunto de X que contiene exactamente un elemento de cada clase de equivalencia.

Ejemplo: Para $a, b \in \mathbb{Z}$ y n entero positivo, considérese la congruencia $a \equiv b(\text{mod } n)$. Luego las clases de equivalencia para $n = 1, 2, ...$etc son los conjuntos $\{..., -2n, -n, 0, n, 2n...\}, \{..., -1-2n, 1-n, 1, 1+n, 1+2n, ...\}$, etc. Los elementos representativos a considerar de cada conjunto descrito anteriormente serían el $0, 1, 2, ..., n-1$.

Continuemos con el siguiente teorema.

Teorema 4.0.1

La relación (1) definida hace poco $\sim$ en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, es una relación de equivalencia. O sea que cumple con las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva.

Demostración: i) $(a, b) \sim (a, b)$ ya que $a + b = b + a$

ii) $(a, b) \sim (a_1, b_1) \Rightarrow (a_1, b_1) \sim (a, b)$

En efecto: $(a, b) \sim (a_1, b_1) \Rightarrow (a_1, b_1) \sim (a, b) \Rightarrow a + b_1 = b + a_1 \Rightarrow a_1 + b = b_1 + a \Rightarrow (a_1, b_1) \sim (a, b)$

iii) $(a, b) \sim (a_1, b_1)$ y $(a_1, b_1) \sim (a_2, b_2) \Rightarrow (a, b) \sim (a_2, b_2)$

En efecto, la hipótesis implica que:

$$a + b_1 = b + a_1 \qquad \text{y} \qquad a_1 + b_2 = b_1 + a_2$$

Luego $a + b_1 + a_1 + b_2 = b + a_1 + b_1 + a_2$

es decir $a + b_2 + a_1 + b_1 = b + a_2 + a_1 + b_1$

por tanto $a + b_2 = b + a_2$
con lo cual se tiene que $(a, b) \sim (a_2, b_2)$, cumpliendo con la transitividad.
DEFINICIÓN
El conjunto de pares ordenados $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ con la relación " $\sim$ ", es CONJUNTO DE CLASES DE EQUIVALENCIA, se llamará *conjunto de los números enteros* y cada clase de equivalencia se llamará número entero.

Sépase que puede existir una clase de equivalencia que contenga una infinidad de elementos y este conjunto único puede representar a un solo número entero.

$$\text{Notación: } \mathbb{Z} \text{ para} \mathbb{N} \times \mathbb{N} / \sim$$

$[a, b]$ para la clase de equivalencia

$$C_{(a,\,b)} = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}; (x, y) \sim (a, b)\}$$

Sabemos que el conjunto $\mathbb{Z}$ posee tanto números negativos como positivos. Unas de las formas que se encontró para dar una estructura algebraica a este conjunto o entregarle propiedades fue mediante la relación de clases de equivalencia. En términos sencillos se está diciendo que por ejemplo el número -5 se relaciona con (a, b) para algún (o algunos) $a, b \in \mathbb{N}$.

Así, se están creando pares ordenados con propiedades para que más tarde exista una biyección que va desde $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, desde otra forma podemos afirmar que el conjunto de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ con sus clases de equivalencia, es igual a $\mathbb{Z}$.

Entonces, para dar a $\mathbb{Z}$ una estructura algebraica, definimos (creamos, inventamos) una adición y un producto entre clases de equivalencia de la siguiente manera

$$\begin{aligned} [a, b] + [c, d] &= [a + c,\, b + d] \\ [a, b] \cdot [c, d] &= [ac + bd,\, ad + bc] \end{aligned}$$

Se observa de inmediato que esta definición adolece de un defecto potencial, que consiste en definir operaciones entre clases mediante operaciones con ciertos elementos particulares de clase (representantes). Es perfectamente concebible que tomando otros representantes los resultados puedan ser esencialmente distintos. Probaremos que esto no es así, o sea, que las operaciones $+$ y $\cdot$ en $\mathbb{Z}$ están bien definidas. En buenas cuentas, hay que demostrar que los resultados son independientes de los representantes que se elijan para los elementos de $\mathbb{Z}$ que participan en la operación.

Más precisamente:

Teorema 4.0.2

Sean $a_i, b_i, c_i, d_i \in \mathbb{N},\ i = 1, 2$. Si:

$$\begin{aligned} [a_1, b_1] &= [a_2, b_2] \\ [c_1, d_1] &= [c_2, d_2] \end{aligned}$$

en $\mathbb{Z}$ entonces,
i) $[a_1, b_1] + [c_1, d_1] = [a_2, b_2] + [c_2, d_2]$ y
ii) $[a_1, b_1] \cdot [c_1, d_1] = [a_2, b_2] \cdot [c_2, d_2]$

Demostración: Por definición de clases de equivalencia: $[x,\, y] = [x_1,\, y_1]$ en $\mathbb{Z}$ $\Longleftrightarrow$ $(x,\, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \Longleftrightarrow x + y_1 = x_1 + y \in \mathbb{N}$.

Con esto se tiene que la hipótesis del teorema implica que:

$$a_1 + b_2 = a_2 + b_1 \quad \text{y} \quad c_1 + d_2 = c_2 + d_1 \quad (^{\text{o}})$$

Pero el caso i) se quiere probar que
$[a_1 + c_1,\; b_1 + d_1] = [a_1, b_1] + [c_1, d_1] = [a_2, b_2] + [c_2, d_2] = [a_2 + c_2,\; b_2 + d_2]$
y para ello es suficiente mostrar que $a_1 + c_1 + b_2 + d_2 = a_2 + c_2 + b_1 + d_1$.

Esto último se obtiene simplemente sumando miembro a miembro los números que aparecen en $(^{\text{o}})$.

Con esto se completa i).

Para ii) se quiere probar que:
$[a_1 \cdot c_1 + b_1 \cdot d_1,\; a_1 \cdot d_1 + b_1 \cdot c_1] = [a_1, b_1] \cdot [c_1, d_1] = [a_2, b_2] \cdot [c_2, d_2] = [a_2c_2 + b_2d_2,\; a_2d_2 + b_2c_2]$
Para ello mostraremos que:

$$\begin{aligned} [a_1, b_1] \cdot [c_1, d_1] &= [a_2, b_2] \cdot [c_1, d_1] \\ \text{y que } [a_2, b_2] \cdot [c_1, d_1] &= [a_2, b_2] \cdot [c_2, d_2] \end{aligned}$$

Naturalmente que con esto se completa la afirmación de ii). Para demostrar la primera, es suficiente probar que:

$$[a_1 \cdot c_1 + b_1 \cdot d_1,\; a_1 \cdot d_1 + b_1 \cdot c_1] = [a_2c_1 + b_2d_1,\; a_2d_1 + b_2c_1]$$

lo cual es equivalente con

$$a_1c_1 + b_1d_1 + a_2d_1 + b_2c_1 = a_1d_1 + b_1c_1,\, a_2c_1 + b_2d_1$$

y esta se reduce a

$$(a_1 + b_2) \cdot c_1 + (b_1 + a_2) \cdot d_1 = (a_1 + b_2) \cdot d_1 + (b_1 + a_2) \cdot c_1$$

Pero para comprobar esta última nótese que

$$\begin{aligned} a_1 + b_2 = a_2 + b_1 = &\quad b_1 + a_2 \quad \text{luego} \\ (a_1 + b_2)\,(c_1 + d_1) = &\quad (a_1 + b_2)\,(d_1 + c_1) \quad \text{y entonces} \end{aligned}$$

$$(a_1 + b_2) \cdot c_1 + (b_1 + a_2) \cdot d_1 = (a_1 + b_2) \cdot d_1 + (b_1 + a_2) \cdot c_1$$

Análogo procedimiento para la segunda ecuación completa el resultado deseado.

Ahora probaremos que $\mathbb{Z}$ con estas dos leyes de composición interna satisface todas las propiedades "deseables" para la suma y el producto de números. Más precisamente:

Teorema 4.0.3

$\mathbb{Z}$ con la suma y producto definidos antes, es un anillo conmutativo unitario.

