



UNIVERSIDAD DEL BÍO-BÍO

Facultad de Educación y Humanidades

ESCUELA DE PEDAGOGÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

---

Modelos Matemáticos en Dinámica de Poblaciones.

---

**Autor:** Wilson Abraham Fonseca Riquelme  
**Profesor Guía:** Dr. Aníbal Coronel Pérez

Memoria para optar al título de Profesor de Educación Media en Educación  
Matemática

Chillán, 2015.



# Agradecimientos

Al finalizar un tan laborioso trabajo como lo es la elaboración de una tesis, quiero agradecer al Dr. Aníbal Coronel Pérez por haber aceptado participar en este importante proceso de investigación. Gracias por su paciencia, dedicación, motivación y tiempo que entrego con esmero, logrando así hacer fácil lo difícil. Ha sido un privilegio poder contar con su apoyo y sus más sabios consejos.

También quiero agradecer a mis padres Simon Fonseca y Gladys Riquelme por estar presentes en cada momento difícil, siendo ustedes las razones de seguir adelante y no rendirme jamás.

Además quiero dar las gracias a mi pareja Yasna por darme todo el tiempo suficiente para poder avanzar en esta memoria y comprenderme en cada momento.

¡Muchas gracias a todos!



# Índice general

<b>Agradecimientos</b>	<b>3</b>
<b>1. Generalidades</b>	<b>7</b>
1.1. Introducción . . . . .	7
1.2. Estabilidad. . . . .	8
1.3. Alternativas para estudiar la estabilidad de una solución. . . . .	11
<b>2. Sistemas Lineales y Cuasilineales</b>	<b>13</b>
2.1. Introducción . . . . .	13
2.2. Sistemas Lineales . . . . .	13
2.3. Sistemas Cuasilineales. . . . .	24
<b>3. Sistemas No Lineales</b>	<b>27</b>
3.1. Introducción . . . . .	27
3.2. Método Directo de Liapunov . . . . .	27
3.3. Funciones de Liapunov . . . . .	29
3.4. Teorema de Chetaev . . . . .	31
<b>4. Ecuaciones Lotka-Volterra</b>	<b>35</b>
4.1. Modelos de población . . . . .	35
4.2. Un modelo discreto de una sola especie . . . . .	37
4.3. Plano Fase de la Solución de la Ecuación Logística . . . . .	40
4.4. Solución Explícita de la Ecuación Logística . . . . .	43
4.5. Introducción a los Modelos de Dos Especies . . . . .	44
4.6. Estabilidad de Dos Especies- Equilibrio de Poblaciones . . . . .	46
4.7. Derivación de las Ecuaciones Lotka-Volterra . . . . .	48
4.8. Solución Cualitativa de las Ecuaciones Lotka-Volterra . . . . .	50



# Capítulo 1

## Generalidades

### 1.1. Introducción

Un sistemas de ecuaciones diferenciales escalares:

$$y_1' = f_1(t, y_1, y_2) \quad (1.1)$$

$$y_2' = f_2(t, y_1, y_2)$$

o vectorialmente:

$$x' = f(t, x) \quad (1.2)$$

donde  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ , continua y  $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$  abierto, es conocido como sistema dinámico plano.

Adjuntando las condiciones iniciales  $y(t_0) = y_{10}$ ,  $y_2(t_0) = y_{20}$  y las hipótesis de ser  $f$  acotada en  $\Omega$  y lipchitziana respecto a la segunda variable, entonces existe una única solución para el problema de valores iniciales dado (Teorema de Picard), cuya consecuencia origina el siguiente resultado:

“La solución (única) de cualquier problema de valores iniciales varía continuamente con  $f$  y con  $x_0 = (y_{10}, y_{20})$ ”

Esto nos dice que soluciones cercanas a  $x_0$  se mantienen cercanas para  $0 \leq t \leq t_0$  ¿Qué sucede entonces con las soluciones más allá de  $t_0$ ? ¿Permanecen cercanas o terminan por alejarse?. Tales preguntas encuentran su respuesta en la teoría de estabilidad. En este capítulo desarrollamos los elementos básicos (definiciones) de esta importante rama de las ecuaciones diferenciales, aclarando oportunamente cada idea a medida que avance la exposición.

## 1.2. Estabilidad.

Una solución del Problema de Cauchy:

$$x' = f(t, x) \tag{1.3}$$

$$x(t_0) = x_0$$

Puede ser escrita como la solución de la ecuación integral

$$x = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds \tag{1.4}$$

Y es conocida como trayectoria, su gráfico:  $f(t, \varphi(t, x_0))$  está contenido en  $\mathbb{R}^3$  ( $\varphi$  solución de 1.2) y su proyección sobre  $\mathbb{R}^2$  es conocido como órbita de la ecuación. Gráficamente:

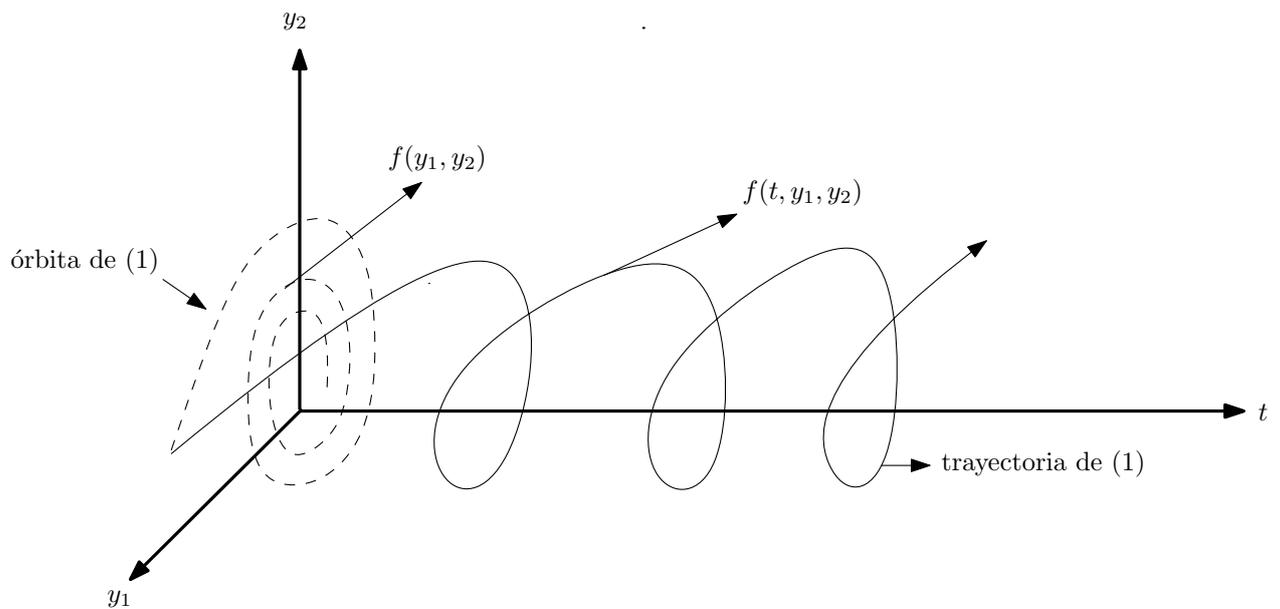


Figura 1.1: Solución de un sistema plano (trayectoria). Solución de un sistema autónomo (órbita).

La figura 1.1 muestra la relación entre los sistemas, dinámicos planos y las soluciones de las sistemas autónomos planos, pues mientras la solución del sistema dinámico plano es una trayectoria, su proyección, o sea la órbita, es la solución del sistema autónomo asociado.

**Definición 1.2.1** Sea  $\varphi(t)$  una órbita de 1.5 definida para  $t \geq 0$ :

i)  $\varphi(t)$  es estable si:

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$  tal que si  $|\Psi(0) - \varphi(0)| < \delta \Rightarrow \Psi(t)$  esta definida para  $t \geq 0$  y además  $|\Psi(t) - \varphi(t)| < \varepsilon, \forall t \geq 0$ .

ii)  $\varphi(t)$  es asintóticamente estable si cumple (i) asimismo:

$\forall \delta_1 > 0$  tal que  $|\Psi(0) - \varphi(0)| < \delta_1$  implica que  $\lim_{t \rightarrow \infty} |\psi(t) - \varphi(t)| = 0$

iii)  $\varphi(t)$  es inestable en cualquier otro caso.

Para un sistema autónomo plano:

$$x' = f(x), x \in \Delta \subset \mathbb{R}^2 \tag{1.5}$$

el estudio de la estabilidad se reduce al análisis en los puntos singulares conocidos como puntos de equilibrio, puntos críticos o puntos de reposo para el sistema y son los vectores  $x_0 \in \mathbb{R}^2$  donde  $f(x_0) = 0$ .

**Definición 1.2.2** Un punto de equilibrio  $x_0$  para el sistema 1.5 se llama:

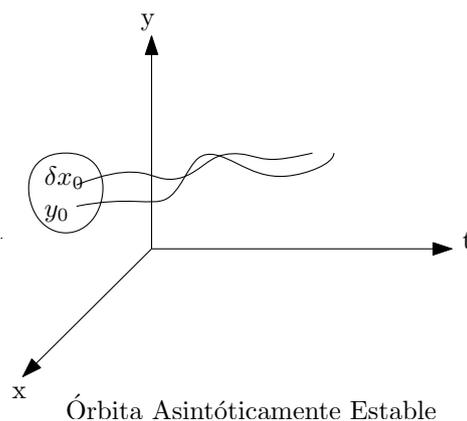
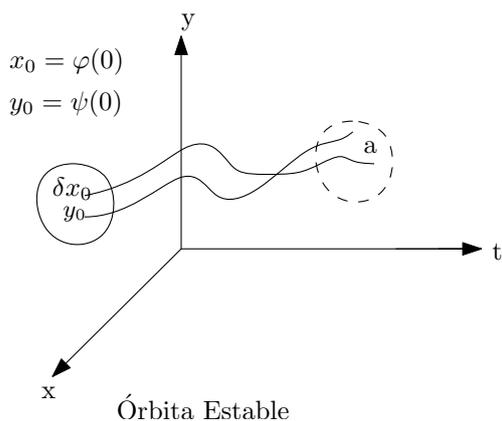
**ESTABLE:**

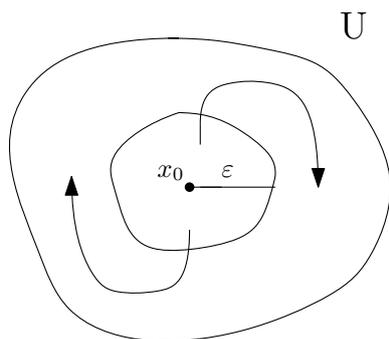
Cuando  $\forall$  bola que contiene a  $y$  y de radio  $\varepsilon$  existe  $B_1(x_0, \delta)$  talque toda solución  $\varphi(t)$  de 1.2 con  $\varphi(0) \in B_\delta$  está definida en  $B(x_0, \varepsilon)$  para todo  $t \geq 0$ .

**ASINTÓTICAMENTE ESTABLE:**

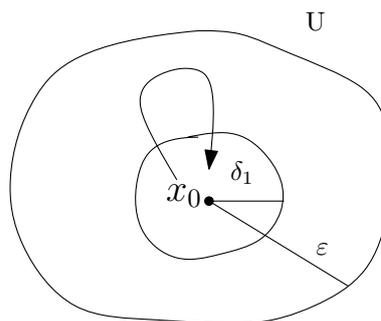
Si además de lo anterior  $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = x_0$  disminuyendo  $B$ , si es necesario.

Aclaremos que en estas condiciones  $\varphi(0) = x_0, \Psi(0) = y_0$  son las condiciones iniciales. Estas definiciones se pueden observar en los siguientes gráficos su interpretación.





Punto de Equilibrio Estable



Punto de Equilibrio Asintóticamente Estable

**Ejemplo 1.2.1** *La ecuación diferencial*

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= -a^2 y, a \neq 0 \\ y(0) &= y_0 \end{aligned}$$

Tiene como solución a  $\varphi(t) = y_0 e^{-a^2 t}$ ; ¿Qué sucede con la estabilidad de  $\varphi$ ?  
 En efecto: consideremos otra solución  $\varphi(t) = \hat{y} e^{-a^2 t}$  donde:

$$|\varphi(0) - \Psi(0)| = (y_0 - \hat{y}_0) < \delta$$

Son diferencias pequeñas luego:

$$|\varphi(t) - \Psi(t)| = |y_0 e^{-a^2 t} - \hat{y}_0 e^{-a^2 t}| = e^{-a^2 t} |y_0 - \hat{y}_0| \tag{1.6}$$

como  $a^2 > 0$  y  $t > 0$  entonces  $-a^2 t < 0$  o sea  $e^{-a^2 t} < e^0 = 1$ , ahora entonces en 1.6

$$|\varphi(t) - \Psi(t)| < |y_0 - \hat{y}_0| < \varepsilon$$

Por tanto

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \varepsilon \text{ tal que } : |\varphi(0) - \Psi(0)| < \delta \Rightarrow |\varphi(t) - \Psi(t)| < \varepsilon, \forall t \geq 0$$

Es decir  $\varphi$  es una solución estable.

Además en 1.6 tomando límite cuando  $t \rightarrow \infty$  la diferencia tiende para cero lo que da como consecuencia de ser  $\varphi$  una solución asintóticamente estable.

**Ejemplo 1.2.2** *Presentamos el análisis de la estabilidad de la solución de:*

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= a^2 y, a \neq 0 \\ y(0) &= x_0 \end{aligned}$$

### 1.3. ALTERNATIVAS PARA ESTUDIAR LA ESTABILIDAD DE UNA SOLUCIÓN.11

La solución está dado por:  $y(t) = y_0 e^{a^2 t}$  luego:

$$|y(t) - y_1(t)| = |y_0 e^{a^2 t} - \hat{y}_0 e^{a^2 t}| = e^{a^2 t} |y_0 - \hat{y}_0| \quad (1.7)$$

Dada la condición de que  $a^2, t > 0 \Rightarrow a^2 t > 0$  es decir dado  $\varepsilon > 0$ , 1.7 muestra la imposibilidad de escoger  $\delta(\varepsilon) > 0$  que cumpla la definición 1.

Conceptualmente 1.7 junto con la condición  $a^2 t > 0$  muestra que las diferencias  $|y(t) - y_1(t)|$  son demasiado grandes.

Por lo tanto la solución es inestable.

### 1.3. Alternativas para estudiar la estabilidad de una solución.

En el sistema 1.1 suponiendo que la solución es:

$$y_1 = \varphi_1(t) \quad y_2 = \varphi_2(t)$$

Introducimos las nuevas variables:

$$m = y_1 - \varphi_1(t) \quad (1.8)$$

$$n = y_2 - \varphi_2(t)$$

En virtud a esto tenemos:

$$\frac{dm}{dt} = \frac{dy_1}{dt} - \varphi_1'(t) = \frac{-d\varphi_1}{dt}(t) + f_1(t, m + \varphi_1(t), n + \varphi_2(t)) \quad (1.9)$$

$$\frac{dn}{dt} = \frac{dy_2}{dt} - \varphi_2'(t) = \frac{-d\varphi_2}{dt}(t) + f_2(t, m + \varphi_1(t), n + \varphi_2(t))$$

Alternativamente entonces el estudio de la estabilidad de 1.1 puede ser sustituido por el estudio de la estabilidad de  $\varphi \equiv 0$  en 1.9.

De acuerdo a la definición 1,  $\varphi = 0$  es estable si:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0 \text{ tal que si } |\Psi(0) - \varphi(0)| = |\Psi(0)| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |\Psi(t) - \varphi(t)| = |\varphi(t)| < \varepsilon \quad (1.10)$$

Pero  $|\Psi(t)| = (\Psi_1^2(t) + \Psi_2^2(t))^{1/2}$ , en otras palabras 1.11 es escrito así:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0 \text{ tal que si } \Psi_1^2(0) + \Psi_2^2(0) < \delta(\varepsilon) \text{ entonces } \Psi_1^2(t) + \Psi_2^2(t) < \varepsilon^2,$$

$\forall t \geq 0$  Vectorialmente: se dice que verificar la estabilidad  $\varphi$  de 1.2 equivale a probar la estabilidad de la solución nula de :

$$x' = f(x + \varphi(t), t) - f(\varphi(t), t)$$

Supongamos que  $f \in \mathbb{C}^2$  y además que 1.2 tiene la solución nula. El desarrollo en series de Maclaurin se transforma el sistema en:

$$x' = A(t)x + g(t, x) \quad (1.11)$$

Donde  $A(t) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}) \approx \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ ,  $g(t, 0) = 0$  y  $g(t, x) \equiv 0(|x|)$  cuando  $x \rightarrow 0$  para cada  $t \in \mathbb{R}^+$ . La igualdad 1.11 es conocida como sistema cuasi-lineal. Una condición suficiente para que la solución sea asintóticamente estable lo que presenta el Teorema del capítulo 2. Capítulo en el cual se presenta más teoría al respecto.

## Capítulo 2

# Sistemas Lineales y Cuasilineales

### 2.1. Introducción

La teoría cualitativa de este capítulo se debe a H. Poincaré (1859-1912) quien analizó el comportamiento de la solución de un sistema de Ecuaciones Diferenciales sin integrarlo, es decir, sin encontrar la solución de manera explícita.

Aunque el enfoque es otro, pues trata de ligar con las definiciones dadas en el Capítulo 1, la originalidad con la que el matemático lo expuso están conservadas (Ver teoremas 1 y 2).

Además de esto se establece cuando una órbita (solución del Sistema Dinámico Plano), es estable o inestable.

### 2.2. Sistemas Lineales

Se verá todo lo concerniente a puntos de equilibrio y formas de las soluciones de los sistemas dinámicos planos así como la clasificación de su estabilidad.

