Universidad del Bío-Bío
Facultad de Educación y Humanidades
Pedagogía en Educación Matemática

GEOMETRÍA NO EUCLIDIANA

PROFESOR BASSO BASSO IVO ROBERTO

TESISTA: GOMEZ CISTERNAS DANIEL RIGOBERTO

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE PROFESOR DE ENSEÑANZA MEDIA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

CHILLAN 2015

Índice

Introducción

Desde tiempos antiguos se ha utilizado la geometría euclidiana, se enseña en los colegios y es la más utilizada al momento de realizar una construcción o de realizar algún cálculo de área. En general, la geometría Euclidiana funciona perfectamente en el mundo en que nos desenvolvemos a diario.

La geometría Euclidiana proviene del matemático Euclides, quien en su libro “los elementos de Euclides”, resume lo que los griegos ya sabían acerca de las matemáticas y la geometría. Este libro resume a través de un método axiomático-deductivo, cinco leyes básicas para el funcionamiento de la geometría, desde el cual se pueden deducir otras propiedades y postulados. Como bien se sabe, esta geometría Euclidiana se ajusta a las necesidades que tiene el hombre hoy en día, pero si ampliamos nuestro horizonte, al funcionamiento del universo, se puede apreciar por ejemplo que Albert Einstein, en su teoría de la Relatividad, habla acerca de la curvatura del espacio-tiempo, producida por una fuerza gravitacional que existe en el universo, por lo que las leyes geométricas que nos rigen, o más bien dicho, que ya están definidas, no se acomodarían a este modelo del universo. Por, lo que Einstein tuvo que recurrir a otra geometría, que se acomodara al comportamiento del universo, ésta es la geometría de espacios curvos, propuesta por Riemann. En el universo aún hay mucho por descubrir, principalmente en el campo de la Astronomía se estudia todo lo que ocurre fuera de nuestro planeta, por lo tanto no bastaría la Geometría Euclidiana para comprender el comportamiento de todo el universo. Por ello, es importante el nacimiento de otras geometrías, a las que se les denomina Geometrías no Euclidianas.

La Geometría Euclidiana se define como una ciencia axiomática-deductiva, conformada por axiomas los cuales permiten deducir propiedades de la geometría. Según testimonios se establece que Euclides, “fundador” de la Geometría Euclidiana, vivió alrededor del año 300 anterior a nuestra era. Su libro y obra mas famosa “Los Elementos”, la cual contiene una guía incontestable y perfecta de la exposición científica misma en materia de geometría. Resume la matemática Griega conocida hasta esos tiempos. Formado por 13 libros en su interior, “Los Elementos” posee un desarrollo lógico y sistemático. Aquel desarrollo es un requerimiento fundamental en la matemática, pues produce una base y una organización del conocimiento matemático.

Transcurrieron más de veinte siglos para que apareciera una geometría alternativa consistente. Si nos remontamos alrededor del año 1820, surgen las primeras discusiones acerca de una geometría que no se limitara a dos o tres dimensiones, a las que estamos tan acostumbrados. Entonces se comienza a hablar de una Geometría n-dimensional o también llamadas Geometrías no Euclidianas, ya que se anteponen ante algunas ideas de Euclides. La primera idea de Geometrías alternativas proviene de Carl Friedrich Gauss, pero sólo fueron ideas, nunca existió nada en concreto. Fue Gauss el primero en tener una visión acerca de una Geometría que no dependiera del postulado V de Euclides. Realizó importantes avances y resultados, pero que para él no significaron mucho.

Se le atribuye al ruso Nikolai Ivanovich Lobachevski, y al húngaro János Bolyai, húngaro, los primeros escritos oficiales donde separadamente formularon el primer sistema de geometría no euclidiana.

En sus respectivas obras, Lobachevski “On the Principles of Geometry” en el *Kazan Messenger*, establece una “Geometría Imaginaria”, por su parte, Bolyai publicó su libro “Absolute Science of Space”, en el año 1832. El mayor desacuerdo entre la Geometría Euclidiana y las Geometrías no Euclidianas es en el quinto postulado de Euclides y en el concepto de infinito.

Existen diversas propuestas y tipos de Geometrías no Euclidianas, junto con ellas se han establecido modelos para facilitar su comprensión, estos modelos se pueden encontrar en el anexo al final del apunte, algunos ejemplos: Geometría Hiperbólica, Geometría Esférica. Las Geometrías no Euclidianas son muy importantes para el desarrollo de la Física, específicamente en la Astronomía. También es fundamental para conocer el Universo matemático, ampliar el Horizonte de dos y tres dimensiones a un posible Universo de n dimensiones, entonces surge la interrogante. ***¿Por qué las Geometrías no Euclidianas no son tratadas ni mencionadas en enseñanza media y carreras Universitarias donde se requiere la matemática?***

Capítulo I: Fundamentos de Geometría Euclidiana

Introducción:

A través de la revisión de la geometría euclidiana y con el surgimiento de las geometrías no eulicidanas, surge la necesidad de un tratamiento axiomático y riguroso de la geometría euclidiana, por lo que en este documento se realiza dicho tratamiento.

Si nos remontamos a los inicios de la geometría, se puede apreciar que la noción de distancia fue unos de los primeros conceptos geométricos que el hombre descubrió. Como todo concepto, surge de las necesidades primarias del hombre, como por ejemplo las construcciones o limitar terrenos. La distancia más corta entre dos puntos es en este caso la longitud del segmento. Así también, debido a las observaciones el hombre surgen los conceptos más básicos de la geometría, como lo son las curvas, cuerpos y superficies, entre otros. Cuando el hombre fue capaz de extraer de relaciones geométricas concretas una relación abstracta general que contiene a la primera como un caso general, se puede decir que la geometría se volvió una ciencia. Entonces se crean procedimientos generales para resolver distintos problemas geométricos. Si los problemas pueden ser resueltos por el mismo procedimiento general, nos estamos refiriendo a una Ley Geométrica.

Existe gran cantidad de material del pasado al cual podemos llamarle geometría práctica o científica. Existen registros muy antiguos del año 3000 a.C de los tiempos sumerios donde ya desarrollaban la geometría.

Los primeros grandes avances en este campo fueron de parte los Babilónicos, donde se encuentran tablas con Geometría vinculada a la medición práctica. Los Babilónicos resolvieron variados problemas, principalmente áreas de figuras, como del rectángulo, triángulos rectángulos e isósceles, volúmenes de cuerpos como prismas rectos y también la relación del perímetro del círculo y su diámetro. Así también llegaron a algunas fórmulas incorrectas como el volumen de un cono o de una pirámide cuadrada truncada. Incluso tenían conocimiento del teorema de Pitágoras alrededor del año 2000 a.C. Sin embargo, cabe destacar, que toda esta matemática prehelénica (anterior a los Griegos), no encontramos casos de lo que hoy llamamos demostración lógica. Podemos hablar que utilizaron métodos de “tanteo”, o en otras palabras se puede hablar de un Empirismo, es decir, algo factible que se pueda comprobar con algo concreto. Es por esto que se habla de un Razonamiento Empírico o naturaleza Empírica de la matemática Prehelénica, la cual carece de demostración y no tiene una secuencia lógica. Pese a esto es impresionante la cantidad de problemas que pudieron resolver utilizando sus métodos empíricos.

Luego de que cayeron el poder de Egipto y Babilonia por motivos económicos y políticos, el desarrollo de la geometría pasó a los Griegos. No se determinado con exactitud la conexión o la transmisión de una geometría a otra, pero más importante que esto es como se transformó dicha Geometría. Los Griegos transformaron la naturaleza empírica en una naturaleza deductiva, es decir, las conclusiones geométricas deben obtenerse por deducciones lógicas, y no por experimentos empíricos. Esto es lo que hoy llamamos Geometría sistemática o matemática.

No existen fuentes primarias para el estudio de la geometría Griega antigua. La principal fuente de información acerca de esto es la llamada Sumario de Eudemo, de Proclo, el cual explica brevemente el desarrollo de la geometría griega desde los tiempos primitivos hasta Euclides. Los primeros trabajos fueron los de Tales de Mileto, el cual aparece como fundador de la geometría sistemática y por utilizar métodos deductivos en la geometría. Posterior a Tales aparece Pitágoras, el cual continuó con la sistematización de la geometría. Es reconocido por funda la famosa Escuela Pitagórica donde se dedicó al estudio de la filosofía, matemática y ciencia natural. La escuela Pitagórica hizo grandes aportes a la geometría. Demostraron que la suma de los ángulos interiores de un triángulo equivale a dos ángulos rectos, desarrollaron una teoría de la proporción bastante completa, tenían conocimientos de al menos tres sólidos de poliédricos regulares. A pesar de que mucha de esta información ya era conocida por lo Babilónicos, lo que destaca es el uso del método deductivo. Más adelante empezaron a surgir cadenas de proposiciones y junto con esto la idea de que el desarrollo de la geometría se puede establecer en una sola cadena larga de proposiciones. Según el sumario de Eudemo, un pitagórico, Hipócrates de Chios tuvo un éxito parcial con una presentación lógica de la geometría como una cadena de proposiciones. Pero fue en el año 300 a.C que el matemático Euclides produjo el libro “los Elementos” que contiene esta cadena de proposiciones que comprende la Geometría plana y del Espacio.

Entre los tiempo de Tales (600 a.C) y Euclides (300 a.C) se desarrolló la noción de un discurso lógico. Pues, para presentar un argumento debe existir un supuesto previo, y dicho supuesto previo debe deducirse de otro supuesto, y así sucesivamente. Por lo tanto es necesario que existan términos técnicos básicos con los cuales se construyan los demás supuestos. A esto se le denomina "axiomática material", el cual sigue un cierto "Patrón de axiomática material". Este Patrón consiste en primero dar explicaciones iniciales de ciertos términos y que se deben aceptar como verdaderos, a los cuales se les llama axiomas. Entonces todos los demás términos o proposiciones se deben deducir en base a estos conceptos básicos y la deducción debe ser Lógica.

La Geometría Euclidiana es proveniente del matemático Euclides, el cual en su obra "Los Elementos" redacta los fundamentos de la Geometría en base a un desarrollo Lógico y sistemático. Ha servido como "molde" a los cuales se ajustan las posteriores obras matemáticas.
Euclides es considerado más como una rama del saber que como un hombre, principalmente por su obra "Los Elementos".

En esta obra se ve claramente el uso de este Patrón de axiomática, se considera como el primer gran progreso en la historia del pensamiento y la organización matemática.

Los Elementos fijaron una especie de estándar metodológico o nivel básico de exigencia tanto en lo referente a la sistematización deductiva de un cuerpo de conocimientos como en lo referente al rigor informal de la prueba matemática.

También representaron una normalización de la exposición demostrativa de las proposiciones Geométricas. Estos dos aspectos, el metodológico y el disciplinario determinaron la instauración de la Geometría como disciplina matemática.

Las bases de Euclides son las definiciones, los postulados y las nociones comunes, por lo que se puede considerar a la Geometría Euclidiana como una ciencia deductiva. Las deducciones lógicas deben ser independientes de cualquier significado que pudiere relacionarse con los conceptos, además se convierten en un procedimiento algebraico en el que solo se emplean símbolos y formulas.