Demostración: Por lo dicho en la primera parte, es necesario verificar que:

1. La suma es asociativa y conmutativa, tiene neutro y cada elemento tiene opuesto aditivo.

2. El producto es asociativo y distributivo con respecto a la suma.

Además es conmutativo y tiene neutro, vamos entonces por partes:

Asociatividad

$$\begin{aligned} ([a,b]+[a_1,b_1])+[a_2,b_2] &= [a+a_1,\ b+b_1]+[a_2,b_2] \\ =[(a+a_1)+a_2,\ (b_1+b_1)+b_2] &= [a+(a_1+a_2)\,,\ b+(b_1+b_2)] \\ =[a,b]+[a_1+a_2,\ b_1+b_2] &= [a,b]+([a_1,b_1]+[a_2,b_2]) \end{aligned}$$

lo cual prueba que la suma es asociativa. Nótese que se usa esencialmente la asociatividad de los naturales.

Para la asociatividad del producto se tiene

$$\begin{aligned} ([a,b]\cdot[a_1,b_1])\cdot[a_2,b_2] &= [aa_1+bb_1,\, ab_1+ba_1]\cdot[a_2,b_2] \\ &= [(aa_1+bb_1)\cdot a_2+(ab_1+ba_1)\cdot b_2,\ (aa_1+bb_1)\cdot b_2+(ab_1+ba_1)\cdot a_2] \\ &= [aa_1a_2+bb_1a_2+ab_1b_2+ba_1b_2,\ aa_1b_2+bb_1b_2+ab_1a_2+ba_1a_2] \\ &= [aa_1a_2+ab_1b_2+ba_1b_2+bb_1a_2,\ aa_1b_2+ab_1a_2+ba_1a_2+bb_1b_2] \\ &= [a\,(a_1a_2+b_1b_2)+b\,(a_1b_2+b_1a_2)\,,\ a\,(a_1b_2+b_1a_2)+b\,(a_1a_2+b_1b_2)] \\ &= [a,b]\cdot[a_1a_2+b_1b_2,\ a_1b_2+b_1a_2] \\ &= [a,b]\cdot([a_1,b_1]\cdot[a_2,b_2]) \end{aligned}$$

Por lo tanto $([a,b]\cdot[a_1,b_1])\cdot[a_2,b_2]=[a,b]\cdot([a_1,b_1]\cdot[a_2,b_2])$, probándose la asociatividad.

Conmutatividad La de la suma es bastante sencilla pues se desea probar que $(a,b)+(c,d)=(c,d)+(a,b)$, entonces:

$$\begin{aligned} (a,b)+(c,d) &= (a+c,b+d) \\ &= (c+a,d+b)\ \textit{(por conmutatividad de los naturales)} \end{aligned}$$

por ende se tiene que $(a,b)+(c,d) = (c,d)+(a,b)$ cumpliéndose la conmutatividad de la suma para $\mathbb{Z}$

Para el producto algo similar:
$[a,\, b]\cdot[c,\, d]=[ac+bd,\, ad++bc]=[ca+db,\, da+cb]=[c,d]\cdot[a,b]$

Neutros Por observación 4.0.1, se sabe que $(a, b) \sim (c, d) \iff (a + d) = (b + c)$.

Ejemplificando numéricamente $(4, 3) \sim (3, 2)$ pues $4 + 2 = 3 + 3$.

Entonces para la suma nótese que $n+m = m+n \Rightarrow [n, n] = [m, m] \; \forall\, m, n \in \mathbb{N}$.

Luego la clase $[1, 1]$ es el neutro aditivo, ya que $[a, b]+[1, 1] = [a+1,\ b+1] = [a, b]$ para todo $[a, b] \in \mathbb{Z}$.

Esto es $[a + 1, b + 1] \sim [a, b]$ pues $a + 1 + b = b + 1 + a$.

Ejemplo: $[5, 7] + [1, 1] = [6, 8]$. Y $[6, 8]{=}[5, 7]$ pues $6 + 7 = 8 + 5$.

Para el producto, nótese que para todo m y n naturales, se tiene $[m+1, m] = [n + 1, n]$ y que la clase $[2, 1]$ es la unidad de $\mathbb{Z}$ ya que

$$[a, b] \cdot [2, 1] = [2a + b, 2b + a] = [a, b]$$

de esta forma $[2a + b, 2b + a] = [a, b]$ pues por observación 4.0.1 $2a + b + b = 2b + a + a$ así $2a + 2b = 2b + 2a$

Opuesto aditivo Para encontrar el opuesto aditivo debemos sumar dos elementos de la forma $[a, b]$ de tal forma que su resultado sea el elemento neutro de la suma, o sea el $[1, 1]$ el que se corresponde con el 0.

Entonces, el opuesto aditivo de $[a, b]$ en $\mathbb{Z}$ es el entero $[b, a]$ ya que

$$[a, b] + [b, a] = [a + b,\ b + a] = [1, 1]$$

Para mayor claridad, ejemplificaremos con elementos numéricos

$[7, 3] + [3, 7] = [10, 10]$ y $[10, 10] = [1, 1]$ pues $10 + 1 = 10 + 1$

En resumen todos los elementos de la forma $[a, a] \, \forall a \in \mathbb{N}$ serán iguales a $[1, 1]$.

Distributividad

$$\begin{array}{rc} & [a, b] \cdot \{[x_1, y_1] + [x_2, y_2]\} = [a, b] \cdot [x_1 + x_2, y_1 + y_2] \\ = & [a\{x_1 + x_2\} + b\{y_1 + y_2\},\ a\{y_1 + y_2\} + b\{x_1 + x_2\}] \\ = & [ax_1 + ax_2 + by_1 + by_2,\ ay_1 + ay_2 + bx_1 + bx_2] \\ = & [ax_1 + by_1,\ ay_1 + bx_1] + [ax_2 + by_2,\ ay_2 + bx_2] \\ = & [a, b] \cdot [x_1, y_1] + [a, b] \cdot [x_2, y_2] \end{array}$$

Notar que en la demostración anterior debió probarse la “neutralidad” de los neutros a la izquierda y a la derecha y lo mismo debió hacerse con la distributividad. Sin embargo esto no fue necesario porque poco antes fue demostrada la conmutatividad de las operaciones.

Observación 4.0.2

$\mathbb{Z}$ por el simple hecho de ser anillo, goza de algunas propiedades que conviene destacar. Como de costumbre, 0 representa al neutro aditivo y 1 a la unidad de $\mathbb{Z}$. Si a es un entero, de denota por $-a$ el opuesto aditivo de a, es decir, por definición $-a$ satisface:

$$(-a) + a = a + (-a) = 0$$

Además $-a$ es claramente el único entero que satisface dicha igualdad. En efecto, si $b \in \mathbb{Z}$ es tal que $b + a = 0$, entonces

$$b + a + (-a) = 0 + (-a) = -a$$
es decir, $$-a = b + (a + (-a)) = b + 0 = b$$

Luego $b = -a$. Es inmediato entonces que $-(-a) = a$. El entero $b + (-a)$ se denota $b - a$.

A continuación se añadirán más propiedades numéricas al conjunto $\mathbb{Z}$.