Al inicio del capítulo anterior se hizo la aclaración que indistintamente se puede hablar de sistemas dinámicos planos y sistemas autónomos planos cuando estudiemos la estabilidad de la solución. Es por esto que un sistema dinámico plano lineal con coeficientes constantes es aquel que está regido por las siguientes ecuaciones diferenciales.

$$\frac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y \quad (2.1)$$

$$\frac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y \quad (2.2)$$

donde  $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} \in \mathbb{R}$

el cual sintéticamente puede ser escrito:

$$Z' = AZ \quad (2.3)$$

Donde  $Z = (x, y)^t$  y la matriz  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$  es un homomorfismo del plano cartesiano  $\mathbb{R}^2$  en si mismo, expresado en la base canónica  $\{e_1, e_2\}$ .

Los puntos de reposo constituyen el núcleo de  $A$  pues de 2.3 este es:

$$Ker A = \{Z \in \mathbb{R}^2 / A z = 0\}$$

El cual puede tener dimensión 0, 1 ó 2 que originan espacios de fase (espacio de soluciones) radicalmente diferentes para cada caso, es debido a esto que analizaremos en detalle cada uno de ellos.

**CASO A:** Si  $dim[Ker A] = 2$  es decir  $Ker A = \mathbb{R}^2$  todos los puntos de sistema 2.2 son críticos, además  $a_{11} = a_{12} = a_{21} = a_{22} = 0$ , por lo tanto las soluciones son:

$$\begin{aligned} x(t) &= x(0) \\ y(t) &= y(0) \end{aligned}$$

que naturalmente son estables pues:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \varepsilon > 0 \text{ talque } |x(0) - y(0)| < \delta \Rightarrow |x(t) - y(t)| = |x(0) - y(0)| < \varepsilon$$

Es fácil también observar que cuando  $x \rightarrow \infty$  la solución tiende a  $(x(0), y(0))$  por lo tanto es asintóticamente estable.

**CASO B:** El otro extremo sucede cuando  $dim[Ker A] = 0$  es decir  $Ker A = \{0\}$  o lo que es lo mismo  $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  es un homomorfismo inyectivo (monomorfismo). En este caso el único punto de equilibrio es el origen pues  $|A| \neq 0$  ie.  $A$  es no singular y por lo tanto ninguno de sus autovalores es nulo.

Empezamos estudiando la ecuación característica  $A$ :

$$det(A - \lambda I) = 0 \tag{2.4}$$

sucede si  $\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda - (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0$

pero Traza de  $A = T = a_{11} + a_{22}$  y  $det A = |A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

osea  $\lambda^2 - T\lambda - |A| = 0$

tomando el discriminante  $d = T^2 - 4|A|$

Por un resultado de álgebra lineal:

- a) si  $d \geq 0$  el operador  $A$  tiene por lo menos un autovector.
- b) si  $d < 0$  el operador  $A$  no tiene autovectores.

Analizemos cada uno de estos subcasos:

a) Si  $d \geq 0$  los autovalores de  $A$  son:

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}(T + \sqrt{d}) \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}(T - \sqrt{d})$$

donde:  $(A - \lambda_1 I)(A - \lambda_2 I) = 0$  implica que las proyecciones sean:

$$P_1 = A - \lambda_2 I \quad P_2 = A - \lambda_1 I$$

son ambas singulares pues  $|P_1| = |P_2| = 0$  Dado que  $\lambda_1, \lambda_2$  son raíces de la ecuación característica 2.4 Como  $\lambda_1, \lambda_2$  son reales (cuerpos ordenado), puede suceder que:  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  ó  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \rightarrow \lambda_1, \lambda_2 < 0 (\lambda_1, \lambda_2 > 0)$  ó  $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ , etc. como se verá a continuación:

**a.1)**  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , para este caso se tienen los ejes principales no coincidentes:

$$V_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 2a_{12}x = (a_{11} - a_{12} - 2\sqrt{d})y\}$$

$$V_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 2a_{12}x = (a_{11} - a_{12} + 2\sqrt{d})y\}$$

Sean  $v_1$  y  $V_1$  y  $v_2$  y  $V_2$  entonces el sistema 2.2 se transforma en:

$$\frac{dv_1}{dt} = \lambda_1 v_1$$

$$\frac{dv_2}{dt} = \lambda_2 v_2$$

Cuyas soluciones son:

$$v_1(t) = v_1(0)e_1^{\lambda_1 t}$$

$$v_2(t) = v_2(0)e_2^{\lambda_2 t} \tag{2.5}$$

Ahora 2.5 en su estabilidad depende de los valores de  $\lambda$  pues puede darse:

- a.1-i)**  $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ : cuando  $t \rightarrow \infty$   $v_1, v_2 \rightarrow \infty$  y  $(0,0)$  es un Nudo inestable.
- $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ : cuando  $t \rightarrow \infty$   $v_1, v_2 \rightarrow 0$  y  $(0,0)$  es un Nudo estable.

(Ver figura 2.1)

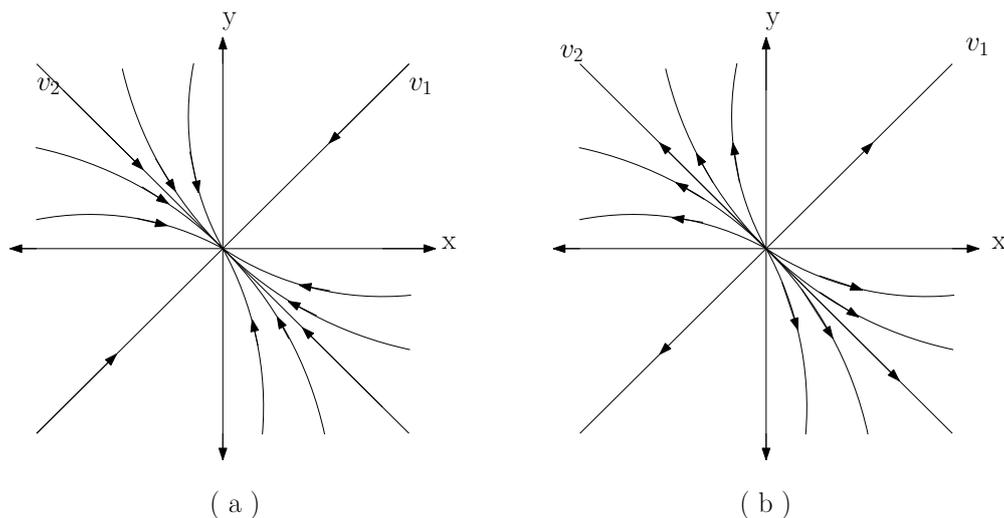


Figura 2.1: Nodos: (a) N. Estable (b) N. Inestable

**Ejemplo** El sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 4x - 2y \\ \frac{dy}{dt} &= x + y \end{aligned}$$

de donde obtenemos la matriz A

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

De esta forma su polinomio característico será (utilizando la traza de A y el determinante de A)

$$\begin{aligned} \lambda^2 - \text{tra}A\lambda + \text{Det}A \\ \lambda^2 - 5\lambda + 6 \\ (\lambda - 3)(\lambda - 2) \\ \lambda_1 = 3 \quad \lambda_2 = 2 \end{aligned}$$

Por lo tanto ambos autovalores  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  son mayores a cero por que en sus trayectorias encontraremos nodos Estables e Inestables.

- a.1-ii)** Si  $\lambda_1 < 0$ ,  $\lambda_2 > 0$ :  $v_1(t) \rightarrow 0$  y  $v_2(t) \rightarrow \infty$  cuando  $t \rightarrow \infty$   
 Si  $\lambda_1 > 0$ ,  $\lambda_2 < 0$ :  $v_1(t) \rightarrow \infty$  y  $v_2(t) \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$   
 Y  $(0, 0)$  en ambos casos es conocido como punto silla o punto de ensilladura, por parecerse a las curvas de nivel de esta superficie. (Hiperboloide) Aplicando la definición 2, se llega a la conclusión que  $(0, 0)$  es inestable, lo cual puede uno convencerse visualmente en la Figura 2.2 .

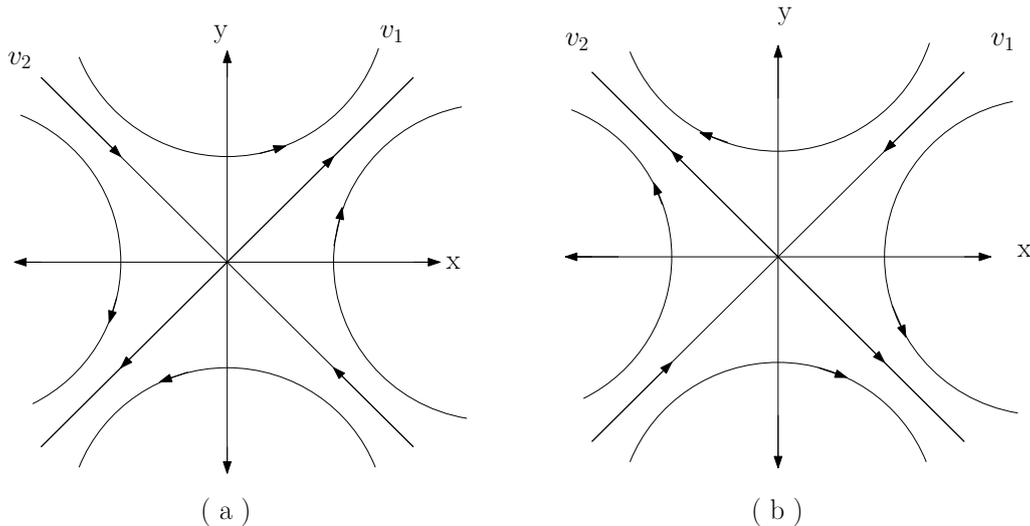


Figura 2.2: Puntos de Ensilladura: (a)  $\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$  (b)  $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$

**Ejemplo** El sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 5x - 2y \\ \frac{dy}{dt} &= -4x - 4y \end{aligned}$$

de donde obtenemos la matriz A

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -4 & -4 \end{bmatrix}$$

De esta forma su polinomio característico será (utilizando la traza de A y el determinante de A)

$$\begin{aligned} \lambda^2 - \text{tra}A\lambda + \text{Det}A \\ \lambda^2 - \lambda - 12 \\ (\lambda - 4)(\lambda + 3) \\ \lambda_1 = 4 \quad \lambda_2 = -3 \end{aligned}$$

Por lo tanto tenemos que el autovalor  $\lambda_1$  es mayor a 0, al contrario del autovalor  $\lambda_2$  que es menor a 0. Con toda esta información podemos distinguir que en sus trayectorias encontraremos puntos de ensilladura.

Cuando  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ , es decir los autovalores de A son iguales: puede suceder entonces que la proyección, (pues en este caso son iguales  $P_1 = P_2$ ) sea nula o distinta de cero en efecto:

$$A - \lambda I \neq 0 \quad \text{ó} \quad A - \lambda I = 0$$

Cuando  $A - \lambda I \neq 0$  entonces se tiene un solo eje principal:

$$V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 2a_{12}x = (a_{11} - a_{22})y\}$$

para  $v \in V(10)$  toma la forma:

$$\frac{dv}{dt} = \lambda v \tag{2.6}$$

Sea  $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / (a_{22} - a_{11})x = 2a_{12}y\}$  ortogonal a  $V$ .

Entonces  $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} - \{0\}$  a ser determinados tal que  $\beta$  y  $\lambda$  tengan el mismo signo de modo que se tenga:

$$\frac{du}{dt} = \alpha u + \beta v \tag{2.7}$$

Integrando 2.6 y 2.7:

$$v(t) = v(0)e^{\lambda t}$$

$$u(t) = \begin{cases} u(0) + \frac{\alpha v(0)}{\beta - \lambda} e^{\beta t} + \frac{\alpha v(0)}{\lambda - \beta} e^{\lambda t}, & \lambda \neq \beta \\ (u(0) + v(0))e^{\lambda t} & \text{Si } \lambda = \beta \end{cases} \tag{2.8}$$

El retrato de fase: Para  $\lambda > 0$  es un nodo degenerado Inestable Para  $\lambda < 0$  es un nodo degenerado Estable (ver Figura 2.3)

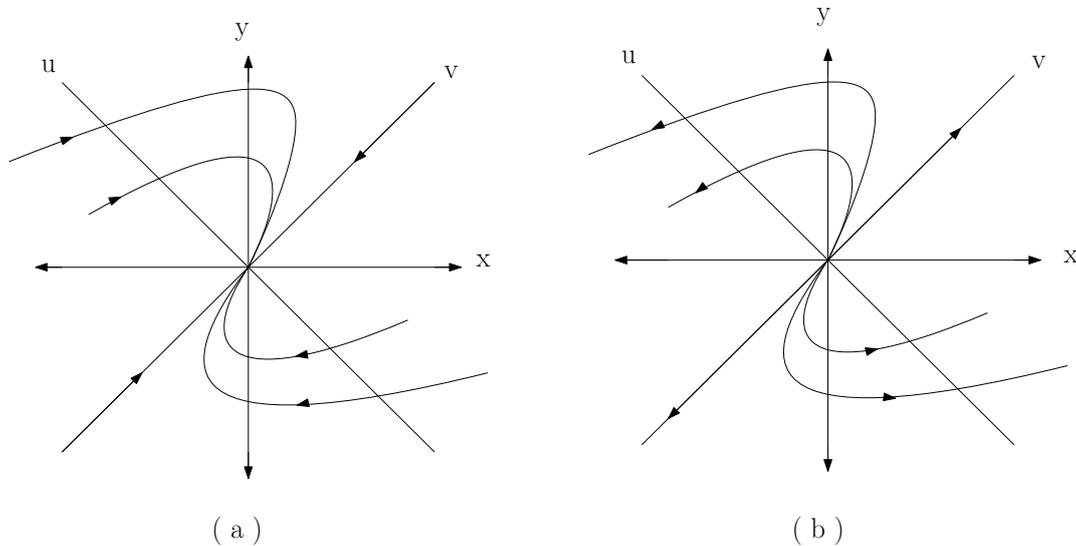


Figura 2.3: Nodo Degenerado: (a) Estable (b) Inestable

**Ejemplo** El sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 4x - y \\ \frac{dy}{dt} &= x + 2y \end{aligned}$$

de donde obtenemos la matriz  $A$

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

De esta forma su polinomio característico será (utilizando la traza de A y el determinante de A)

$$\begin{aligned} \lambda^2 - \text{tra}A\lambda + \text{Det}A \\ \lambda^2 - 6\lambda + 9 \\ (\lambda - 3)(\lambda - 3) \\ \lambda_1 = 3 \quad \lambda_2 = 3 \end{aligned}$$

Por lo tanto ambos autovalores  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  son iguales y de modo que al calcular sus autovectores encontramos que son linealmente dependientes.

Ahora para  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$  pero  $A - \lambda I = 0 \Rightarrow A = \lambda I$  es decir:  $a_{ij} = 0 \quad i \neq j \quad a_{ij} = \lambda$   $i=j \quad ij \in [1, 2]$  y el sistema 2.2 se reduce a:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \lambda x \\ \frac{dy}{dt} &= \lambda y \end{aligned}$$

cuyas soluciones son:

$$\begin{aligned} x(t) &= x(0)e^{\lambda t} \\ y(t) &= y(0)e^{\lambda t} \end{aligned}$$

Para  $\lambda < 0$ ;  $x(t)$ ,  $y(t)$  tienden a cero cuando  $t \rightarrow \infty$  y  $(0, 0)$  es un nodo singular estable. Para  $\lambda > 0$ ;  $x(t)$ ,  $y(t)$  tienden a infinito cuando  $t \rightarrow \infty$  y  $(0,0)$  es un nodo singular inestable. (Ver Figura 2.4)

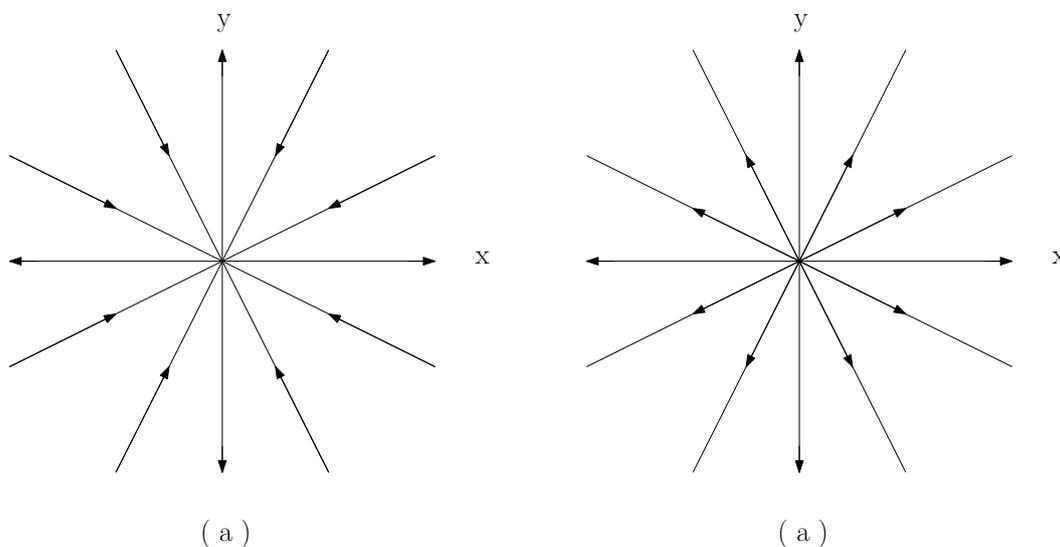


Figura 2.4: Nodo Singular: (a) Estable (b) Inestable

Cuando  $d < 0$

Dado  $B = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} T & \sqrt{-d} \\ -\sqrt{-d} & T \end{bmatrix}$  donde  $T$  es la traza de  $A$ ,  $d$  es el discriminante de la ecuación característica de  $A$ . Ahora como  $B$  y  $A$  son equivalentes tienen la misma traza, el mismo discriminante de la ecuación característica. Pero la matriz  $B$  define un nuevo sistema de ejes coordenados  $U$  y  $V$ . Con estas nuevas coordenadas  $U$  y  $V$  el sistema 2.2 se transforma en:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= Tu - \sqrt{-d}v \\ \frac{dv}{dt} &= \sqrt{-d}u + Tv \end{aligned}$$

Pasándolo a coordenadas polares:  $u = r \sin \theta, v = r \cos \theta$  se reduce a:

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= Tr \\ \frac{d\theta}{dt} &= -\sqrt{-d} \end{aligned}$$

Cuyas soluciones son:

$$\begin{aligned} r(t) &= r(0)e^{Tt} \\ \theta(t) &= \theta(0) - t\sqrt{-d} \end{aligned}$$

y dependen de la traza de  $A(T)$  que puede ser nula o no.