La geometría se reduce a un procedimiento estrictamente formal que es totalmente independiente de cualquier interpretación de los símbolos que intervienen. Se emplean 21 axiomas y 6 términos primitivos. En geometría plana se trabaja con 15 axiomas y 5 términos primitivos, los cuales son; punto, línea, en, entre y congruente.

En: Relación entre punto y recta.

Entre: Relación entre un punto y un par de puntos.

Congruente: Relación entre pares de puntos y entre configuraciones llamadas ángulos.

En esto 15 axiomas y 5 términos primitivos descansan la extensa materia de la geometría plana euclidiana. El esquema a desarrollar a continuación es métrico pues usa medición, es decir, una geometría con números reales. Aceptaremos los números reales como R.

1.1 Teoremas de incidencia.

Se definen:

*S: Conjunto de puntos llamado espacio.

*L: Colección de subconjuntos de S llamados rectas.

*P: Colección de subconjuntos de S llamados planos.

Se trabaja con la estructura:

[$S; L; P$]: Punto, línea, plano son los términos no definidos.

Se conoce sobre S, L y P solo lo que enuncian los postulados.

Postulados de incidencia

Incidencia: Se define como la intersección de conjuntos e inclusión de un conjunto en otro.

I.0) ***Las rectas y planos son conjuntos de punto.***

Se define una figura como un conjunto de puntos.

Puntos que están en una misma línea se les llama Colineales.

Puntos que están en un mismo plano se les llama Coplanares.

I.1) ***Por dos puntos cualesquiera dados, pasa solo una recta que contiene a los dos***

P y Q Puntos: se anota $\overleftrightarrow{PQ}$.

I.2) ***Por tres puntos distintos no colineales, pasa solo un plano que contiene a los tres***, se anota: $\overleftrightarrow{PQR}$.

I.3) ***Si dos puntos están en un plano entonces la línea que lo une está en el plano.***

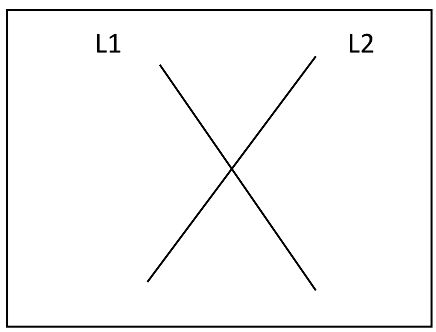
I.4) ***Si dos planos se intersectan, la intersección es una línea.***

Los postulados I.0) a I.4) Se satisfacen para una “geometría” que tiene un solo punto P.

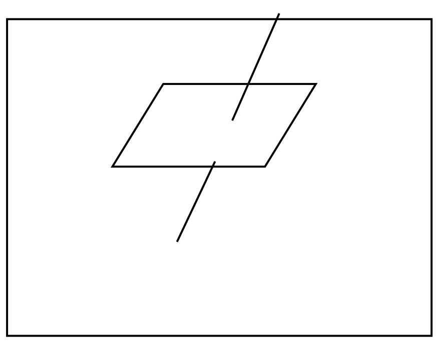
I:5) ***Toda línea contiene al menos dos puntos, todo plano contiene cuando menos tres puntos no colineales y S contiene al menos 4 puntos no coplanares.***

Teoremas de incidencia

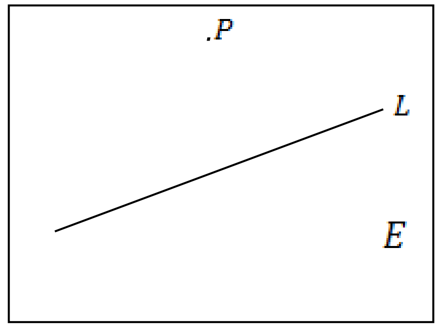
Teorema 1: *Dos líneas diferentes se intersectan a lo mas en un punto.*



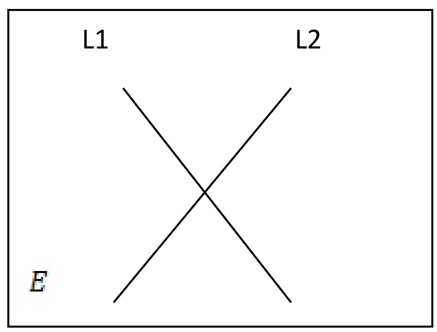
Teorema 2: *Si una línea intersecta un plano que no la contiene, la intersección es un único punto.*



<u>Teorema 3</u>: *Dados una línea y un punto fuera de ella hay un único plano que contiene a ambos.*



<u>Teorema 4</u>: *Si dos lineas se intersectan, su union esta contenida en un unico plano.*



1.2 Distancia y congruencia.

Hasta ahora se ha utilizado la estructura $[S; L; P]$.

Se agrega la idea de distancia; a cada par de puntos de S asociamos un numero real:

Se define **Funcion distancia** la cual esta sujeta a los siguientes postulados:

D.0) $d: S \times S \rightarrow \mathbb{R}$ es una funcion.

D.1) Para cada par de puntos $P, Q \in S$, $d(P,Q) \geq 0$.

D.2) $d(P,Q) = 0 \Leftrightarrow P = Q$.

D.3) $d(P,Q) = d(Q,P)$ para cada $P, Q \in S$.

$d(P,Q)$ se anota PQ. Así la nueva estructura ahora es: $[S; L; P; d]$

La medición puede ser realizada a base de líneas;

Def: Sea $f: L \rightarrow IR$ biyectiva, L linea. Si para cada par de puntos $P\ y\ Q$ de L tenemos:

$$d(P,Q) = (f(P) - f(Q))$$

Entonces f se llama un sistema coordenado de L .

Si $x = f(P)$, el numero real x se llama la coordenada de P.

D.4) Cada linea tiene un sistema coordenado

Sistemas coordenados

Es una Geometría métrica donde la localización se puede identificar por coordenadas. Se presentan los siguientes teoremas:

Teorema 1: *Si f es un sistema coordenado para L y $g(P) = -f(P)$ para cada punto $P \in L$, entonces g es un sistema coordenado.*

Teorema 2: *Sea f un sistema coordenado para L y sea $a \in IR$; entonces $g: L \to IR$ definida por $g(P) = f(P) + a$, para cada $P \in L$, es un sistema coordenado para L.*

Teorema 3: *Sea L una linea y P, Q dos puntos de L. Entonces L tiene un sistema coordenado en donde la coordenada de P es 0 y la coordenada de Q es positiva.*

Separacion en una linea ("estar entre"). Euclides usa este concepto sin definir ni postular.

Def: Sean A, B, C tres puntos colineales.

Si $AB + BC = AC$ con $(AB = d(A, B))$

Entonces se dice que B "esta entre" A y C y se denota: $A - B - C$

Teorema 1: *Si $A - B - C$ entonces $C - B - A$*

Tener en consideración la semejanza con "*estar entre*" en $\mathbb{R}$. $x, y, z \in \mathbb{R}$ y "*esta entre*" x, y, z *si* $x < y < z$ *o* $z < y < x$. se anota $x - y - z$

Lema: *Sea una linea L con sistema coordenado f y tres púntos A, B, C en L con coordenadas x, y, z respectivamente.*

Si $x - y - z$ entonces $A - B - C$

<u>Teorema 2</u>: *De tres puntos cualesquiera en una linea, uno de ellos esta exactamente entre los otro dos*

Consideremos$A - B - C - D$, significa que se cumplen:

$A - B - C$
$A - B - D$
$A - C - D$
$B - C - D$

<u>Teorema 3</u>: *En una linea cualquiera se pueden nombrar cuatro puntos A, B, C, D en cierto orden de modo que $A - B - C - D$.*

<u>Teorema 4</u>: *Si A y B son dos puntos cualesquiera entonces:*

Existe un punto C tal que $A - B - C$
Existe un punto D tal que $A - D - B$

Def: Sean A y B dos puntos. El segmento de A a B se define como el conjunto:

$$\overline{AB} = \{X \mid A - X - B\} \cup \{A, B\}$$

Claramente: $\overline{AB} \subset \overleftrightarrow{AB}$
Sean A y B dos puntos. El <u>rayo</u> de A a B se define como el conjunto :

$$\overrightarrow{AB} = \overline{AB} \cup \{X \mid A - B - X\}$$

A: *punto extremo del rayo*

Sean A, B, C no colineales. El $\sphericalangle ABC$ se define como:

$$\sphericalangle ABC = \overrightarrow{BA} \cup \overrightarrow{BC} \quad ; \quad \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC} = lados\,, \quad B = vértice$$

Si $A,, B, C$ son tres puntos no colineales se define como triangulo ABC al conjunto:

$$\Delta ABC = \overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{AC} \quad ; \quad \overline{AB}, \overline{BC}, \overline{AC} : lados\,, \quad A, B, C \;:\; vértices$$

Los angulos del ΔABC son $\sphericalangle BAC, \sphericalangle ABC\ y\ \sphericalangle ACB$; el ΔABC no contiene a ninguno de estos angulos pues estos son rayos.

Teorema 1: *Si A y B son dos puntos, $\overline{AB} = \overline{BA}$*

Teorema 2: *Si C es un punto de $\overrightarrow{AB}$, diferente de A, entonces $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$*

Teorema 3: *Si $B_1\ y\ C_1$ son puntos de $\overrightarrow{AB}$ y$\overrightarrow{AC}$, diferentes de A, entonces $\sphericalangle BAC = \sphericalangle B_1AC_1$.*

Congruencia de segmentos

Def: Sean $\overline{AB}\ y\ \overline{CD}$ segmentos, si $AB = CD$ entonces los segmentos se llaman conguentes; se anota $\overline{AB} \simeq \overline{CD}$.

Teorema 1: *La relacion de conguencia es una relacion de equivalencia.*

Teorema 2: *(Constuccion de segmentos) Dado un segmento $\overline{AB}$ y un rayo $\overrightarrow{CD}$, hay exactamente un punto $E \in \overrightarrow{CD} \ni \overline{AB} \simeq \overline{CE}$.*

Teorema 3: *(Suma de segmentos)*

Si $A - B - C$,$A' - B' - C'$,$\overline{AB} \simeq \overline{A'B'}\ y\ \overline{BC} \simeq \overline{B'C'}$entonces $\overline{AC} = \overline{A'C'}$.

Teorema 4: *(Resta de segmentos) Si $A - B - C$, $A' - B' - C'$,$\overline{AB} \simeq \overline{A'B'}$y $\overline{AC} \simeq \overline{A'C'}$, entonces $\overline{BC} \simeq \overline{B'C'}$.*

Def: Si $A - B - C\ y\ \overline{AB} \simeq \overline{BC}$ entonces B es el punto medio de $\overline{AC}$.

Teorema 5: *Cada segmento tiene exactamente un punto medio.*

1.3 Separacion en el plano.

Def: Un conjunto A se llama "convexo" si para cada par de puntos $P, Q \in A$, el segmento $\overline{PQ}$ está en A.

Por ejemplo:

Un segmento $\overline{PQ}$ es convexo
$\{A\}$ es convexo,si A punto.
El espacio, la lineas y los planos son convexas.