Teorema 4.0.4

Sean a, b, c, d números enteros. Entonces:

1. $b - a$ es el único entero que verifica $(b - a) + a = b$, es decir, $x = b - a \iff x + a = b$.
2. $\begin{cases} a - (b + c) = a - b - c \\ a - (-b) = a + b \qquad \text{(propiedades del paréntesis)} \\ a + (b - c) = a + b - c \end{cases}$
3. $0 \cdot a = 0$ y $a \cdot 0 = 0$
4. $a(b - c) = ab - ac$
5. $a(-b) = (-a)b = -ab$
6. $(-a)(-b) = ab$

Demostración

1.

$$\begin{aligned} (b - a) + a &= b + (-a) + a \\ &= b + ((-a) + a) \\ &= b \end{aligned}$$

y $b - a$ es el único entero que satisface la ecuación $x + a = b$, ya que si n es solución se tiene $n + a = b$, luego

$$n = n + 0 = n + a + (-a) = b - a \text{ es decir } n = b - a$$

2. i)

$$\begin{aligned} a - b - c + (b + c) &= a + (-c) + (-b) + b + c \\ &= a + (-c) + 0 + c \\ &= a, \text{ es decir} \\ a &= a - b - c + (b + c) \text{ y en virtud de 1, esto significa que} \\ a - (b + c) &= a - b - c \end{aligned}$$

ii) Por i) se tiene que

$$\begin{aligned} a-(b-c) &= a-(b+(-c)) \\ &= a-b-(-c) \\ &= a-b+c \end{aligned}$$

iii) $a-((-b)) = a+(-(-b)) = a+b$
iv) $a+(b-c) = a+b-c$

$$\begin{aligned} a+(b-c) &= a+(b+(-c)) \\ &= a+b+(-c) \\ &= a+b-c \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} b\cdot a &= (b+0)\cdot a \\ &= ba+0a \quad \text{...luego} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0a &= (-ba)+ba+0a \\ &= -(ba)+ba \\ &= 0, \quad \text{es decir } 0a=0 \end{aligned}$$

Por conmutatividad de la multiplicación $a\cdot 0 = 0\cdot a = 0$.

4. $a(b-c)+ac = a((b-c)+c) = a(b+0) = ab + a\cdot 0 = ab$.
Luego $a(b-c) = ab-ac$ es propiedad 1.

5. $a(-b) = a(0-b) = a\cdot 0 - ab = -ab$

6. $(-a)(-b) = -(a(-b)) = -(-ab) = ab$

Conviene destacar, nuevamente, el hecho que las propiedades 1, 2, 3, 4, 5 y 6 son válidas en anillos cualesquiera, es la ley de cancelación para la suma:
Si $a+b = c+b$, entonces $a=c$.

Antes se mostró que $0=[1,1]$ y que $1=[2,1]$. Demostrar que

$$\begin{aligned} [p,q]=0 &\iff p=q \\ [p,q]=1 &\iff p=q+1 \end{aligned}$$

Ahora mostraremos que $\mathbb{Z}$ es efectivamente una extensión de $\mathbb{N}$ en el sentido que $\mathbb{Z}$ contiene una "copia" de $\mathbb{N}$. Más precisamente, esto significa que hay una inyección $h:\mathbb{N}\to\mathbb{Z}$ que respeta las operaciones en $\mathbb{N}$, es decir: $h:(n+m) = h(n)+h(m)$ y $h(n\cdot m) = h(n)\cdot h(m)$.

Esto permite traducir en $\mathbb{Z}$ toda la propiedad que se verifique en $\mathbb{N}$ efectuando todo tipo de operaciones con los $f(n)$ en $f(\mathbb{N})$ en lugar de hacerlo con todos los $n\in\mathbb{N}$. En buenas cuentas, esto da motivo para identificar a los $n\in\mathbb{N}$ con $f(n)\in\mathbb{Z}$, usando si se desea la misma notación para ambos elementos, ya que desde el punto de vista algebraico no hay diferencia salvo la distinta notación para cada uno de ellos.

Teorema 4.0.5

La Aplicación

$$\begin{aligned} h:\mathbb{N} &\to \mathbb{Z} \\ n &\to [n+1,1] \end{aligned}$$

es una inyección "respetuosa" de la estructura algebraica de los naturales, o sea,

$$\begin{aligned} h(n+m) &= h(n)+h(m) \\ h(n\cdot m) &= h(n)\cdot h(m) \end{aligned}$$

Demostración: h es inyección porque si $h(n)=h(m)$, entonces

$$[m+1,1]=[n+1,1]$$

Luego $m+1+1=n+1+1$, por tanto $m=n$.
O sea, $h(n)=h(m)\Rightarrow n=m$.
h respeta la suma, ya que $h(n+m)=[n+m+1,1]=[n+m+1+1,1+1]=[n+1,1]+[m+1,1]=h(n)+h(m)$. Luego $h(n+m)=h(n)+h(m)$.
h respeta el producto $h(nm)=[nm{+}1,1]=[nm{+}n{+}m{+}1{+}1,n{+}m{+}1{+}1]=[n+1,1]\cdot[m+1,1]=h(n)\cdot h(m)$.
Existe algo que nos está incomodando en este proceso de construcción de $\mathbb{Z}$, y es que los elementos de un subconjunto tienen la forma $[n+1,1]$ con $n\in\mathbb{N}$. Esta forma "compleja" de notación será reemplazada por una más sencilla, y consiste en reemplazar este elemento simplemente por un $n\in\mathbb{N}$, dicho de otra forma, la identificación se llevará a cabo de la siguiente manera:
Se forma entonces el conjunto $\mathbb{Z}-h(\mathbb{N})$, es decir, "sacar" de $\mathbb{Z}$ el conjunto $h(\mathbb{N})$, donde los elementos de $h(\mathbb{N})$ son de la forma $[n+1,1]$. Ahora en el lugar dejado libre por $h(n)$ en $\mathbb{Z}$ se pondrán elementos $n\in\mathbb{N}$ y se considerarán ahora como elementos de $\mathbb{Z}$. Ahora bien, si se desean efectuar operaciones con n y otros elementos de $\mathbb{Z}$, hacerlas como se hacían con $h(n)$, es decir, para $n\in\mathbb{N},\ r\in\mathbb{Z}$.
Sépase que las propiedades de suma y multiplicación de los elementos con la forma$[n+1,1]$ están demostradas y son bien definidas, por ende si este es reemplazado por un $n\in\mathbb{N}$ simplemente pasarán a tener también esas propiedades.

de esta forma tenemos que $n+r=h(n)+r$ además $nr=h(n)\cdot r$

Con esta identificación (igualación o correspondencia de unos elementos con otros) $\mathbb{N}$ pasa a ser propiamente un subconjunto de $\mathbb{Z}$, y claramente se verifica para $m,\ n\in\mathbb{N}$, que $m+n$ y $m\cdot n$ son elementos de $\mathbb{N}$. Además si $\alpha=[p,q]$ para ciertos $p,q\in\mathbb{N}$. Luego

$$\alpha=[p,q]=[p{+}1{+}1,\ q{+}1{+}1]=[p{+}1,1]{+}[1,q{+}1]=[p{+}1,1]{-}[q{+}1,1]=h(p){-}h(q)\ (*)$$

se sabe que $(a,b) \sim (c,d) \iff a+d=b+c$, entonces en el enunciado anterior nos está diciendo que

$$\begin{aligned}
[p+1,1]+[1,q+1] &\sim [p+1,1]-[q+1,1] \\
[p+1+1,q+1+1] &\sim [p+1-q,1-1] \\
[p+2,q+2] &\sim [p-q,0]
\end{aligned}$$

estos dos elementos son congruentes pues

$$\begin{aligned}
p+2+0 &= q+2+p-q \\
p+2 &= p+2 \text{ quedando demostrada la igualdad } (*)
\end{aligned}$$

Para llevar a cabo la simplificación de notación podemos decir que

$$\alpha = p-q$$

Claramente esto nos presenta un elemento nuevo ya que está dando la posibilidad de que todos los elementos de $\mathbb{Z}$ puedan ser resultado de la resta, lo que no ocurre siempre con $\mathbb{N}$.

Por último, por la forma de definir h, es claro que la Unidad de $\mathbb{N}$ se identifica con la Unidad de $\mathbb{Z}$, ya que $h(1)=[2,1]=1$, la unidad en $\mathbb{Z}$. Resumiendo todo esto, se tiene el

Corolario 4.0.1

Mediante la inyección

$$\begin{aligned}
\mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{Z} \\
n &\mapsto [n+1,1]
\end{aligned}$$

$\mathbb{N}$ se identifica con un subconjunto de $\mathbb{Z}$, tal que cada entero es el resultado de una resta entre dos números naturales y la unidad de $\mathbb{N}$ se identifica con la unidad en $\mathbb{Z}$. Además, para $p,q \in \mathbb{N}$, $p-q \in \mathbb{N}$ si y solo si $p>q$. En tal caso $p-q$ es el (único) número natural d que verifica $p=q+d$.

