UNIVERSIDAD DEL BÍO-BÍO
FACULTAD DE EDUCACIÓN Y HUMANIDADES
ESCUELA DE PEDAGOGÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Modelos Matemáticos de Movimiento Vibratorio

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE PROFESOR DE ENSEÑANZA MEDIA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Autora:
Camila Arriagada Sandoval

Profesor Guía:
Dr. Aníbal Coronel Pérez

Chillan, 2015

*" La matemática es el trabajo del espíritu humano
que ésta destinado tanto a estudiar como a conocer,
tanto a buscar la verdad como a encontrarla"*
Evaniste Galois

Agradecimientos

Al finalizar un trabajo tan laborioso y lleno de dificultades como la elaboración de una tesis, quiero agradecer al Dr. Aníbal Coronel Pérez por haber aceptado participar en este proceso de investigación. Gracias por su paciencia, dedicación, motivación y tiempo que entrego con esmero, logrando así hacer fácil lo defícil. Ha sido un privilegio poder contar con su apoyoy sus más sabios consejos.

Además quiero agradecer a mi esposo e hija por estar presente en cada momento difícil siendo ustedes las razones de seguir adelante y no rendirme jamás.

Índice general

0.1. Introducción

En la últimas décadas los modelos matemáticos son una componente especial para la simulación numérica de fénomenos físicos y sociales donde es posible aplicar investigación cualitativa. Es así que si miramos a nuestro alrededor podremos observar que la matemática está presente en muchos aspectos de la vida diaria, es por eso que el ser humano en su búsqueda por querer comprender las cosas examina las características presentes de su hábitat, trata de comprenderlas y encuentra una manera para poder simplificar su aplicación. En otras palabras, construir modelos matemáticos para los problemas del mundo real se ha destacado como uno de los factores de mayor importancia en el desarrollo teórico del siglo XX y XXI y en cada una de las ramas de la ciencia.

Genericamente hablando recordemos que: "Un modelo constituye una representación abstracta de un cierto aspecto de la realidad y tiene una estructura que está formada por los elementos que lo caracterizan, por el aspecto de la realidad modelado, y por las relaciones entre estos sistemas". En consecuencia un modelo matemático es la representación matemática (abstracta) de algún fenómeno de la realidad. Además, es necesario precisar que una de las características de todo modelo es la simplificación, es decir, tenemos que omitir algunos detalles del mundo real que se trata de modelar, porque si consideramos todos los detalles, resultaría tan complicado como la realidad misma y por lo tanto inútil.

En este trabajo nos enfocamos en un fenómeno específico de la Mecánica el cual es el Movimiento Vibratorio. La comprensión de este fenómeno, naturalmente es relevante en muchas situciones diarias, dodo que los sistemas que nos rodean (vehículos, aviones, maquinaria) se encuentran en movimiento impulsado por fuerzas externas o internas que causan vibraciones del sistema.

Los modelos matemáticos que se estudiarán son basados en la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias y son originados por la aplicación de la segunda Ley de Newton.

El movimiento oscilatorio es un movimiento en torno a un punto de equilibrio estable. Los puntos de equilibrio mécanico son, en general, aquellos en los cuales la "Fuerza"neta que actúa sobre la partícula es cero. Si el equilibrio (elongación) da lugar a la aparición de una fuerza restauradora que devolverá la partícula hacia el punto de equilibrio, tales como una masa suspendida del extremo de una cuerda (un péndulo simple), cuando la masa se desplaza de su posición de reposo y se suelta se producirán oscilaciones.

En general, todos los cuerpos que poseen masa y elasticidad son capaces de vibrar, la mayoría de las máquinas y las estructuras experimentan vibración hasta cierto grado y , su diseño requiere generalmente consideración de su conducta oscilatoria.

Hay dos clases generales de vibraciones, libres y forzadas. La vibración libre es la que ocurre cuando un sistema oscila bajo la acción de fuerzas inherentes al sistema mismo y, cuando las fuerzas externamente aplicadas son inexistentes. En cambio la que tiene lugar bajo la extensión de fuerzas externas es una vibración forzada, cuando la excitación es oscilatoria el sistema es obligado a vibrar la frecuencia de excitación.Si esta coincide con una de las frecuencias naturales del sistema, se produce una situación de resonancia y ocurren oscilaciones peligrosamente grandes.

La falla de estructuras mayores como puentes, edificios o alas de aviones es una horrible posibilidad, bajo resonancia. Así el cálculo de las frecuencias naturales es de importancia capital en el estudio de vibraciones y es aquí donde las ecuaciones diferenciales juegan un gran rol .

Cabe mencionar también que de todos los movimientos oscilatorios, el más importante es "Movimiento Armónico Simple (M.A.S.)", debido a que además de ser el de más sencilla descripción matemática, es una aproximación muy buena de muchas oscilaciones presentes en la naturaleza. El M.A.S. es un movimiento periódico, oscilatorio y vibratorio en ausencia de fricción, producido por la acción de una fuerza recuperadora que es directamente proporcional al desplazamiento pero en sentido opuesto, y por consiguiente la ecuación de la fuerza restauradora viene dada por la ley de Hooke.

Además muchos otros fénomenos donde existe vibración es posible aplicar la segunda ley de Newton, donde podemos nombrar algunos sistemas análogos como el péndulo simple, circuito en serie y la barra de torsión.

Capítulo 1

Ecuaciones diferenciales

El objetivo de este trabajo es introducir en el estudio de las relaciones entre mecánica y la matemática, por lo tanto ninguna de las dos serán expuestas con rigor puro y estricto, si no de la manera muy sencilla y accesible.

Hecha esta aclaración presentamos la:

1.1. Definición

Si una ecuación contiene las derivadas y diferenciales de una o más variables dependientes con respecto a una o más variables independientes, se dice que es una ecuación diferencial.

Ejemplo 1

Sea $y' + 2x = 4$ es una ecuación diferencial, púes contiene la derivada de **y** con respecto a **x** (variable dependiente e independiente,respectivamente).

Ejemplo 2

$ydx + xdy = 0$ es una ecuación diferencial, púes posee los diferenciales de **x** e **y**.

Existen una infinidad de ecuaciones diferenciales, por lo que para realizar su estudio es necesario una clasificación. Existen diversas clasificaciones algunas de estas son:

I) Clasificación Según el Tipo.

II) Clasificación Según el Orden.

III) Clasificación Según la Linealidad.

1.2. Clasificación Según el Tipo

1.2.1. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (E.D.O.)

Cuando contienen sólo derivadas ordinarias de una sola o más variables dependientes con respecto a una sola variable dependiente.

Ejemplo 3

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + \frac{d^3y}{dx^3} = g(x)$$

1.2.2. Ecuaciones diferenciales Parciales (E.D.P)

Cuando contiene las derivadas parciales de una o más variables dependientes de dos o más variables independiente.

Ejemplo 4:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = m^2 \frac{\partial x^2 u}{\partial t^2} + g(x,t,u)$$

1.3. Clasificación Según el orden

"El orden de una ecuación diferencial viene dado por el orden de la más alta derivada".

Ejemplo 5:

$$4\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + 3y = x \qquad \text{es una E.D.O de segundo orden}$$

$$9\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \qquad \text{es una E.D.O de tercer orden}$$

Una Ecuación diferencial de orden **n** se suele denotar por:

$$F\left(x, y, \frac{\partial y}{\partial x}, ..., \frac{\partial^n y}{\partial x^n}\right) = 0$$

1.4. Clasificación Según la linealidad

1.4.1. Lineales

Definición *Se dice que una E.D. es lineal si tiene la forma:*

$$a_n(x)\frac{\partial y^n}{\partial x^2} + a_{n-1}(x)\frac{\partial y^{n-1}}{\partial x^{n-1}} + ... + a_1(x)\frac{\partial y}{\partial x} + a_0(x)\,y = g(x)$$

Las propiedades que se caracterizan a las E.D. lineales son:

(L_1) La variable dependiente "y" junto con todas sus derivadas son de primer grado, esto es, la potencia de cada término en y es 1.

(L_2) Cada coeficiente depente sólo de la variable independiente x.

Una ecuación que no cumple la **definición 1.4.1.** se dice **no lineal**.

Ejemplo 6:

Las ecuaciones diferenciales.

$$y'' + (\tfrac{1}{4})y' - y = x; log\,(x)\,y'' + 1 = 0$$

Son ecuaciones diferenciales lineales, mientras que:

$$\left(1 + y^{\frac{1}{3}}\right) y'' - 2y'' = 3x; y' + 3y^4 = x$$

Son no líneales, púes en la primera el coeficiente de y'' depende de y (no cumple con L_1) y en la segunda el exponente de y es 4 (no cumple con la L_2)

1.4.2. No lineales

Definición *Se dice que una función f cualquiera, definida en algún intervalo $\mathbb{I}^*$, es solución de una E.D.O. en el intervalo si sustituida en dicha ecuación lo reduce a la identidad.*

En otras palabras:

Una solución es una función que tiene por lo menos n-derivadas y satisface la ecuación. Es decir:

$$F\left(x, f\left(x\right)\right), f'\left(x\right), ..., f^{n}\left(x\right)) = 0, V x \epsilon \mathbb{I}^{*}$$

Ejemplo 7:

La función y=4 $e^{\frac{x}{4}}$ es solución de la E.D. lineal:

$$4\frac{dy}{dx} - y = 0 \text{ en } \mathbb{I}^{*} = \mathbb{R} \qquad \text{Puesto que:}$$

$$\frac{dy}{dx} = 4\frac{e^{\frac{x}{4}}}{4} = e^{\frac{x}{4}} = \frac{y}{4}$$

$$\Rightarrow 4\frac{dy}{dx} - y = 0$$

Una solución puede ser implícita o explícita

Se dice que es **explícita** cuando es posible expresarlo en la forma $y = f\left(x_1, ..., x_n\right)$, y se dice que es **implícita** cuando queda indicado como $G\left(x_1, ..., x_n\right) = 0$ y es imposible algebraicamente despejar una de las variables en función de las otras.