Postulado de separación:

Dada una linea L y un plano E que la contiene, el conjunto $E - L$ es la unión de dos conjuntos H_1 y H_2 tales que:

1) H_1 y H_2 son convexos
2)Si $P \in H_1, Q \in H_2 \Rightarrow \overline{PQ} \cap L \neq \phi$

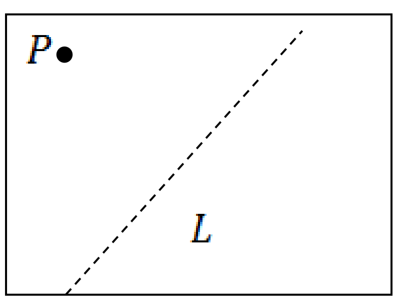
H_1 y H_2 se llaman semi-planos. L: borde de cada semi-plano.

Se observa que:

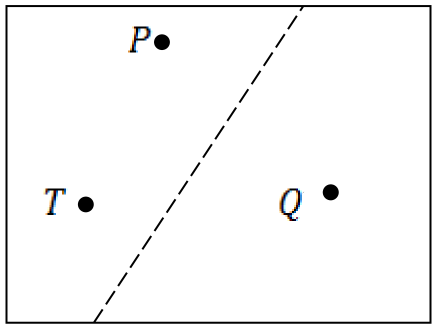
Si $P \in H_1$

$H_1 = \{Q \mid Q \in E - L \text{ y } \overline{PQ} \cap L = \phi\} \cup \{P\}$ $H_2 = \{Q \mid Q \in E - L \text{ y } \overline{PQ} \cap L \neq \phi\}$

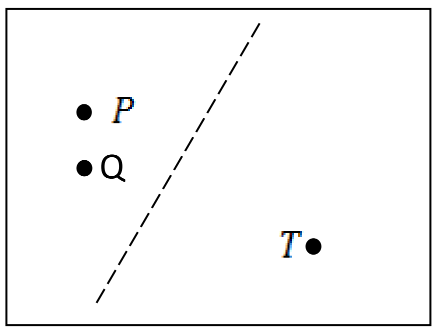
H_1 y H_2: lados opuesto cada uno a L



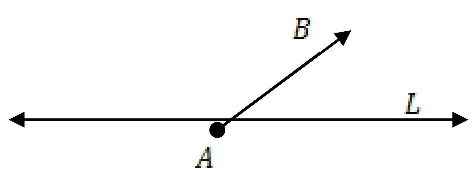
<u>Teorema 1</u>: *Si P y Q están en lados opuestos de la linea L, y Q y T estan en lados opuesto entonces P y T están en el mismo lado de L.*



<u>Teorema 2</u>: *Si P y Q están en lados opuestos de la linea L , y Q y T están en el mismo lado, entonces P y T están en lados opuestos de L.*



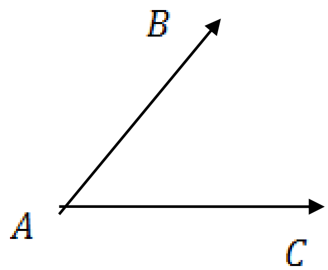
<u>Teorema 3</u>: *Sea L una linea y $\overrightarrow{AB}$ un rayo con $A \in L$ pero $\overrightarrow{AB} \not\subset L$. Entonces todos los puntos del rayo, excepto el punto extremo, están en el mismo lado.*



Def: Sea BAC un Angulo. Se define interior del $\sphericalangle BAC$ a la intersección de:

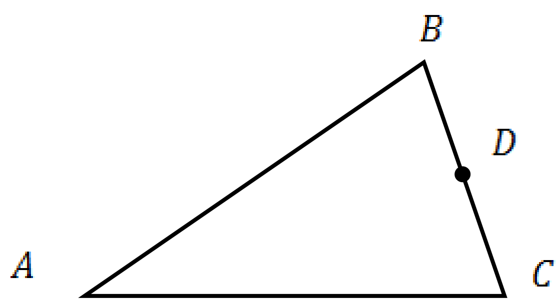
El lado de $\overleftrightarrow{AC}$ que contiene a B y el lado de $\overleftrightarrow{AB}$ que contiene a C, es decir, $D \in int \sphericalangle BAC$ si:

1) D y B están en el mismo semi-plano determinado por $\overleftrightarrow{AC}$.
2) D y C están en el mismo semi-plano determinado por $\overleftrightarrow{AB}$.

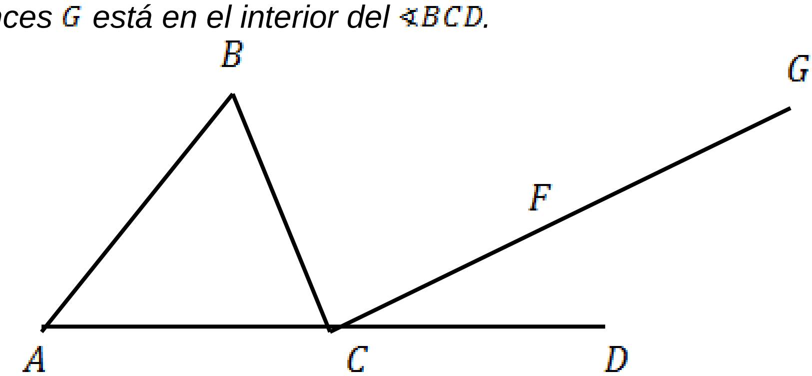


El exterior del ángulo es el conjunto de puntos E que no están ni en el ángulo ni en su interior.

Teorema 4: *Cada lado de un triángulo, excepto sus puntos extremos, está en el interior del ángulo opuesto.*



Teorema 5: *Si $A-C-D,\ B-F-C,\ y\ \ A-F-G$ con A, B, C no colineales, entonces G está en el interior del $\sphericalangle BCD$.*



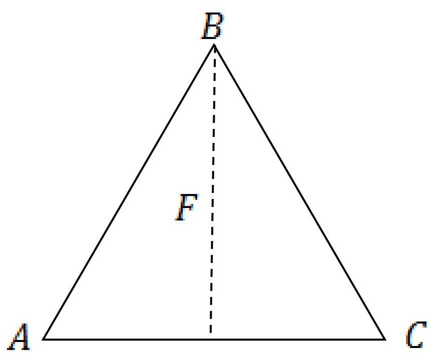
Def: El interior del ΔABC se define como la intersección de:

El lado de $\overleftrightarrow{AB}$ que contiene a C
El lado de $\overleftrightarrow{AC}$ que contiene a B
El lado de $\overleftrightarrow{BC}$ que contiene a A

Teorema 6: *El interior de un triángulo es siempre un conjunto convexo.*

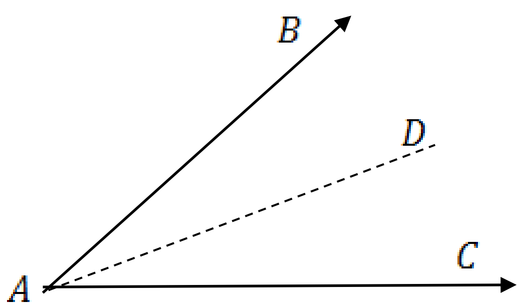
Teorema 7: *El interior de un triángulo es la intersección de los interiores de sus ángulos.*

En muchas demostraciones acerca de triángulos se usa:

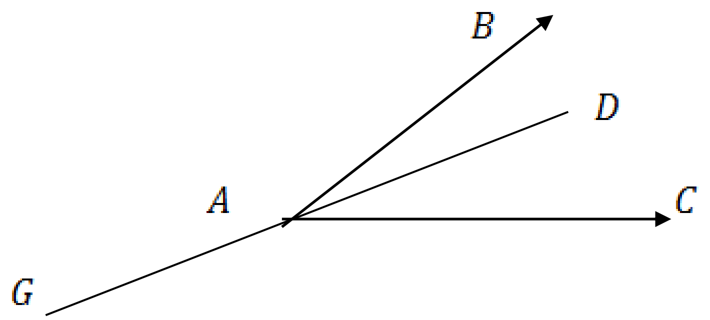


$\overrightarrow{BF}$ Intersecta $\overline{AB}$

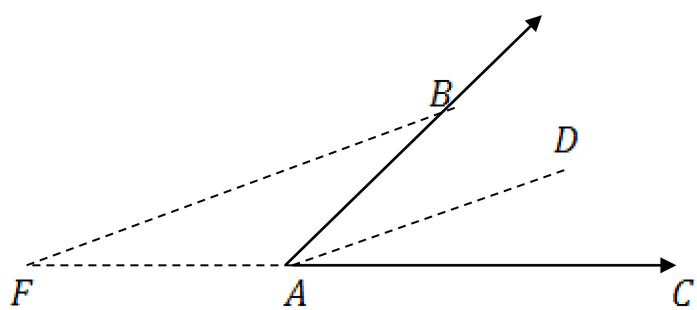
Teorema 8: *Si D está en el interior del $\sphericalangle BAC$, entonces $\overrightarrow{AD}$, excepto su extremo, está en el interior del $\sphericalangle BAC$.*



Teorema 9: *Si D está en el interior del $\sphericalangle BAC$ y $G - A - D$ entonces $\overrightarrow{AG}$, excepto su extremo está en el lado de $\overleftrightarrow{AC}$ que no contiene a B.*

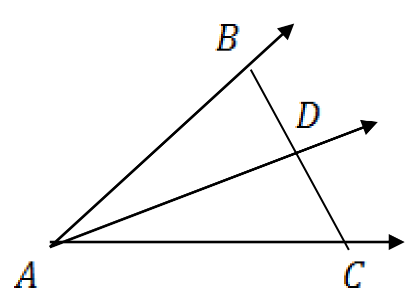


Teorema 10: *Si D está en el interior de $\sphericalangle BAC$ y $F - A - C$, entonces F y B están en el mismo lado de $\overleftrightarrow{AD}$.*



Teorema de la barra transversal

Si $D \in int\sphericalangle BAC$ entonces $\overrightarrow{AD}$ intersecta $\overline{BC}$



Cuadriláteros convexos

Sean A, B, C, D cuatro puntos en el mismo plano tal que no hay tres de ellos colineales, si los segmentos $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DA}$ se intersectan únicamente en sus puntos extremos, su unión se llama un cuadrilátero.

Se anota ⊠ $ABCD$.

Sus componentes son: Ángulos, lados, lados adyacentes, lados opuestos, diagonales

⊠ $ABCD$ es convexo si

- A Y B al mismo lado de $\overleftrightarrow{DC}$.
- B Y C al mismo lado de $\overleftrightarrow{AD}$.
- C Y D al mismo lado de $\overleftrightarrow{AB}$.
- D y A al mismo lado de $\overleftrightarrow{BC}$.

Teorema: *Las diagonales de un cuadrilátero convexo siempre se intersectan entre sí.*

1.4 Medida angular y congruencia entre triángulos.

Se una la estructura $[S, R, P]$

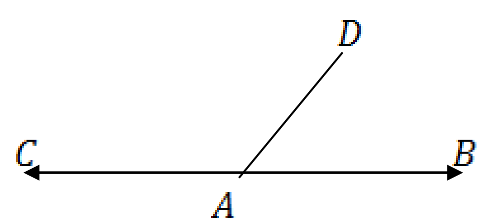
Se define *Función distancia* $[S, L, P, d]$.

Sea $\mathcal{A}$ el conjunto de todos los ángulos. La medida angular (m), está sujeta a los siguientes postulados:

- **M.1.** $m: \mathcal{A} \mapsto \mathbb{R}$ es una función.
- **M.2.** Para cada ángulos A, 0 < m(A) < 180.
- **M.3.** Sean $\overrightarrow{AB}$ un rayo en el borde del semi-plano H. Entonces para cada 0 < r < 180 hay exactamente un rayo $\overrightarrow{AP}$, con $P \in H$ tal que $m \sphericalangle PAC = r$.
- **M.4.** Postulado de la suma.