Demostración Es necesario comprobar sólo la segunda parte. Sea $p>q$ en $\mathbb{N}$, es decir, $p=q+d$ para cierto d número natural. d es único con esta propiedad, en virtud de la ley de cancelación. Luego

$$p-q=d\in\mathbb{N}$$

Recíprocamente, si $p-q\in\mathbb{N}$ entonces $p-q=d$ para algún $d\in\mathbb{N}$. Luego $p=q+d$, o sea, $p>q$. Q.E.D.

Nótese que dado $\alpha=[p,q]\in\mathbb{Z}$ hay sólo tres posibilidades para la pareja p,q:

i)$p>q \Rightarrow \alpha=h(d)=d$ (por reemplazo), donde $p=q+d$.

En este caso $\alpha\in\mathbb{N}$.

ii) $p=q \Rightarrow \alpha=[p,p]=0\in\mathbb{Z}$

iii) $p < q \Rightarrow \alpha = [p,q] = [q,p] = -h(r) = -r$ (por reemplazo), donde $r \in \mathbb{N}$ satisface $q = p + r$.

Además estas propiedades de α son independientes de la elección de representantes para la clase de equivalencias, o sea, estas propiedades siempre se van a cumplir independiente del elemento de la forma $[p,q] = \alpha$ que tomemos. En efecto, si $\alpha = 0 \in \mathbb{Z}$ y α tiene la representación$[m,n]$, entonces $[m,n] = [1,1]$, es decir $m = n$. Por otra parte si $\alpha = [p,q] = [m,n]$ con$p > q$, entonces $p + n = m + q$ implica que $m > n$, ya que en la pareja de naturales (m,n) hay solo tres posibilidades: $m = n, m < n, m > n$ y las dos primeras son claramente imposibles como se explicó anteriormente. Luego se tiene el

Teorema 4.0.6

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ verifica la siguiente propiedad:

1. $a, b \in \mathbb{N} \Rightarrow a + b \in \mathbb{N}$ y $ab \in \mathbb{N}$.
2. $a \in \mathbb{Z} \Rightarrow a \in \mathbb{N}$ o $a = 0$ o $-a \in \mathbb{N}$

y cada una de estas alternativas excluye las otras dos.

DEFINICIÓN: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ (por tener las propiedades 1 y 2 del teorema anterior) se llama *conjunto de los enteros positivos.*

Observación 4.0.3

Cada vez que en un anillo se pueda definir un conjunto de positivos, se puede definir un orden "respetuoso" de la estructura algebraica, en un sentido análogo al del teorema 3.0.8. Para este efecto se pone: $a, b \in \mathbb{Z}$: $a < b \iff b - a \in \mathbb{N}$.

Por lo dicho antes se tiene la forma inmediata.

i) $a < b$ y $b < c \iff a < c$

ii) Para $a, b \in \mathbb{Z}$ rige una y solo una de las tres posibilidades: $a < b$ o $a = b$ o $b < a$ (ya que $b - a$ satisface la parte 2 del teorema 4.0.6).

DEFINICIÓN: Sean $a, b \in \mathbb{Z}$

$$a \leq b \iff a < b \text{ o } a = b$$

$a \leq b$ se lee, *a es menor o igual que b.*

Teorema 4.0.7

La relación $\leq$ es relación de orden total sobre $\mathbb{Z}$, "respetuosa" de la estructura algebraica de $\mathbb{Z}$, es decir,

1. $x \leq y \quad z \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad x + z \leq y + z$
2. $x \leq y \quad 0 < z \quad \Rightarrow \quad xz \leq yz$

Demostración: I Para demostrar que $\leq$ es de orden se demostrarán tres propiedades, reflexividad, antisimetría y transitiva.

i) $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = x \Rightarrow x \leq x$ (reflexividad)

ii) $x \leq y,\ y \leq x \Rightarrow x = y$, ya que cualquier otra alternativa para la pareja x, y es imposible. (antisimétrica)

iii) $x \leq y$ e $y \leq z \Rightarrow x \leq z$ (transitividad) porque si hay un signo igual todo es claro. Si los dos signos son $<$ el resultado surge en forma inmediata de la definición.

Por último, dados a y b enteros, se tiene que $a-b \in \mathbb{N}$ o $a-b=0$ o $b-a \in \mathbb{N}$, por el Teorema 4.0.6. Luego $b < a$ o $a = b$ o $a < b$ y solo una de estas alternativas es válida. De esta forma $\leq$ es orden total sobre $\mathbb{Z}$.

II. 1) Sea $x < y, z$ entero. Entonces,

$$(y+z)-(x+z) = y-x \in \mathbb{N}$$

Luego $x+z < y+z$

Además si $x = y$, entonces $x+z = y+z$. O sea $x \leq y$, z entero $\Rightarrow x+z \leq y+z$.

2) Si alguno de los signos $\leq$ es $=$ en la hipótesis, en la conclusión el signo es $=$. Si ambas son desigualdades estrictas se tiene: $y-x, z \in \mathbb{N}$, luego $zy - zx = z(y-x) \in \mathbb{N}$ y, por tanto, $zx < zy$.

Observación 4.0.4

Lo mismo que en teorema 3.0.8, la demostración anterior dice más que el enunciado del teorema.

En efecto, la demostración afirma que si x, y, z son enteros, entonces:

$$\begin{array}{ll} x < y \Rightarrow & x+z < y+z \\ x = y \Rightarrow & x+z = y+z \\ x > y \Rightarrow & x+z > y+z \end{array}$$

Luego los recíprocos (o sea $\Leftarrow$) de cada uno de ellos son válidos, es decir, cada implicación es realmente una doble implicación.

Análoga observación rige para el producto, es decir, si x, y son enteros y $z > 0$, entonces

$$\begin{array}{ll} x < y \Rightarrow & xy < yz \\ x = y \Rightarrow & xz = yz \\ x > y \Rightarrow & xz > yz \end{array}$$

Además valen en $\mathbb{Z}$ propiedades análogas a las de los números naturales tales como:

1. $x \leq y, \quad y < z \quad \Rightarrow \quad x < z$
2. $x < y, \quad y \leq z \quad \Rightarrow \quad x < z$
3. $x < y, \quad z < u \quad \Rightarrow \quad x+z < y+u$
4. $x \leq y, \quad z < u \quad \Rightarrow \quad x+z < y+u$
5. $x \leq y, \quad z \leq u \quad \Rightarrow \quad x+z \leq y+u$

Finalmente, si se llaman *positivos* a los enteros mayores que cero y *negativos* a los enteros menores que 0, se tiene el

Teorema 4.0.8

El orden $\leq$ en $\mathbb{Z}$ coincide en $\mathbb{N}$ con el orden $\leq$ definido en el capítulo anterior.

Demostración: Sean m, n números naturales:
$m = n$ en $\mathbb{N} \Rightarrow m = n$ en $\mathbb{Z}$
$m < n$ en $\mathbb{N} \Rightarrow n = m + p$ para algún p natural $\Rightarrow n - m = p \in \mathbb{N} \Rightarrow m < n$ en $\mathbb{Z}$.

Además $n \in \mathbb{N} \iff n - 0 = n \in \mathbb{N} \iff n > 0$. O sea $\mathbb{N}$ = conjunto de los enteros positivos.

Observación 4.0.5

1) El principio de inducción rige sobre el conjunto de los enteros positivos. en particular, todo subconjunto no vacío de enteros positivos TIENE un menor elemento.