Detallemos de manera más precisa lo referente a ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden, es decir de la forma:

$$a_2\left(x\right)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1\left(x\right)\frac{dy}{dx} + a_0\left(x\right)y = g\left(x\right)$$

Y de manera más especifica a:

$$a_2\frac{d^2y}{dt^2} + a_1\frac{dy}{dt} + a_n y = f\left(t\right) \tag{1.1}$$

Cuya solución es la ecuación de movimiento de muchos fénomenos donde es posible aplicar la segunda ley de newton.

¿Siempre existe una solución para (1.1)? Frente a esta enunciamos la demostración de un teorema de existencia y unicidad de una ecuación dierencial de ese tipo.

TEOREMA 1: *Para todo* $(t_0, y_0)\, \epsilon \mathbb{R}^2$*, existe una única solución* $\phi(t) = \phi(t, t_0, y_0)$ *de (1.1) definida en el intervalo* $\mathbb{I}$ *tal que* $\phi(t_0) = x_0$*. En otras palabras, el poblema de valores iniciales:*

$$a_2 \frac{d^2y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = f(t)$$

$$y(t_0) = x_0$$

tiene solución única en $\mathbb{I}\ \epsilon\ \mathbb{R}$

(1.1) se llama E.D. homogénea si $f(t) = 0$, caso contrario se llama no homogénea la solución de (1.1) se encuentra de la siguiente manera:

a.- Encontramos una solución "y"de la E.D. homogénea.

b.- Encontramos una solución particular para la E.D. no homogénea "y_0". La solución general de (1.1) es: $y_g = y + y_p$.

a.1.- Cálculo de la solución de la ecuación homogénea (1.1): $(f(t) = 0)$.

El polinómio característico es: $a_2 p + a_1 p + a_0 = 0$

Cuyas raíces son: $(p_{1,2}) = \dfrac{a_1 \pm \sqrt{{a_1}^2 - 4a_2a_0}}{2a_2}$

Entonces la solución de (1.1) es :

(1) Si $p_1 = p_2 \Rightarrow y = e^{p1}(c_1 + c_2 t)$

(2) Si $p_1 \neq p_2$ reales $\Rightarrow y = c_1 e^{p1t} + c_2 e^{p2t}$

(3) Si $p_1, p_2 \epsilon \mathbb{C} \Rightarrow y = e^{-a1/a2^t}\left(c_1 cos\left(\sqrt{4a_2a_0 - {a_1}^2}t\right) + c_2 sen\left(\sqrt{4a_2a_0 - {a_1}^2}t\right)\right)$

b.2.- Cálculo de la solución particular.

Para calcular la solución particular tenemos que tener en cuenta la forma de F(t).

Cuando F(t) es :

(I) Un polinómio en t.

(II) Una función exponenecial $e^{\alpha t}$.

(III) $Sen\,(\alpha t)\,, cos\,(\beta t)$

(IV) Una suma o producto finito de las funciones anteriores.

(V) Cuando es una función diferente a las dadas anteriormente.

En los casos (I) al (IV) la forma más sencilla de encontrar y_p es por el método de **coeficientes indeterminados**. En el caso (V) lo podemos encontrar por el **método de variación de parámetros**.

El siguiente cuadro muestra la forma de la solución particular para los coeficientes indeterminados.

Caso	**Segundo miembro de la E.D.**	**Raíz del polinómio característico**	**Forma de** y_p $k = \text{máx}\,(m,n)$
I	$p_m(t)$	1.0 no es raíz	$\widetilde{P_m}(t)$
		2.0 es raíz de mult. S	$t = \widetilde{P_m}(t)$
II	$P_m e^{\alpha t}(\alpha \epsilon R)$	1.α no es raíz	$\widetilde{P_m}(t)e^{\alpha t}$
		2.α es raíz de mult. S	$t = \widetilde{P_m}(t)e^{\alpha t}$
III	$P_m(t)Cos\beta t$	1. $\pm\, i\beta$ no son raices	$\widetilde{P_k}(t)Cos\beta t + \widetilde{Q}_k Sen\beta t$
	$+Q_m(t)Sen\beta t$	2. $\pm\, i\beta$ son raices mult. S	$\left[\widetilde{P}_k Cos\beta t + \widetilde{Q}_k(t)Sen\beta t\beta\right] t$
IV	$e^{\alpha t}(P_n(t)Cos\beta t$	1.$\alpha \pm i\beta$ no son raices	$\left[\widetilde{p}_k(t)Cos\beta t + \widetilde{Q}_k Sen\beta t\right] e^{\alpha t}$
	$+P_m(t)Sen\beta t)$	2.$\alpha \pm i\beta$son raices mult. S	$t = \left[\widetilde{p}_k(t)Cos\beta t + \widetilde{Q}_k Sen\beta t\right] e^{\alpha t}$

Donde: $P_m, \widetilde{Q}_m, Q_n, \widetilde{Q}_n$ denotan polinómios de orden m y n respectivamente.

El ejemplo que expondremos posteriormente ilustrará este método.

En el caso (V) el procedimiento es el siguiente:

Encontramos la solución de la ecuación homogénea:

$$Y(t) = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t)$$

Entonces la solución particular es:

$$Y_p = u_1, Y_1 + u_2, Y_2 \tag{1.2}$$

Donde

$$u' = \frac{-y_2 f(t)}{w}, u_2' = \frac{y_1 f(t)}{w}$$

y

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix}$$

La condición $w \neq 0$ se expresa diciendo: "Para encontrar una solución particular por el método de variación de parámetros debemos tener que la solución de la E.D. homogénea sean linealmente independiente "

Ejemplo 8

Resolver $y'' - 9y = 3te^{-3t}$

a. Por el método de variación de parámetros:

Su polinómio característico es:

$$p^2 - 9 = 0, \text{ que tiene como raices } p_1 = 3 \text{ y } p_2 = -3$$

La solución de la ecuación homogénea es $y = C_1e^{3t} + C_2e^{-3t}$, púes 3, -3 $\epsilon\mathbb{R}$ y 3$\neq$-3

Ahora en (1.2):

$$\begin{bmatrix} e^{3t} & e^{-3t} \\ 3e^{3t} & -3e^{-3t} \end{bmatrix} = -3 - 3 = -6 \neq 0$$

$$u_1' = \frac{-e^{-3t}(3te^{-3t})}{6} = -\frac{1}{2}te^{-6t} \Rightarrow u_1 = -\frac{1}{2}(\frac{te^{-6t}}{6} + \frac{e^{-6t}}{36})$$

$$u_2' = \frac{e^{3t}\left(3te^{-3t}\right)}{-6} = -\frac{1}{2}t \Rightarrow u_2 = -\frac{t^2}{4}$$

Por lo tanto (1.2) nos indica que la solución particular es:

$$y_p = u_1y_1 + u_2y_2 = \frac{1}{2}(-\frac{t}{6} - \frac{1}{36})e^{-6t}e^{3t} + (-\frac{t^2}{4})e^{-3t}$$

$$y_p = -\frac{1}{2}(\frac{t^2}{4} + \frac{t}{6} + \frac{1}{36})e^{-3t}$$

Queda como solución general del ejemplo 8:

$$y = C_1e^{3t} + C_2e^{-3t} - \frac{1}{2}(\frac{t^2}{4} + \frac{t}{6} + \frac{1}{36})e^{-3t}$$

b. Por el método de coeficientes indeterminados:

Observando el segundo miembro de la E.D. la ubicamos en el cuadro, es el caso II-2; por lo tanto la forma de la solución particular es:

$$Y_p = t(At + B)e^{-3t}$$

Su primera y segunda derivada son:

$y_p = (2At + B)e^{-3t} - 3(At^2 + Bt)e^{-3t} = \left[-3At^2 + (2A - 3B)t + B\right] e^{-3t}$

$y_p'' = [-6At + (2A - 3B)] e^{-3t} - 3 \left[-3At^2 + (2A - 3B)t + B\right] e^{-3t}$

$y_p'' = \left[9At^2 + (-12A + 9B)t + (2A - 6B)\right] e^{-3t}$

y_p es solución, es decir debe satisfacer la E.D.:

$$y_p'' - 9y = 3te^{-3t}$$

$\Rightarrow \left[9At^2 + (-12 + 9B)t + (2A - 6B)\right] e^{-3t} - 9(A^{t^2} + Bt)e^{-3t} = 3te^{-3t}$

$\Rightarrow -12At + (2A - 6B) = 3t$

$\Rightarrow -12A = 3$ y $2A - 6B = 0$

$A = -\frac{1}{4}$

y

$B = \frac{2A}{6} = \frac{1}{3}(-\frac{1}{4}) = -\frac{1}{12}$

Lo que implica $y_p = (-\frac{t^2}{4} - \frac{t}{12})e^{-3t} = -\frac{1}{2}(3t^2 + t)e^{-3t}$ Finalmente la solución de la E.D. no homogénea es:

$$y = C_1e^{3t} + C_2e^{-3t} - \frac{1}{12}(3t^2 + t)e^{-3t}$$

Observe que las soluciones particulares por un método es diferente al encontrado por el otro. Esto casi siempre se dá y no significa que la solución esta equivocada, pues C_1, C_2 pueden tomar distintos valores; es decir puede existir múltiples (infinitas) soluciones particulares.

Esto es lo que usaremos de E.D. alguna otra definición que se pueda usar en la exposición será aclarada aportunamente.