  Si $D \in int\sphericalangle BAC$ entonces $m\sphericalangle BAC = m\sphericalangle BAD + m\sphericalangle DAC$.

Considerar que: Si $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ son rayos opuestos y $\overrightarrow{AD}$ es un tercer rayo, se dice que $\sphericalangle DAB$ y $\sphericalangle DAC$ forman un par lineal.



- Si $m\sphericalangle ABc + m\sphericalangle DEF$ =180 entonces los dos ángulos se llaman suplementarios.

M.5- Si dos ángulos forman un par lineal entonces son suplementarios.

Def: $\sphericalangle ABC\ y\ \sphericalangle DEF$ se dicen congruentes, si y solo si $m\sphericalangle ABC = m\sphericalangle DEF$.

Teorema 1: L*a relación de congruencia para ángulos es una relación de equivalencia.*

Teorema 2: (Construcción de ángulos)

Sea $\sphericalangle ABC$ $\overrightarrow{A'B}$ *+un rayo y* H*un semiplano cuyo borde contiene a* $\overrightarrow{A'B'}$*. Entonces hay exactamente un rayo* $\overrightarrow{A'B'}$*con* $B' \in H$*. tal que*

$$\sphericalangle BAC \simeq \sphericalangle B'A'C'.$$

Congruencia de triángulos

Def: Sean $\Delta ABC\ y\ \Delta DEF$ y una correspondencia uno a uno, $ABC \leftrightarrow DEF$ entre sus vértices .

Si cada par de lados correspondientes son congruentes y cada par de ángulos correspondientes son congruentes, se dice que la correspondencia es una congruencia.

Postulado Básico Lado-Angulo-Lado (LAL)

Dada una correspondencia entre dos triángulos (o entre el mismo triangulo) tal que dos lados y el ángulo entre ellos del primer triangulo son congruentes con los elementos correspondientes del segundo triangulo, entonces la correspondencia es una congruencia.

Teorema 1: *Si dos lados de un triángulo son congruentes entonces los ángulos opuestos son congruentes.*

Teorema 2: (ALA): Si dos ángulos y el lado entre ellos son respectivamente congruentes con los mismos de otro triángulo, entonces los triángulos son congruentes.

Teorema 3: *(L. L.L) Dada una correspondencia entre dos triángulos (o en sí mismo), si los tres pares de lados correspondientes son congruentes, entonces la correspondencia es una congruencia*

Def: Sea $\sphericalangle BAC$; si

- $D \in int\sphericalangle BAC.$
- $\sphericalangle BAD \simeq \sphericalangle DAC.$

Entonces $\overrightarrow{AD}$ se llama bisectriz.

<u>Teorema 4</u>: *Cada ángulo tiene exactamente una bisectriz*.

1.5 Desigualdades simétricas.

Para ángulos definimos, $\sphericalangle ABC < \sphericalangle DEF$ si $\exists\, G \in int \sphericalangle DEF$ tal que $\sphericalangle ABC \simeq \sphericalangle GEF$. Similarmente para segmentos, $\overline{AB} < \overline{CD}\ si\ \exists\, E \in \overline{CD}\ tal\ que\ \overline{AB} \simeq \overline{CE}$.

Def: Sea $\triangle ABC$. si $A - C - D$. entonces $\sphericalangle BCD$ es un ángulo exterior del triángulo.

- Todo triangulo tiene 6 Ángulos exteriores $\sphericalangle A\ y \sphericalangle B$ del $\triangle ABC$,se llaman remotos interiores de los exteriores con vértice C.

Teorema 1: *Cualquier ángulo exterior de un triángulo es mayor que cada uno de los ángulos interiores remotos.*

Corolario: *La perpendicular a una línea dada, a través de un punto dado no perteneciente a la línea, es única.*

Teorema 2: *Si dos lados de un triángulo no son congruentes, los ángulos opuestos a ellos tampoco lo son y el ángulo mayor es opuesto al lado mayor.*

Teorema 3: *Si dos ángulos de un triángulo no son congruentes, los lados opuestos a ellos tampoco lo son, y al lado mayor se opone el ángulo mayor.*

Teorema 4: *El segmento más corto que une un punto con una línea es el segmento perpendicular.*

Teorema 5: *En cualquier triangulo la suma de las longitudes de dos lados cualquiera es mayor que la longitud del tercer lado.*

Teorema 6: *Si dos lados de un triángulo son congruentes respectivamente a dos lados de un segundo triangulo y el ángulo comprendido del primer triangulo es mayor que el ángulo comprendido del segundo triangulo, entonces el lado opuesto del primer triangulo es mayor que el lado opuesto del segundo triangulo.*

Def: Sea $\triangle ABC$. Se define como defecto del $\triangle ABC$ al número real:

$$\delta \triangle ABC = 180 - m\measuredangle A - m\measuredangle B - m\measuredangle C$$

Teorema: *Sea $\triangle ABC$ con D tal que $A - D - B$ entonces*

$$\delta \triangle ABC = \delta \triangle ADC + \delta \triangle DBC$$

Teorema: Toda *semejanza es una congruencia. O sea:*

Si $\triangle ABC \sim \triangle DEF \Rightarrow \triangle ABC \simeq \triangle DEF.$

Demostración:

Suponer que $\triangle ABC \sim \triangle DEF\ (AAA)$

Sea $G \in \overrightarrow{AB} \ni \overline{AG} \simeq \overline{DE}$

$H \in \overrightarrow{AB} \ni \overline{AH} \simeq \overline{DF}$

Se tiene: $\triangle AGH \simeq \triangle DEF$ (LAL)

$\therefore \triangle AGH \sim \triangle ABC$ (AAA)

si $G = B, \Rightarrow H = C$

Suponer que $G \neq B; H \neq C$, y $A - G - B,\ A - H - C.$

Sean $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ los defectos de los triángulos

Sea δ el defecto del $\Delta ABC \therefore\ \delta = d_1 + d_2 + d_3$ pero $\Delta AGH \sim \Delta ABC\ \therefore\ \delta = d_1$

$\dashrightarrow \dashleftarrow\ \blacksquare$

Capítulo II: Geometría no euclidiana.

Introducción:

En el capítulo anterior se describió una Geometría elemental euclidiana desde un punto de vista fundamentado.

Alrededor del siglo XIX, se inventó una nueva geometría totalmente distinta a la geometría de Euclides. En esta geometría no existe una veracidad física de las cosas, pero sus postulados son compatibles unos con otro. Esta geometría emergió como una creación arbitraria de la mente humana y como algo que el mundo le haya impuesto al hombre.

La controversia mayor ocurre en el quinto postulado de Euclides, el postulado de las paralelas. A este quinto postulado le falta concisión y la compresibilidad de los otros cuatro. En otras palabras, el quinto postulado no satisface las exigencias del método Griego de la axiomática material.

El quinto postulado siempre fue atacado por los matemáticos de la época. El mismo Euclides intentó evitar el postulado pero no pudo pues lo necesitaba para demostrar proposiciones.

Los diversos intentos para deducir el quinto postulado a partir de los primeros axiomas tuvo ocupado a los geómetras por más de dos mil años. En algunos de estos desarrollos encontramos avances de la matemática moderna, pero nunca se llegó a una demostración.

En el año 1733, cuando se hizo una publicación científica del postulado de las paralelas, el padre Jesuita italiano Girolamo Saccheri (1667-1733), profesor de matemáticas de la universidad de Pavía, hizo un esfuerzo para demostrar el postulado de las paralelas usando lo que llamamos la “reducción al absurdo”. Saccheri utilizó un cuadrilátero con dos ángulos rectos y dos lados iguales, entonces los otros dos ángulos son iguales y se presentan tres posibilidades; que los ángulos sean obtusos agudos o rectos. Si eliminaba las dos primeras opciones demostraba el teorema. Pero sólo pudo eliminar la opción de que fueran obtusos y nunca encontró argumento suficiente para descartar la idea de que los ángulos fueran agudos.

Otro personaje que intentó demostrar el postulado fue el analista ítalo Francés Adrien-Marie Legendre (1752-1833). Utilizó tres hipótesis; que la suma los ángulos de un triángulo sea menor igual o mayor que dos ángulos rectos. Sólo pudo eliminar la primera hipótesis pero no las demás. Sin embargo, se destaca por su gran consistencia y es considerado por su gran persistencia en intentar demostrar el postulado.

En esta nueva geometría, la no euclidiana, existen teoremas que contradicen a la geometría euclidiana, pero que no se contradicen entre sí. Los primeros en darse cuenta de esto fueron Karl Friedich Gauss (1777-1855), Janos Bolyai (1802-1860) y Nicolai Lobachevsky (1793-1856).

La fundación de la Geometría no Euclidiana pertenece principalemente a Bolyai y Lobachevsky, ya que publicaron sus principales hallazgos frente a este tema.

Otro personaje importante es Bernhard Riemann (1826-1866), el cual demostró que si se decarta la infinidad de una recta y se admite que es indefinida, se puede desarrollar otra geometría no Euclidiana. Con el trabajo de Riemann se inaugura un segundo período en el desarrollo de la Geometría no Euclidiana, la cual es aplicable en la teoría de la Relatividad.

Hasta el momento no se ha mencionado el quinto postulado de Euclides en base al paralelismo. Si se Considera la noción de paralelismo, surgen ciertos cambios. Es necesario entonces, analizar el quinto postulado.

Postulado las paralelas de Euclides: Dada una línea L y un punto fuera de L , existe una y solo una línea L' que contiene a P y es $\parallel$ a L.

Durante la primera mitad del siglo XIX empieza a surgir la idea de que si el postulado V es un verdadero postulado, se puede negar siempre y cuando se acepten los demás, esto no debería conducir a una contradicción.

Durante un par de milenios el postulado de las paralelas se consideró una ley natural. En el S.XIX, Lobachevski, Bolyai y Gauss descubrieron que se puede obtener una teoría matemática perfectamente consistente comenzando con un postulado que enuncie que las paralelas existen, pero niega que son únicas.

A través de esta idea los matemáticos empiezan a gestar las geometrías no Euclidianas, siendo Karl Friedich Gauss el que empieza a indagar en estas ideas, sin embargo no existe una obra redactada por él acerca de este tema pues temía que fueran consideradas insensatas.

Quienes continuaron con esta idea y si publicaron escritos fueron el ruso Nikolai Ivanovich Lovachevsky y el húngaro Johann Bolyai.

Ambos personajes producen las bases de las Geometrías no Euclidanas, siendo Lobachevski quien lo hace más decididamente el cual niega el V postulado de Euclides y dice que por un punto exterios a una recta para más de una paralela.

Esto trae Consecuencias, las cuales serán estudiadas a medida que se desarrollen este tipo de Geometría, un ejemplo de esto es que al cortar las paralelas cortadas por una transversal, sucede que, además surgen cambios en los ángulos exteriores de figuras y en la semejanza de éstas.