2) De acuerdo con la interpretación gráfica para los productos cartesianos, los enteros pueden representarse geométricamente, donde cada entero es una colección de puntos de la red $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, sobre una recta de la misma dirección que la bisectriz del cuadrante. Dicha bisectriz contiene la clase 0, las rectas sobre ella contienen los enteros negativos y las rectas del semiplano inferior los enteros positivos. Si no se desea tomar en cuenta el origen de los enteros como par ordenado, es más simple representarlos directamente en un eje, los positivos a la derecha del cero y los negativos a la izquierda.

Demostración:

1. Probar que si $x, y, z \in \mathbb{Z}$, $z < 0, x < y \iff xz > yz$.
   Si $x < y \Rightarrow x + n = y$

$$\begin{aligned}
x + n &= y \; con \; n \in \mathbb{N} \\
(x + n) \cdot z &= yz \\
xz + nz &= yz \text{ se sabe que } nz < 0 \Rightarrow -nz > 0 \\
xz + nz - nz &= yz - nz \\
xz + (nz - nz) &= yz - nz \\
xz + 0 &= yz - nz \text{ por inverso aditivo} \\
xz &= yz + m \text{ con } m \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

   Si $xz = yz + m \Rightarrow yz < xz$

2. Probar que $x^2 > 0$ para todo entero $x \neq 0$. Es decir $\mathbb{Z}$ no contiene divisores de cero.

RESUMEN: $\mathbb{Z}$, conjunto de los enteros, con suma y producto es un anillo conmutativo unitario, sin divisores de cero, que contiene a los números naturales. Además la relación "$x \leq y$ si $y - x \in \mathbb{N}$" es un orden total sobre $\mathbb{Z}$, "respetuoso" de la estructura algebraica y tal que $\mathbb{N}$ es exactamente el conjunto de los enteros positivos, con el que se define una partición de $\mathbb{Z}$ de la siguiente manera:

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup -\mathbb{N} \quad \text{donde} \quad -\mathbb{N} = \{-n; n \in \mathbb{N}\}$$

Capítulo 5

LOS NÚMEROS RACIONALES.

Los números racionales aparecieron para dar solución a los defectos que presentan los números naturales y los números enteros, pero ¿cuáles eran estos defectos?.

En el caso de los números naturales no siempre es posible realizar la resta y la división, y en el caso de los números enteros no siempre es posible realizar la división en este caso dar solución a la ecuación $cx + a = b$.

Es por esto que es necesario definir un conjunto numérico que incluya a los números enteros y respete su estructura algebraica y de orden.

El punto de partida ahora es el conjunto $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$, donde $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} - \{\mathbf{0}\}$ =conjunto de los enteros no nulos. En el conjunto, $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$se define la siguiente relación $(a, b) \sim (a_1, b_1) \Leftrightarrow ab_1 = a_1 b$.

Teorema 5.0.1

La relación $\sim$ en $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ es relación de equivalencia.

Demostración: Se ve fácilmente que la relación es refleja pues $(a, b) \sim (a, b) \Leftrightarrow ab = ba \Rightarrow (a, b) \sim (a, b)$.

Si es refleja se cumple que $(a, b) \sim (a_1, b_1) \Rightarrow (a_1, b_1) \sim (a, b)$

en efecto $(a, b) \sim (a_1, b_1) \Rightarrow ab_1 = ba_1 \Rightarrow ba_1 = ab_1 \Rightarrow a_1 b = b_1 a \Rightarrow (a_1, b_1) \sim (a, b)$.

Finalmente para demostrar la transitividad, es cierto pues si

$(a, b) \sim (a_1, b_1)(a_1, b_1) \sim (a_2, b_2) \Rightarrow ab_1 = a_1 ba_1 b_2 = a_2 b_1 ab_1 b_2 = a_1 bb_2 = a_1 b_2 b = a_2 bb_1 ab_2 b_1 = a_2 bb_1$

Esto implica que $ab_2 = a_2b$, es decir, $(a,b) \sim (a_2, b_2)$. DEFINICIÓN: $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* / \sim$, conjunto de las clases de equivalencia. se llama *conjunto de los números racionales* y cada clase de equivalencia se llama (número) *racional*.

Notación: $\mathbb{Q}$ para $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} / \sim$.

$\dfrac{x}{y}$ para la clase de equivalencia $C_{(x,y)} = \{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*,\ (a,b) \sim (x,y)\}$

Igual que antes, se desea dar a $\mathbb{Q}$ una estructura algebraica, definiendo una suma y un producto entre las clases de equivalencia. Para ello se anota:

$$\begin{aligned} \frac{x}{y} + \frac{u}{v} &= \frac{xv + yu}{yv} \\ \frac{x}{y} \cdot \frac{u}{v} &= \frac{xu}{yv} \end{aligned}$$

Claramente $y, v \neq 0$. Además puede comprobarse que estas operaciones están bien definidas, es decir, se verifica:

$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{y} &= \frac{u}{v} \\ \frac{x_1}{y_1} &= \frac{u_1}{v_1} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \frac{x}{y} + \frac{x_1}{y_1} = \frac{u}{v} + \frac{u_1}{v_1}$$

$$\frac{x}{y} \cdot \frac{x_1}{y_1} = \frac{u}{v} \cdot \frac{u_1}{v_1}$$

La primera se comprueba así:

La hipótesis con $\dfrac{x}{y} = \dfrac{u}{v}$ y $\dfrac{x_1}{y_1} = \dfrac{u_1}{v_1}$ implica que $\begin{aligned} xv - yu &= 0 \\ x_1v_1 - y_1u_1 &= 0 \end{aligned}$

por tanto

$$\begin{aligned} xv - yu = 0 &\quad \Rightarrow \quad xvy_1v_1 - yuy_1v_1 = 0 \\ x_1v_1 - y_1u_1 = 0 &\quad \Rightarrow \quad x_1v_1yv - y_1u_1yv = 0 \end{aligned}$$

de ambas expresiones se obtiene:

$$\begin{aligned} vy_1v_1 - yuy_1v_1 + x_1v_1yv - y_1u_1yv &= 0 \\ xvy_1v_1 + x_1v_1yv &= yuy_1v_1 + y_1u_1yv \\ (xy_1 + yx_1)vv_1 &= (uv_1 + u_1v)yy_1 \end{aligned}$$

es decir:

$$\frac{xy_1 + yx_1}{yy_1} = \frac{uv_1 + u_1v}{vv_1}$$

$$\frac{x}{y} + \frac{x_1}{y_1} = \frac{u}{v} + \frac{u_1}{v_1}$$

La segunda se comprueba así:

La hipótesis implica que $\begin{aligned} xv &= yu \\ x_1v_1 &= y_1u_1 \end{aligned}$

por tanto, $xx_1vv_1 = (xv)(x_1v_1) = (yu)(y_1u_1) = yy_1uu_1$, es decir:

$$\frac{x}{y} \cdot \frac{x_1}{y_1} = \frac{xx_1}{yy_1} = \frac{uu_1}{vv_1} = \frac{u}{v} \cdot \frac{u_1}{v_1}$$

Luego de quedar definida la suma y el producto en $\mathbb{Q}$ es necesario demostrar que estas operaciones satisfacen nuevamente todas las propiedades «deseables» y que el conjunto $\mathbb{Q}$ extiende a $\mathbb{Z}$ con su estructura algebraica y de orden.

Teorema 5.0.2

$\mathbb{Q}$ con la suma y producto definido antes, es un cuerpo.