1.5. Movimiento Vibratorio

Las vibraciones constituyen un gran campo de estudio en la física actual. En el mundo físico podemos distinguir por simple impección que todo cuerpo es capaz de vibrar, aunque de muchas maneras diferentes. Desde la más simple molécula hasta los cuerpos celestes más grandes del universo se encuentran en movimiento y describiendo algún tipo de vibración.

Textualmente tomaremos una referencia de [3]:

"Despúes de todo, nuestros corazones laten, nuestros pulmones oscilan, tiritamos cuando tenemos frío, a veces roncamos, podemos hablar y oir gracias a que vibran nuestros tímpanos y laringes; las ondas luminosas que nos permiten ver son causadas por vibraciones. Nos movemos porque hacemos oscilar las piernas. Ni siquiera podremos decir correctamente "Vibración"sin que oscile la punta de nuestra lengua... incluso los átomos que componen nuestro cuerpo vibran." [3]

Los dedicados a la investigación de este tipo de movimientos han hecho calificaciones diversas. Para el desarrollo de este trabajo tendremos en cuenta la más clásica, es decir la que considera los tipos:

1.5.1. Movimientos Vibratorios Libre

1.5.2. Movimientos Vibratorios Forzados

Entendemos por vibración libre la que desprecia toda clase de fuerzas de exitación considerando solamente las inherentes al sistema mismo; tales como la gravedad y el rozamiento. En tanto que las vibraciones forzadas son aquellas donde actúa una fuerza extranã que origina el movimiento.

Una de las características de todo movimiento vibratorio es la periodicidad, es decir el movimiento se repite una y otra vez, con las mismas características. Aunque a veces no es tan pronunciada está periocidad, por ejemplo: En un terremoto el movimiento se repite pero tiende a desaparecer a medida que el tiempo pasa, es decir, no conserva las características anteriores es por eso que se definirá el "Cusiperiodo".
El número de coordenadas independientes que se usan para expresar el movimiento es conocido como grado de libertad del sistema.

En este trabajo presentamos sistemas de un grado de libertad. Siendo nuestro problema pedagógico para la deducción de los modelos al sistema masa resorte o masa muelle.

El vocablo sistema tiene la misma aceptación que el sistema mécanico, es decir es el conjunto de fuerzas que hacen que el cuerpo esté estático o libre, aisladamente de los otros objetos.

Vibración y oscilación se consideran sinónimos. La definición de movimiento oscilatorio aparece en el cap.2.

1.6. Modelos Matemáticos

¿Qué es un modelo matemático? teniendo presente que epistemolomologicamente:

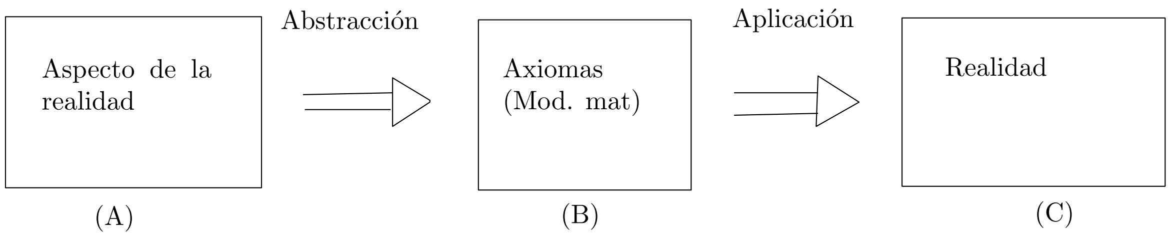
"Un modelo constituye una representación abstracta de un cierto aspecto de la realidad y tiene una estructura que está formada por los elementos que lo caracterizan, el aspecto de la realidad modelado, y por las relaciones entre estos sistemas".

Un modelo matemático es la representación matemática (abstracta) de algún fenómeno de la realidad.

Una de las características de todo modelo es la simplificación, es decir tenemos que omitir algunos detalles del mundo real que se trata de modelar, porque si consideraríamos todo resultaría tan complicado como la realidad misma y por lo tanto inútil.

En el transcurso de los capítulos 2 y3 veremos la aplicación de esta propiedad.

Aunque existen otras propiedades que escapan a lo que aquí se detalla, no dejaremos de mencionar el método de la teoría científica.



Este trabajo se ubica en el campo de la matemática aplicada, aunque se quede solamente en la parte (B), el uso de la aplicación a la realidad parte (C) es inmediata. por ejemplo, un ingeniero que quiere medir la cantidad de fuerza que soporta un edificio, al hacerlo vibrar, simula en el laboratorio tal movimiento, cogiendo para ello el modelo del cap. 3 y considerando las fuerzas de exitación que se conocen en la naturaleza. Esto ya seria (c) púes previene desastres (aspectos de la realidad).

Capítulo 2

Vibraciones Libres

2.1. Introducción

En este capítulo se expondrá las ecuaciones de movimiento de los sistemas mécanicos donde se produce una oscilación por acción de fuerzas inherentes a él, tal como la gravedad y el amortiguamiento.

Nuestro objetivo principal es estudiar la ecuación de movimiento, aprender a escribirlo, discutir su gráfica, encontrar su período y con el la frecuencia natural.

Aunque en todo movimiento real existe amortiguamiento, en primer lugar lo ignoraremos para estudiar el M.A.S. posteriormente será considerado y veremos que existe movimiento vibratorio solamente cuando es muy pequenõ comparado con la constante rigidez.

2.2. Movimiento Armónico Simple (M.A.S.)

Uno de los movimientos vibratorios más naturales es el Movimiento Armónico Simple (M.A.S.). Pero el más interesante pues es factible describirlo matemáticamente.

Movimiento Periódico.

Se llama así cuando se repite a intervalos de tiempo. Es decir la función que describe su movimiento es una función periódica, esto es: $x(t) = x(t+T)$ para algún $T \epsilon \mathbb{R}$ y todo $t \epsilon \mathbb{R}$.

Movimiento Oscilatorio.

Designamos así cuando el cuerpo se mueve hacia un lado y otro de una posición de equilibrio, siguiendo una curva cualquiera. Es decir efectúa un vaivén, **por ejemplo el péndulo de un reloj.**

Movimiento Armónico Simple.

Denominamos así a una combinación de un movimiento periódico (cuando el cuerpo se mueve sobre una línea recta) y un movimiento oscilatorio.

Aunque existen muchos cuerpos que siguen este tipo de movimiento, la manera de ilustrar el M.A.S. se encuentra en el problema tipo masa-muelle o masa-resorte que se estudia en física y que consiste en una masa colgada por un resorte liviano como se muestra en la fig. 2.1

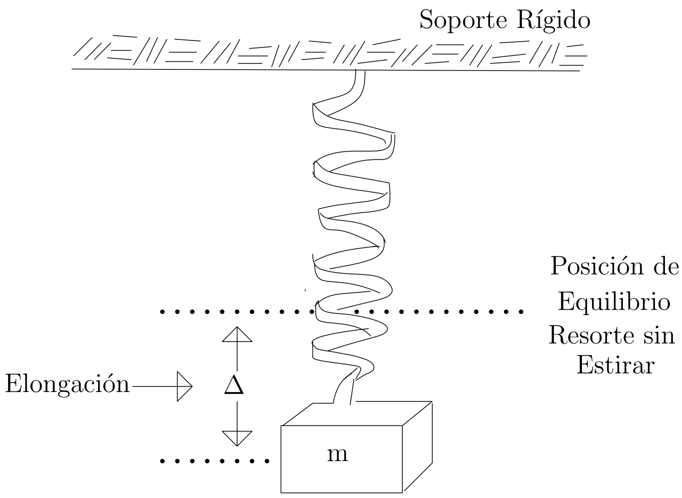


Figura 2.1: **Sistema masa-resorte ó masa-muelle.**

Observemos que si colocamos el resorte de la fig. 2.1. primeramente sólo sobre una lámina y posteriormente colocamos la masa **m** (despreciamos las fuerzas de resistencia) que tiene un lápicero en la parte inferior izquierda, está empieza a oscilar y describir un M.A.S. y en su vaivén de arriba hacia abajo y viceversa, por efecto solamente de la gravedad el lápicero escribiría la función de la fig. 2.1. siempre que la lámina empieze a correr hacia la izquierda simultáneamente con el movimiento de la masa.

Antes de deducir la ecuación de movimiento para el problema resorte-masa enunciamos la segunda ley de Newton y la ley de Hooke

Segunda ley de Newton: "Cuando la resultante (o suma vectorial) de

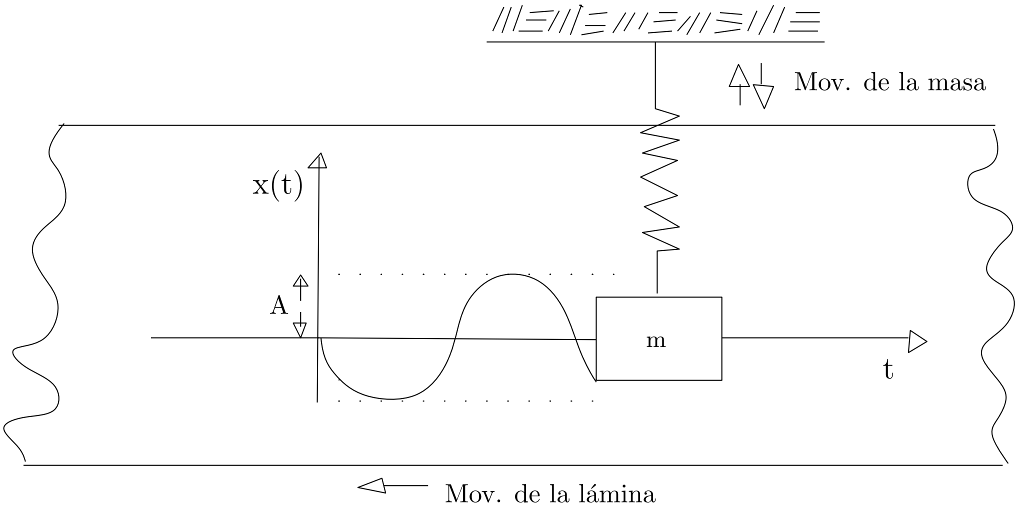


Figura 2.2: **Regístro de un M.A.S. C es el punto donde se encuentra el lápicero.**

todas las fuerzas que actúan en un cuerpo no es cero; el mismo adquirirá una aceleración en la dirección de la fuerza resultante. La magnitud de esta aceleración es directamente proporcional a la fuerza resultante, e inversamente proporcional a la masa del cuerpo.”