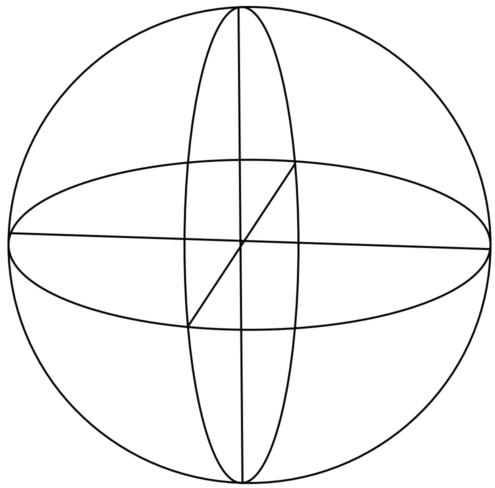
Postulado de las paralelas de Lobachevski:"*Dada una línea L y un punto P fuera de L, hay cuando menos dos líneas L' y L'' que contienen a P y son paralelas a L.*

A continuación se estudiará la Geometría usando el Postulado de las paralelas de Riemann: "*No existen dos líneas en el mismo plano que sean paralelas".*

Con esto Riemann abandona la metodología Euclideana de basar todas las demostraciones sobre las cuales se usa la regla y el compás, redefiniendo a la geometría como el estudio de cartas, espacios acotados y no-acotados capaces de contener cualquier número de dimensiones, junto con un sistema de coordenadas, y una métrica que define la menor distancia entre dos puntos.

2.1 Geometría de Riemann

Sea S la superficie de una esfera en el espacio (de radio 1). En esta esfera se basa el Modelo de Riemann.



Se define círculo máximo como un círculo que es la intersección de S con un plano que pasa a través del centro.

Si t, u son puntos de S , la trayectoria más corta sobre S es un arco de un círculo máximo, Por lo tanto estamos frente a una nueva geometría, la cual llamaremos Geometría Esférica.

Puntos: Se mantienen los puntos de S

Líneas: círculos máximos.

Se cumple que "Toda línea separa el "plano" en dos semi-planos convexos".

Pero no se cumple que:

-Dos puntos no determinan necesariamente una única línea.
-Dos líneas siempre se intersectan.
-Las líneas son finitas en extensión. Distancia máxima: π
-La separación sobre líneas: existen puntos $A-B-C$ y $AB = BC = AC$
-La perpendicular a una línea no siempre es única.
-Algunos triángulos tienen dos ángulos rectos.

2.2 Geometría Hiperbólica

En el siglo XVIII el jesuita Girolamo Saccheri, profesor de matemáticas en la Universidad de Pavia en Italia propuso negar el postulado e las Paralelas de Euclides, es decir, trabajó con 5 axiomas, de los los cuales los cuatro primeros coinciden con lo de Euclides y el quinto postulado es la negación del postulado de las Paralelas.

Saccheri desarrolló un proceso deductivo, más bien llamado la "Lógica demostrativa", que ya había sido utilizada por Euclides, el cual dice que "aunque se admita como hipótesis la falsedad de la proposición que se quiere demostrar, se llega igualmente a concluir que es verdadera"

En base a esta idea aparecieron teoremas que parecían a simple vista complicados, pero que no eran incoherentes. Saccheri sin darse cuenta había desarrollado la primera Geometría no Euclidiana.

Cuadrilátero de Saccheri

O también llamado la figura fundamental de Saccheri.

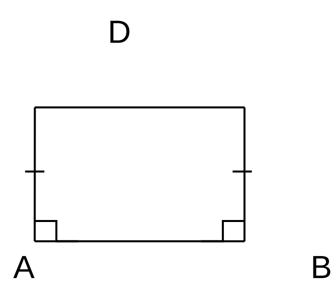
Def: El cuadrilátero $ABCD$ se llama de "<u>Saccheri</u>" si los ángulos A y B son rectos y $\overline{AD} \simeq \overline{BC}$.

$\overline{AB}$: Base inferior

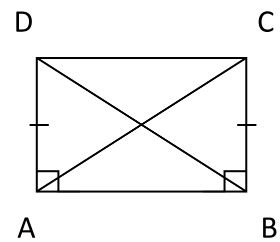
C

$\overline{DC}$: Cima

$\sphericalangle D$ y $\sphericalangle C$: Ángulos de la cima.



<u>Teorema 1</u>: *Las diagonales de un cuadrilátero de Saccheri son congruentes.*



<u>Teorema 2</u>: *Sean $ABCD$ y $A'B'C'D'$ cuadriláteros de Saccheri talque:*

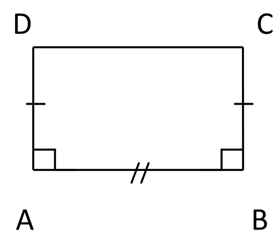
$\overline{AB} \simeq \overline{A'B'}$ Y $\overline{AD} \simeq \overline{A'D'}$

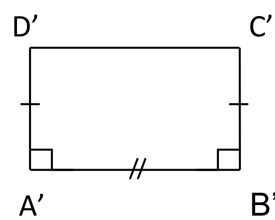
entonces:

$\overline{DC} \simeq \overline{D'C'}$

$\sphericalangle D \simeq \sphericalangle D'$

$\sphericalangle C \simeq \sphericalangle C'$

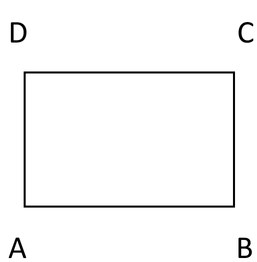


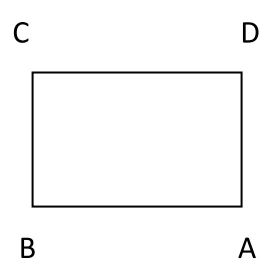


Considerar que el teorema anterior dice que un cuadrilátero de Saccheri depende o está determinado por $\overline{AB}\ y\ \overline{AD}$.

<u>Teorema 3</u>: *En un cuadrilátero de Saccheri, los ángulos de la cima son congruentes.*

Por teorema anterior:





<u>Teorema 4</u>: *En un cuadrilátero de Saccheri, la cima es congruente con la base y más larga que la base.*

Recordar el concepto de Desigualdad Poligonal:

En general para todos los puntos $A, B\ y\ C$ se tiene que:

$\overline{AB} + \overline{BC} \geq \overline{AC}$

Si los puntos no son coloniales, se llama desigualad triangular

Si son coloniales, entonces:

$|a| + |b| \geq |a + b|$

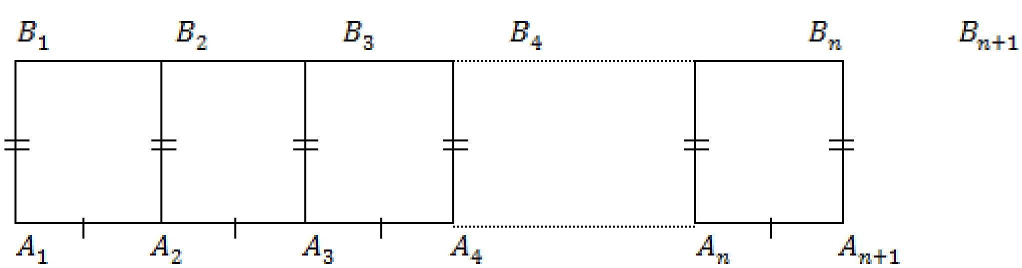
Ahora sí, $A_1, A_2, \ldots, A_n$, son puntos cualesquiera, $(n > 1)$, entonces:

$A_1A_2 + A_2A_3 + \cdots + A_{n-1}A_n \geq A_1A_n$

- Postulado de Arquímedes:

$Si\ M, m \in \mathbb{R}^+, entonces\ \exists\ p \in \mathbb{Z}^+\ tal\ que\ pm > M$

Sea $A_1A_2B_2B_1$ cuadrilátero de Saccheri.



Forman una secuencia de “n cuadriláteros de Saccheri” tales que:

$\overline{A_1A_2} = \overline{A_2A_3} = \cdots = \overline{A_nA_{n+1}}$

Por el teorema 2, tenemos:

$\overline{B_1B_2} = \overline{B_2B_3} = \cdots = \overline{B_nB_{n+1}}$

Por la desigualdad poligonal, tenemos:

$B_1B_2 + B_2B_3 + \cdots + B_nB_{n+1} \geq B_1B_{n+1}$

De donde:

$nB_1B_2 \geq B_1B_{N+1}$

Usando la desigualdad para,

$A_1B_1 + B_1B_{n+1} + B_{n+1}A_{n+1} \geq A_1A_{n+1}$

Por otro lado

$A_1B_1 + B_1B_{n+1} + B_{n+1}A_{n+1} \leq A_1B_1 + nB_1B_2 + A_1B_1$

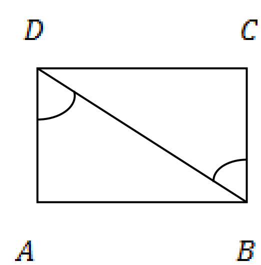
De donde:

$2A_1B_1 + nB_1B_2 \geq nA_1A_2$

Válida para todo n.

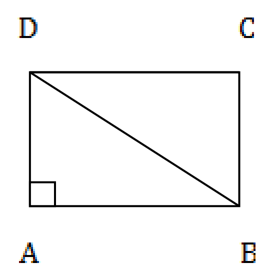
<u>Teorema 5</u>: *En todo cuadrilátero de Saccheri $ABCD$,*

Se tiene que $\measuredangle DBC \geq \measuredangle ADB$.



<u>Teorema 6</u>: *Si $\triangle DAB$ es rectángulo en A, entonces:*

$m\measuredangle B + m\measuredangle D \leq 90^\circ$

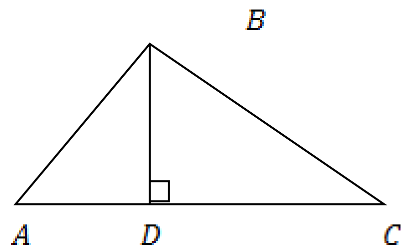


Esto trae consecuencias como por ejemplo;

-Los otros ángulos son agudos.

-La hipotenusa es mayor que cualquiera de los catetos.

<u>Teorema 7</u>: *En $\Delta ABC, D$ El pie de la perpendicular de B a $\overline{AC}$. Si $\overline{AC}$ es el lao más largo del ΔABC entonces, $A - D - C$.*



<u>Teorema 8</u>: *Si ABC es un triángulo, entonces:*

$$m\sphericalangle A + m\sphericalangle B + m\sphericalangle C \leq 180^\circ$$

Es necesario conocer algunos conceptos previos importantes;

Sea $\mathbb{R}$ ordenado por $\leq$ y sea $A \subseteq \mathbb{R}$.

Un elemento $x \in \mathbb{R}$ es una <u>cota superior</u> de A si $a \leq x, \forall\, a \in A$.

Un Elemento $s \in \mathbb{R}$ se llama el "<u>supremo</u>" de A si:

- s es una cota superior de A
- x es una cota superior de A entonces $s \leq x$.

Dicho en otras palabras el supremo es el menor elemento del conjunto de las cotas superiores de A.

<u>Axioma del supremo</u>: Todo conjunto no vacío de números reales acotado superiormente tiene supremo.

2.3 Fundamentos de la Geometría Hiperbólica

Luego de las ideas de Saccheri, fueron Bolyai y Lobachevski quienes presentaron los fundamentos para el nacimiento de la Geometría Hiperbólica. Estos fundamentos están en base a modelos del plano Hiperbólico, donde se produce un desarrollo axiomática de la Geometría también llamada Geometría Lobachevskiana.