Demostración: 1. Asociatividad:

$$\begin{aligned} \left(\frac{x}{y} \cdot \frac{x_1}{y_1}\right) \cdot \frac{x_2}{y_2} = \frac{xx_1}{yy_1} \cdot \frac{x_2}{y_2} &= \frac{(xx_1)x_2}{(yy_1)y_2} = \frac{x(x_1x_2)}{y(y_1y_2)} \\ &= \frac{x}{y} \cdot \left(\frac{x_1x_2}{y_1y_2}\right) = \frac{x}{y} \cdot \left(\frac{x_1}{y_1} \cdot \frac{x_2}{y_2}\right) \end{aligned}$$

o sea, la asociatividad del producto en $\mathbb{Q}$ surge de la asociatividad del producto en $\mathbb{Z}$

de similar manera para la suma:

$$\begin{aligned} \left(\frac{x}{y} + \frac{x_1}{y_1}\right) + \frac{x_2}{y_2} = \frac{xy_1 + x_1y}{yy_1} + \frac{x_2}{y_2} &= \frac{xy_1y_2 + x_1yy_2 + x_2yy_1}{yy_1y_2} \\ \frac{x}{y} + \left(\frac{x_1}{y_1} + \frac{x_2}{y_2}\right) = \frac{x}{y} + \left(\frac{x_1y_2 + x_2y_1}{y_1y_2}\right) &= \frac{xy_1y_2 + x_1y_2y + x_2y_1y}{yy_1y_2} \end{aligned}$$

de lo anterior se concluye $\left(\frac{x}{y} + \frac{x_1}{y_1}\right) + \frac{x_2}{y_2} = \frac{x}{y} + \left(\frac{x_1}{y_1} + \frac{x_2}{y_2}\right)$
.

2. Conmutatividad:

$$\frac{x}{y} \cdot \frac{x_1}{y_1} = \frac{xx_1}{yy_1} = \frac{x_1x}{y_1y} = \frac{x_1}{y_1} \cdot \frac{x}{y}$$

Además

$$\frac{x}{y} + \frac{x_1}{y_1} = \frac{xy_1 + yx_1}{yy_1} = \frac{y_1x + x_1y}{y_1y} = \frac{x_1}{y_1} + \frac{x}{y}$$

3. Neutros:

1. De las definiciones de suma y producto en $\mathbb{Q}$ se tiene que $\frac{0}{1} = \frac{0}{a}$ y $\frac{1}{1} = \frac{a}{a}$ con $a \neq 0$ la cuales son identidades para la suma y producto respectivamente, la notación para estas identidades es 0 y 1.
   Un ejemplo: $\frac{1}{1} \cdot \frac{x}{y} = \frac{1 \cdot x}{1 \cdot y} = \frac{x}{y}$ o $\frac{a}{a} \cdot \frac{x}{y} = \frac{a \cdot x}{a \cdot y} = \frac{x}{y}$
   $\frac{0}{1} + \frac{x}{y} = \frac{0 \cdot y + x \cdot 1}{1 \cdot y} = \frac{0 + x}{y} = \frac{x}{y}$

4. Distributividad:

$$\begin{aligned} \frac{x}{y}\left(\frac{u}{v} + \frac{r}{s}\right) &= \frac{x}{y} \cdot \frac{us + rv}{vs} = \frac{xus + xrv}{yvs} = \frac{xuys + xryv}{yvvs} \\ &= \frac{xu}{yv} + \frac{xr}{ys} = \frac{x}{y} \cdot \frac{u}{v} + \frac{x}{y} \cdot \frac{r}{s} \end{aligned}$$

Por conmutatividad, ya probada, resulta la distributividad por la derecha.
5. Opuestos:

El opuesto aditivo de $\frac{x}{y}$ es el elemento $-\frac{x}{y}$ y el opuesto multiplicativo de $\frac{x}{y}$, con $x \neq 0$, es el elemento $\frac{y}{x}$.

Observación 5.0.1

1) La elección de 0 y 1 es única, en el siguiente sentido:
$\frac{x}{y}$ es el neutro aditivo en $\mathbb{Q} \Rightarrow x = 0$
$\frac{x}{y}$ es el neutro multiplicativo en $\mathbb{Q} \Rightarrow x = y$

2) Por ser $\mathbb{Q}$ cuerpo y, por tanto, anillo, se verifican en él todas las propiedades enunciadas en el Teorema 4.0.4 . Además se tienen propiedades para la "*división*"análogas a la resta establecida en el TEOREMA 4.0.4 a saber:

Teorema 5.0.3

Sean a,b,c racionales. Entonces:
1. $b \neq 0 \Rightarrow ab^{-1}$ es el único racional que verifica $(ab^{-1}) \cdot b = a$. Es decir, $x = ab^{-1}$ si y solo si $xb = a$ (x se llama el *cociente de a por b*).
2. $(b^{-1})^{-1} = b$

$$(bc)^{-1} = b^{-1}c^{-1}$$

$$a(bc) = (ab^{-1})(c^{-1})$$

Demostración: 1) $(ab^{-1})b = a(b^{-1}b) = a \cdot 1 = a$, luego ab^{-1} satisface la ecuación $xb = a$. Además x es el único, ya que si suponemos u otra solución se tendría

$$xb = ub$$

Luego $x = x(bb^{-1}) = (xb)b^{-1} = (ub)b^{-1} = u(bb^{-1}) = u$

2) El resultado anterior deja como el único racional b que satisface la ecuación $xb^{-1} = 1$. Luego $b = x = (b^{-1})^{-1}$, es decir, $(b^{-1})^{-1} = b$.

Para demostrar la segunda parte se observa que $(bc)b^{-1}c^{-1} = (bcb^{-1})c^{-1} = (bb^{-1}c)c^{-1} = 1 \cdot cc^{-1} = 1$, es decir,
esto resulta de la asociatividad y conmutatividad

$$(bc)^{-1} = c^{-1}b^{-1} = b^{-1}c^{-1}$$

La última $a(bc)^{-1} = ab^{-1}c^{-1}$ resulta de lo anterior y por asociatividad.

Igual que en el caso de $\mathbb{N}$ con respecto a $\mathbb{Z}$, necesitamos ahora mostrar que $\mathbb{Q}$ *"extiende"* a $\mathbb{Z}$ con su estructura algebraica y de orden. Es decir, hay que probar que $\mathbb{Q}$ contiene una *"copia"* de $\mathbb{Z}$, que permite identificar $\mathbb{Z}$, con un subconjunto de los racionales.

Teorema 5.0.4

La aplicación
$$\begin{aligned} i : \mathbb{Z} &\to \mathbb{Q} \\ x &\mapsto x' = \frac{x}{1} \end{aligned}$$
es una inyección *"respetuosa"* de la estructura algebraica de los enteros, es decir,

$$\begin{aligned} (x+y)' &= x' + y' \\ (xy)' &= x' \cdot y' \end{aligned}$$

Demostración: i es inyección , porque si $x' = y'$, entonces $\frac{x}{1} = \frac{y}{1}$. Luego $x \cdot 1 = 1 \cdot y$, es decir, $x = y$.

i respeta la suma, ya que $i(x+y) = \frac{x+y}{y} = \frac{x \cdot 1 + 1 \cdot y}{1 \cdot 1} = \frac{x}{1} + \frac{y}{1} = i(x) + i(y)$.

i respeta el producto, ya que $i(xy) = \frac{xy}{1} = \frac{xy}{1 \cdot 1} = \frac{x}{1} \cdot \frac{y}{1} = i(x)i(y)$.

Igual que antes, esto permite identificar $x \in \mathbb{Z}$ con $x' \in \mathbb{Q}$ y considerar entonces los enteros como un subconjunto de los racionales. Se tiene que la suma y producto de dos enteros (en $\mathbb{Q}$) es un entero. Además el cero se identifica con el cero y la unidad con la unidad.

Si α es un número racional se tiene $\alpha = \frac{a}{b}$, con a, b enteros, $b \neq 0$.

Luego: $\alpha = \frac{a}{b} = \frac{a}{1} \cdot \frac{1}{b} = i(a)i(b)^{-1}$, por lo que después de hecha la identificación, puede escribirse simplemente así:

$\alpha = ab^{-1}$ Para encontrar la solución a la ecuación $xb = a$ es necesario utilizar la definición anterior pues $\alpha = ab^{-1}$ es su única solución. Se puede escribir cualquier racional con u, v, enteros, $v \neq 0$, $\frac{u}{v}$ como la solución única de cualquier ecuación además de que $v = u$ $\left(\frac{u}{v} = uv^{-1}\right)$, con u, v números enteros que definen un número racional. Esta notación define a u como el *numerador* y a v como el *denominador* de la fracción $\frac{u}{v}$, y siempre que se tenga esta fracción, para no redundar en la notación se supondrá implícitamente desde ahora en adelante que $v \neq 0$. En otras palabras, en este punto podemos cambiar fácilmente el sentido de la representación $\alpha = \frac{a}{b}$ para un número racional. En efecto, en virtud de los dicho antes $\alpha = \frac{a}{b} = ab^{-1}$ será la única solución de la ecuación $xb = a$. Podemos, entonces, consensuar en escribir, para cualquier u, v racional como $\frac{u}{v}$, esta será la solución única de la ecuación y $v = u$. Es decir, $\frac{u}{v} = uv^{-1}$.