Ley de Hooke “Es evidente que la regla o ley de la naturaleza de todos los cuerpos elásticos expresa que la fuerza que tiende a restaurarlas a su posición natural es siempre proporcional a la distancia o espacio de donde se ha desplazado, bien por enrarecimiento, o sea; por separación de sus diversas partes, o bien por condensación , es decir por acumulación de las mismas acercándose mutuamente. Y esto es observable, no sólo en los cuerpos que actúan como muelles si no en cualquier otro, sea metal, madera, piedra, vidrio, etc. En cada caso hay que estudiar las fíguras particulares de los cuerpos deformados y los modos ventajosos o desventajosos de deformación.”[2]

Robert Hooke. De potencia resistiva

La primera de estas leyes se resume diciendo:“*La suma de las fuerzas en un movimiento líneal es igual a la masa por la aceleración”.* Mientras que la ley de Hooke se enuncia simplificadamente:“*La fuerza deformada es directamente proporcional a la deformación.*

2.3. Ecuación de movimiento

Sea **m** una masa, colgada de un soporte rígido, por un resorte cuya rigidez es **K**, despreciamos toda fuerza de rozamiento o de amortiguamiento y tenemos el siguiente diagrama de cuerpo libre:

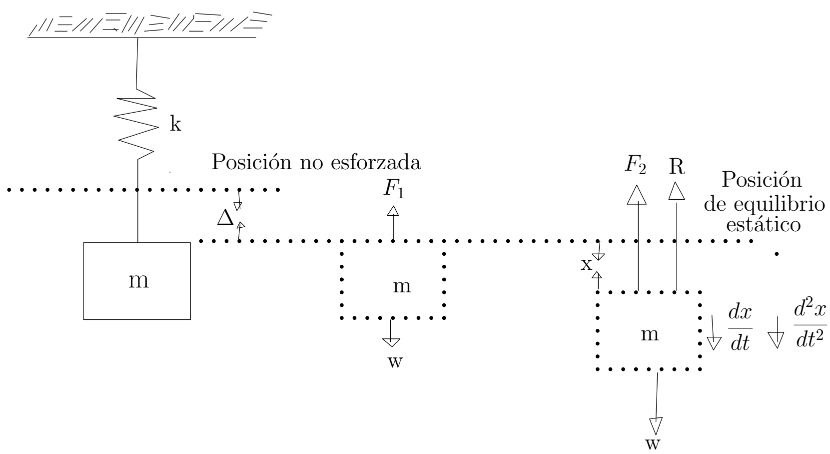


Figura 2.3: **Diagrama de Cuerpo Libre del problema Resorte-masa**

En la fig. 2.3 parte (A), la posición no esforzada corresponde al resorte sin estirar, en la posición de equilibrio.En la parte (B) está la masa colgada y ha producido una elongación. En tanto que (C) presenta el cuerpo en movimiento **x** velocidad $\dfrac{dx}{dt}$ y aceleración $\dfrac{d^2x}{dt^2}$.

Hacemos algunas observaciones:

1.- En primer lugar, un convenio, el movimiento de la masa hacia abajo de la posición de equilibrio será positivo. Esto es:

2.- Al tratar de aplicar la ley de Hooke en (A) tenemos que $F = K\Delta$ donde **K** es conocida como constante de rígidez, la cual es una característica de cada material elástico, es decir del elemeno que está fabricado el resorte, ejemplo:

Si un peso de 10 libras, alarga el resorte $\dfrac{1}{2}$ pie, entonces $10 = K(\dfrac{1}{2})$,$K = 20\dfrac{lib}{pie}$, luego un peso de 8 lb. alarga el mismo resorte $\dfrac{2}{3}$ pie púes $8 = 20(\dfrac{2}{5})$.

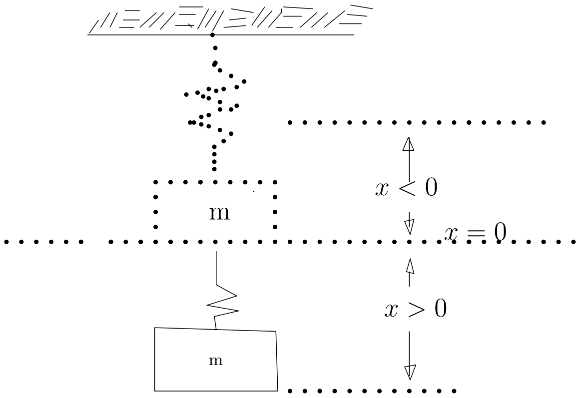


Figura 2.4: **Signo del Movimiento.**

El grado de libertad del movimiento es uno, púes se puede expresar solamente en función de una coordenada singular (variable independiente).

Hechas estas aclaraciones regresamos al diagrama de cuerpo libre y tenemos:

Por ley de Hooke: $F_1 = K\Delta$, $F_2 = K(x + \Delta)$

En la posición de equilibrio estático:

$$F_1 = w \Leftrightarrow mg = K\Delta$$

Mientras de la segunda ley de Newton en (C):

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \sum F = w - F_2$$

Pero

$$w = mg \text{ y } K\Delta - mg = 0$$

Luego

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = w - K(\Delta + x) = mg - K\Delta - Kx = -Kx$$

Dividiendo por la masa ambos miembros:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0 \tag{2.1}$$

Definimos $w_2^n = \dfrac{K}{m}$ conocida como frecuencia circular del movimiento armónico simple, y la ecuación (4.1) podemos escribirla así:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + w_2^n x = 0 \tag{2.2}$$

¿Qué es una ecuación diferencial ordinaria homogénea de segundo orden on coeficientes constante?, para solucionarlo seguiremos las indicaciones dadas en el cap.1. 1.1.

Su polinómio característico es: $P^2 + w_2^n = 0$

Sus raíces son: $p = \pm w_n i$

Por lo tanto la solución (4.2) es:

$$x(t) = ASenw_nt + BCosw_nt, \text{ con A y B constantes}$$

Es obvio, además que inseparables al sistema existen las condiciones iniciales:

Pero:

$$x(0) = ASen0 + Cos0 = B \Rightarrow B = x(0)$$

Finalmente la ecuación de movimiento queda escrita como:

$$x(t) = \frac{x(0)}{w_n} Sen(w_nt) + x(0)Cos(w_nt), \quad \text{Donde } t\epsilon\mathbb{R}_0^t \tag{2.3}$$

Obtenida la solución de (4.2), ahora todo nuestro interés se simplifica a analizar su comportamiento matemático y compararlo con la realidad física.

Encontraremos el periódo de esta función, osea, T tal que: $x(t) = x(t+T) V t\epsilon\mathbb{R}_0^+$

Esto se cumple si:

$$\frac{x(0)}{w_n} Senw_nt + x(0)Cosw_nt = \frac{x(0)}{w_n} Sen\left[w_n(t+T)\right] + x(0)Cos\left[w_n(t+T)\right]$$

$$= \frac{x(0)}{w_n} Sen\left[w_n t + w_n T\right] + x(0) Cos(w_n t + w_n T)$$

Para que ambos miembros sean iguales es necesario que:$w_n T = 2\Pi$

Por ser 2Π el periódo del seno y del cosen, simplificar:

$$T = \frac{2\Pi}{w_n} = 2\Pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Este número T periódico de la función (4.3), en la teoría de vibraciones es conocida como el periódo de oscilación.

Por una fórmula de física elemental:

$$Frecuencia = \frac{1}{periodo}$$

Por lo tanto la frecuencia de vibración del M.A.S. denominada frecuencia natural del sistema, será:

$$f_n = \frac{1}{2\Pi}\sqrt{k/m}, \text{ púes } f_n = \frac{1}{T}$$

Evocando lo mencionado en el Cap.1 : "Mientras más simple sea el modelo, será más sencilla la aplicación". Entonces nos preguntamos ¿Se puede simplificar aún mas la ecuación (4.3)?, en efecto, supongamos que se puede expresar en la forma:

$$x(t) = ASen(w_n t + \phi), A \neq 0 \tag{2.4}$$

Por la fórmula del seno de la suma de ángulos (2.3) e igualando con (2.4) tenemos:

$$\frac{x(0)}{w_n} Senw_n t + x(0) Cosw_n t = (ACos\phi) Senw_n t + (ASen\phi) Cosw_n t$$

Para que se dé la igualdad entonces:

$$ACos\phi = \frac{x(0)}{w_n}, \quad ASen\phi = x(0) \tag{2.5}$$

ϕ es el ángulo de fase y su valor lo encontramos en:

$$t_0 = \frac{x(0)}{\ddot{x}(0)} w_n \tag{2.6}$$

¿ Qué se obtiene dividiendo miembro a miembro las igualdades de α ?