El hecho de que Bolyai, Lobachevski y Gauss estaban plenamente convencidos de la independencia del quiento postulado hace que la historia los reconozca como los verdaderos descubridores de la Geometría Lobachevskiana. Sin embargo, el problema de la consistencia de esta geometría, es decir, estar seguros de que la teoría no era contradictoria, no lo pudieron resolver ellos estando en vida. Entonces fue necesario la participación de otro autores como por ejemplo Georg Friedrich Riemann, el cual intenta concebir espacios de n dimensiones con una métrica, es decir, alguna manera de medir distancias entre puntos infinitamente cercanos, relativa al punto de localización en el espacio, lo que es útil para el desarrollo de la Geometría Lobachevskiana.

En este capítulo se trabajará con el siguiente postulado: “Por un punto fuera de una recta se pueden trazar al menos 2 rectas que no es encuentran con la recta dada”. Éste es el postulado que remplaza al V postulado de Euclides y en el cual se basa el modelo de Geometría Hiperbólica.

Esto trae consecuencias como por ejemplo “la suma de los ángulos interiores de un triángulo es menor que 180º , es decir cualquier valor entre 0 y 180.”

Se definen en el plano Hiperbólico los conceptos:

Puntos: Consiste de los puntos interiores del círculo unitario

Líneas: Intercepciones con las líneas rectas Euclidianas, es decir, son cuerdas del círculo unitario cuyos extremos pertenecen al borde del círculo unitario. Entonces los segmentos que representan las rectas hiperbólicas son abiertos.

Angulo de paralelismo

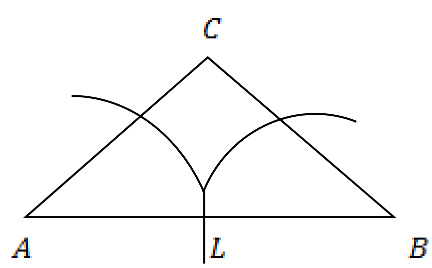
Recordar los Postulados de separación de un plano.

Dados una línea y un plano que la contenga, el conjunto de todos los puntos del plano que no están en la línea es la unión de dos conjuntos, tales que:

-Cada uno de los conjuntos es convexo.
-Si $P \in H_1$ y $Q \in H_2$, entonces $\overline{PQ} \cap L \neq \phi$.

En la geometría no Euclidiana es reemplazado por el Postulado de Pasch:

Sea ABC un triángulo y L una línea en el mismo plano, si L intersecta a $\overline{AB}$, entonces L intersecta a $\overline{AC}$ o $\overline{BC}$.

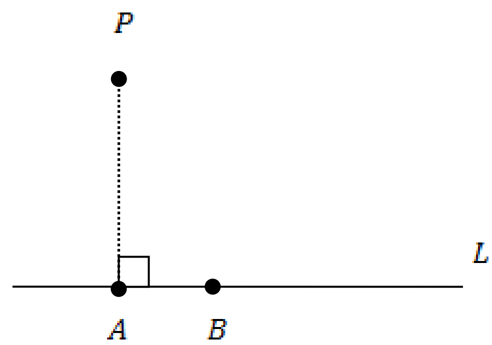


Angulo de paralelismo:

Sea L una línea y P un punto exterior a ella.

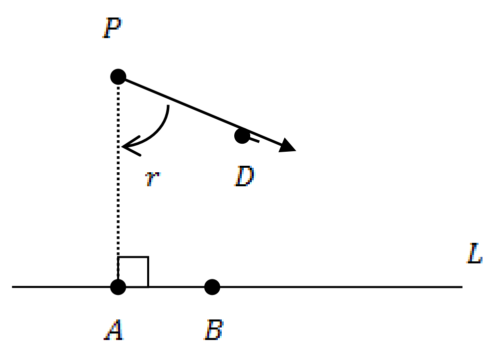
A: Pie de la perpendicular.

B: Otro punto de L.



Para cada número r entre 0 y 180 existe un único rayo $\overrightarrow{PD}$ que contiene a $\overleftrightarrow{AP}$ que contiene a B, tal que:

$$m\sphericalangle APD = r$$



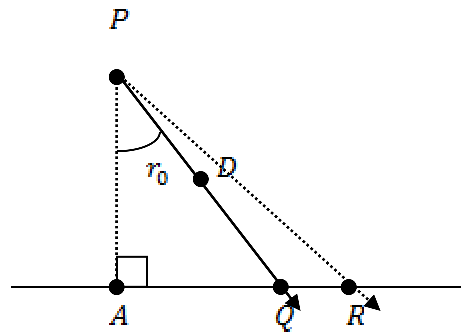
Sea $K = \left\{ r / \overrightarrow{PD}\ intersecta\ \overrightarrow{AB} \right\}$

- K no es vacío.
- K es acotado superiormente (Cualquier $r \geq 90$)

$\therefore$ K tiene supremo, sea $r_0 = \sup K$.

El número r_0 se llama el "<u>número crítico</u>" para P y $\overleftrightarrow{AB}$, y el $\sphericalangle APD$ con medida r_0 se llama "Angulo de paralelismo" de P y $\overleftrightarrow{AB}$.

<u>Teorema 1</u>: *Si* $m\sphericalangle APD = r_0$, *entonces* $\overrightarrow{PD}$ *no intersecta a* $\overrightarrow{AB}$.



Supongamos que $\overrightarrow{PD}$ intersecta a $\overrightarrow{AB}$ en Q y sea $R \ni A - Q - R$.

$\therefore Q \in int\sphericalangle APR$

$\therefore m\sphericalangle APD < m\sphericalangle APR \;\; o \;\; m\sphericalangle APR > r_0$

Lo que es una contradicción ya que $m\sphericalangle APR \in K$ y r_0 es cota superior.

<u>Teorema 2</u>: *Si* $m\sphericalangle APD < r_0$, *entonces* $\overrightarrow{PD}$ *intersecta a* $\overrightarrow{AB}$.

Demostración: Como $r_0 = \sup K$ y $m\sphericalangle APD < r_0$ se sigue que $m\sphericalangle APD$ no es una cota superior de K.

$\therefore$ Algún $r \in K$ es mayor que $m\sphericalangle APD$.

Sea $D' \ni m\sphericalangle APD' = r > m\sphericalangle APD$, entonces $\overrightarrow{PD'}$ intersecta a $\overrightarrow{AB}$ en F. (Pues $r \in K$)

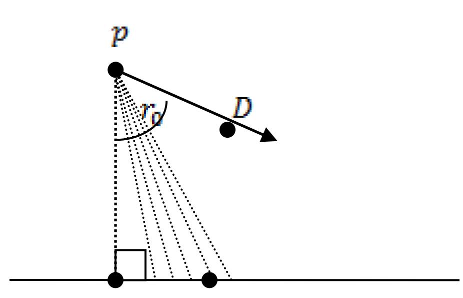
Pero $D \in int\sphericalangle APD'$

Por teorema de la barra transversal $\overrightarrow{PD}$ intersecta a $\overline{AF}$ $\therefore$ intersecta a $\overrightarrow{AB}$.

Considerar que:

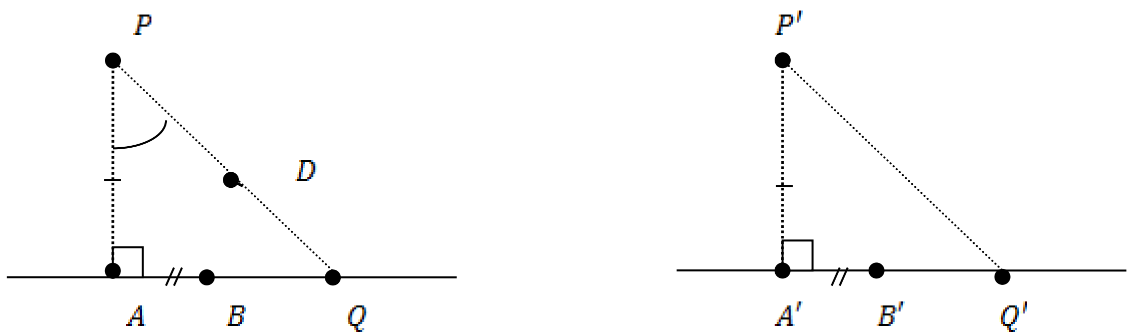
Si $m\sphericalangle APD = r_0$, cualquier ángulo en el interior de // intersecta a $\overrightarrow{AB}$.

- No se definió en términos de P, A y B. Resulta que r_0 depende únicamente de la distancia AP.



A B

Teorema 3: *Sean r_0 y $r_0{}'$ los números enteros de P con respecto a $\overleftrightarrow{AB}$ y de P' con respecto a $\overleftrightarrow{A'B'}$ respectivamente. Si $AP = A'P'$ entonces $r_0 = r_0{}'$.*



Sean:

$$K = \left\{ r \,/\, \overrightarrow{PD} \text{ intersecta } \overrightarrow{AB} \right\} \quad \text{y} \quad K' = \left\{ r' \,/\, \overrightarrow{P'D'} \text{ intersecta } \overrightarrow{A'B'} \right\}$$

P.d: $sup\ K = \sup K'$

Si $r \in K$, sea Q el punto donde $\overrightarrow{PD}$ intersecta a $\overrightarrow{AB}$. Sea Q' el punto de$\overrightarrow{A'B'} \ni \overline{AQ} \simeq \overline{A'Q'}$,

Entonces:

$\Delta PAQ \simeq \Delta P'A'Q'$

$\therefore m\measuredangle A'P'Q' = r$

$\therefore r \in K'$, pues $\overrightarrow{P'Q'}$ intersecta a $\overrightarrow{A'B'}$, de donde $K \subset K'$

$\therefore supK = supK'$

Teorema 4: Si $AP' > AP$ entonces la medida del ángulo de paralelismo en P' es menor o igual que la medida del ángulo de paralelismo en P, o sea:

Si $AP' > AP \Rightarrow r_0{}' \leq r_0$

Sea $\overrightarrow{PD} \ni m\sphericalangle APD = r_0$ y $\overrightarrow{P'D'}$ de modo que $m\sphericalangle AP'D' = r_0$, $\overleftrightarrow{PD}$ y $\overleftrightarrow{P'D'}$ no se intersectan.

$\therefore$ Todos los puntos de $\overrightarrow{P'D'}$ están al lado de $\overleftrightarrow{PD}$ que contienen a P'.

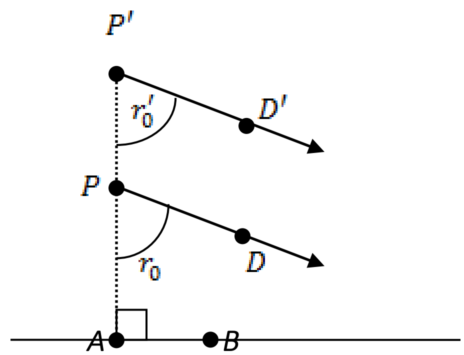
Todos los puntos de $\overrightarrow{AB}$ están al lado de $\overleftrightarrow{PD}$ que contienen a A.

Como $A - P - P'$, $\overrightarrow{P'D'}$ y $\overrightarrow{AB}$ en lados opuestos.