Teorema 5.0.5

Sean u, v, u_1, v_1 racionales en que v y v_1 son distintos de cero.
Entonces:
1) $\frac{u}{v} = \frac{u_1}{v_1} \Leftrightarrow uv_1 = u_1 v$
2) $\frac{u}{v} + \frac{u_1}{v_1} = \frac{uv_1 + u_1 v}{vv_1}$
3) $\frac{u}{v} \cdot \frac{u_1}{v_1} = \frac{uu_1}{vv_1}$ en particular si n es entero $n \cdot \frac{u}{v} = \frac{nu}{v}$

Teorema 5.0.6

Mediante la inyección

$$\begin{aligned} i : \mathbb{Z} &\to \mathbb{Q} \\ n &\mapsto \frac{n}{1} \end{aligned}$$

Se identifica $\mathbb{Z}$ como un subconjunto de $\mathbb{Q}$, en el que cada número racional es cociente de dos números enteros, además la unidad en $\mathbb{Z}$ se identifica con la unidad en $\mathbb{Q}$ y el cero en $\mathbb{Z}$ con el cero en $\mathbb{Q}$. Además para p, q enteros, $q \neq 0$, $\frac{p}{q}$ es entero si, y sólo si, $p = rq$ para algún r entero.

Demostración: La primera parte es un resumen de lo dicho despúes del Teorema 5.0.4

La segunda parte es obvia. Se debe mostrar que $\mathbb{Q}$ posee una estructura de orden que prolongue el orden de $\mathbb{Z}(\subseteq \mathbb{Q})$. Para ello, empezamos por definir el conjunto $\mathbb{Q}^+$ de los *racionales positivos* de la siguiente manera; racional:

$\frac{x}{y} \in \mathbb{Q}^+ \Leftrightarrow xy > 0$ en $\mathbb{Z}$

La definición no es ambigua, ya que si $\frac{u}{v} = \frac{x}{y}$ y $xy > 0$ en $\mathbb{Z}$, entonces $uy = vx$. Luego $(uv)(xy) = v^2x^2 > 0$ por el ejercicio del Teorema 4.0.3, ya que $x \neq 0$. (por ser $xy > 0$). Es decir, $(uv)(xy) > 0$, y como $xy > 0$, entonces $uv \nleq 0$, es decir, $uv > 0$.

Teorema 5.0.7

$\mathbb{Q}^+ \subseteq \mathbb{Q}$ verifica las siguientes propiedades:
1. $a, b \in \mathbb{Q}^+ \Rightarrow a + b,\ a \cdot b \in \mathbb{Q}^+$.
2. $a \in \mathbb{Q} \Rightarrow a \in \mathbb{Q}^+$ o $a = 0$ o $-a \in \mathbb{Q}^+$.
De estas últimas cada una excluye a las otras.

Demostración: Sean $a = \frac{x}{y}$, $b = \frac{x_1}{y_1}$ en $\mathbb{Q}$

1. Si a y b son racionales positivos, entonces $xy > 0$, $x_1y_1 > 0$ en $\mathbb{Z}$.
Luego $a + b = \frac{xy_1 + x_1y}{yy_1} = \frac{xyy_1^2 + x_1y_1y^2}{y^2y_1^2}$ es positivo, ya que $(xyy_1^2 + x_1y_1y^2)y^2y_1^2 > 0$ en $\mathbb{Z}$.
Por otro lado $ab = \frac{xx_1}{yy_1}$ es positivo, ya que $(xx_1)yy_1 = (xy)(x_1y_1) > 0$ en $\mathbb{Z}$

2. $a = \frac{x}{y}$. Se sabe que xy en $\mathbb{Z}$ verifica por ley de tricotomía, solo una de las siguientes alternativas.
i) $xy > 0$, luego $a \in \mathbb{Q}^+$
ii) $xy = 0$, luego $x = 0$ porque $y \neq 0$. Así $a = 0$ en $\mathbb{Q}$
iii) $xy < 0$, luego $(-x)y = -(xy) > 0$,o sea, $-a = \frac{-x}{y} \in \mathbb{Q}^+$.

Observación 5.0.2

En el caso de los enteros se definió un orden en base a un conjunto de positivos $\mathbb{N}$ que satisfacía exactamente las condiciones 1 y 2 del teorema anterior.

Luego, por analogía, podemos escribir para a, b números naturales

$$\begin{array}{lclcl} a < b & \Leftrightarrow & b - a & \in \mathbb{Q}^+ & \\ a \leq b & \Leftrightarrow & a < b & o & a = b \end{array}$$

Como en el caso de $\mathbb{Z}$ se probaron todas las propiedades de orden basándose exclusivamente en la estructura de anillo y en las propiedades 1 y 2 del conjunto de los positivos, podemos, por simple repetición de los procedimientos y métodos allí empleados, garantizar la validez inmediata de la primera parte del

Teorema 5.0.8

La relación $\leq$ es la relación de orden total sobre el conjunto de los racionales, *"respetuosa"* de la estructura algebraica de $\mathbb{Q}$, es decir, para x, y, z racionales se verifica:
1. $x \leq y \Rightarrow x + z < y + z$.

2. $x \leq y, \qquad 0 \leq z \Rightarrow xz \leq yz$

Además, después de efectuar la identificación que permite hacer $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$, el $\leq$ definido antes es el único orden en $\mathbb{Q}$ respetuoso del algebra de $\mathbb{Q}$ que preserva el orden en $\mathbb{Z}$.

Demostración: Es necesario demostrar sólo la segunda parte:

i) El orden en $\mathbb{Q}$ respeta el orden en $\mathbb{Z}$. En efecto, si m, n son enteros tal que $m < n$ en $\mathbb{Z}$, entonces $n - m > 0$ en $\mathbb{Z}$. Luego $(n-m) \cdot 1 > 0$ en $\mathbb{Z}$, o sea, $\frac{n-m}{1} > 0$ en $\mathbb{Q}$.

Por tanto, $\frac{n}{1} > \frac{m}{1}$ en $\mathbb{Q}$, es decir, $m < n$ en $\mathbb{Q}$.

ii) Si $\leq'$es una relación de orden en $\mathbb{Q}$ que cumple las condiciones del teorema, se tiene $0 \leq' \frac{x}{y} \Rightarrow 0 = 0 \cdot y^2 \leq' \frac{x}{y} \cdot y^2 = xy$, ya que $y^2 > 0$. Es decir, $0 \leq \frac{x}{y}$. El recíproco $0 \leq \frac{x}{y} \Rightarrow 0 \leq' \frac{x}{y}$ se verifica análogamente. Luego:

$$0 \leq' \frac{x}{y} \Leftrightarrow \quad 0 \leq \frac{x}{y}$$

es decir, el orden $\leq'$ coincide con el orden $\leq$.