Por otro lado el valor de A es encontrado de (α) eliminando ϕ, es decir elevando al cuadrado ambos miembros y luego sumando obtenemos:

$$A^2 Cos^2\phi + A^2 Sen^2\phi = (\frac{x(0)}{w_n})^2 + (x(0))^2$$

$$\Rightarrow A = \sqrt{\left(\frac{\ddot{x}(0)}{w_n}\right)^2 + (x(0))^2}, \quad \text{púes } Sen^2\phi + Cos^2\phi = 1 \tag{2.7}$$

(4.4), (3.6) y (3.7) es la forma alternativa de la ecuación de movimiento (4.2)

Similarmente podemos mostrar que:

$$x(t) = ACos(w_n + \phi)$$

Donde

$$Sen\phi = \frac{-x(0)}{Aw_n}; Cos\phi\frac{x(0)}{A}; A = \sqrt{-\frac{x\ddot{(0)}}{w_n}^2 + (x(0))^2}$$

Veamos la utilidad de la forma alternativa, supongamos que queremos averiguar cuales son los intervalos de tiempo en que la masa pasa por la posición de equilibrio, es decir hacemos x=0 y despejamos t

$$0 = ASen(w_n t + \phi)$$

$$\Rightarrow w_n t + \phi = n\Pi, n\epsilon\mathbb{Z}^+ \quad \text{púes } A \neq 0$$

$$\Rightarrow t = \frac{n\Pi - \phi}{w_n}, n\epsilon\mathbb{Z}^+ \tag{2.8}$$

Nos sirve también para indagar cuando el movimiento es máximo o mínimo, así:

Como

$$x(t) = ASen(W_n t + \phi)$$

Entonces

$$\frac{dk}{dt}(t) = Aw_n Cos\,(w_n t + \phi) \tag{2.9}$$

Igualamos a cero para obtener los puntos críticos

$$ASenCos(w_n t + \phi) = 0$$

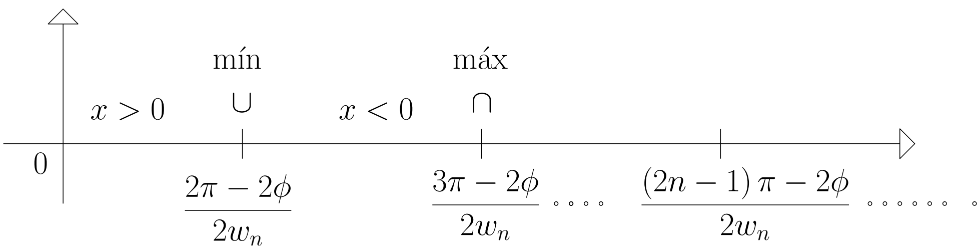
$$\Rightarrow w_n t + \phi = \frac{(2n-1)\,\Pi}{2}, n\epsilon\mathbb{Z}^+ w_n, \text{ púes} \neq 0$$

Por lo tanto se logrará un máximo o un mínimo en

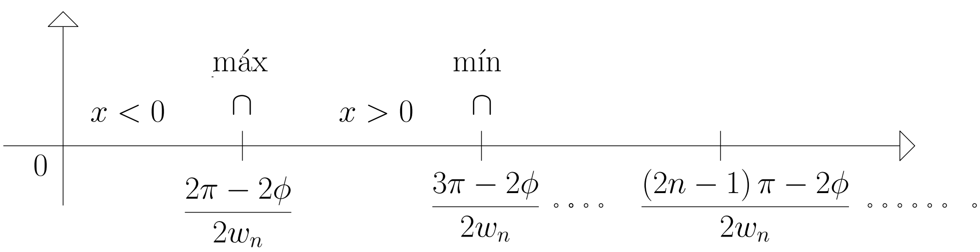
$$t = \frac{(2n-1)\,\Pi - 2\phi}{2w_n}, n\epsilon\mathbb{Z}^+$$

Que divide al eje positivo de la recta real en los siguientes intervalos:

- Si la velocidad en el instante inicial vá dirigida hacia abajo



- Si la velocidad en el instante inicial vá dirigida hacia arriba



Eje Real Positivo Mostrando los Puntos Críticos (máximos ó mínimos) para la ecación 2.4

La distancia entre dos máximos ó mínimos consecutivos es $\frac{2\Pi}{w_n}$ púes:

$$\frac{(2(n+2))\left(\frac{\Pi}{2}\right)-\phi}{w_n}-\frac{(2n-1)\left(\frac{\Pi}{2}\right)-\phi}{w_n}=\frac{2\Pi}{w_n}$$

Cantidad que es igual al periódo de oscilación.

Hemos hablado de movimiento máximo ¿ Puede lo mismo decirse de la velocidad?, derivemos (3.9) para encontrar sus máximos y mínimos

$\ddot{x}(t) = -Aw_{n^2}Sen\,(w_n t+\phi)$ Cuyos puntos críticos son:

$$t=\frac{n\Pi-\phi}{w_n}, n\epsilon\mathbb{Z}^+ \tag{2.10}$$

Comparando (2.10) con (2.8) vemos que se trata del mismo tiempo, de donde obtenemos como conclusión que la velocidad es máxima o mínima cuando pasa por la posición de equilibrio , y si hablamos escalarmente es decir del módulo de x(t) ($i.e.\, |x(t)|$) simplemente diremos que la velocidad es máxima.

Un poco de análisis dimensional:

K; tiene dimensiones de $\frac{fuerza}{espacio} \Rightarrow [k]=MT^{-2}$, donde M= masa, T=tiempo.

Obviamente:$[x]=MT^{-1},[x]=MT^{-2},[T]=T,[f_n]=T^{-1},[w_n]=T^{-1}$ válidas para distintos sistemas de medidas

Hacemos estas aclaraciones púes son de uso inevitables cuando a continuación estudiaremos algunos ejemplos de aplicación.

Ejemplo 1

La solución de la ecuación diferencial ordinaria de segundo orden

$$\frac{1}{16}\frac{d^2x}{dt^2}+x=0$$

$$x\,(0)=1, \quad \ddot{x}(0)=-\frac{4}{\sqrt{3}}$$

Es:

$$x(t) = \frac{-1}{\sqrt{3}} Sen4t - Cos4t \tag{2.11}$$

Púes su polinómio característico es: $\frac{1}{16}p^2 + 1 = 0 \Rightarrow p = \pm 4i$

Ahora vamos a darle una interpretación física de acorde con lo estudiado hasta ahora.

Su frecuencia circular es: $w_n^2 = 16 \Rightarrow w_n = 4$

El periódo de oscilación es: $T = \frac{2\Pi}{w_n} = \frac{2\Pi}{4} = \frac{\Pi}{2}$

Es decir cada $\frac{\Pi}{2}$ unidades de tiempo el cuerpo pasa por el mismo lugar.

La frecuencia natural del sistema es: $f_n = \frac{1}{T} = \frac{2}{\Pi}$

La amplitud del movimiento es: $A = \sqrt{\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + (-1)^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

Calculemos el ángulo de fase: $tg\phi = \frac{\frac{-1}{\sqrt{3}}}{-1} \Rightarrow \phi = \frac{7\Pi}{6}$ (púes se trata de un ángulo de cuarto cuadrante)

Entonces (2.4) es: $\frac{2}{\sqrt{3}} Sen\left(4t + \frac{7\Pi}{6}\right)$

Al gráficar esta función obtenemos la fig. 2.5 donde se observa:

a.- El intervalo $\left[\frac{0,2\Pi}{3}\right]$ el cuerpo parte de un punto sobre la posición de equilibrio y se dirige hacia abajo. En tanto que $\left[\frac{2\Pi}{3}, \frac{7\Pi}{6}\right]$ parte de abajo y se dirige hacia arriba, hasta $\frac{-2}{\sqrt{3}}$ sobre su posición de equilibrio.

b.- Observamos también que cada $\frac{\Pi}{2}$ se repite el movimiento.

Ejemplo 2

Cuando dos resortes de constantes k_1 y k_2 sujetan un sólo cuerpo de peso w, la constante efectiva del resorte está dada por $k = k_1 + k_2$, mientras

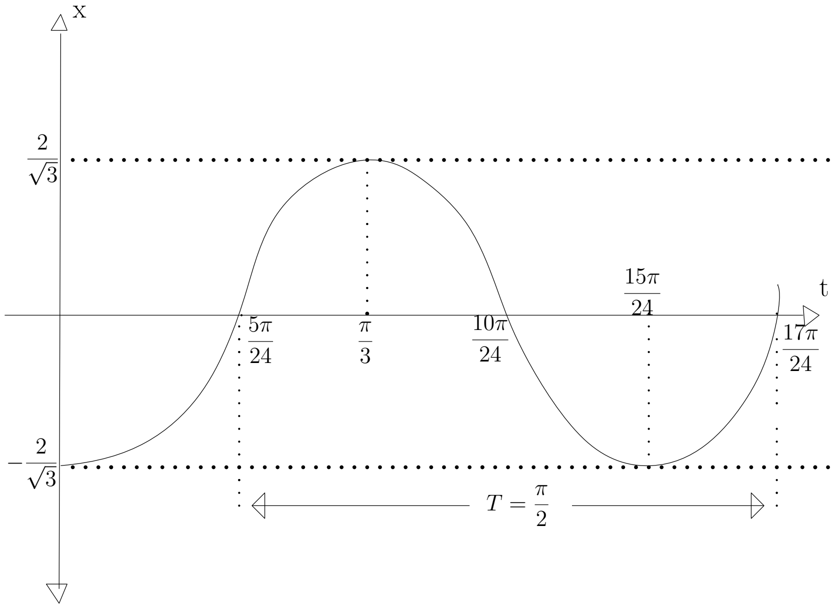


Figura 2.5: **Gráfica de la solución de la E.D.O. del ejemplo 1, que describe un M.A.S..**

que si se encuentran en serie la constante efectiva es $k = \dfrac{k_1k_2}{k_1 + k_2}$. Esto se generaliza para un número finito de resortes.