Cuando  $T=0$ ,  $r(t)=r(0)$  que representa círculos concéntricos con centro en  $(0, 0)$  y radio  $r(0)$  cuyo sentido depende signo que se le dé a  $\sqrt{-d}$ . Este tipo de órbitas son conocidas como el centro y son Estables. (Ver figura 2.5)

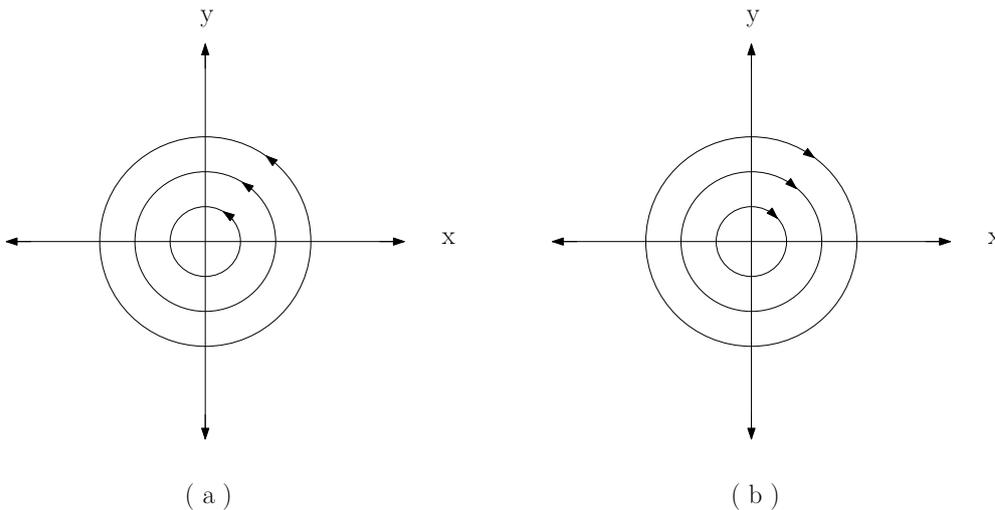


Figura 2.5:

Centro: ( a )  $\sqrt{-d} < 0$  ( b )  $\sqrt{-d} > 0$

Si  $T \neq 0 \Rightarrow T > 0 \vee T < 0$

Para  $T > 0$ ,  $r(t) \rightarrow \infty$  para  $t \rightarrow \infty$  y  $(0, 0)$  es conocido como foco inestable. Para  $T < 0$ ,  $r(t) \rightarrow 0$  para  $t \rightarrow \infty$  y  $(0, 0)$  es conocido como foco estable. (Ver Figura 2.6)

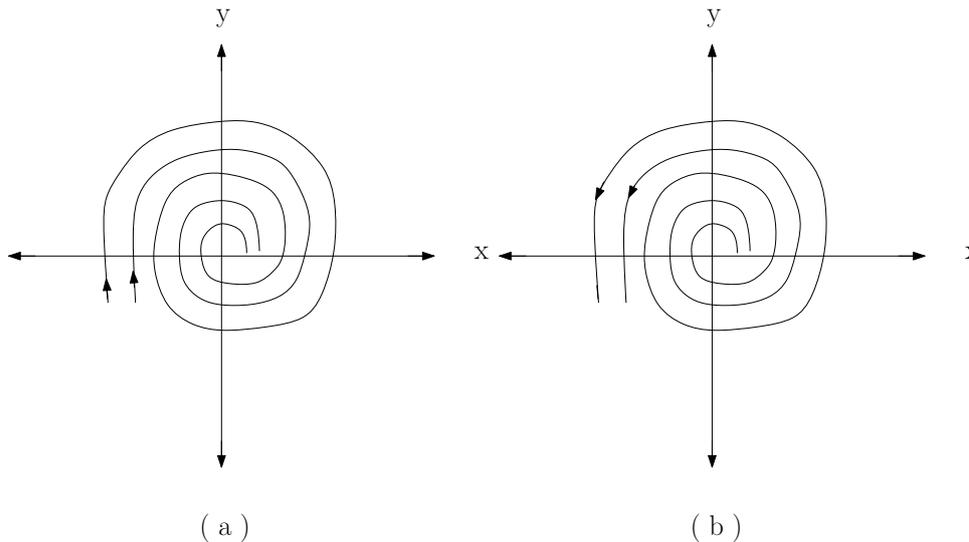


Figura 2.6:

Foco: ( a ) Estable ( b ) Inestable

**CASO C:** El último caso cuando  $\{0\} \neq Ker A \neq \mathbb{R}^2$   
 Como  $A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  es un homomorfismo por álgebra lineal:

$$dim(Ker A) + dim(Im A) = dim(\mathbb{R}^2)$$

Como  $dim(\mathbb{R}^2) = 2$  y  $0 < dim(Ker A) = 1 < 2$  entonces  $dim(Im A) = 1$ , es decir  $Ker A$  e  $Im A$  corresponde a rectas en  $\mathbb{R}^2$ .

Consideremos entonces los ejes:

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / a_{21}x = a_{11}y\}$$

$$V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / a_{11}x = -a_{21}y\}$$

(Observe que  $U$  es ortogonal a  $V$ ) El sistema 2.2 toma la forma:

$$\frac{du}{dt} = (a_{11} + a_{22})u + (a_{21} - a_{22})v \tag{2.-8}$$

$$\frac{dv}{dt} = 0 \tag{2.-7}$$

cuyos puntos de reposo son:

$$(a_{11} + a_{22})u + (a_{21} - a_{22})v = 0$$

Ecuación del  $Ker A=L$  2.-7 depende de la traza. Luego.

**C.1)** Si  $T \neq 0$  entonces obtenemos las órbitas que se muestran en la Figura 2.7 y se denominan barrera.

Para  $T > 0$   $(0, 0)$  Es una barrera inestable.

Para  $T < 0$   $(0, 0)$  Es una barrera estable.

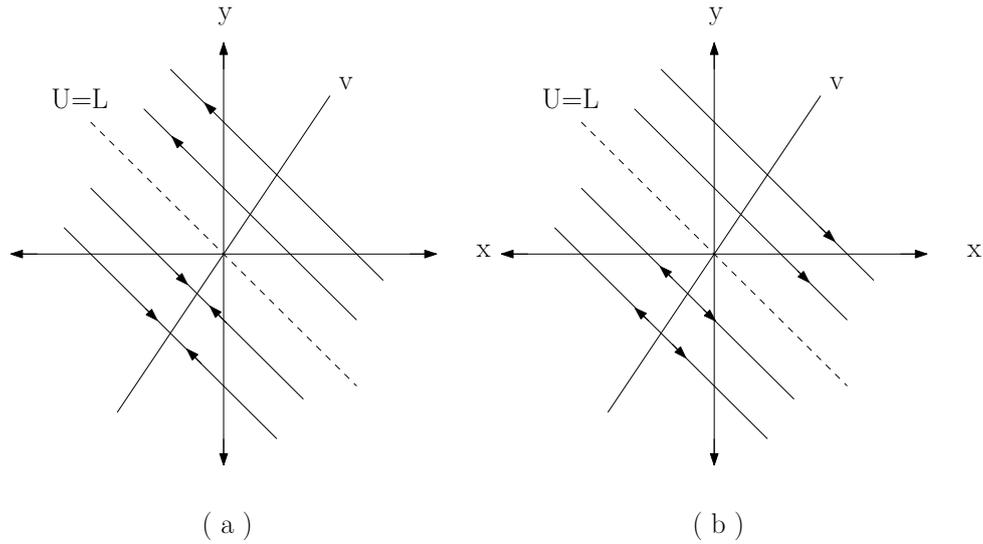


Figura 2.3: 2.8: Barrera de Inversión: ( a )Estable ( b ) Inestable

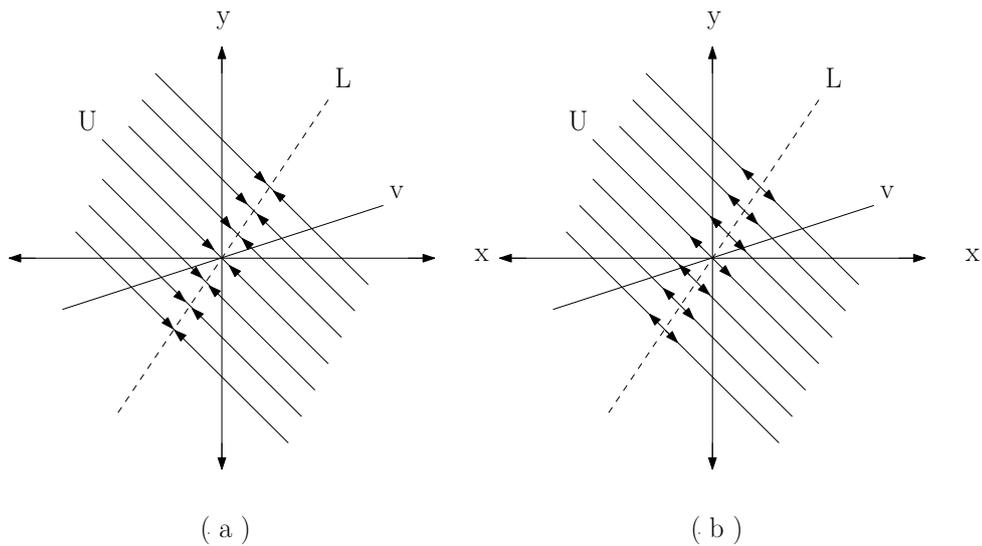


Figura 2.7: Barrera: ( a ) Estable ( b ) Inestable

**c.2)** Cuando  $T=0$ , la gráfica de la ecuación del  $\text{Ker}A$  con el eje  $U$ , en este caso las órbitas son:

$$\begin{aligned} u(t) &= (a_{21} - a_{12})v(0)t + u(0) \\ v(t) &= v(0) \end{aligned}$$

que son conocidas como barreras de inversión.

para  $T=0$ ,  $a_{21} - a_{12} \neq 0$  entonces:

Si  $a_{21} - a_{12} > 0$  la barrera de inversión es inestable.

Si  $a_{21} - a_{12} < 0$  la barrera de inversión es estable.

(Ver Figura 2.8)

De aquí, especialmente del Caso B podemos deducir que para un sistema autónomo plano no singular (y por tanto para un sistema dinámico plano) con coeficientes constantes, las órbitas son:

1. Asintóticamente estable si:

$$\{d \geq 0, |A| > 0, T < 0\} \text{ ó } \{d < 0, T < 0\}$$

2. Estable (pero no asintóticamente estable). Si:

$$d < 0, T = 0$$

3. Inestable cuando:

$$\{d \geq 0, |A| < 0\} \text{ ó } \{d < 0, T > 0\}$$

concepto que lo expresa formalmente el siguiente teorema.

**TEOREMA 2.2.1** Si  $x' = Ax$  es un sistema lineal autónomo  $2 \times 2$  cuya matriz de coeficientes es no singular, entonces el origen de  $\mathbb{R}^2$  es:

- (i) Asintóticamente estable si las partes reales de todos los valores propios de  $A$  son negativos.
- (ii) Estable, pero no asintóticamente estable, si  $A$  tiene valores propios imaginarios puros.
- (iii) Inestable en cualquier otro caso.

**Ejemplo 2.2.1** El sistema:

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= x \end{aligned}$$

tiene por matriz de coeficientes:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

y sus valores propios:  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$  por lo tanto  $(0, 0)$  es inestable ya que los valores propios según el teorema 1 escapan a las condiciones (i) y (ii). Mientras tanto que el sistema:

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= -x \end{aligned}$$

tiene por valores propios a:  $\lambda_1 = +i, \lambda_2 = -i$  que son imaginarios puros, lo cual nos indica que  $(0, 0)$  es un punto de reposo estable (condición(ii)-teorema 1).

Finalmente en:

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= -x \end{aligned}$$

El origen es asintóticamente estable pues  $\lambda_1 = \lambda_2 = -1 < 0$  (parte i - teorema 1).

### 2.3. Sistemas Cuasilineales.

En la sección anterior vemos que el análisis de la estabilidad se hace entorno del  $(0, 0)$ , origen de  $\mathbb{R}^2$ . Pero como se vió en el Capítulo (1) cualquier otro sistema se puede expresar como un sistema cuasilineal de la forma:

$$x' = A(t)x + g(t, x) \tag{2.-19}$$

donde  $A(t) \in L(\mathbb{R}^2)$ ,  $g(t, 0) = 0$  y  $g(t, x) \equiv 0(x)$  cuando  $x=0$  para cada  $t$ .  $0(x)$  es el resto de  $f(t, x)$  en desarrollo de series de maclaurin). El siguiente Teorema muestra una condición suficiente para que la solución nula sea asintóticamente estable en 2.-19.

**TEOREMA 2.3.1** *Consideremos el Sistema Cuasilineal:*

$$x' = Ax + g(t, x) \quad (t, x) \in \Omega_b \tag{2.-18}$$

Donde:  $\Omega_b = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2, |x| < b\}$  Y  $A$  es un operador lineal en  $\mathbb{R}^2$  cuyos autovalores tienen parte real negativa,  $g$  es continua y  $g(t, x) = 0(|x|)$  uniformemente continua en  $t$ . Supongamos aún que 2.-18 tenga soluciones únicas en todo punto, entonces la solución nula es asintóticamente estable.

**PRUEBA**

Si los autovalores de  $A$  tienen parte real negativa entonces existen  $u \geq 0$  y  $k \geq 1$  tales que:

$$|e^{tA}| \leq ke^{-tu} \quad \text{para } t \geq 0$$

Aún más, existe  $\delta_1 > 0$  tal que:

$$|x| < \delta_1 \Rightarrow |g(t, x)| < \frac{u}{2k} |x| \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Dado  $|x| < \delta = \frac{\delta_1}{k}$  sea  $\varphi(t)$  una solución de 2.-18 en  $\Omega_b$ . Con la condición inicial  $\varphi(0) = x$  entonces se puede escribir así:

$$\varphi(t) = e^{(tA)}x + \int_{t_0}^t e^{(t-s)A}g(s, \varphi(s))ds$$

para todo  $t$  perteneciente al intervalo maximal.

$$\text{Como } |\varphi(t)| < \delta_1 \quad \forall t.$$

Para  $t \geq 0$ , tenemos:

$$\begin{aligned} |\varphi(t)| &\leq |ke^{tA} + \int_0^t e^{(t-s)A}g(s, \varphi(s))ds| \\ &\leq |ke^{tA}| + |\int_0^t e^{(t-s)A}g(s, \varphi(s))ds| \\ &\leq ke^{-ut} |x| + k \int_0^t e^{-u(t-s)} |g(s, \varphi(s))ds| \end{aligned}$$

$$\Rightarrow e^{ut} |\varphi(t)| \leq k |x| + \frac{u}{2} \int_0^t e^{su} |\varphi(s)| ds$$

Por la desigualdad de Gronwall

$$e^{ut} |\varphi(t)| \leq k |x| e^{(u/2)t}, \quad t \geq 0$$

$$\Rightarrow |\varphi(x)| \leq k |x| e^{(-u/2)t}, \quad t \geq 0$$

En el intervalo maximal  $w_+ = +\infty$  pues en caso contrario:

$$\delta_1 = \lim |\varphi(t)| \leq \delta_1 e^{-u/2w_+} < \delta_1$$

Absurdo ( $\delta_1 < \delta_2$ ). Por lo tanto  $w_+ = +\infty$  y además:

$$|\varphi(t)| \leq \delta_1 e^{(-u/2)t}, \quad t \geq 0 \text{ de } |\varphi(0)| < \delta \tag{2.-28}$$

lo cual indica que la solución nula es asintóticamente estable. Vemos que en el Teorema 2.3.1, A es un operador lineal, de manera natural podemos preguntarnos si la única manera de obtenerlo es a través del desarrollo de la f en series de Maclaurin, pero evidentemente no, pues, considerando el diferencial  $Df(x_0)$  en el punto singular  $x_0$  para f la ecuación:

$$x' = Df(x_0)x$$

tiene solución localmente parecida a  $x'=f(x)$  <Teorema de Hartman>. De todo esto se deduce el:

**Corolario 2.3.1**

$$x' = f(x), \quad f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad C^1, \Delta C\mathbb{R}^2 \tag{2.-28}$$

y supongamos que  $Df(x_0)$  tiene todos sus autovalores con parte real negativa. Entonces existe una vecindad U de  $x_0$  y constantes  $k > 1$  y  $v > 0$  tales que para todo  $x \in U$ , la solución  $\varphi(t)$  de 2.-28 con  $\varphi = x$  está definida en U para todo  $t \geq 0$  y  $|\varphi(t) - x_0| \leq k e^{-vt} - x_0 \quad \forall t \geq 0$ . En particular,  $x_0$  es asintóticamente estable. La prueba es inmediata a partir del Teorema de Hartman, la desigualdad 2.-28 y el Teorema anterior.

**EJEMPLO:** ¿El origen es estable o inestable? en :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y^2 - y \\ \frac{dy}{dt} &= x^2 - x \end{aligned}$$

En efecto:  $f(x, y) = (y^2 - y, x^2 - x)$  entonces  $Df(0, 0) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$  cuyos autovalores son negativos  $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$  y así  $(0, 0)$  es estable por el corolario anterior.