Observación 5.0.3

Igual que en el caso de los enteros, rige aquí para x, y, z racionales los siguiente:

1) $x < y \Leftrightarrow x + z < y + z$
2) $x = y \Leftrightarrow x + z = y + z$
3) $x > y \Leftrightarrow x + z > y + z$

Si, además, $x > z$, tenemos:

4) $x < y \Leftrightarrow xz < yz$
5) $x = y \Leftrightarrow xz = yz$
6) $x > y \Leftrightarrow xz > yz$

Por último, valen en $\mathbb{Q}$, propiedades ya probadas para los naturales, tales como:

7) $x \leq y, \qquad y < z \Rightarrow x < z.$
8) $x < y, \qquad y \leq z \Rightarrow x < z$
9) $x < y, \qquad z < u \Rightarrow x + z < y + u$
10) $x \leq y, \qquad z < u \Rightarrow x + z < y + u$
11) $x \leq y, \qquad z \leq u \Rightarrow x + z \leq z + u$

Teorema 5.0.9

Para x, y racionales cualesquiera se verifica:

1. $|x| \geq 0$ y$|x| = |-x|$

2. $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

3. $-|x| \leq x \leq |x|$

4. Si $x \geq 0$,entonces , para $z \in \mathbb{Q}$

$$|z| \leq x \Leftrightarrow -x \leq z \leq x$$

5. $|x+y| \leq |x| + |y|$ (desigualdad triangular).

6. $|x| - |y| \leq ||x| - |y|| \leq |x - y|$

7. $|xy| = |x||y|$

8. $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|} \qquad$ si $y \neq 0$.

Demostración: En casi todas estas propiedades es indispensable ponerse en las tres alternativas posibles para $u \in \mathbb{Q}$:

$$u > 0 \quad \text{o} \quad u = 0 \quad \text{o} \quad u < 0$$

1. $x \geq 0 \Rightarrow |x| = x > 0$ y $|x| = x = |-x|$
   $x < 0 \Rightarrow |x| = -x > 0$ y $|x| = -x = |x|$
   es decir, en todo caso $|x| \geq 0$ y $|x| = |-x|$.

2. $x = 0 \Rightarrow |x| = 0$ por definición. Además, si $|x| = 0$ y $x \neq 0$, entonces $x > 0$ o $x < 0$. Luego:

$$0 = |x| = \begin{cases} x > 0 \\ \ \text{o} \\ -x < 0 \quad \text{contradicción} \end{cases}$$

3. Si $x \geq 0$, entonces $|x| = x$, luego

$$-|x| = -x \leq 0 \leq x = |x|$$

   Es decir, $-|x| \leq x \leq |x|$. Si $x < 0$, entonces $|x| = -x$, luego $-|x| = x < 0 < -x = |x|$. Es decir,

$$-|x| \leq x \leq |x|$$

   O sea, en todo caso $-|x| \leq x \leq |x|$.

4. $|z| \leq x, x \geq 0 \Rightarrow -x \leq -|z| \leq |z| \leq x \Rightarrow -x \leq z \leq x$. Recíprocamente: sea $-x \leq z \leq x$ si $z \geq 0$, entonces $|z| = z \leq x$.
   Si $z < 0$, entonces $|z| = -z \leq x$. Es decir, en todo caso $|z| \leq x$.

5. Por la demostración anterior solo queda demostrar $-|x| - |y| \leq x + y \leq |x| + |y|$. Pero esto es inmediato al considerar las desigualdades

$$\begin{array}{ccccc} -|x| & \leq & x & \leq & |x| \\ -|y| & \leq & y & \leq & |y|, \end{array}$$

Si se suman miembro a miembro produce el resultado deseado.

6. Para establecer $||x| - |y|| \leq |x - y|$basta mostrar que:

$$-|x - y| \leq |x| - |y| \leq |x - y|$$

o sea que

$$|x| \leq |x - y| + |y|$$

y que

$$|y| \leq |y - x| + |x| = |x - y| + |x|$$

Estos resultan de 5,

$$\begin{array}{ccccc} x & = & (x - y) & + & y \\ y & = & (y - x) & + & x \end{array}$$

Por otra parte, $|x| - |y| \leq ||x| - |y||$ resulta de 3.
Luego:

$$|x| - |y| \leq ||x| - |y|| \leq |x - y|$$

7. Si $x \geq 0$, $y \geq 0$, entonces

$$|xy| = xy = |x||y|$$

Análogamente, si $x < 0$ e $y < 0$.
Solo queda comprobar el caso de uno positivo y el otro negativo. Sea $x \geq 0, y < 0$, es decir, $|x| = x, |y| = -y$. Como $xy \leq 0$, se tiene $|xy| = -xy = x(-y) = |x||y|$.Luego, en todo caso $|xy| = |x||y|$.

8. $x = \dfrac{x}{y} \cdot y$,$y \neq 0 \Rightarrow |x| = \dfrac{|x|}{|y|} \cdot |y|$,o sea $\dfrac{|x|}{|y|} = \dfrac{|x|}{|y|}$.

Teorema 5.0.10

Sean a,b números racionales.

1. Si $a < b$, entonces hay al menos un c racional tal que $a < c < b$.

Esta es la conocida propiedad de la densidad del conjunto de los racionales, o sea siempre entre dos racionales habrá otro racional.

2. Si $0 < a$ y b es racional cualquiera, entonces hay n entero positivo tal que $na \geq b$.

Demostración: 1) $a < b \Rightarrow a + a < a + b$ y $a + b < b + b$.

O sea, $2a < a+b < 2b$. Multiplicando la desigualdad por un número positivo $\frac{1}{2}$ se tiene $a < \frac{a+b}{2} < b$.

2) Si $b \leq 0$ o $0 < b < a$, basta poner $n = 1$ y se tiene el teorema. Luego basta considerar el caso $0 < a < b$. Sean, entonces, $0 < a = \frac{x}{y} < b = \frac{u}{v}$, y sin pérdida de generalidad puede suponerse $x,\ y,\ u,\ v$ enteros positivos. Es claro que

$$a = \frac{x}{y} = \frac{xu}{yv} \quad \text{y} \quad b = \frac{u}{v} = \frac{yu}{yv},$$

O sea que, de partida, puede suponerse que la representación de a y b tiene denominador común. Sea

$$a = \frac{x}{c},\ b = \frac{y}{c}$$

Pero poniendo $n = yc$, se tiene

$$na = yc \cdot \frac{x}{c} = xy \geq y \geq \frac{y}{c} = b$$

o sea, $na \geq b$.

Por tener la propiedad 2, se dice que $\mathbb{Q}$ es un *cuerpo arquimédico* o también *cuerpo arquimediano*.

RESUMEN: $\mathbb{Q}$ conjunto de los números racionales, con suma y producto es un cuerpo que contiene (y extiende algebraicamente) a los enteros. Además, hay un (único) orden en $\mathbb{Q}$, respetuoso de la estructura algebraica de $\mathbb{Q}$ (véase Teorema 3.8) y que extiende el orden de los enteros.

Finalmente, $\mathbb{Q}$ es un cuerpo ordenado arquimédico.

Bibliografía

[1] Bravo, R. (1971). Fundamento de los Sistemas Numéricos. Ciudad de México, México. Editorial Interamericana.

[2] Boyer, C.B. (1969). Historia de la Matemática. Buenos Aires. Argentina: Alianza Editorial.

[3] Dasgupta, A. (2014). Set Theory. New York. USA: Birkhäuser Editorial.

[4] Houser, N., & Roberts D.D., & Van Evra J. (1997), Studies in the Logic of Charles S. Peirce. Indiana USA. Indiana University Press.

[5] Kumar, M. (2012, Fall). Construction of Number Systems Retrieved April 24, 2016, from math.wustl.edu/~kumar/courses/310-2012/peano.pdf

[6] Macías, M. (2010, February 10). Evolución Histórica Del Concepto De Número. Retrieved April 22, 2016, from http://www.anpebadajoz.es/autodidacta/autodidacta_archivos/numero_1_archivos/r_m_hernandez

[7] Pelayo, R. (2014, August 05). Chapter 7:The Peano Axioms Retrieved April 24, 2016, from http://www2.hawaii.edu/~robertop/Courses/TMP/7_Peano_Axioms.pdf

[8] Mathworld (2016), Equivalence Class. Retrieved August 16 2016 http://mathworld.wolfram.com/EquivalenceClass.html

[9] Mathworld (2016), Equivalence Relation. Retrieved August 08 2016 http://mathworld.wolfram.com/EquivalenceRelation.html