Un cuerpo de 20 libras estira un resorte de 6 pulgadas y el otro 2 pulgadas, los resortes se soportan a un resorte rígido común y luego el cuerpo de 20 libras se sujeta a ambos resortes, como se muestra en la fig. 2.6 . Supongamos que soltamos de la posición de equilibrio (x(0)=0) con una velocidad dirigida hacia arriba ($x(0) = -2\frac{pies}{seg.}$) encontramos la ecuación movimiento.

En efecto:

$$k = k_1 + k_2 = \frac{20lib}{6pulg} + \frac{20lib}{2pulg} = \left(\frac{10}{3} + 10\right) 12\frac{lib}{pie} = 160\frac{lib}{pie}$$

$$(1pie = 12pulg.)$$

$$w_n^2 = \frac{k}{m} = \frac{k}{\frac{w}{g}} = \frac{gk}{w}\frac{32(160)}{20}seg^{-2} = 256seg^{-2} \Rightarrow w_n = 16$$

Como $x(0) = -2, x(0) = 0$tenemos que la amplitud:

$$A = \sqrt{[x(0)]^2 + \left(\frac{x(0)}{w_n}\right)^2} = \left|\frac{x(0)}{w_n}\right| = \left|\frac{-2}{16}\right| = \frac{1}{8}$$

El ángulo de fase: $tg\Theta = \frac{x(0)}{x(0)}w_n = 0 \Rightarrow \Theta = 0$

Por tanto la solución es: $x(t) = ASen(w_n t + \Theta) = \frac{1}{8Sen16t}$

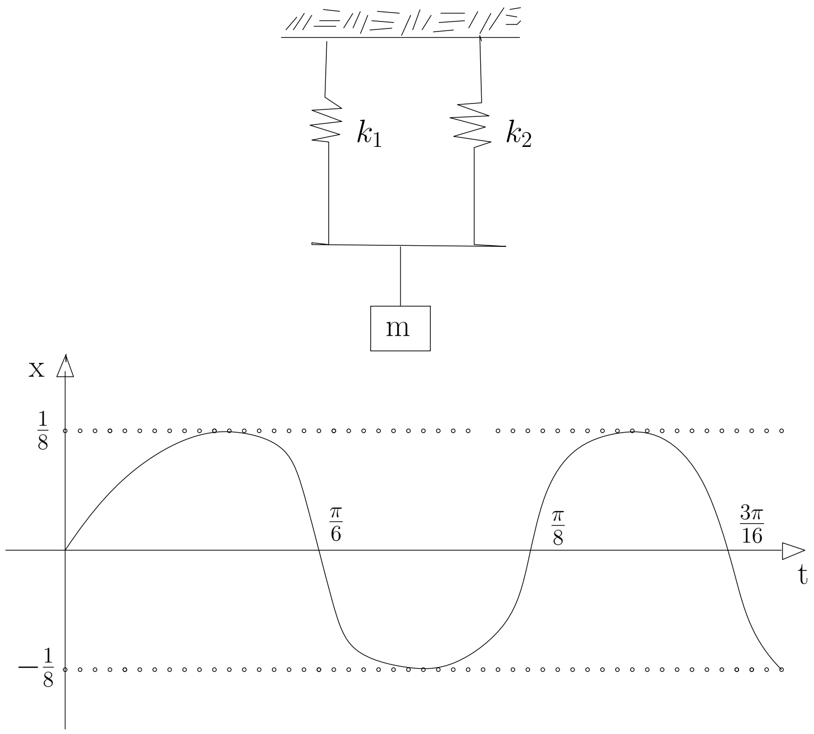


Figura 2.6: **Resortes en paralelo y gráfica de la ecuación de movimiento.**

De los ejemplos anteriores podemos extraer algunas conclusiones para las condiciones iniciales:

1.- a) Si $x(0) > 0$ y $\ddot{x}(0) < 0$ el cuerpo inicia su movimiento sobre la posición de equilibrio y se dirige hacia abajo.

b) Si $x(0) < 0$ y $\ddot{x}(0) > 0$ el cuerpo inicia su movimiento sobre la posición de equilibrio y se dirige hacia arriba.

c) Si $x(0) < 0$ y $\ddot{x}(0) > 0$ el cuerpo inicia su movimiento debajo de la posición de equilibrio y se dirige hacia arriba.

d) Si $x(0) < 0$ y $\ddot{x}(0) < 0$ el cuerpo inicia su movimiento debajo de la posición de equilibrio y se dirige hacia abajo.

2.- Además de las fórmulas primeras podemos decir:

$$f_n = \frac{1}{2\Pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\Pi}\sqrt{\frac{k\Delta}{m\Delta}}$$

Pero $k\Delta = mg$, entonces

$$f_n = \frac{1}{2\Pi}\sqrt{\frac{g}{\Delta}}$$

Es decir la frecuencia natural se puede expresar solamente como una función de la elongación.

3.- .Integrando respecto de x la ecuación (2.1) tenemos:

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{k}{2} = E = constante$$

Pero $\frac{dx}{dt} = velocidad = v$, entonces:

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{k}{2}x^2 = E$$

a) $\frac{1}{2}mv^2 = Energía\ Cinética$

b) $\frac{k}{2}x^2 = Energía\ Potencial$

c) E $= Energía\ Total$

Que por ser **E** constante cumple con la ley de conservación de energía. Aquí concluye la sección 2 con una motivación en su teoría y la redacción de aspectos generales del movimiento vibratorio.

2.4. Movimiento Vibratotio Libre Amortiguado

En la ecuación (2.1) ó (2.2) del capitulo 2 si analizamos cuando $t \to -\infty, t \to +\infty$ lo que físicamente indica que el movimiento permanece indefinidamente, lo que es imposible, de serlo existirá el móvil perpétuo. En la práctica es indudable que x tiende a hacerce cero a medida que el tiempo pasa, debido a fuerzas retardadoras. En esta sección consideramos una fuerza retardadora inherente a todo sistema real llamado de amortiguamiento, aunque existen muchas otras como veremos en el próximo capítulo.

La mécanica nos dice que la fuerza resistente es una función de la velocidad del objeto y su valor queda bien representado por:

$$R(x) = b_1\ddot{x} + b_2\ddot{x}^2, \text{ donde } \ddot{x} = |\ddot{x}(t)|$$

Esta fuerza resistiva se ejerce en sentido opuesto al de la propia velocidad. Siempre que x sea pequeña comparada con el cociente $\frac{b_1}{b_2}$, podemos considerar que R(x) viene dada sólo por el término lineal.

Para el tratamiento matemático también es sencillo representar el amortiguamiento viscoso por:

$$R(x) = b_1\ddot{x}$$

Efectuada esta pequeña introducción, seguimos con el problema masa-muelle. El diagrama de cuerpo libre en este caso es el de la fig. 2.7 donde consideramos $\ddot{x}$ dirigida hacia abajo y la fuerza resistiva $R(\ddot{x}) = \ddot{x}$ dirigida hacia arriba.

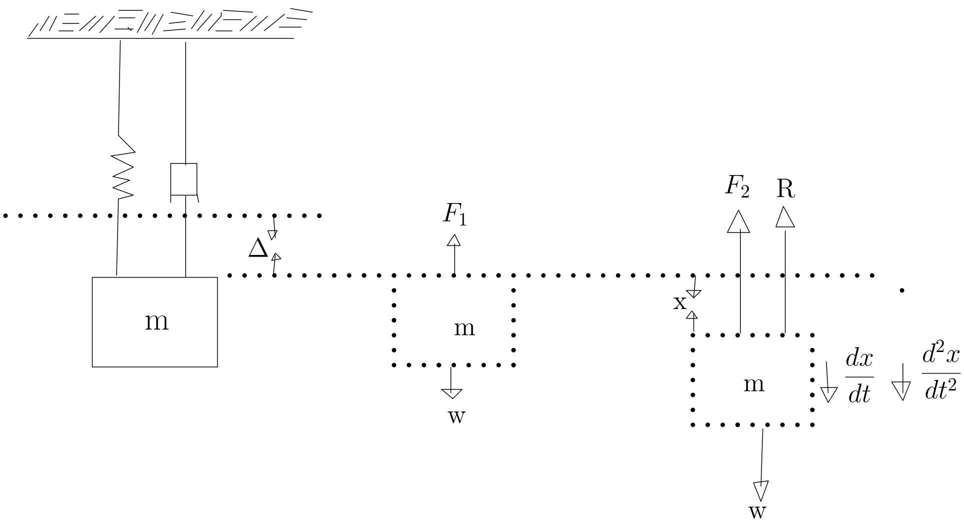


Figura 2.7: **Diagrama de Cuerpo Libre del problema masa-muelle, considerando la Fuerza Resistiva de Amortiguamiento Viscoso, donde el cilindro es su notación.**

Procedemos de manera similar que en 2.2, para obtener la ecuación de movimiento, la ecuación diferencial deducida al usar la segunda ley de Newton y la ley de Hooke es:

$m\dfrac{d^2x}{dt^2} = w - F_2 - R$ de (c) por la segunda ley de Newton.

$m\dfrac{d^2x}{dt^2} = w - k(\Delta + x) - R$ Por la ley de Hooke.

$m\dfrac{d^2x}{dt^2} = (w - k\Delta) - kx - c - \dfrac{dx}{dt}$ Puesto que $R = c - \frac{dx}{dt}$

$m\dfrac{d^2x}{dt^2} = 0 - kx - c\dfrac{dx}{dt}$ Por (B) $w - F_1 = 0 = w - k\Delta$

Dividiendo ambos miembros por m:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{c}{m}\frac{dx}{dt} + km = 0 \tag{2.12}$$

Que es la ecuación que rige el movimiento libre amortiguado, donde naturalmente:

m=Masa del cuerpo.
k=Constante de rígidez del resorte.
c= Constante de amortiguamiento víscoso.