# Capítulo 3

## Sistemas No Lineales

### 3.1. Introducción

Este tipo de ecuaciones fueron motivo de preocupación del matemático ruso A. Liapunov, quien diseñó una técnica para estudiar el comportamiento de las trayectorias alrededor del origen, lo cual fue conocido como el método directo (o segundo) de Liapunov. Está basado en la Ley Física que dice que un sistema físico pierde energía potencial en la vecindad de un punto de equilibrio estable ¡Teorema de Lagrange!. Consiste en encontrar una función de valor real  $E(x) = E(x_1, x_2)$ , definida positiva y creciente y de clase  $C^1$  y se concluye la estabilidad en caso contrario hay que demostrar que no es posible encontrarlo. (Teorema de Chetaèv)

### 3.2. Método Directo de Liapunov

Las normas dadas por Liapunov, consideran al sistema autónomo.

$$x' = f(x) \tag{3.1}$$

donde:  $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^2$ , de clase  $C^1$ ,  $\Delta \subset \mathbb{R}^2$  abierto Cuya solución es  $\varphi_x(t)$ ,  $x \in \Delta$  y la condición inicial  $\varphi_x(0) = x$ . La función de Energía (función de Liapunov) está dada por:

$$E : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$$

Además se usa la siguiente notación:

$$E(x) = DE_x f(x) \text{ o sea } E(x) = \frac{d}{dt} E(\varphi_x(t))$$

Damos ahora entonces la definición:

**Definición 3.2.1** Sea  $x_0$  un punto singular de 3.1,  $E : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable definida en un abierto  $\Omega$  conteniendo a  $x_0$ , que es posiblemente definida, es decir:

(a)  $E(x_0) = 0$ ,  $E(x) > 0$  y  $x \neq x_0 \in \Omega$

Donde  $E$  es conocida como la función de Liapunov, se dice que es estricta si además cumple:

$$(c) E < 0 \text{ en } \Omega - \{x_0\}$$

El criterio de Liapunov señala:

**TEOREMA 3.2.1** Si  $x_0$  es un punto singular de 3.1:

- (i) Si  $\exists$  una función de Liapunov para  $x_0$  entonces  $x_0$  es estable.
- (ii) Si la función de Liapunov para  $x_0$  es estricta,  $x_0$  es asintóticamente estable.

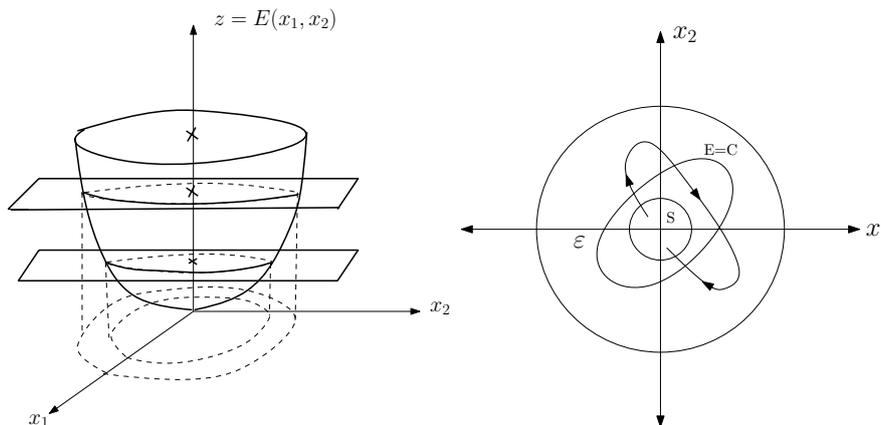
**PRUEBA** La prueba está basada en que la función  $E$  tiene un mínimo en  $x_0$ , lo cual se puede deducir de la 3.2.1. En un entorno de cualquier mínimo estricto, las superficies de nivel  $E(x_1, x_2) = c$  de la función  $E(x_1, x_2)$  son curvas cerradas, que contienen en su interior al mínimo. Sea  $\varepsilon > 0$ ; para  $c > 0$  suficientemente pequeña la curva de nivel  $E=c$  se encuentra enteramente dentro del  $\varepsilon$  - entorno del mínimo, pero no pasa por dicho punto; por lo tanto se puede tomar un  $\delta > 0$ , tal que el  $\delta$  - entorno del mínimo se encuentra enteramente dentro de la superficie  $E=c$ , siendo en este entorno  $E < c$ . Si el punto inicial con coordenadas  $x_1(t_0), x_2(t_0)$  se toma en el  $\delta$  - entorno del punto mínimo y por consiguiente:

$$E(x_1(t_0), x_2(t_0)) = c_1 < c$$

Entonces, cuando  $t > t_0$ , el punto de la trayectoria, determinada por estas condiciones iniciales, no puede salir fuera de los límites del  $\varepsilon$  - entorno del punto mínimo y aún de los límites de la curva de nivel  $E=c$  ya que debido a la condición (b) de la definición 3.2.1 la función  $E$  a lo largo de trayectoria no crece y por lo tanto cuando  $t \geq t_0$ :

$$E(x_1(t), x_2(t)) - (x_1(t_0), x_2(t_0)) \leq c_1 < c$$

lo que concluye la prueba de la parte (i).



Como las condiciones del Teorema sobre la estabilidad se cumplen, entonces para todo  $\varepsilon > 0$ ;  $\exists \delta(\varepsilon) > 0$  tal que la trayectoria cuyo punto inicial se encuentra en el

$\delta$  - entorno del mínimo, no salga de los límites del  $\varepsilon$  - entorno de dicho punto, para  $t \geq t_0$ . Por consiguiente, cuando  $t > t_0$ , se cumple en particular la condición (c) a lo largo de esta función E decrece monótona al aumentar t, y existe el límite de la función E cuando  $t \rightarrow \infty$ :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E(t, x_1(t), x_2(t)) = \alpha \geq 0$$

Hay que mostrar que  $\alpha = 0$  puesto que entonces la condición (a) se tendría  $\lim_{t \rightarrow \infty} x_1(t) = x_0(i = 1, 2)$  o sea que el punto de reposo  $x_i = x_0(i = 1, 2)$  es asintóticamente estable. Por el absurdo: Supongamos que  $\alpha > 0$ ; entonces la trayectoria  $t > t_0$  se encuentra en la región  $E \geq \alpha$ , y por lo tanto fuera de un cierto  $\delta_1$  - entorno de origen de coordenadas, osea donde , según la condición (b)  $\frac{dE}{dt} \leq -B < 0$  para  $t_0$  multiplicando la desigualdad  $\frac{dE}{dt} \leq -B$  por dt e integrando a lo largo de la trayectoria desde  $T_0$  hasta T , obtenemos:

$$\begin{aligned} E(x_1(t), x_2(t)) - E(x_1(t_0), x_2(t_0)) &\leq -B(t - t_0) \\ \Rightarrow E(x_1(t), x_2(t)) &\leq E(x_1(t_0), x_2(t_0)) - B(t - t_0) \end{aligned}$$

Para un valor grande T el miembro de la derecha es negativo y por consiguiente  $E(x_1(t), x_2(t)) < 0$  lo cual contradice la condición (a). Observe que el Teorema garantiza la estabilidad y estabilidad asintótica de un punto de reposo basado en la existencia de una función Liapunov, pero lógicamente no se sabe que forma tiene y a esto es lo que está dedicada la siguiente sección.

### 3.3. Funciones de Liapunov

Efectuaremos la construcción de una función de Liapunov para el sistema autónomo de coeficientes constantes:

$$x' = Ax \tag{3.-6}$$

Cuando todos los valores propios de A tienen partes reales negativas. Denotemos  $e_1, e_2$  a los vectores de la base de  $\mathbb{R}^2$  y denotemos por:

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= x_1(t, e_1) = (x_{11}(t), y_{12}(t)) \\ \varphi_2(t) &= x_2(t, e_2) = (x_{21}(t), y_{22}(t)) \end{aligned}$$

La solución de 3.-6 que satisface  $x_1(0)_1, x_2(0) = e_2$ , entonces: Si  $y = ye_1 + y_2e_2$  es cualquier vector de  $\mathbb{R}^2$ , la función:

$$x(t, y) = y_1x_1(t) + y_2x_2(t)$$

es la solución de 3.-6 que satisface  $x(0) = y$ . Hacemos ahora:

$$E(y) = \int_0^\infty ||x(t, y)||^2 dt \tag{3.-8}$$

y observamos que si esta integral converge entonces:

$$\begin{aligned} [(i)] E(y) &\geq 0y \\ E(y) = 0 &\Leftrightarrow y = 0 \end{aligned}$$

Entonces 3.-8 es lo que estabamos buscando.

**EJEMPLO** El sistema:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -x \\ \frac{dy}{dt} &= -2y \end{aligned}$$

tiene como matriz de coeficientes

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

y los valores propios son -1 y -2. En este caso las soluciones  $x_1(t), x_2(t)$  tales que  $x_1(0) = e_1$  y  $x_2(0) = e_2$  son :

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \begin{bmatrix} e^{-t} \\ 0 \end{bmatrix} \\ x_2(t) &= \begin{bmatrix} 0 \\ e^{-2t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Luego si:  $y = xe_1 + ye_2$ :

$$\begin{aligned} E(v) &= \int_0^\infty | xe^{-t}e_1 + ye^{-2t}e_2 | dt \\ E(v) &= \int_0^\infty | x^2(x^2e^{-2t} + y^2e^{-4t}) | dt \\ E(v) &= \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} \end{aligned}$$

Vemos entonces que:

$$E(y) \geq 0, E(y) = 0 \Leftrightarrow y = 0$$

$$\nabla E = \frac{\delta E}{\delta x} e_1 + \frac{\delta E}{\delta y} e_2 = x e_1 + y e_2, F(X, Y) = (-x, -2y)$$

entonces:  $\nabla E \cdot F = x(-x) + (\frac{y}{2})(-2y) = -(x^2 + y^2) < 0$  para  $(x, y) \neq (0, 0)$  y así E es estrictay por el teorema el origen es asintóticamente estable.

Finalmente otra de las reflexiones que podemos hacer a partir de la sección 2 es ¿Cuándo un sistema es inestable? lo cual está garantizado por lo que se expone en la siguiente sección.

### 3.4. Teorema de Chetaev

Este teorema nos da las condiciones suficientes para que un sistema sea inestable y su enunciado es el siguiente:

**TEOREMA 3.4.1** *Si existe una función diferenciable  $E(x_1, x_2)$  que en un  $h$ -entorno satisface:*

- a) *En un entorno arbitrariamente pequeño  $U$  del origen de coordenadas, existe una región ( $E > 0$ ) en el cual  $E > 0$  y  $E = 0$  en la parte de la frontera de la región ( $E > 0$ ) que se encuentra en  $U$ .*
- b) *En la región ( $E > 0$ ) la derivada:*

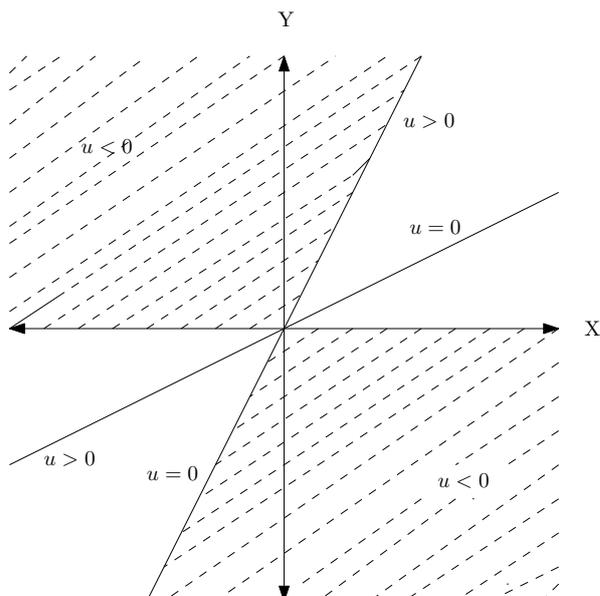
$$\frac{dE}{dt} > 0$$

*y en la región  $E \geq \alpha$ ,  $\alpha > 0$  la derivada  $\frac{dE}{dt} > 0$  entonces el punto de reposo:  $x_1 = 0 = x_2$  del sistema 3.1 es inestable.*

**PRUEBA** Tenemos el punto inicial  $x_1(t_0), x_2(t_0)$  en un entorno arbitrariamente pequeño del origen de coordenadas, en la región ( $E > 0$ )  $E(x_1(t_0), x_2(t_0)) = \alpha > 0$ , debido a que  $dx \geq 0$  a lo largo de la trayectoria, la función no decrece a lo largo de la misma, y por lo tanto mientras la trayectoria no abandone el  $h$ -entorno considerado del origen de coordenadas, en el cual se cumplen las condiciones del Teorema, la trayectoria debe permanecer en la región ( $E \geq \alpha$ ). Supongamos que la trayectoria no abandona el  $h$ -entorno del origen, entonces debido a la condición (b) la derivada  $\frac{dE}{dt} \geq B > 0$  a lo largo de la trayectoria para  $t_0$ . Multiplicando esta desigualdad por  $dt$  e integrada obtenemos:

$$E(x_1(t), x_2(t)) - E(x_1(t_1), x_2(t_0)) \geq B(t - y_0)$$

de donde se deduce que cuando  $t \rightarrow \infty$  la función E crece infinitamente a lo largo de la trayectoria, la cual se encuentra en contradicción de que la trayectoria no sale fuera de los límites del  $h$ -entorno cerrado del origen de coordenadas, ya que en este entorno la función continua E está acotada.



**EJEMPLO** En el sistema:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -y - x^3 \\ \frac{dy}{dt} &= x - y^3 \end{aligned}$$

La función  $E(x, y) = x^2 + y^2$  satisface las condiciones del teorema de Liapunov:

- 1)  $E(x, y) \geq 0, E(0, 0) = 0$
- 2)  $\frac{dE}{dt} = 2x(-y - x^3) + 2y(x - y^3) = -2(x^4 + y^4) \leq 0$

Así E es estricta por lo tanto el origen es asintóticamente estable. En tanto que en:

$$\frac{dx}{dt} = -xy^4, \quad \frac{dy}{dt} = -yx^4$$

la función  $E(x, y) = x^4 + y^4$  satisface las condiciones de Liapunov:

- 1)  $E(x, y) = x^4 + y^4 \geq 0, E(0, 0) = 0$
- 2)  $\frac{dE}{dt} = -4x^4y^4 + 4x^4y^4 = 0$

Pero no es estricta por tanto  $(0, 0)$  es tan sólo estable.

Finalmente en:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y^3 + x^5 \\ \frac{dy}{dt} &= x^3 + y^5 \end{aligned}$$

La función  $E(x, y) = x^4 - y^4$  satisface las condiciones del Teorema de N. G. Chetàev.

## 3.4. TEOREMA DE CHETAEV

33

1)  $E > 0$ , cuando  $|x| > |y|$

2)  $\frac{dE}{dt} = 4x^3(y^3 + x^5) - 4y^3(x^3 + y^5) = 4(x^3 - y^3) \geq 0$  para  $|x| > |y|$

y para  $E \geq \alpha > 0$  es  $\frac{dE}{dt} \geq B > 0$

Por lo tanto  $(0, 0)$  es inestable.



## Capítulo 4

# Ecuaciones Lotka-Volterra

### 4.1. Modelos de población

Comenzamos el estudio de ecosistemas, considerando la población en una región específica, pudiendo ser el número de personas en el mundo, el número de árboles de pino en un bosque, o el número de bacterias en un experimento.

Dejando de lado cualquier diferencia entre los individuos que componen el grupo (por ejemplo: diferencias entre hembras y machos o diferencias de edades). ¿Qué tipos de datos pueden ser observados?. Quizá el número de monos en un laboratorio como función dependiendo del tiempo sería como muestra la Figura 4.1. Esta curva es discontinua ya que los cambios en la población de monos ocurren en unidades enteros (+1 para nacimientos individuales,  $-1$  para los muertos, +2 para los gemelos y así sucesivamente). Además el número de monos,  $N(t)$ , sólo puede ser un número entero.

En muchas situaciones que implican un gran número de especies, es razonable aproximar  $N(t)$  como una función continua en el tiempo, quizás por ajuste de una curva suave obtenida de los datos. Los datos de las poblaciones anteriores se observaron de forma continua en el tiempo. Sin embargo algunas poblaciones son normalmente medidas periódicamente.

Por ejemplo, la población de osos en el bosque podría ser estimada sólo una vez al año, por lo tanto los datos podrían denotarse por  $N(t_i)$ , donde cada  $t_i$  representa el tiempo en el cual se hizo la medición aunque podría ser modelado como una función continua en el tiempo  $t$  ajustando los puntos de los datos con una curva suave, las limitaciones de los datos observados sugieren que podría ser necesario solamente modelar la población en ciertos tiempos discretos.

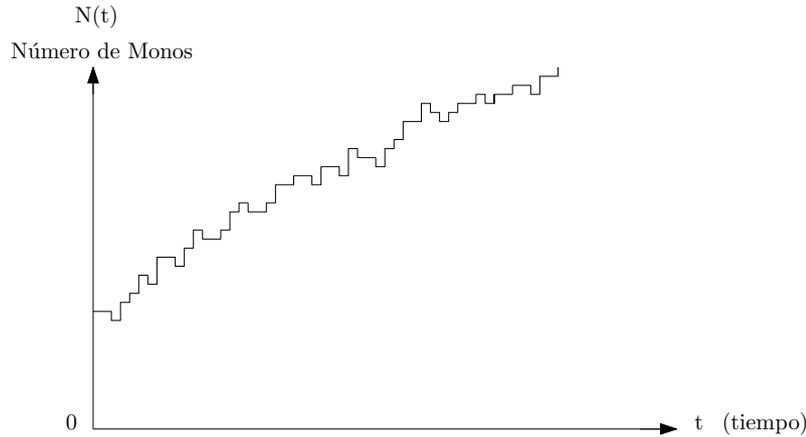


Figura 4.1: Crecimiento discontinuo de la población.