$\therefore$ $\overrightarrow{P'D'}$ no intersecta a $\overrightarrow{AB}$

$\therefore m\sphericalangle AP'D' \geq r_0{}'$

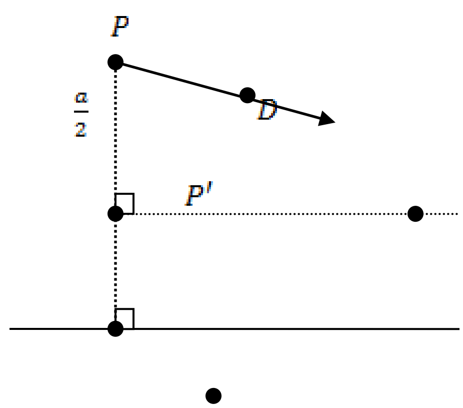
$\therefore r_0 \geq r_0{}'$



Teorema 5:

Sean $A' - P' - P$ *con* $AP' = \frac{AP}{2}$.

Si $r_0 < 90$, *entonces* $r_0{}' < 90$



Demostración:

Sea $\overrightarrow{PD} \ni m\sphericalangle APD = r_0 < 90$

$\overleftrightarrow{P'E} \perp \overleftrightarrow{AP}$

Si $\overrightarrow{PD}$ no intersecta a $\overleftrightarrow{P'E}$

$\therefore$ El numero critico $r_0{}''$ de P con respecto a $\overleftrightarrow{P'E}$ es menor o igual que r_0. O sea $r_0{}'' \leq r_0$, pero $r_0'' = r_0{}'$.

$\therefore r_0{}' \leq r_0 < 90$

$\therefore r_0' < 90$

Supongamos que $\overrightarrow{PD}$ intersecta a $\overleftrightarrow{P'E}$ en el puto F y sea $G \ni P - F - G$, entonces $\sphericalangle AP'G$ es agudo ($G \in int\sphericalangle AP'F$).

$\overrightarrow{AB}$ no intersecta a $\overrightarrow{P'G}$:

-En puntos más allá de G.

-En P', por Lipo't.

-En G, pues en caso contrario $\overrightarrow{PD}$ intersecta a $\overrightarrow{AB}$.

-En puntos entre P' y G. Si lo hubiera $\overrightarrow{AB}$ intersecta a $\overline{FG}$ o $\overline{P'F}$ por Pasch.

-En $\overline{FG}$, pues no intersecta a $\overrightarrow{AB}$.

-En $\overline{P'F}$, por teorema del ángulo externo.

$\therefore \overrightarrow{P'G}$ no intersecta a $\overrightarrow{AB}$ y $\sphericalangle AP'G$ agudo.

Así $r_0{}' \leq m\sphericalangle AP'G < 90$

<u>Teorema 6</u>: *Si $r_o(P) < 90$ para algún punto P, entonces $r_0 < 90$ para todo punto Q.*

Para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene:

$$AP_n = \frac{AP}{2^n}$$

Demostración:

P.d: Para cada $n \in \mathbb{N},\ r_0(P_n) < 90$

Por inducción, si $n = 1$

$$AP_1 = \frac{AP}{2}$$

Por teorema anterior:

$r_0(P_1) < 90$

Ahora, supongamos que es válido para $n-1$, o sea si:

$$AP_{n-1}=\frac{AP}{2^{n-1}}$$

Entonces:

$r_0(P_{n-1})<90$

Para n,

$$AP_n=\frac{AD}{2^n}=\frac{AP}{2^{n-1}}\cdot\frac{1}{2}$$

$$AP_n=\frac{AP_{n-1}}{2}$$

Pero $r_0P_{n-1}<90$

$\therefore r_0(P_n)<90, \forall n\in\mathbb{N}$

Supongamos ahora que existe un punto $B\ni r_0(B)=90$.

Como $\lim_{n\to\infty}AP_n=0$, entonces existe un $k\ \in\mathbb{N}$

$AP_k<AB$

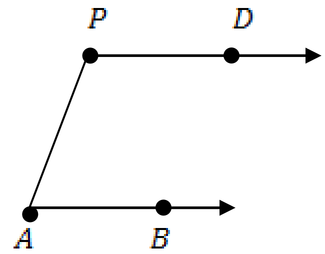
$\therefore r_0(P_k)\geq r_0(B)=90$

Lo cual es una contradicción pues $r_0(P_k)<90$

$\therefore r_0(Q)<90\ ,\forall Q.$

Triángulos abiertos y rayos críticamente paralelos

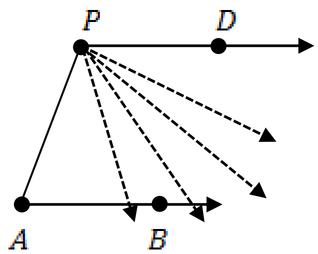
Def: Un triángulo abierto es la unión de dos rayos paralelos y el segmento rectilíneo que une los origines de los rayos.



$\Delta DPAB$, (D y B al mismo lado de la recta $\overline{AP}$)

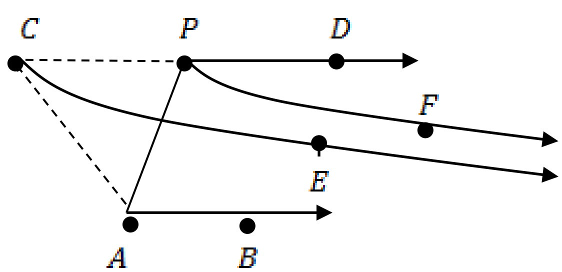
Si $DPAB$ es un triángulo abierto, tal que:

Todo rayo interior del $\sphericalangle DPA$ intersecta al $\overrightarrow{AB}$, entonces se dice que $\overrightarrow{PD}$ es críticamente paralelo a $\overrightarrow{AB}$; se anota $\overrightarrow{PD}|\overrightarrow{AB}$.



La relación no es necesariamente simétrica.

<u>Teorema1</u>: *Si* $\overrightarrow{PD}|\overrightarrow{AB}$ *y* $C-P-D$, *entonces* $\overrightarrow{CD}|\overrightarrow{AB}$.



Demostración:

Sea $\overrightarrow{CE}$ interior del $\sphericalangle DCA$ y suponga que $\overrightarrow{CE}$ no intersecta a $\overrightarrow{AB}$.

Existe un rayo $\overrightarrow{PF}$ interior al $\sphericalangle DPA$, tal que $\sphericalangle DPF \simeq \sphericalangle DCE$, ($\sphericalangle DPA > \sphericalangle DCA$).

$\therefore$ $\overrightarrow{PF}$ no intersecta a $\overrightarrow{CE}$, (Teorema de los ángulos exteriores)

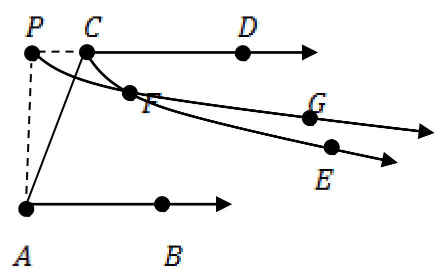
Ahora bien, $\overrightarrow{PF}$ a un lado de $\overleftrightarrow{CE}$

$\overrightarrow{AB}$ a un lado de $\overrightarrow{CE}$

Pero $\overrightarrow{CE}$ es interior a $\sphericalangle PCA$

$\therefore$ $\overrightarrow{PF}$ no intersecta a $\overrightarrow{AB}$ $\rightarrow\leftarrow$ ■

<u>Teorema 2</u>: *Si $\overrightarrow{PD}|\overrightarrow{AB}$ y $P-C-D$, entonces $\overrightarrow{CD}|\overrightarrow{AB}$.*



Demostración:

Sea $\overrightarrow{CE}$ interior del $\sphericalangle DCA$, tal que $\overrightarrow{CE}\cap\overrightarrow{AB}=\emptyset$

Sea $F\in\overrightarrow{CE}-C$ y $G\ni P-F-G$.

- El $\overrightarrow{PF}$ no intersecta a $\overrightarrow{AB}$ (Pasch)
- $\overrightarrow{FG}$ no intersecta a $\overrightarrow{AB}$, (En distintos semiplanos con respecto a $\overleftrightarrow{CE}$)
- $\overrightarrow{PF}$ no intersecta a $\overrightarrow{AB}$ $\rightarrow\leftarrow$ ■

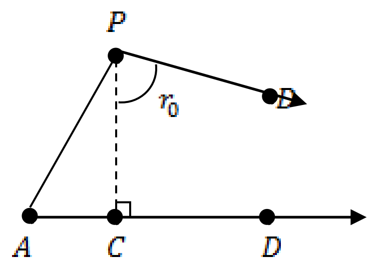
Dos rayos R y R' son equivalentes si uno de ellos contiene al otro; se anota $R\sim R'$.

Claramente se puede notar que $\sim$ es una relación de equivalencia.

Resumiendo los teoremas anteriores, si $\overrightarrow{RD}|\overrightarrow{AB}$ y $R\sim\overrightarrow{RD}$, entonces $R|\overrightarrow{AB}$.

<u>Teorema 3</u>: *Si $R_1|R_2$ y $R_1{}'\sim R_1$ y $R_2'\sim R_2\Rightarrow R_1'|R_2{}'$.*

Teorema 4: *La paralela critica a un rayo dado a través de un punto exterior única.*

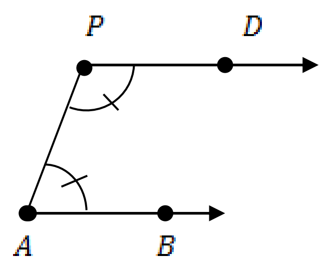


Sea $\overrightarrow{RD}|\overrightarrow{AB}$.

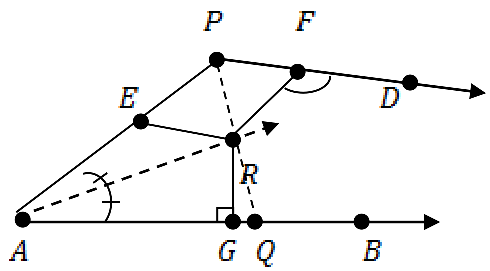
Sea C el pie de la perpendicular de P con respecto a $\overleftrightarrow{AB}$,
Entonces $\overrightarrow{PD}|\overrightarrow{CB}$ ($B \ni A - C - B$).
$m\sphericalangle CPD = r_0$
Sabemos que en el lado de $\overleftrightarrow{PC}$ que contiene a B, existe un único rayo
$\overrightarrow{PD} \ni m\sphericalangle CPD = r_0$.

Dos triángulos abiertos se dicen equivalentes, si los rayos que forman sus lados son equivalentes.

Un triángulo abierto $DPAB$ se llama *isósceles* si $\sphericalangle P \simeq \sphericalangle A$.