Para el manejo algebraico hacemos el siguiente cambio:

$$\frac{c}{2m} = \Gamma, \frac{k}{m} = w^2 \tag{2.13}$$

Entonces (2.12) se transforma en:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\Gamma\frac{dx}{dt} + w_n^2 x = 0 \tag{2.14}$$

Al tratar de resolverlo su polinómio característico es:

$$p^2 + 2\Gamma p + w_n^2 = 0$$

Entonces:

$$p = \frac{-2\Gamma \pm \sqrt{(2\Gamma)^2 - 4w_n^2}}{2(1)} = -\Gamma \pm \sqrt{\Gamma^2 - w_n^2}$$

Las cantidades subradicales son las que originan el análisis pues puede suceder tres casos.

I) $\Gamma - w_n^2 > 0$

II) $\Gamma - w_n^2 = 0$

III) $\Gamma - w_n^2 < 0$

Estudiemos cada uno de estos tres casos:

2.4.1. Caso I: Movimiento Sobreamortiguado

$$(\Gamma - w_n^2 > 0)$$

De (2.13) vemos que Γ es una función de la constante de amortiguación y la masa en tanto $\Gamma^2 - w_n^2 > 0$ indica que el amortiguamiento es mayor que la rígidez, es decir existe un sobre amortiguamiento.

Para obtener la ecuación de movimiento $\pm\sqrt{\Gamma^2 - w_n^2}$ son números reales no nulos, lo que indica que la solución de (2.14) es:

$$x(t) = c_1 e^{(-\Gamma + \sqrt{\Gamma^2 - w_n^2} t)} + c_2 e^{(-\Gamma - \sqrt{\Gamma^2 - w_n^2} t)} t$$

$$c_1, c_2 = \quad \text{constantes reales}$$

$$\Rightarrow x(t) = e^{-\Gamma t}(c_1 e^{\sqrt{\Gamma^2 - w_n^2} t} + c_2 e^{-\sqrt{\Gamma^2 - w_n^2} t}) \tag{2.15}$$

Hacemos x(t)=0 para ver en que puntos corta el eje t

$$0 = e^{-\Gamma t}(c_1 e^{\sqrt{\Gamma^2 - w_n^2} t} + c_2 e^{-\sqrt{\Gamma^2 - w_n^2} t})$$

$$\Rightarrow c_1 e^{\sqrt{\Gamma^2 - w_n^2} t} = -c_2 e^{-\sqrt{\Gamma^2 - w_n^2} t} \quad \text{púes } e^{-\Gamma t} \neq 0, Vt$$

$$\Rightarrow t = \frac{ln\left(\frac{-c_2}{c_1}\right)}{\sqrt{\Gamma^2 - w_n^2}}$$

Lo que implica que el cuerpo como máximo pasa una sóla vez por la posición de equilibrio, cuando exista $t = ln\left(-\dfrac{c_1}{c_2}\right)$ de lo contrario nunca pasará. Por lo tanto las posibles gráficas son las que exhiben en la fig. 2.8.

Recordemos que una característica de los movimientos oscilatorioses la periodicidad, la cual no se presenta en este caso, en consecuencia no hay movimiento vibratorio.

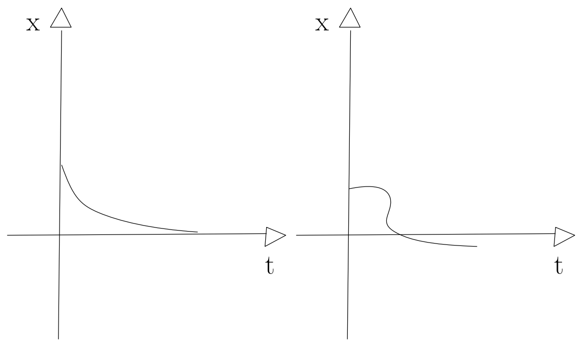


Figura 2.8: **Gráficas de Movimientos Críticamentes amortiguado**

2.4.2. CasoII: Movimiento Críticamente Amortiguado

$$(\Gamma - w_n^2 = 0)$$

En estas circunstancias $\pm\sqrt{\Gamma - w_n^2} = 0$, por lo tanto la ecuación de movimiento es:

$$x(t) = c_1 e^{-\Gamma t} + c_2 t e^{-\Gamma t} = e^{-\Gamma t}\left(c_1 + c_2 t\right) \tag{2.16}$$

Púes se trata de una raíz multiple. Se dice que el sistema está críticamente amortiguado.

La función (2.16) corta al eje "t" en un sólo punto púes x(t)=0 se cumple para $t = \left(-\dfrac{c_2}{c_1}\right)$, cuando $c_1 \neq 0$ de otra manera no lo corta nunca, es decir similarmente al movimiento sobreamortiguado el cuerpo no pasa por la posición de equilibrio y al hacerlo lo hace como máximo una sola vez.
x(t) no es periódica por lo tanto en este caso también no hay movimiento vibratorio.

Algunas gráficas de (2.16) son:

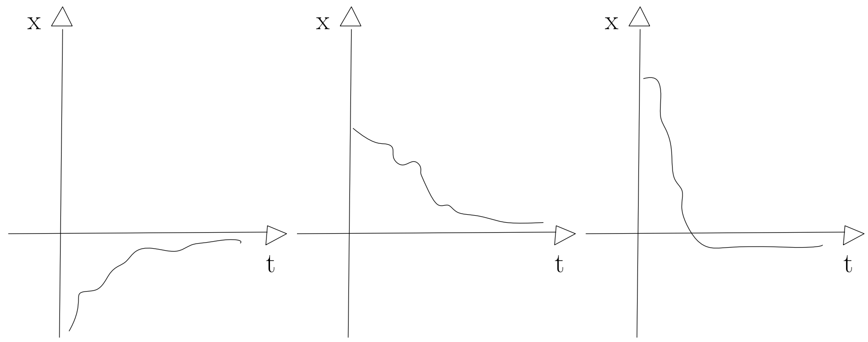


Figura 2.9: **Gráficas de Movimientos Críticamentes amortiguado**

La similitud entre las gráficas del movimiento sobreamortiguado y críticamente amortiguado saltan a la vista; ambas cortan al eje como máximo una sola vez, son aperiódicas tienden para cero cuando t crece. Compare Fig. 2.9 y Fig. 2.10

2.5. Caso III:Movimiento Sub-Amortiguado

$$(\Gamma - w_n^2 < 0)$$

Ahora $\Gamma^2 - w_n^2 < 0 \Rightarrow \pm\sqrt{\Gamma^2 - w_n^2} = \pm\sqrt{w_2 - \Gamma^2}i$, lo que nos lleva a dar como solución de (2.14) a:

$$x(t) = e^{-\Gamma t}\left(c_1 Cos(\sqrt{w_n^2 - \Gamma^2}t) + c_2 Sen(\sqrt{w_n^2 - \Gamma^2}t)\right) \tag{2.17}$$

El amortiguamiento viscoso es pequeño comparado con la constante del resorte. Es decir el sistema está sub-amortiguado.

El término $e^{-\Gamma t} = e^{\frac{-c}{2mt}}$ es una función decreciente exponencialmente con el tiempo, y es conocido como factor de amortiguamiento es insignificantemente para valores grandes del tiempo $\left(\lim_{t\mapsto\infty} e^{-\Gamma t} = 0, \Gamma > 0\right)$

El factor del paréntesis en (2.17) es una función periódica y es el que hace que esta función tenga un comportamiento de movimiento vibratorio.

Las propiedades que podemos deducir en comparación con el M.A.S. se detalla a continuación.

Inseparable a cualquier movimiento en la naturaleza encontramos la velocidad y el tiempo, lo que nos ayuda ahora a fijar las condiciones iniciales, púes siempre conocemos:

$$x(t)/_{t=0} = x(0) \quad y \quad \frac{dx}{dt}x(t)/_{t=0} = \ddot{x}(0) \tag{2.18}$$

Al resolver (2.17) (2.18) nos dan los valores de las constantes:

$$c_1 = x(0), c_2 = \frac{\ddot{x}(0)}{\Gamma\sqrt{w_n^2 - \Gamma^2}} \tag{2.19}$$

Es decir la solución (2.14) es:

$$x(t) = e^{-\Gamma t}(x(0)Cos\sqrt{w_n^2 - \Gamma^2 t}) + \frac{\ddot{x}(0)}{\Gamma\sqrt{w_n^2-\Gamma^2}}Sen(\sqrt{w_n^2 - \Gamma^2}t)$$

Al parecer no es una ecuación muy “manejable”llevémoslo a la forma alternativa, resulta entonces.

$$x(tAe^{-\Gamma t})Sen\left(\sqrt{w_n^2 - \Gamma^2}t + \phi\right) \tag{2.20}$$

Donde $A = \sqrt{c_2^1 + c_2^2}, Sen\phi = \frac{c_1}{A}, Cos\phi = \frac{c_2}{A}, \left(tg\phi = \frac{c_1}{c_2}\right)$ y c_1,c_2 son valores de (2.18)

Al valor $Ae^{-\Gamma t}$ se le llama amplitud de amortiguación de las oscilaciones o simplemente amplitud de amortiguamiento.