Una dificultad adicional se produce, por ejemplo, cuando se considera la población de los Estados Unidos como una función del tiempo. Los datos se recopilan a través de un censo cada diez años. Sin embargo, la exactitud de estas cifras del censo ha sido cuestionada. Los datos con los cuales se compara un modelo matemático pueden ser inexactos. Aquí, **no vamos a seguir la cuestión de cómo analizar los datos con inexactitudes, un campo de estudio en si mismo.**

En la formulación de un modelo de crecimiento de la población de una especie, tenemos que decidir que factores afectan esa población. Es evidente que en algunos casos depende de muchas cantidades. Por ejemplo: la población de tiburones en el mar Adriático dependerá de la cantidad de pescado disponible para el consumo de los tiburones (si no los hay, los tiburones se extinguirán). Además, la presencia de una bacteria dañina afecta al número de tiburones. Sería incorrecto suponer que la población de tiburones se ve afectado únicamente por otras especies. No debemos sorprendernos si, por ejemplo, la temperatura del agua y la salinidad (contenido de sal) son importantes en la determinación de la población de tiburones. Otros factores también pueden ser importantes, se modelará la población de tiburones mas adelante.

Ahora se va a estudiar una especie más simple, que no se ve afectada por lo demás. Tal especie podría ser observada en un experimento de laboratorio de animales bien alimentados. Supongamos que realizamos este experimento iniciando con animales y la población modelo como una función continua en el tiempo  $N(t)$ . Antes de tratar de analizar esta situación, vamos a volver a ejecutar el experimento hipotético, tratando de no hacer ninguna variación en la población inicial ni en el entorno del laboratorio. Podemos observar el segundo gráfico la Figura 2. Estaríamos muy sorprendidos si conseguimos resultados idénticos ¿Qué causaría estas diferencias?. Parece imposible repetir exactamente un resultado experimental dado. Por lo tanto, no tenemos control completo sobre el experimento (¿es esto también verdad para un sistema masa-resorte?) Para tener en cuenta esto (tal vez causado por una indeterminación de algunos factores ambientales), podríamos introducir algunas cantidades aleatorias en el modelo matemático.

Esta aleatoriedad en el modelo podría predecir resultados diferentes en cada experimento. Sin embargo, en este texto, no habrá mucha discusión de tales modelos probabilísticos. En su lugar, vamos a seguir casi exclusivamente modelos deterministas. Para tener en cuenta la Variabilidad observada de experimento en experimento, vamos a modelar algún tipo de promedio sobre varios experimentos, en lugar de inventar modelar cada experimento específico. Por lo tanto, si un experimento u observación posterior no se corresponde precisamente con una predicción del modelo matemático, entonces esto puede ser resultado de alguna aleatoriedad en lugar de algún fallo inherente al modelo.

## 4.2. Un modelo discreto de una sola especie

En esta sección, se desarrolla uno de los modelos más simples de crecimiento de la población de una especie. Los datos típicos de las Variaciones de la población de una especie en una determinada región podrían ser como en la Figura 4.1, donde las mediciones son tomadas en un intervalo de tiempo  $\Delta t$ . La tasa de cambio de la población durante el intervalo de tiempo  $\Delta t$  es:

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{\Delta t}$$

Esto indica la tasa absoluta de crecimiento de la población, una cantidad muy importante es la base de cambio de la población,  $R(t)$ . Es llamada tasa de crecimiento por unidad de tiempo (por ejemplo, por año) medida sobre el intervalo de tiempo  $\Delta t$ .

$$R(t) = \frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{\Delta t N(t)} \tag{4.0}$$

El cambio porcentual en la población es:  $100 \frac{\Delta N}{N(t)} = 100R(t) \Delta t$  es decir 100 veces la tasa de crecimiento  $R(t)$  es el porcentual en la población por unidad de tiempo. Por ejemplo, si en solo medio año la población aumenta en un 20%, entonces  $R(t) = \frac{2}{5}$  y la tasa de crecimiento es 40% por un año (medido durante medio año). La ecuación 4.0 no puede ser utilizada para determinar la población en tiempos futuros ya que solo es la definición de  $R(t)$ . Sin embargo, si la tasa de crecimiento y la población inicial fuesen conocidos, entonces la población futura puede calcularse:

$$N(t + \Delta t) = N(t) + \Delta t R(t) N(t) \tag{4.1}$$

Suponemos que la población de la especie solo cambia debido a nacimientos y muertes. Ningún experimentador exterior analiza alguna especie adicional en el sistema. No hay migración al interior o fuera de la región. Por lo tanto

$$N(t + \Delta t) = N(t) + (N^\circ \text{ de nacimientos}) - (N^\circ \text{ de muertes})$$

La tasa reproductiva (nacimiento)  $b$  por unidad de tiempo medida sobre el intervalo de tiempo  $\Delta t$  y la tasa de muerte  $d$  son definidas como:

$$b = \frac{N^\circ \text{ de nacimientos}}{\Delta t N(t)} \quad d = \frac{N^\circ \text{ de muertes}}{\Delta t N(t)}$$

Por consiguiente, la población en un tiempo posterior  $\Delta t$ ,  $N(t + \Delta t)$  es :

$$N(t + \Delta t) = N(t) + \Delta t(b - d)N(t)$$

La tasa de crecimiento  $R$ ,

$$R = b - d \tag{4.-1}$$

es la tasa de natalidad menos la tasa de mortalidad. En los últimos años, la tasa de crecimiento de la población mundial humana es aproximadamente igual a 0,019, esto quiere decir que la tasa de crecimiento (tasa de natalidad menos tasa de la mortalidad) 1,9% por año.

En este estudio se enfoca la atención en la población total en una región, las tasas de natalidad y mortalidad son promedios (de la población entera), sin distinguir entre individuos viejos o jóvenes. En el incremento de la población humana las predicciones precisas de crecimiento futuro dependen de un conocimiento profundo en la distribución en función de la edad dentro de la población. Dos poblaciones es probable que crezcan de manera muy diferente. Si uno tiene un número significativamente mayor de la tercera edad en comparación con la otra población. Así el modelo matemático que estamos desarrollando se puede mejorar para permitir una distribución por edades de la población.

Ahora procedemos a analizar la población de una especie, asumiendo los efectos de una distribución por edad posiblemente la distribución puede ser descuidada. Como primer paso en la elaboración de modelos matemáticos del crecimiento de la población, se supone que el número de nacimientos y el número de muertes son simplemente proporcionales a la población total. Así, la tasa de crecimiento  $R$  es una constante,  $R = R_0$ ; se asume que no cambia en el tiempo. Un aumento del doble de la población obtiene el doble de nacimiento y muertes, veamos las consecuencias del tal suposición. Si la tasa de crecimiento es constante, entonces para cualquier  $t$ :

$$N(t + \Delta t) - N(t) = R_0 \Delta t N(t)$$

Esto se puede expresar como una ecuación en diferencias para la población.

$$N(t + \Delta t) = (1 + R_0 \Delta t)N(t) \tag{4.-1}$$

La población en un tiempo posterior  $\Delta t$  es un porcentaje fijo de la población anterior. Se va a mostrar que esta ecuación en diferencias se puede resolver como un problema de valor inicial, si se da una población inicial en  $t = t_0$ ,

$$N(t_0) = N_0$$

La población futura puede ser fácilmente calculada. Una ecuación en diferencias tiene ciertas similitudes con una ecuación diferencial. Sin embargo, para el problema de valor inicial de este tipo de ecuación en diferencias, la única solución siempre se puede calcular directamente. Ninguno de los trucos de las ecuaciones diferenciales son necesarios. Para una tasa de natalidad constante,

$$\begin{aligned} N(t_0 + \Delta t) &= (1 + R_0 \Delta t)N_0 \\ N(t_0 + 2 \Delta t) &= (1 + R_0 \Delta t)N(t_0 + \Delta t) = (1 + R_0 \Delta t)^2 N_0 \\ N(t_0 + 3 \Delta t) &= (1 + R_0 \Delta t)N(t_0 + 2 \Delta t) = (1 + R_0 \Delta t)^3 N_0 \end{aligned}$$

Aunque este método da una respuesta satisfactoria para todos los tiempos, es claro que existe una fórmula general a  $m$  unidades del tiempo posterior  $\Delta t$ ,  $t \equiv t_0 + m \Delta t$ ,

$$N(t) = N(t_0 + m \Delta t) = (1 + R_0 \Delta t)^m N_0 \tag{4.-4}$$

o equivalentemente

$$N(t) = (1 + R_0 \Delta t)^{\frac{t - t_0}{\Delta t}} N_0$$

Si la tasa de natalidad es mayor que la tasa de mortalidad (ie.  $R_0 > 0$ ), la población crece. Un bosquejo de la solución se logra fácilmente observando

$$(1 + R_0 \Delta t)^m = e^{\alpha m}$$

donde  $\alpha$  es una constante,  $\alpha = \ln(1 + R_0 \Delta t)$ . El crecimiento se produce sobre cada intervalo de tiempo discreto de longitud  $\Delta t$ , en cada intervalo de tiempo la población aumenta en la misma tasa, pero no en la misma cantidad, más bien lo hace en una cantidad creciente. Alrededor de 1800, el economista británico Malthus usa este tipo de modelo de crecimiento de la población para hacer la predicción pesimista de que la población humana con frecuencia superaría su suministro de alimentos. Malthus no previó los vastos logros tecnológicos en la producción de alimentos. La suposición de que la tasa de crecimiento es constante con frecuencia no se ajusta a las poblaciones observadas. Ilustramos algunos factores ambientales que han causado que las tasas de crecimiento humano varíen.

- 1) El fracaso de la cosecha de papa (debido a plagas) en Irlanda en 1845 dió lugar a una hambruna generalizada, no solo la tasa de mortalidad aumentó considerablemente, sino que también la emigración a los Estados Unidos (y a otros lugares) fue tan grande que durante los años que siguieron la población de Irlanda se redujo significativamente. Las estimaciones de la población de Irlanda hablan por sí mismos:

Población Estimada en Irlanda

Incluyendo Irlanda del Norte

<i>Año</i>	<i>Población en millones</i>
1800	4.5
1845	8.5
1851	6.5
1891	6.7
1951	4.3
1971	4.5

- 2) Un famoso apagón ocurrido en el Noroeste de los Estados Unidos en el año 1965 dió lugar a un aumento en la tasa de crecimiento nueve meses más tarde. Este efecto también se produjo, por ejemplo, como resultado de las leyes de toque de queda en Chile 1973.
- 3) La píldora y otras medidas de control de la natalidad han contribuido a la disminución, en los años 1960 y 1970, de la tasa de crecimiento en los Estados Unidos.
- 4) El número promedio de hijos deseados parece depender de la economía y otros factores. Durante la depresión de la década de 1930, las tasas de natalidad en los Estados Unidos fueron más bajas de los que eran antes y después.

Los ejemplos 2) y 4) ilustran vividamente la diferencia entre la fertilidad (capacidad de reproducirse) y la fecundidad (velocidad real de la reproducción).

### 4.3. Plano Fase de la Solución de la Ecuación Logística

La ecuación Logística,

$$\frac{dN}{dt} = N(a - bN) \tag{4.-6}$$

describe el crecimiento ecológicamente limitado de una población. En esta sección se solucionará explícitamente esta ecuación. Sin embargo, antes de hacerlo, vamos a determinar, de la ecuación diferencial, las características cualitativas de la solución. La ecuación logística es una ecuación diferencial de primer orden que no depende explícitamente del tiempo, es decir, es autónoma. La solución de las ecuaciones autónomas de primer orden se puede entender mediante un análisis del plano de fase.

Graficando  $\frac{dN}{dt}$  como una función de N, produce la Figura 4.2

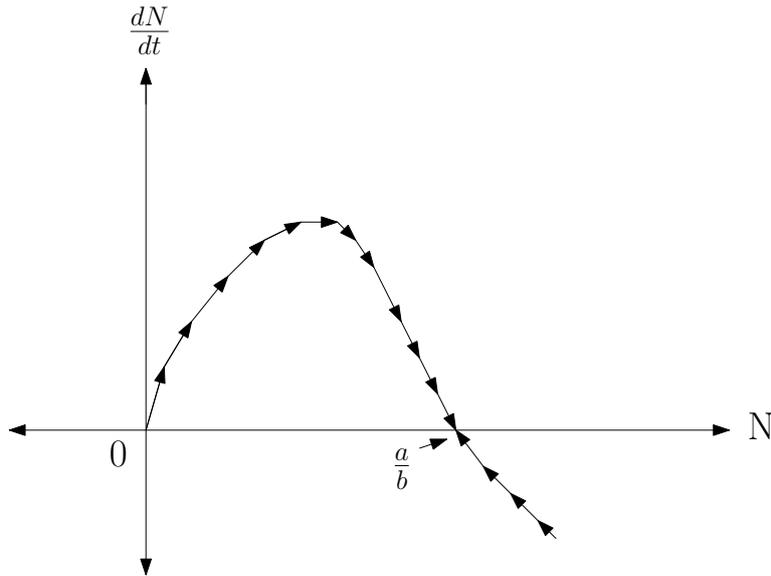


Figura 4.2: Plano de fase de la ecuación logística

(supongamos que sólo el semiplano derecho es necesario, ya que  $N$  representa el número de la especie y debe ser no negativo) sólo los puntos de la curva del boceto corresponden a una posible solución. Una vez más las flechas son introducidas, designando como la solución cambia en el tiempo.  $N$  aumentó si  $\frac{dN}{dt} > 0$  y viceversa. No es sorprendente que este diagrama indique que el modelo tiene el comportamiento cualitativo deseado. Para poblaciones menores que la población de equilibrio  $N = \frac{a}{b}$ , la población crece, y para poblaciones mayores que el equilibrio, la población decrece. Si inicialmente son menores que la población de equilibrio, la población crece continuamente, pero vamos a demostrar que nunca alcanza a la población de equilibrio. Si inicialmente son mayores que la población de equilibrio, la población disminuye continuamente hacia la población de equilibrio, como se muestra en la Figura 4.3

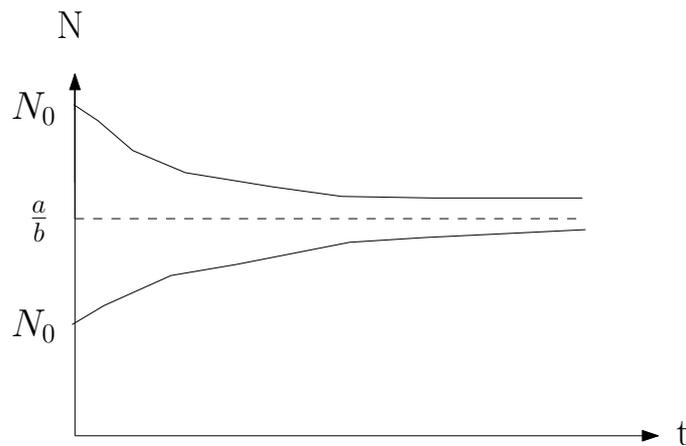


Figura 4.3: Modelo de crecimiento logístico: Aproximación al equilibrio.

El nivel de población  $\frac{a}{b}$  se llama a veces el nivel de saturación, ya que para poblaciones mas grandes hay mas muertes que nacimientos La población de equilibrio es claramente estable. Esto se puede demostrar matemáticamente de dos maneras diferentes:

- 1) Queremos analizar la solución en la vecindad de la población de equilibrio. Si aproximamos la curva del plano de fase en las proximidades de la población de equilibrio por una recta como en la Figura 4.3 (los dos primeros términos de una serie de Taylor) entonces obtenemos la siguiente ecuación diferencial lineal de primer orden con coeficientes constantes:

$$\frac{dN}{dt} = \alpha \left( N - \frac{a}{b} \right)$$

donde  $\alpha$  es negativa (la pendiente negativa de la curva) puede ser resuelta más facilmente que la ecuación logística proporcionando el comportamiento de la población en la vecindad del equilibrio,

$$N - \frac{a}{b} = \left( N_0 - \frac{a}{b} \right) e^{\alpha t}$$

donde  $N_0$  es la población inicial (cerca del equilibrio y, o bien menor o mayor que la población de equilibrio) explícitamente cuando  $t \rightarrow \infty$  (como  $\alpha < 0$ ),  $N \frac{a}{b}$  pero nunca lo alcanza en un tiempo finito. Para cualquier población inicial (cerca del equilibrio) el desplazamiento tiende a cero. ¡La población de equilibrio es por lo tanto estable!