Teorema 5: *Si $\overrightarrow{PD}|\overrightarrow{AB}$, entonces $\Delta DPAB$ es equivalente a un triángulo isósceles abierto que tiene a P como vértice.*



Como $\overrightarrow{PD}|\overrightarrow{AB}$ el rayo bisector del $\sphericalangle APD$ intersecta a $\overrightarrow{AB}$ en un punto Q.
Por el teorema de las barras transversales, el rayo bisector del $\sphericalangle PAB$ intersecta a $\overline{PQ}$ en un punto R.
Sean $E,\ F$ y G los pies de las perpendiculares de R a $\overleftrightarrow{AP}, \overleftrightarrow{PD}$ y $\overleftrightarrow{AB}$ respectivamente:

$\overline{ER} = \overline{RG}\ (LAA)$

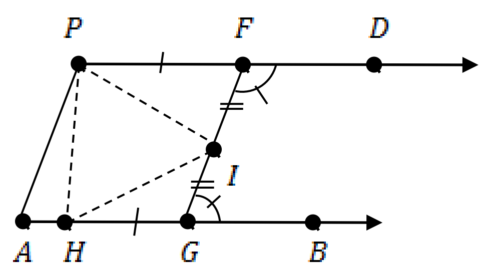
$\overline{ER} = \overline{RF}\ (LAA)$, de donde,

$\overline{RF} = \overline{RG}$

$\sphericalangle RFG \simeq \sphericalangle RGF, \Delta$ isósceles.

Por sustracción $\sphericalangle DFG \simeq BGF \therefore\ \Delta DFGB$ abierto isósceles, equivalente a $\Delta DPAB$.

Para P un vértice:



H en el rayo opuesto a $\overrightarrow{GB}$ de modo que $HG = PF$.

I punto medio de FG

$\therefore\ PI = HI$

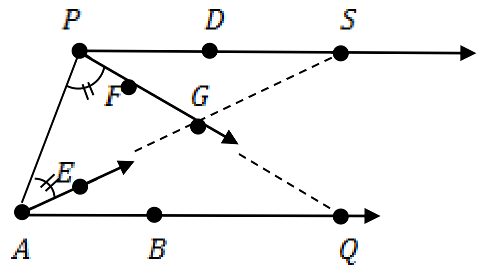
$\sphericalangle FPI \simeq \sphericalangle GHI$

$\sphericalangle IPH \simeq \sphericalangle IHP, \Delta$ isósceles.

$\sphericalangle FPH \simeq \sphericalangle HPF$

$\therefore \Delta\ DPHB$ isósceles abierto equivalente al dado.

Teorema 6: *El paralelismo crítico es una relación simétrica,* $\overrightarrow{PD}|\overrightarrow{AB} \Longrightarrow \overrightarrow{AB}|\overrightarrow{PD}$.



Sea $\overrightarrow{PD}|\overrightarrow{AB}$ y podemos suponer $\Delta DPAB$ isósceles abierto

Sea $\overrightarrow{AE}$ cualquier rayo interior del $\sphericalangle PAB$

Sea $\overrightarrow{PF}$ un rayo interior del $\sphericalangle APB \ni \sphericalangle DPF \simeq \sphericalangle BAE$

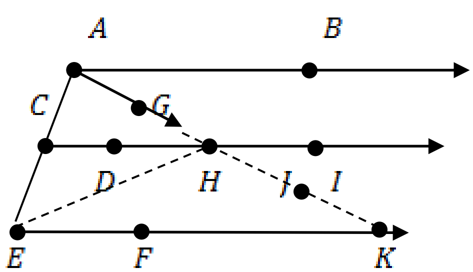
$\overrightarrow{PF}$ intersecta a $\overrightarrow{AB}$ en Q y $\overrightarrow{AE}$ intersecta a $\overrightarrow{PF}$ en G.

Teorema 7: *Si dos rayos no equivalentes son críticamente paralelos a un tercero, entonces son críticamente paralelos entre sí.*

Si $\overrightarrow{AB}|\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CD}|\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{AB} \not\simeq \overrightarrow{EF}$, entonces $\overrightarrow{AB}|\overrightarrow{EF}$.

Se pueden dar 2 casos:

Caso (a):



Supongamos que $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{EF}$ en lados opuestos con respecto a $\overrightarrow{CD}$.

Supongamos $\overline{AE}$ intersecta a $\overleftrightarrow{CD}$ en C, A y E en lados opuestos.

Sea $\overrightarrow{AG}$ cualquier rayo interior del $\sphericalangle EAB$.

$\overrightarrow{AG}$ intersecta a $\overrightarrow{CD}$ en H.

Sea I tal que $C - H - I$

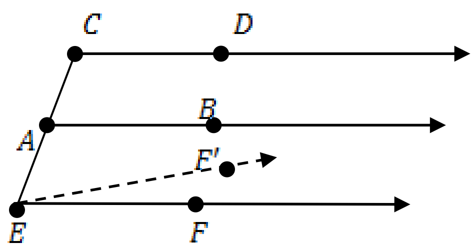
Sea J tal que $A - H - J$

Entonces $\overrightarrow{HI}|\overrightarrow{EF}$ y $\overrightarrow{HJ}$ rayo interior del $\sphericalangle EHI$

$\therefore$ $\overrightarrow{HJ}$ intersecta a $\overrightarrow{EF}$ en un punto K

$\therefore$ $\overrightarrow{AG}$ intersecta a $\overrightarrow{EF}$.

Caso (b):



Si $\overrightarrow{CD}$ y $\overrightarrow{EF}$ en lados opuestos con respecto a $\overleftrightarrow{AB}$.

Podemos suponer que $\overline{CE} \cap \overleftrightarrow{AB} = \{A\}$

A través de E existe un único rayo $\overrightarrow{EF'}$ críticamente paralelo a $\overrightarrow{AB}$

Por el caso (a) $\overrightarrow{CD}|\overrightarrow{EF'}$, sabemos por hipótesis que $\overrightarrow{CD}|\overrightarrow{EF}$

$\therefore F' = F$

Triángulos Cerrados

Anteriormente se cumple que: Dada una línea L y un punto P fuera de L, hay al menos dos líneas que contienes a P y son paralelas a L.

En general $r_0 \leq 90$, $r_0 < 90$.

Def: Si $\overrightarrow{PD}|\overrightarrow{AB}$, entonces $\Delta DPAB$ se llama cerrado.

<u>Teorema 1</u>: *En todo triangulo cerrado, cada ángulo exterior es mayor que su ángulo interior cerrado.*

Es decir, si $\overrightarrow{PD}|\overrightarrow{AB}$ y $C - A - B$, entonces $\sphericalangle CAP > \sphericalangle P$.

Demostración:

Caso (a):

$\Delta DPAB$ isósceles.

Como $r_0 < 90, \sphericalangle P$ es agudo.

$\therefore \sphericalangle A$ es agudo.

$\therefore \sphericalangle CAP$ es obtuso.

Caso (b):

Supongamos que $\Delta DPAB$ no es isósceles.

$\therefore$ Es equivalente a un triángulo isósceles $\Delta DPEB$ que también es cerrado.

Si $E = A$, ya está demostrado.

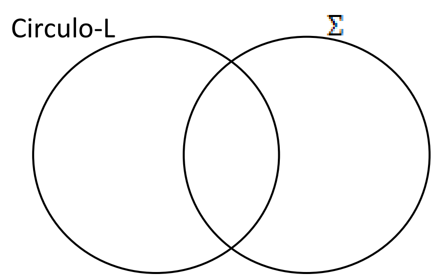
Si $A - E - B$, entonces:
$p > r$ (Caso anterior)
$p + q + s \leq 180$
$t = 180 - q \geq p + s > r + s$

2.4 Modelo de Poincaré y la compatibilidad de la geometría plana Lobachevsquiana.

Aceptaremos la compatibilidad del modelo de la Geometría plana Euclidiana vista previamente.

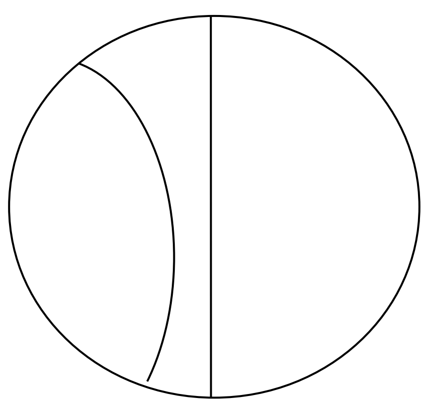
Sea Σ un circulo fijo en un plano euclidiano (radio 1) llamado "circulo fundamental".

Circulo-L: circulo C ortogonal al Σ(tangentes en los puntos de intersección son perpendiculares).



Puntos del plano-L: puntos del interior $E\ de\ \Sigma$

Línea L: la intersección de E y un diámetro de Σ



Por ejemplo: por dos puntos pasa una única recta que contiene a los dos (I.1)

Distancia: para una par de puntos x, y(en Σ o en el interior) sea xyla distancia euclidiana usual.

Sea x, ydos puntos en el plano E..Por ellos pasa una única recta-L que corta a Σ en R y S.

En el plano E definimos

$$\delta(x,y) = \log\frac{yR/xR}{xS/yS}$$

Siendo R y S los puntos donde la "recta" corta a Σ claramente y entre x y S

0.0) $\delta: E \times E \mapsto \mathbb{R}$ es una función.

0.1) Cada línea tiene un sistema coordenado.
Sobre cualquier L-línea, sea y un punto fijo y definamos para $x \in L$

$$f(x) = \log\frac{yR/xR}{yS/yS}$$

Así tenemos una función $f: l^s \mapsto \mathbb{R}$

Para probar que es un sistema coordenado debemos demostrar que:
$\delta(t,v) = |f(t) - f(v)|$

1° $\delta(t,v) = |\log\frac{vR/tR}{tS/vS}|$

$$|f(t) - f(v)| = |\log\frac{yR/tR}{tS/yS} - \log\frac{yR/vR}{vS/yS}|$$

$$= |\log\frac{\frac{yR/tR}{tS/yS}}{\frac{yR/vR}{vS/yS}}|$$

$$= |\log\frac{\left(\frac{yR}{tR}\right)\left(\frac{vS}{yS}\right)}{\left(\frac{tS}{yS}\right)\left(\frac{yR}{vR}\right)}|$$

$$= |\log\frac{(yR\cdot vS)/(tR\cdot yS)}{(tS\cdot yR)/(yS\cdot vR)}|$$

$$=\left|\log\frac{(yR\cdot vS)\,(yS\cdot vR)}{(tS\cdot yR)\,(tR\cdot yS)}\right|$$

$$=\left|\log\frac{vS\cdot vR}{tS\cdot tR}\right|$$

$$=\left|\log\frac{vR\,/tR}{tS\,/vS}\right| =\delta(t,v)\ ■$$

De donde se cumple el postulado de la regla.

Se mantiene la definición de separación, segmentos y rayo vistos previamente.

Todos los teoremas vistos se conservan válidos en la nueva geometría pues se basan en los postulados incluso postulados de separación.

Anexos

Modelo Esférico para la Geometría Riemanniana

Encima de este modelo se ha colocado un triángulo para mostrar que la suma de los ángulos interiores de éste suma **más** de 180 grados.

Modelo Hiperbólico

Es un modelo de curvatura "negativa", con lo cual la suma de los ángulos interiores de un triángulo suman **menos** de 180 grados,

Bibliografía

-L. Santaló (1996); Geometrías no Euclidianas. Editorial Universitaria de Buenos Aires.

- Howard Eves, "Estudio de las Geometrías" Tomo I, Universidad de Maine

-Roberto Bonola (1945), Geometrías no Euclidianas: Exposición Histórica Crítica de su Desarrollo.

-Débora María Tejada, Geometrías no Euclidianas; Universidad Nacional de Colombia Sede Medellín

-A.S. Smogorzhevski, Acerca de la Geometría de Lobachevski. Editorial Mir Moscú