- 2) Equivalente a este método, se utiliza un análisis de estabilidad lineal similar a los utilizados en las vibraciones no lineales. La población de equilibrio es  $\frac{a}{b}$ . Usando el método de perturbación, sea

$$N = \frac{a}{b} + \varepsilon N_1$$

$\varepsilon N_1$  es el desplazamiento del equilibrio y debe ser pequeño,  $|\varepsilon N_1| \ll \frac{a}{b}$  (donde  $\varepsilon$  es un parámetro pequeño) sustituyendo esto en la ecuación logística se obtiene:

$$\varepsilon \frac{dN_1}{dt} = \left( \frac{a}{b} + \varepsilon N_1 \right) (a - a - \varepsilon b N_1)$$

o equivalentemente

$$\frac{dN_1}{dt} = -b N_1 \left( \frac{a}{b} + \varepsilon N_1 \right)$$

Como  $\varepsilon N_1$  es pequeño, descartamos el término no lineal (correspondiente a la linealización hecha geoméricamente) Por lo tanto

$$\frac{dN_1}{dt} = -a N_1$$

La solución de esta ecuación diferencial,

$$N_1 = ce^{-at}$$

nuevamente muestra que la población de equilibrio es estable. El decaimiento exponencial constante es a usando el argumento geométrico, el decaimiento constante fue  $-\alpha$ . Sin embargo, estos valores son los mismos puesto que  $\alpha$  es la pendiente de la curva del plano de fase en  $N = \frac{a}{b}$

$$\alpha = \frac{d}{dN}[N(a - bN)]|_{N=\frac{a}{b}} = -a$$

## 4.4. Solución Explícita de la Ecuación Logística

Si bien la ecuación logística

$$\frac{dN}{dt} = N(a - bN) \tag{4.-13}$$

cualitativamente fue analizada en la sección anterior, ahora analizaremos el comportamiento cuantitativo más exacto. Una solución explícita de la ecuación logística se puede obtener ya que la ecuación es separable

$$\frac{dN}{N(a - bN)} = dt$$

El método de fracciones parciales tendrá éxito en la integración de esta ecuación como:

$$\frac{1}{N(a - bN)} = \frac{\frac{1}{a}}{N} + \frac{\frac{b}{a}}{a - bN}$$

Integrando se obtiene

$$\frac{1}{a} \ln | N | - \frac{1}{a} \ln | a - bN | = t + c$$

La constante arbitraria  $c$  permite que el problema de valor inicial,  $N(0) = N_0$  pueda ser resuelto. Eliminando  $c$  se obtiene

$$\frac{1}{a} \ln | N | - \frac{1}{a} \ln | a - bN | = t + \frac{1}{a} \ln | N_0 | - \frac{1}{a} \ln | a - bN_0 |$$

Como  $N$  y  $N_0$  son positivos,

$$\frac{1}{a} \ln \frac{N}{N_0} + \frac{1}{a} \ln \left| \frac{a - bN_0}{a - bN} \right| = t \tag{4.-16}$$

Esta ecuación que da a  $t$  como una función de  $N$ , no es una forma deseada. Multiplicando por  $a$  y exponenciando se obtiene:

$$\frac{N}{N_0} \left| \frac{a - bN_0}{a - bN} \right| = e^{at}$$

$a - bN$  y  $a - bN_0$  tienen el mismo signo(\*) y de donde

$$\frac{N}{N_0} \left( \frac{a - bN_0}{a - bN} \right) = e^{at}$$

o equivalentemente

$$N(a - bN_0) = (a - bN)N_0e^{at}$$

Esta ecuación puede ser resuelta para N

$$N = \frac{\frac{a}{b}}{1 + \left( \frac{a - bN_0}{bN_0} \right) e^{-at}} \tag{4.-18}$$

Como un ejercicio (ver 4.-16) muestra cómo esta solución verifica los resultados cualitativos obtenidos a partir del plano de fase. Las curvas logísticas específicas dependen de los tres parámetros a, b y  $N_0$ . Un ejemplo se esboza en la Figura 4.4.

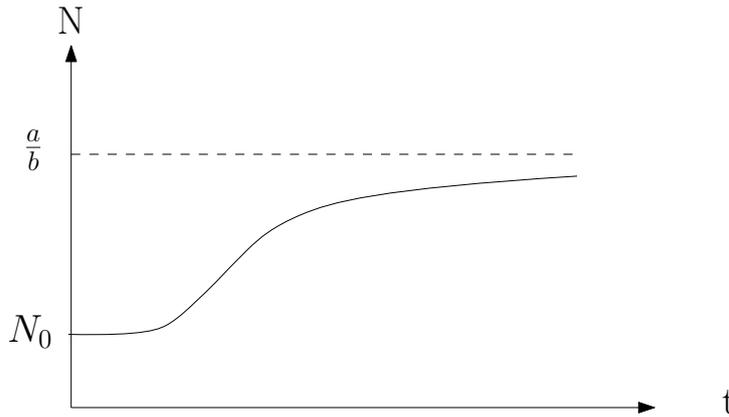


Figura 4.4: Curva de crecimiento logístico típico tiempo dependiente.

Experimentos de laboratorio, por ejemplo, en el crecimiento de la levadura en un cultivo y en el crecimiento del parámetro, han indicado buena concordancia cuantitativa para curvas logísticas. (\*)Inicialmente  $a - bN_0$  y  $a - bN$  tienen el mismo signo. El signo de  $\frac{(a - bN_0)}{(a - bN)}$  se puede cambiar sólo si hay un valor finito de t, talque  $a - bN = 0$ ; esto es, si la población de equilibrio se alcanza en un tiempo finito. Como sabemos, esto no puede ocurrir. Específicamente, si  $a - bN = 0$ , entonces la ecuación 4.-16 prueba que  $t = +\infty$ . Por lo tanto el signo de  $\frac{(a - bN_0)}{(a - bN)}$  resulta positivo para todo tiempo.

## 4.5. Introducción a los Modelos de Dos Especies

En las secciones anteriores se analizó los diferentes modelos de crecimiento de la población de una sola especie, en un intento por comprender los ecosistemas más grandes ahora se estudiará las situaciones que involucran la interacción de mas de una

especie. Ya se ha mencionado sobre los modelos que implican la interacción de las diferentes especies. En el modelo de crecimiento logístico, el crecimiento de una especie está limitado, quizás por la finitud de un nutriente que podría ser de otra especie, un ejemplo de ello era el pequeño ecosistema formado por los ciervos y la vegetación que consumían. Sin embargo, en este caso, hemos sido capaces de modelar el crecimiento de la población de ciervos en términos de la población de ciervos en años anteriores. De este modo fuimos capaces de usar un modelo de una sola especie.

En esta sección (y en las siguientes) consideraremos modelos ecológicos más complejos en los que dos especies interactúan. Antes de desarrollar modelos matemáticos, describiremos a través de observaciones específicas que han motivado a los ecólogos a buscar modelos de crecimiento de la población. La población de peces en el Mar Adriático Superior forman un sistema ecológico interesante. Para simplificar la discusión de este sistema ecológico, suponemos que la población de peces se compone de tiburones (y otras especies voraces), peces más pequeños que son comidos por los tiburones y el abundante plancton del cual se alimentan los peces más pequeños. Antes de la primera guerra mundial, la pesca industrial masiva había causado que las poblaciones hayan alcanzado el equilibrio. Solo pequeños cambios en la poblaciones fueron observados de año en año. Sin embargo, durante la primera guerra mundial fue suspendida.

La pesca de peces pequeños hecha por pescadores no fue suspendida, obteniendo peces más pequeños que de costumbre. Sin embargo, debido a la guerra no hay observaciones hechas en esos momentos. Poco después la población de tiburones creció ya que tenían disponible más de la comida habitual. El aumento del número de tiburones devoraban más peces, que cuando los pescadores regresaron después de la guerra observaron de inmediato muy pocos peces pequeños (al contrario de lo que esperaban) El crecimiento de una sola población fue seguido por su decadencia. En secciones posteriores vamos a desarrollar un modelo matemático que analiza este tipo de interacción.

Otro ejemplo de una interacción entre dos especies se produce en los bosques que están dominados por árboles similares. Se va a formular una teoría para modelar la competencia entre estos árboles por el área limitada de luz solar, fijando la atención a los modelos matemáticos deterministas sin desfases. Consideremos un pequeño ecosistema con dos especies, sus respectivas poblaciones son  $N_1$  y  $N_2$ . Al igual que en los modelos matemáticos de los ecosistemas de una sola especie, se supone que las tasas de variación de cada especie depende sólo de las poblaciones de cada especie, y no otros factores ambientales, por lo tanto

$$\frac{dN_1}{dt} = g(N_1, N_2) \quad (4.-17)$$

$$\frac{dN_2}{dt} = f(N_1, N_2) \quad (4.-16)$$

De esta forma se permite que el crecimiento de una especie dependa de ambas especies. En breve, se sugerirán algunos modelos específicos. En primer lugar se discuten los tipos de interacciones que pueden ocurrir entre dos especies ¿Qué tipo de efecto puede tener  $N_1$  sobre  $N_2$  y viceversa? en este caso no interesa que efectos tiene  $N_1$

sobre si mismo como ya hemos se ha mencionado en los problemas de una sola especie. En general, el efecto de la especie  $N_1$  es para aumentar o disminuir la población de las otras especies. Del mismo modo la especie  $N_2$  puede afectar a la especie  $N_1$  de dos maneras diferentes. Por lo tanto hay cuatro posibles tipos de interacciones entre dos especies, representados por los cuatro conjuntos de simbolos  $+-$ ,  $++$ ,  $--$ ,  $-+$ . Sin embargo, por simetría, una de estas interacciones es equivalente a otra, a saber,  $+-$  es equivalente a  $-+$ , produciendo tres tipos distinto sde interacciones. Si ambas poblaciones mejoran a la otra ( $++$ ), esta interacción biológica se llama mutualismo o simbiosis. Si ambas poblaciones se afectan negativamente entre si ( $--$ ) entonces decimos que las dos especies estan en competencia, el ejemplo mas simple de tal interacción es cuando dos especies compiten por la misma fuente de alimento. la interacción entre los tiburones y los peces pequeños que se comen es un ejemplo del tercer tipo de interacción ( $+-$ ) llamado depredador-presa. La existencia de una especie, la presa, realza a la otra, mientras que el depredador podría poner en peligro la propia existencia de la presa. Otros ejemplos de interacciones de tipo depredador-presa incluyen sistemas planta-hervívoro y parasíto-hospedador.

## 4.6. Estabilidad de Dos Especies- Equilibrio de Poblaciones

El comportamiento de poblaciones cercanas al equilibrio se rigen por un sistema de ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes, analizados en la sección anterior

$$\frac{dx}{dt} = ax + by \tag{4-15}$$

$$\frac{dy}{dt} = cx + dy \tag{4-14}$$

Se demostró que la solución consiste en una combinación lineal de exponenciales,  $e^{rt}$ , donde

$$r = \frac{a + d \pm \sqrt{(a + d)^2 - 4(ad - bc)}}{2}$$

Son las raíces del polinomio característico. Las raíces son reales y distintas, si  $(a+d)^2 - 4(ad-bc) > 0$ , las raíces son reales e iguales si  $(a+d)^2 - 4(ad-bc) = 0$ , mientras que las raíces son complejas conjugadas entre si, si  $(a + d)^2 - 4(ad - bc) < 0$ . Como estamos interesados en estas ecuaciones sobre todo en el contexto de la estabilidad de las poblaciones de equilibrio, se tiene que discutir lo que ocurre cuando  $t \rightarrow \infty$ . Esto se determina por los signos de los dos valores de la parte real de las raíces, si las partes reales de ambas raíces son menores que cero; inestable si al menos una es mayor a cero, neutralmente estable si la parte real de una raiz es igual a cero y la otra es menor o igual a cero (excepto si ambas raíces son idénticamente cero, en cuyo caso la solución es algebraicamente inestable) Es costumbre hacer

$$p \equiv a + d \tag{4-14}$$

$$q \equiv ad - bc \tag{4-13}$$

$$\Delta \equiv (a + d)^2 - 4(ad - bc) = p^2 - 4q \tag{4-12}$$

4.6. ESTABILIDAD DE DOS ESPECIES- EQUILIBRIO DE POBLACIONES 47

Usando estas definiciones

<i>Raíces</i>	<i>Condición</i>
(1) Reales y diferentes	$\Delta > 0$
(2) Reales e iguales	$\Delta = 0$
(3) Complejas y conjugadas	$\Delta < 0$

La siguiente tabla describe los diferentes casos:

<i>Reales y Diferentes</i>	$\Delta > 0$	
<i>Signos Iguales</i>	$q > 0$	
<i>Ambos positivos</i>	$p > 0$	<i>Inestable</i>
<i>Ambos negativos</i>	$p < 0$	<i>Estable</i>
<i>Signos Diferentes</i>	$q < 0$	<i>Inestable</i>
<i>Una raiz cero</i>	$q = 0$	
<i>la otra raiz positiva</i>	$p > 0$	<i>Inestable</i>
<i>la otra raiz negativa</i>	$p < 0$	<i>Neutralmente Estable</i>
<i>Reales e Iguales</i>	$\Delta = 0$	
<i>Ambos positivos</i>	$p > 0$	<i>Inestable</i>
<i>Ambos negativos</i>	$p < 0$	<i>Estable</i>
<i>Ambos cero</i>	$p = 0$	<i>Algebraicamente Inestable</i>
<i>Complejas conjugadas</i>	$\Delta < 0$	
<i>Ambas con parte real positiva</i>	$p > 0$	<i>Inestable</i>
<i>Ambas con parte real negativa</i>	$p < 0$	<i>Estable</i>
<i>Ambas con parte real cero</i>	$p = 0$	<i>Neutralmente Estable</i>

Estos resultados se resumen en la Figura 4.5. De esta manera somos capaces de determinar si una población de equilibrio dado es estable o no. Si hay pequeños errores en las mediciones de las cantidades a, b, c, d (produciendo pequeños errores en las mediciones de p, q y  $\Delta$ ) entonces algunos de los casos anteriores están sujetos a cambios, es decir, cualquier caso que contiene un signo igual. Aquellos caso en los que los pequeños errores en las mediciones no inducen cambios se llaman **casos principales**, mientras que los otros casos son llamados **casos dudosos**. Los casos principales son: (1.a) (1.b) (3.a). Si  $q=0$  (ie.,  $ad=bc$ ), entonces el sistema lineal 4.-14 tiene un punto de equilibrio no solamente en  $x=0, y=0$  sino también en cualquier punto a lo largo de la recta  $ax+by=0$ . En este caso el punto de equilibrio  $x=0, y=0$  no es aislado, ya que hay otros puntos de equilibrio arbitrariamente cercanos, al considerar los modelos de población nos ocuparemos únicamente de los casos que tienen poblaciones de equilibrios



los peces (sin tiburones) es constante:

$$\frac{dF}{dt} = aF$$

La tasa de nacimiento es mayor que la tasa de mortalidad originando un crecimiento exponencial. Esto supone que el plancton es ilimitado. Por otro lado, si al crecimiento de la población de peces se detiene en alguna población grande entonces podría proponerse un modelo de crecimiento logístico.

$$\frac{dF}{dt} = aF - bF^2$$

Por lo tanto, la tasa de cambio de la población de peces  $\frac{dF}{dt} = g(F, s)$ , es tal que  $g(F, 0)$  viene dada por  $g(F, 0) = aF$  o  $g(F, 0) = aF - bF^2$ . La última ecuación incluye la primera. Si  $B \neq 0$  entonces existe una población de equilibrio de peces,  $F = \frac{a}{b}$ , si no existe tiburones. Los tiburones se comportan de una manera completamente diferente. Si no hay peces, entonces la fuente de alimentos de los tiburones es inexistente. En este caso, se espera que la tasa de mortalidad de los tiburones exceda la tasa de natalidad. Por lo tanto, en ausencia de peces asumimos que

$$\frac{ds}{dt} = -ks$$

Sin peces, los tiburones serían una especie en peligro de desaparecer con el tiempo. Así hemos determinado que  $\frac{dS}{dt} = h(F, S)$ , donde  $h(0, S) = -kS$ . Ahora vamos a modelar la compleja interacción entre los peces y los tiburones. La existencia de peces aumenta la población de tiburones; Por lo tanto los peces causarán un aumento en la tasa de crecimiento de los tiburones. Para el modelo matemático más simple de este proceso, se supone que la tasa de crecimiento de los tiburones se incrementa proporcionalmente al número de peces. La tasa de crecimiento de los tiburones, que era  $-k$  sin peces, se modela como  $-k + \lambda F$  con peces, donde  $\lambda$  es la constante de proporcionalidad positiva. Por lo tanto

$$\frac{dS}{dt} = S(-k + \lambda F)$$

Para modelar el crecimiento de los peces, utilizamos ideas similares. Sin embargo, en este caso la existencia de tiburones disminuirá la tasa de crecimiento de peces. De nuevo asumimos que el efecto de interacción en la tasa de crecimiento es proporcional a la población. En consecuencia, la tasa de crecimiento de los peces, que era  $a - bF$  sin tiburones, se convierte en  $a - bF - cS$  con tiburones, donde  $c$  es la constante de la proporcionalidad positiva. Así, hemos descrito los antecedentes del conjunto de ecuaciones diferenciales desarrolladas independientemente por Lotka y Volterra, en la década de 1920,

»

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dt} &= F(a - bF - cS) \\ \frac{dS}{dt} &= S(-k + \lambda F) \end{aligned}$$

Donde las constantes  $a, b, c, \lambda, k$  descritas en los diferentes procesos son todos positivos (excepto para la  $b$  que puede ser cero si se permite una cantidad ilimitada de plancton) Este no es el único modelo posible de un ecosistema depredador-presa, pero es uno de los mas sencillos. Ahora la pregunta es ¿El comportamiento cualitativo de las soluciones de este sistema no lineal de ecuaciones diferenciales es compatible con el comportamiento oscilatorio observado?

## »4.8. Solución Cualitativa de las Ecuaciones Lotka-Volterra

»¿Es el modelo propuesto para los cambios en la población del sistema depredador-presa,

$$\frac{dF}{dt} = F(a - bF - cS) \tag{4-36}$$

$$\frac{dS}{dt} = S(k + \lambda F), \tag{4-35}$$

razonable? las soluciones deben ser calculadas y comprobadas con las observaciones.

»Vamos a discutir el caso en que la fuente de alimento (placton) es ilimitada. Entonces, el medioambiente marino puede sostener una población infinita de peces si no hay depredadores, (tiburones). Esto equivale a suponer que  $b=0$  en cuyo caso el ecosistema se rige por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales acopladas.

$$\frac{dF}{dt} = F(a - cS) \tag{4-34}$$

$$\frac{dS}{dt} = S(\lambda F - k) \tag{4-33}$$

Estas ecuaciones implican que para un población suficientemente grande de tiburones ( $S > \frac{a}{c}$ ) disminuye la población de peces. Si en algún momento el número de tiburones es exactamente  $S = \frac{a}{c}$ , entonces en ese momento la población de peces no varía. Este nivel de tiburones depende de  $a$ , la tasa de crecimiento de los peces en ausencia de tiburones y  $c$ , al efecto inhibitor de los tiburones sobre los peces. si la tasa de incremento de peces crece, entonces, este nivel de tiburones crece. Similarmente si  $c$  crece, el nivel de tiburones decrece. De manera equivalente, si los tiburones llegan a ser mas eficaces en atacar a los peces ( $c$  mas grande), entonces, entonces menos tiburones son necesarios para evitar que los peces crezcan. La ecuación que describe el crecimiento de la población de tiburones se puede analizar de manera similar. Antes de intentar resolver esta ecuación, se explicará brevemente como los tibuos limitan el crecimiento de los peces. Supongamos inicialmente que hay muy pocos tiburones a partir de la ecuaciones diferenciales es evidente que los peces crecerán en número. Conforme aumenta el número de peces el número de tiburones debe aumentar. Finalmente, el número de tiburones será tan grande que la tasa de crecimiento de los peces será negativa. En ese momento el número de peces dejará de aumentar. Podríamos continuar con la

4.8. SOLUCIÓN CUALITATIVA DE LAS ECUACIONES LOTKA-VOLTERRA 51

descripción cualitativa de lo que debería ocurrir en base a las ecuaciones diferenciales. En su lugar vamos a investigar las propiedades matemáticas del caso especial de las ecuaciones de Lotka-Volterra, (sistema de ecuaciones 4.-33). no se ha obtenido ninguna solución explícita sencilla de estas ecuaciones en términos de funciones elementales. De donde a fin de comprender al menos el comportamiento cualitativo de la solución (y también cierto comportamiento cualitativo), se esbozan las trayectorias de la solución en el plano de fase:

$$\frac{dF}{dS} = \frac{F(a - cS)}{S(\lambda F - k)} \tag{4.-32}$$

A diferencia del plano de fase de los sistemas mecánicos, aquí es necesario sólo el primer cuadrante ya que las poblaciones F y S son positivas. Primero debemos verificar que el modelo no puede predecir poblaciones negativas. Observamos  $F=0$  entonces  $\frac{dF}{dS} = 0$  y si  $S=0$ , entonces  $\frac{dF}{dS} = \infty$  así las rectas  $F=0$  y  $S=0$  son isoclinas así como curvas solución. En consecuencia, una solución una vez que es positiva puede llegar a hacerse negativa ya que para que esto ocurra debe cruzar cualquiera de los ejes, lo cual es imposible. Otras isoclinas simples son:

$$S = \frac{s}{c} \quad \text{sobre la cual} \quad \frac{dF}{dS} = 0$$

$$y \quad F = \frac{k}{\lambda} \quad \text{sobre la cual} \quad \frac{dF}{dS} = \infty$$

Estas isoclinas no son curvas solución a diferencia de los ejes se muestra en la Figura 4.6 deben ser puntos singulares.

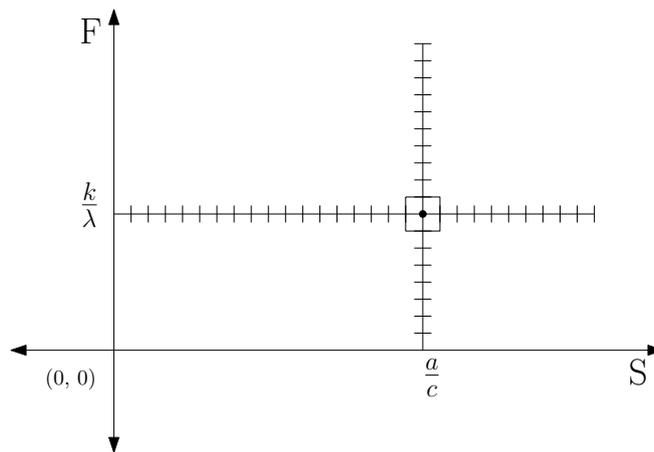


Figura 4.6: Isoclinas simples para un ecosistema depredador-presa.

»Sólo hay dos posibles puntos singulares que tambien deben ser poblaciones de equilibrio, a saber

»

$$(1) \quad F = \frac{k}{\lambda} \quad y \quad S = \frac{a}{c}$$

$$(2) \quad F = 0 \quad y \quad S = 0$$

Ecuaciones de isoclinas correspondientes a diferentes pendientes de la solución. El caso de la población cero (2) no es tan importante, sin embargo conocer la curva solución en la vecindad de esta población de equilibrio ayuda en el dibujo del plano de fase. Si  $F = \frac{k}{\lambda}$  y  $S = \frac{a}{c}$ , entonces el ecosistema depredador-presa a llegado a un equilibrio dinámico. Vamos a demostrar que una tal población de equilibrio es estable. Las poblaciones de equilibrio dependen de los cuatro parámetros pero solo dos relaciones apropiadas son significativas. El siguiente comportamiento paradójico de este sistema solo se entiende con un poco de cuidado. Si la tasa de crecimiento de peces,  $a$ , se incrementa entonces la población de equilibrio de peces se mantiene sin cambios; sólo los tiburones se ven afectados. Un mayor número de tiburones es necesario para equilibrar el crecimiento de los peces.

En otras palabras, el aumento de la capacidad de puesta de huevos de los peces (es decir, aumento de  $a$ ) resulta en mas peces incubados dando a los tiburones mas alimento. Por lo tanto, los tiburones crecen en número, pero su mayor número consume mas peces conservando exactamente el aumento de la natalidad de los peces. Por otro lado si la tasa de mortalidad de los tiburones,  $k$ , se reduce, entonces, esto no solo no afecta a la población de equilibrio de los tiburones sino mas bien inusualmente resulta que el número de equilibrio realmente se reduce. La explicación de este último fenómeno es que se necesita un menor número de peces para equilibrar una población de tiburones mas resistente.

La eficiencia de la interacción,  $\lambda$  y  $c$ , también se comportan de maneras aparentemente sorprendentes. El aumento de  $\lambda$  corresponde a los peces que contienen nutrientes adicionales para los tiburones. Esto resulta no en el aumento de tiburones, sino en la disminución de los peces. Un aumento de la eficiencia del depredador se traduce en la disminución del número de equilibrio de la presa. Del mismo modo, el aumento de  $c$ , que corresponde a la mejora de la capacidad de los tiburones para matar a los peces, se traduce en una disminución de los tiburones. Si las poblaciones no están en equilibrio, entonces se emplea el plano de fase para determinar los cambios poblacionales temporales. Si  $S=0$ , entonces  $\frac{dF}{dt} = aF$ , es decir  $F$  siempre aumenta (ecológicamente, si no hay tiburones los peces crecerán). De manera similar, si  $F=0$ , entonces  $\frac{dS}{dt} = -kS$  si  $S$  disminuye los tiburones tienden hacia la extinción. Estos resultados determinan las trayectorias de la población si cualquiera de las especies inicialmente no están presente, como se muestra en la Figura 4.7.

4.8. SOLUCIÓN CUALITATIVA DE LAS ECUACIONES LOTKA-VOLTERRA 53

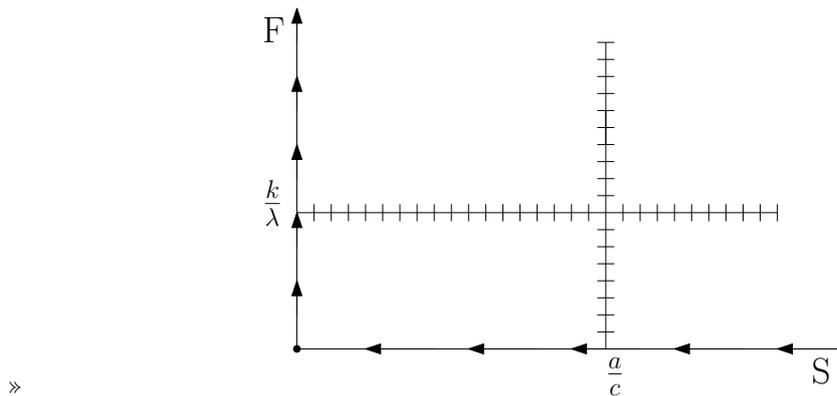


Figura 4.7: Trayectoria de una sola especie.

»Si los peces son el número necesario para equilibrar el crecimiento de los tiburones,  $F = \frac{k}{\lambda}$ , entonces  $\frac{dF}{dt} = \frac{k}{\lambda}(a - cg)$  ¿El aumento de peces desde aquel valor si el número de tiburones es menor que su valor de equilibrio ( $S < \frac{a}{c}$ ), porque es razonable?. También el número de peces decrece si el número de tiburones es mas grande que su valor de equilibrio ( $S > \frac{a}{c}$ ) un análisis similar se puede hacer cerca de la población de equilibrio de tiburones,  $S = \frac{a}{c}$ . La variación resultante en la población de tiburones representada en la Figura 4.8.

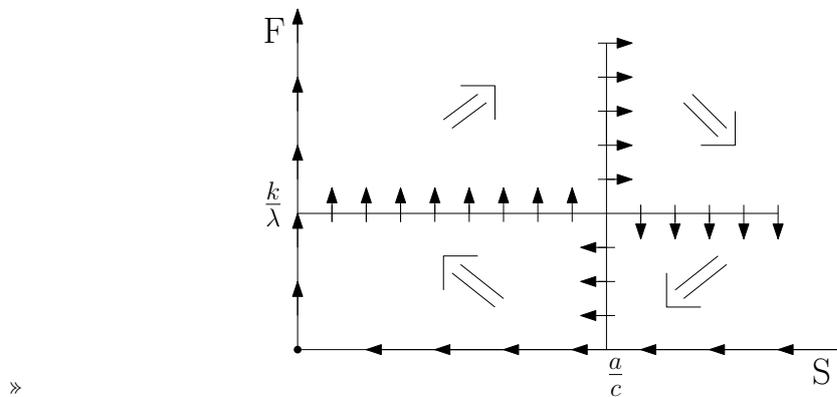


Figura 4.8: Comportamiento asintótico de las trayectorias depredador-presa.

»De hecho, para toda la población de peces, los peces crecen en número si los tiburones son menos que su población de equilibrio, y viceversa matemáticamente.

$$\begin{aligned} \text{Si } S < \frac{a}{c} \text{ entonces } \frac{dF}{dt} > 0 \\ \text{y Si } S > \frac{a}{c} \text{ entonces } \frac{dF}{dt} < 0 \end{aligned}$$

Se sigue de la ecuación 4.-33. Por otra parte, un hecho similar acerca de los tiburones valido sin importar lo que la población de tiburones sea. Esto explica las flechas

adicionales ( $\nearrow$ ,  $\searrow$ , etc) que aparecen en el diagrama del plano de fase, figura 50.3 Las isoclinas al lo largo de las curvas  $\frac{dF}{dS} = 0$  o  $\infty$  son bastantes útiles pues estas curvas separan regiones para los cuales una especie aumenta de regiones para las cuales la misma especie disminuye. El diagrama del plano de fase indica un patrón general en sentido horario. Si se esbozan las curvas solución, entonces es evidente que las poblaciones pueden oscilar alrededor de los valores de equilibrio de las poblaciones respectivas. Al igual que en mecánica, hay al menos tres posibles tipos de "órbitas" del plano de fase, como se muestra en la Figura 4.9.

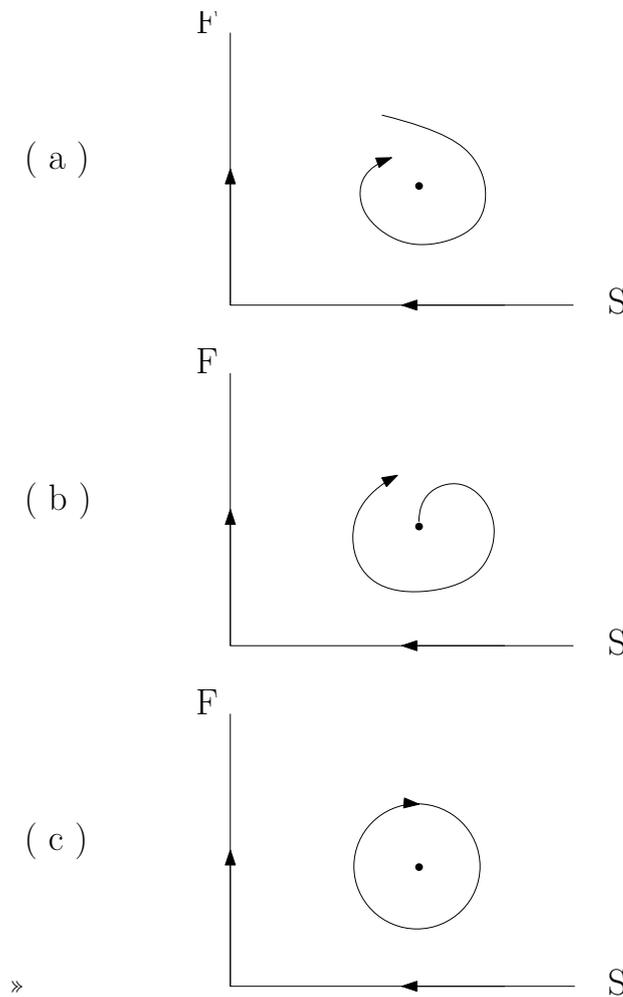


Figura 4.9: Posibles órbitas del plano de fase.

»Por ejemplo, supongamos que las trayectorias son como se muestra en la Figura 4.10.

4.8. SOLUCIÓN CUALITATIVA DE LAS ECUACIONES LOTKA-VOLTERRA 55

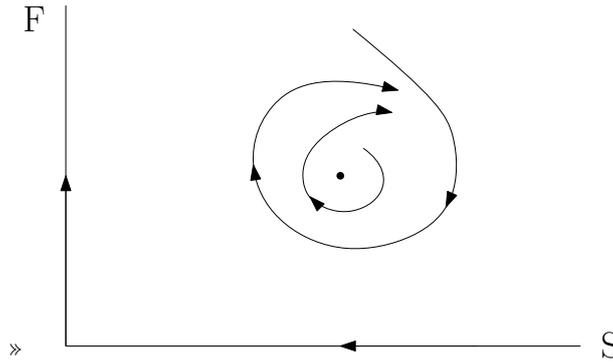


Figura 4.10:

»Como se ha dibujado parte de una curva solución se mueve en espiral hacia adentro (como si las poblaciones de peces y de tiburones despues de una oscilación se acercan más y más hacia sus valores de equilibrio), y también parte de otra curva solución se mueve en espiral hacia afuera como si los peces y tiburones incrementan su número después de algún tiempo. Si esto es válido, entonces "con un poco de sentido común" sugiere que existe una curva solución atraído "entre" los dos, tal que para esa solución la población regresa al mismo valor, produciendo una oscilación periódica de la población, llamado ciclo límite. Vamos a demostrar que este fenómeno ya esbozado en la figura 50.6 no se produce para la ecuación 50.2. Sin embargo, puede ocurrir en otros modelos población. Para dilucidar el comportamiento de este ecosistema depredador-presa (tiburón-pezu) debemos investigar ambas especies cuando están cerca de sus respectivos valores de equilibrio,  $F = \frac{k}{\lambda}$  y  $S = \frac{a}{c}$ . Haremos esto mediante un análisis linealizado. Las ecuaciones diferenciales 4.-33 pueden ser linealizados en la vecindad de la población de equilibrio mediante el uso de métodos de perturbación de la siguiente manera:

$$F = \frac{k}{\lambda} + \varepsilon F_1 \tag{4.-37}$$

$$S = \frac{a}{c} + \varepsilon S_1 \tag{4.-36}$$

donde  $\varepsilon F_1$  y  $\varepsilon S_1$  representan diferencias de población con la población de equilibrio. Sustituyendo esto en las ecuaciones diferenciales 4.-33. Se obtiene

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{dF_1}{dt} &= \left( \frac{k}{\lambda} + \varepsilon F_1 \right) (-c\varepsilon S_1) \\ \varepsilon \frac{dS_1}{dt} &= \left( \frac{a}{c} + \varepsilon S_1 \right) (\lambda\varepsilon F_1) \end{aligned}$$

Despreciando los términos lineales resulta

$$\frac{dF_1}{dt} = -\frac{ck}{\lambda} S_1 \tag{4.-37}$$

$$\frac{dS_1}{dt} = \frac{a\lambda}{c} F_1 \tag{4.-36}$$

Este sistema de ecuaciones diferenciales lineales puede ser más fácil de resolver por eliminación; por ejemplo, la eliminación de  $F_1$  a partir de la ecuación 4.-36 resulta

$$\frac{c}{a\lambda} \frac{d^2 S_1}{dt^2} = -\frac{ck}{\lambda} S_1$$

o equivalentemente

$$\frac{d^2 S_1}{dt^2} = -akS_1 \tag{4.-36}$$

Por lo tanto, el número de tiburones oscila alrededor de su población de equilibrio,

$$S_1 = S_{10} \cos wt + Q \sin wt,$$

donde la frecuencia circular  $w = (ak)^{\frac{1}{2}}$ . Note que  $S_{10}$  es el desplazamiento de la población de equilibrio de tiburones en  $t=0$ . Los peces también oscilan, de acuerdo con la ecuación

$$F_1 = \frac{c}{a\lambda} (-wS_{10} \sin wt + wQ \cos wt)$$

Si en  $t=0$ ,  $F - 1 = F_{10}$  entonces,  $F_{10} = \frac{c}{a\lambda} wQ$ . En otras palabras,

$$\begin{aligned} S_1 &= S_{10} \cos wt + \frac{a\lambda}{cw} F_{10} \sin wt \\ F_1 &= F_{10} \cos wt + \frac{cw}{a\lambda} S_{10} \sin wt \end{aligned}$$

El periodo de oscilación,

$$T = \frac{2\pi}{w} = 2\pi(ak)^{-\frac{1}{2}}$$

Solo depende de las tasas de crecimiento  $a$  y  $k$ . Este periodo sólo es válido para pequeñas oscilaciones en torno a la población de equilibrio. En la vecindad de la población de equilibrio, existe una "constante de movimiento", "una energía" integral,

$$\left( \frac{dS_1}{dt} \right)^2 + akS_1^2 = \text{constante}$$

Facilmente determinada de la analogía entre la ecuación 4.-36 y un sistema masa-resorte o un péndulo linealizado. En términos de  $S_1$  y  $F_1$ .

»

$$\frac{a^2 \lambda^2}{c^2} F_1 + akS_1^2 = \text{constante}$$

que es una elipse en el plano de fase. Este resultado también se puede obtener de la ecuación diferencial del plano de fase,

$$\frac{dF_1}{Qs_1} = -\frac{c^2 k}{a\lambda^2} \frac{s_1}{F_1}$$

4.8. SOLUCIÓN CUALITATIVA DE LAS ECUACIONES LOTKA-VOLTERRA 57

Por separación e integración. Lo cual como ya se sabe es demostrado en la Figura 4.11.

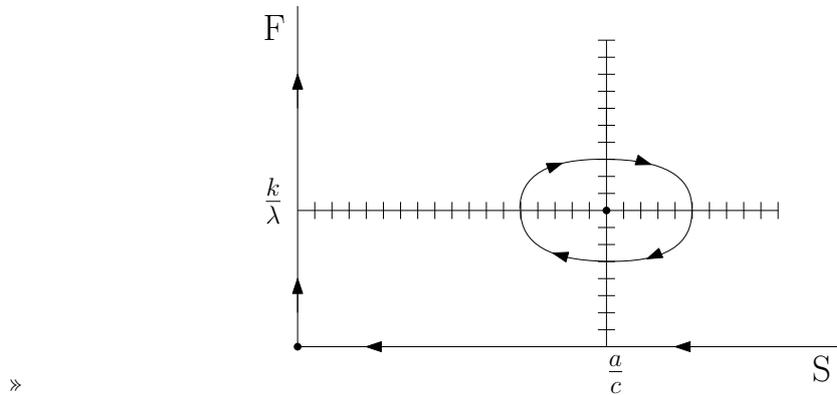


Figura 4.11: Plano de fase de oscilación depredador-presa.

»Los resultados del análisis linealizado predicen que las poblaciones oscilan con amplitud constante en la vecindad de la población de equilibrio. La población de equilibrio parece ser estable. Sin embargo, esta conclusión no está siempre justificada. Los términos no lineales pequeños (despreciados en la linealización) harán solo un pequeño cambio. Pero hay que tener sumo cuidado porque este pequeño cambio puede afectar a todo el comportamiento cualitativo de la solución, como la solución completa un "ciclo" en el plano de fase, en lugar de volver exactamente donde comenzó (dando una solución periódica), quizás los términos no lineales causen que ella oscila con una amplitud más y más pequeña. En este caso, los términos no lineales pueden hacer la solución de equilibrio muy estable que lo predicho por el análisis de estabilidad linealizado. Si esto ocurre, nuestra predicción original de estabilidad no es alterada. Sin embargo, puede ocurrir lo contrario. Es posible que los términos no lineales despreciados cuasen que la solución oscile con amplitud creciente. En este caso la población de equilibrio sería inestable a pesar que el análisis de estabilidad linealidad predijo estabilidad.

En resumen, la estabilidad de una población de equilibrio siempre se determina por un análisis de estabilidad linealizado excepto cuando el análisis de la estabilidad linealizada predice que la población de equilibrio está en el límite entre ser estable y ser inestable. Esta situación límite se caracteriza por la solución oscilante con amplitud constante. En este caso el análisis de la estabilidad linealizada no es concluyente. Ahora mostremos brevemente que la misma conclusión se puede obtener al citar los resultados generales de los sistemas lineales. Las ecuaciones 4.-37 y 4.-36 se escriben de la forma

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \bar{a}x + \bar{b}y \\ \frac{dy}{dt} &= \bar{c}x + \bar{d}y \end{aligned}$$

donde  $x = F_1$ ,  $y = s_1$ ,  $\bar{a} = 0$ ,  $\bar{b} = -\frac{ck}{\lambda}$ ,  $\bar{c} = \frac{a\lambda}{c}$ ,  $\bar{d} = 0$

»Por lo tanto

$$\begin{aligned} p &= \bar{a} + \bar{d} = 0 \\ q &= \bar{a}\bar{d} - \bar{b}\bar{c} = ak > 0 \\ \Delta &= p^2 - 4q = -4ak < 0 \end{aligned}$$

Como  $p=0$ , indica que la población de equilibrio es neutralmente estable. Una población de equilibrio neutralmente estable (llamada centro) es un caso límite, y por lo tanto el análisis lineal no producirá necesariamente los mismos resultados que la de un análisis no lineal completo. Antes de analizar el problema exacto no lineal, no debemos pasar por alto el plano de fase en la vecindad de otra población de equilibrio,  $S = 0, F = 0$ . Linealizando las ecuaciones diferenciales 4.-33 en la vecindad de  $S = 0, F = 0$  se logra con sólo despreciar los términos no lineales en cuyo caso.

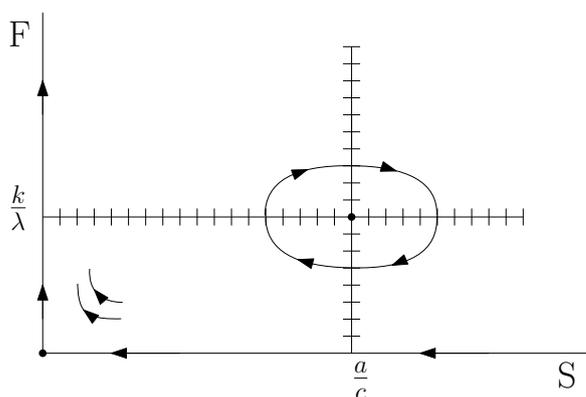
»

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dt} &= aF \\ \frac{dS}{dt} &= -kS \end{aligned}$$

Los peces crecen exponencialmente y los tiburones decrecen exponencialmente. La población de equilibrio es lo que llamamos un punto silla. En el plano de fase,

$$\frac{dF}{ds} = \frac{aF}{-kS} \quad \text{o} \quad F = AS e^{-a/k}$$

Por lo tanto, usando la información sobre la población, cerca de esta población de equilibrio, vemos la Figura 4.12.



»

Figura 4.12:

»Vamos ahora a reconsiderar el sistema de ecuaciones diferenciales no lineales que describen la interacción entre un predador y su presa. Vamos a mostrar que las trayectorias en la vecindad de la población de equilibrio  $F = \frac{k}{\lambda}$  y  $S = \frac{a}{c}$  son cerradas. De hecho nos demuestra que casi toda curva solución es una curva cerrada y representa una

4.8. SOLUCIÓN CUALITATIVA DE LAS ECUACIONES LOTKA-VOLTERRA 59

solución periódica. Para probar esto, volvemos al estudio del plano de fase, ecuación 4.-32. Esta ecuación es separable:

$$\frac{\lambda F - k}{F} dF = \frac{a - cS}{S} ds$$

y se puede integrar directamente, obteniendose

$$\lambda F = k \ln S - cS + E$$

Donde E es una constante determinada a partir de la población inicial de peces,  $F(t_0) = F_0$ , y la población inicial de tiburones,  $S(t_0) = S_0$ . Para cada valor de E corresponde una curva solución. Mostraremos que todas esas curvas son cerradas. Para ello es conveniente exponenciar la ecuación anterior, haciendo  $e^E = E_0 > 0$ ,

$$F^{-k} e^{\lambda F} = E_0 e^{-cS} S^a$$

Esta es una ecuación explícita relacionando la población de peces y tiburones. Sin embargo, vamos a mostrar que estas ecuaciones representan curvas cerradas.

»Aunque no podamos bosquejar fácilmente F directamente como una función de S, la relación funcional se puede ver fácilmente utilizando una variable auxiliar Z.

$$Z = F^{-k} e^{\lambda F}$$

En cuyo caso también

$$Z = E_0 S^a e^{-cS}$$

Bosquejemos Z como una función de S y también como una función de F. Para F pequeño, Z tiende hacia  $+\infty$ , mientras que para F grande Z tiende exponencialmente hacia  $+\infty$ . Similarmente para S pequeño, Z tiende hacia 0 y para S grande, Z decae exponencialmente hacia 0. De este modo se obtiene mas o menos la Figura 4.13.

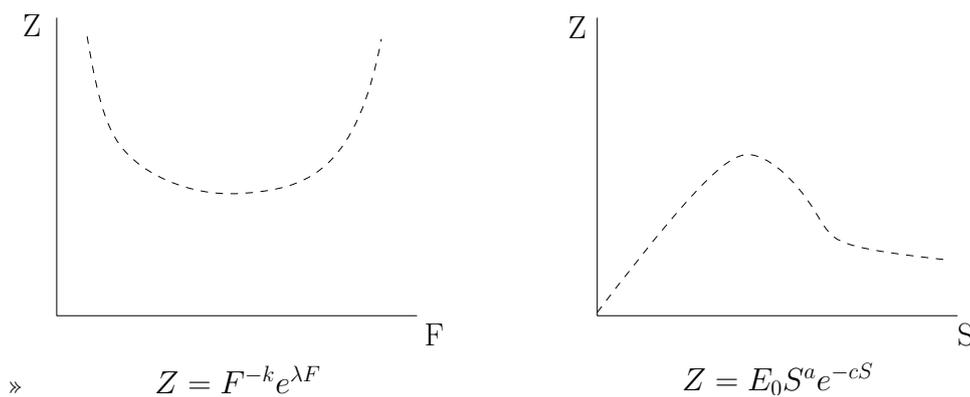


Figura 4.13:

»Podríamos adivinar la finalización de los bosquejos (marcados en la Figura con líneas cortadas) y de esta forma podemos comprobar que son correctos si analizamos

el cálculo de las primeras derivadas  $dZ/dF$  y  $dZ/dS$ , considerando que cada derivada es cero en un solo lugar. En particular,

$$\frac{dZ}{dF} = F^{-k} e^{\lambda F} \left( \lambda - \frac{k}{F} \right)$$

$$\frac{dZ}{dS} = E_0 S^a e^{-cS} \left( -c + \frac{a}{S} \right)$$

Estas curvas tienen pendiente cero en las respectivas poblaciones de equilibrio  $F = \frac{k}{\lambda}$  y  $S = \frac{a}{c}$ . Por lo tanto derivamos la Figura 4.14.

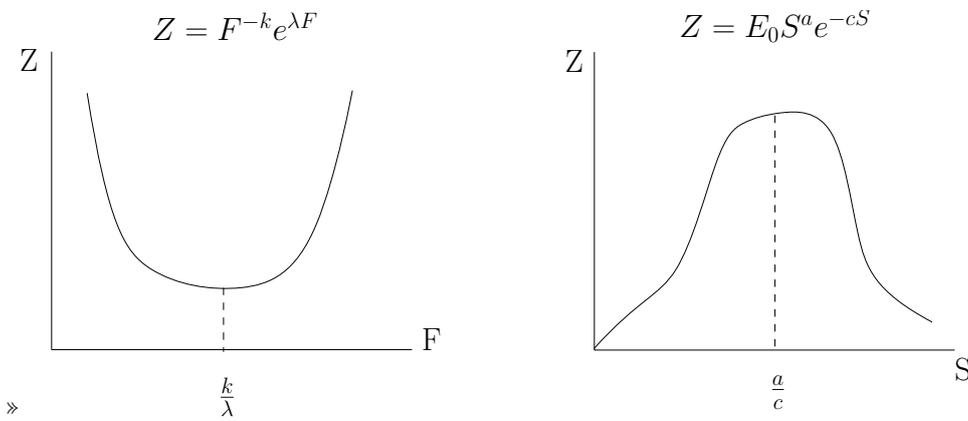


Figura 4.14:

»Tomando un valor específico de S marcado en la Figura 4.15 con ●.

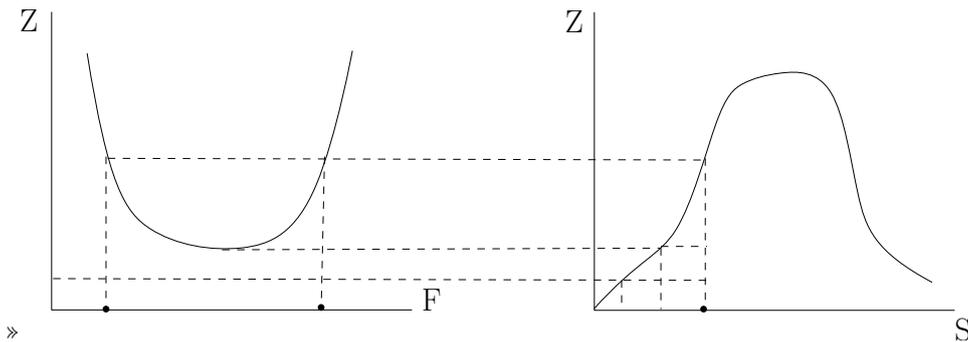


Figura 4.15:

»Esto determina Z, que produce dos valores de F (también marcado ●). Otros valores de S dan 0, 1 o 2 valores de F como ilustra la figura específicamente, para valores de S suficientemente pequeños, no hay valores de F. A medida que aumenta S, todavía no hay valores de F hasta que S alcanza un valor en el que se produce la

4.8. SOLUCIÓN CUALITATIVA DE LAS ECUACIONES LOTKA-VOLTERRA 61

primera intersección. Entonces, sólo hay un valor de F. Como S se incrementa aún más, siempre hay exactamente dos valores de F. Sin embargo, como S se sigue incrementando, el proceso se invierte. Así la curva solución, F como una función de S, se esboza en la Figura 4.16.

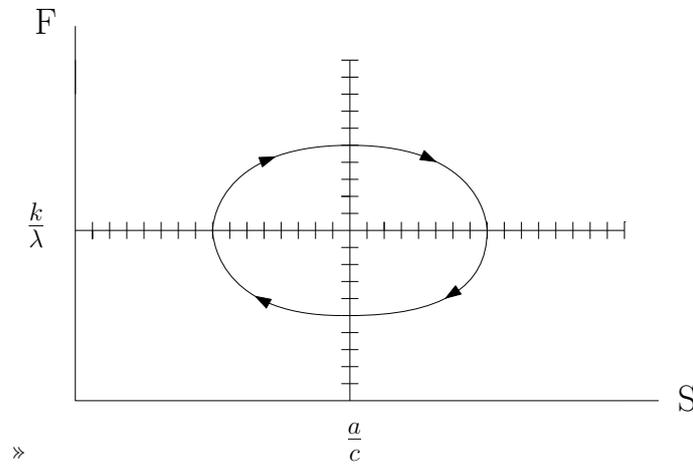


Figura 4.16:

»Es una curva cerrada, no importa que valor  $E_0$  se elija (siempre y cuando  $E_0$  sea lo suficientemente grande para asegurar una solución). De la misma forma para distintos valores de  $E_0$  obtenemos la Figura 4.17 la población de peces y tiburones son periódicas en el tiempo.

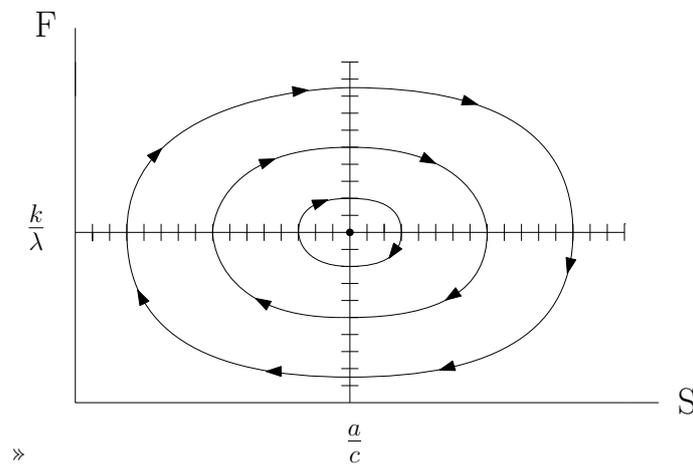


Figura 4.17: Trayectorias de Tiburones(S)-Peces(F) ecosistema depredador-presa.

»De acuerdo a lo anterior mostraremos que las poblaciones (de peces y tiburones) fluctúan periódicamente en torno a un punto de equilibrio de manera bastante compleja, lo cual se puede esbozar en la Figura 4.18.

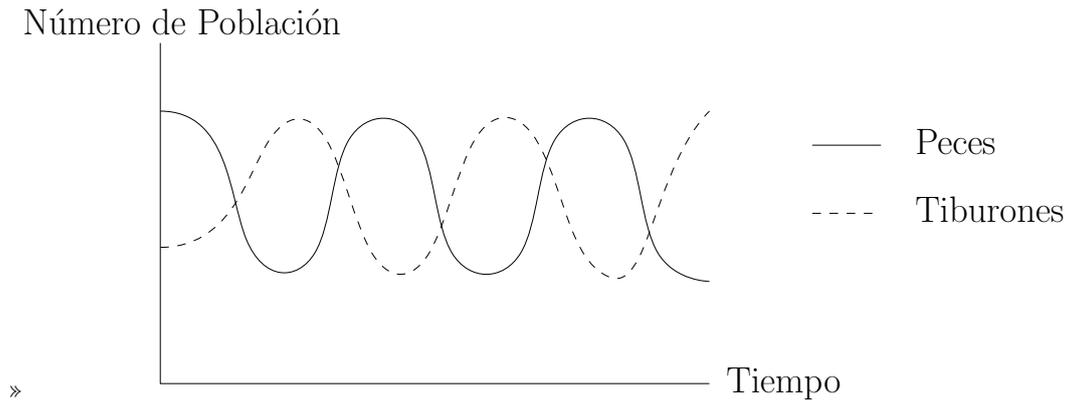


Figura 4.18: Oscilación Lotka-Volterra depredador-presa.

## » Bibliografía

- [1] »R. Bürger, Introducción al Modelamiento en Biomatemática, Universidad de Concepción 2012.
- [2] »N. Bacäer, A Short History of Mathematical Population Dynamics, Edit. Springer 2011
- [3] »K.K. Ostberg, Ecuaciones Diferenciales Edit. Fondo Educativo Iberoamericano S.A., 1973
- [4] »W. Pogorzelski, Integral Equations and Their Applications, Pergamon Press, 1966.
- [5] »M. R. Spiegel, Ecuaciones diferenciales aplicadas, Printece-Hall Hispanoamericana, México, 1983
- [6] »J. Sotomayor, Licões de equações Diferenciais ordinárias IMPA - Brasil, 1979
- [7] »D. Zill, Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones, Grupo Editorial Iberoamericana, México, 1988