¿ Cuál es el periódo de Oscilación? Observemos x(t) es aperiódica debido a que la función exponenecial no es periódica. En cambio el otro factor de (2.17) tiene por periodo a:

$$\gamma_d = \frac{2\Pi}{\sqrt{w_n^2 - \Gamma^2}} \tag{2.21}$$

Llamado cuasiperiódo de x(t) y que dá origen a la cusifrecuencia de movimiento:

$$f_d = \frac{1}{\gamma_d} = \frac{\sqrt{w_n^2 - \Gamma^2}}{2\Pi}$$

a) *Intersección con los ejes*

$$x = 0 \Rightarrow Ae^{-\Gamma t} Sen\left(\sqrt{w_n^2 - \Gamma^2} t + \phi\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \text{como } e^{-\Gamma t} \neq 0, \quad Sen\left(\sqrt{w_n^2 - \Gamma^2} t + \phi\right) = 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{w_n^2 - \Gamma^2} t + \phi = m\Pi, m\epsilon\mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow t = \frac{m\pi - \sqrt{w_n^2 - \Gamma^2}}{\sqrt{w_n^2 - \Gamma^2}}, m\epsilon\mathbb{Z}$$

Como **t** depende de **n** simbolizemos los puntos de intersección con los ejes por:

$$tn = \frac{m\pi - \phi}{\sqrt{w_n^2 - \Gamma^2}}, m\epsilon\mathbb{Z} \tag{2.22}$$

b) *Cálculo de los puntos máximos y mínimos.*

Utilizaremos para esto el método de la derivada:

Derivando

$$x(t) = \ddot{x}(t) = -\Gamma A\sqrt{w_n^2 - \Gamma^2} e^{-\Gamma t} Cos\left(\sqrt{w_n^2 - \Gamma^2} t + \phi\right)$$

Igualando a cero

$$Cos\left(\sqrt{w_n^2 - \Gamma^2} + \phi\right) = 0, \quad \text{púes } -\Gamma A\sqrt{w_n^2 - \Gamma^2} e^{-\Gamma t} \neq 0$$

Entonces

$$\left(\sqrt{w_n^2 - \Gamma^2} + \phi\right) = \frac{(2m + 1\pi)}{2}, m\epsilon\mathbb{Z}$$

Encontramos un máximo o un mínimo para **x** en:

$$t_m^* = \frac{\left(\frac{2n+1\pi}{2-\phi}\right)}{\sqrt{w_n^2 - \Gamma^2}}, \quad m\epsilon\mathbb{Z} \tag{2.23}$$

c) *Extensión del gráfico*

$$|x(t)| = \left|Ae^{-\Gamma t} Sen\left(\sqrt{w_0^2 - \Gamma^2}t + \phi\right)\right|$$

$$= \left|Ae^{-\Gamma t}\right| \left|Sen\left(\sqrt{w_0^2 - \Gamma^2}t + \phi\right)\right| \leq Ae^{-\Gamma t}$$

Púes

$$Ae^{-\Gamma t} > 0 \text{ y } \left|Sen\left(\sqrt{w_0^2 - \Gamma^2}t + \phi\right)\right| \leq 1$$

Pero: $|x(t)| \leq Ae^{-\Gamma t}$ implica que $-Ae^{-\Gamma t} \leq x(t) \leq Ae^{-\Gamma t}$, lo que indica que el esbozo de la gráfica se encuentra sobre $-Ae^{-\Gamma t}$ y debajo $Ae^{-\Gamma t}$.

De a, b, y c deducimos el gráfico de la Fig. 2.10 :

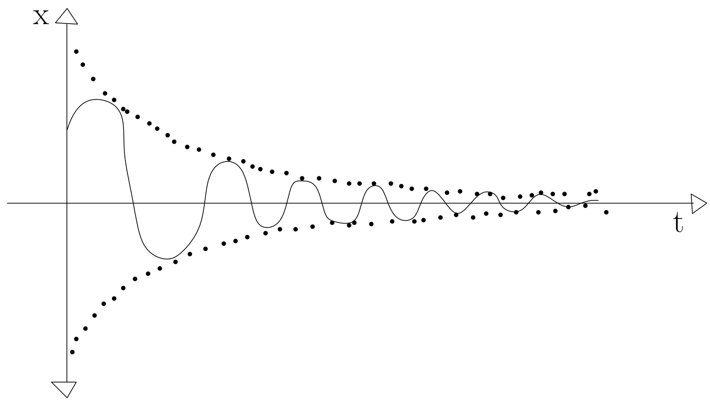


Figura 2.10: **Movimiento Vibratorio Amortiguado**

¿Cuál es la recta de caída de una oscilación libre? ó ¿Cómo varía el amortiguamiento?, frente a estas preguntas tenemos el conocido decremento logarítmico S. que es definido como el logaritmo natural de la razón de dos desplazamientos máximos sucecivos cualesquiera:

$$S = ln\frac{x_m}{x_m + 2} \tag{2.24}$$

Donde:

$$x_m = x\left(t_m^*\right), x_{m+2} = x\left(t_m^*\right), \quad \text{pero por (2.23)}$$

$$t_m^* = \frac{(2m+1)\frac{\Pi}{2-\phi}}{\sqrt{w_n^2 - \Gamma^2}}; t_{m+2}^* = \frac{2(m+2)+1\frac{\Pi}{2-\phi}}{\sqrt{w_n^2 - \Gamma^2}} \text{.....................}(Q)$$

En cualquier máximo

$$Sen(\sqrt{w_n^2 - \Gamma^2}t_m^* + \phi) = Sen(\sqrt{w_n^2 - \Gamma^2}t_{m+2}^* + \phi) = 1$$

Luego en (2.24) :

$$S = ln\frac{x_m}{x_{m+2}} = ln\frac{Ae^{-\Gamma t_m^*}Sen((\sqrt{w_n^2 - \Gamma^2}t_m^* + \phi)}{Ae^{-\Gamma t_{m+2}^*}Sen((\sqrt{w_n^2 - \Gamma^2}t_{m+2}^* + \phi)} = ln\frac{e^{-\Gamma t_m^*}}{e^{-\Gamma t_{m+2}^*}}$$

$$= \Gamma\left(t_{m+2}^* - t_m^*\right) lne$$

Sustituyendo (Q) queda:

$$S = \Gamma\left[\frac{[2(m+2)+1]\frac{\Pi}{2-\phi}}{\sqrt{w_n^2}} - \frac{(2n+1)\frac{\Pi}{2-\phi}}{\sqrt{w_n^2}}\right] = \frac{2\Gamma\Pi}{\sqrt{w_n^2}} \tag{2.25}$$

Que representa al valor del decremento logarítmico. En función de cuasiperiodo $S = \Gamma\gamma d$

Púes por la ecuación (2.21) $\gamma_d = \dfrac{2\Pi}{\left(\sqrt{w_n^2}\right)}$

Para finalizar la sección veamos algunos ejemplos

Ejemplo 3

Un cuerpo pesa 24 lb. estira un resorte 4 pies el movimiento subsiguiente se realiza en un medio que ofrece una resistencia numericamente igual a B veces (B¿0) la velocidad instantánea. Si el cuerpo parte de la posición de equilibrio con una velocidad dirigida hacia arriba de $2\frac{pies}{S}$ y si $B > 3\sqrt{2}$ demuestre que la ecuación de movimiento es:

$$x(t) = \frac{-3}{\sqrt{B^2-18}} e^{\left(\frac{-2B}{3}t\right)} Senh\frac{2}{3}\sqrt{B^2-18t}$$

En efecto

Como el cuerpo pesa 24 libras y estira al resorte 4 pies: $k = \frac{24lib}{4pies} = 6\left(\frac{lib}{pie}\right)$

La masa del cuerpo es:$m = \frac{w}{q} = \frac{(24lib)}{\left(\frac{32pie}{seg^2}\right)} = \frac{3}{4}Slug.$

La constante de amortiguamiento viscoso es $B > 3\sqrt{2}$.

La E.D. de movimiento es:$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{4B}{3} - \frac{dx}{dt} + 8 = 0$

Con las condiciones iniciales:

$x(0) = 0 \Rightarrow$ Posición de equilibrio

$x(0) = -2 \Rightarrow$ Velocidad dirigida hacia arriba

El polinómio característico es:$p^2 + \left(\frac{4B}{3}\right)p + 8 = 0$

$$\Rightarrow P = \frac{-\left(\frac{4B}{3}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{4B}{3}\right)^2 - 4(8)}}{2} = \frac{-2B}{3} \pm \frac{2}{3\sqrt{B^2-18}}$$

Ahora dentro del radical: $B^2 - 18 > \left(3\sqrt{2}\right)^2 - 18 = 0$, y así el problema se ubica en el caso I. Por lo tanto su solución es:

$$x(t) = e^{-\frac{2B}{3}t}\left(C_1 e^{\frac{2}{3}\sqrt{B^2-18}t} + C_2 e^{\frac{2}{3}\sqrt{B^2-18t}}\right)$$

$$C_1, C_2 = des.$$

Calculamos las constantes usando las condiciones iniciales:

$0 = x(0) = C_1 + C_2 \Rightarrow C_1 = -C_2$...$(i)$

$$-2 = x(0) =$$
$$\left(\frac{-2B}{3} + \frac{2}{\sqrt{B^2-18}}\right) C_1 + \left(-\frac{2B}{3} - \frac{2}{3\sqrt{B^2-18}}\right) C_2 ....(ii)$$

de (i) en (ii):

$$C_2 = \frac{3}{2\sqrt{B^2-18}}$$

Entonces:

$$C_1 = \frac{3}{2\sqrt{B^2-18}} \quad \text{Por lo tanto:}$$

$$x(t) = e^{\left(\frac{-2B}{3}\right)t}\left[\frac{3}{2\sqrt{B^2-18}} e^{\frac{2}{3}\sqrt{B^2-18}t} - \frac{3}{2\sqrt{B^2-18}} e^{\frac{-2}{3}\sqrt{B^2-18}t}\right]$$

$$x(t) = \frac{3e^{\left(\frac{-2B}{3}\right)t}}{\sqrt{B^2-18}}\left[\frac{e^{\frac{2}{3}\sqrt{B^2-18}t} - e^{\frac{2}{3}\sqrt{B^2-18}t}}{2}\right]$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{e^{\left(\frac{-2B}{3}\right)}}{\sqrt{B^2-18}} Senh \frac{2}{3\sqrt{B^2-18}} t \quad \text{Lqqd}$$

Gráficamente:

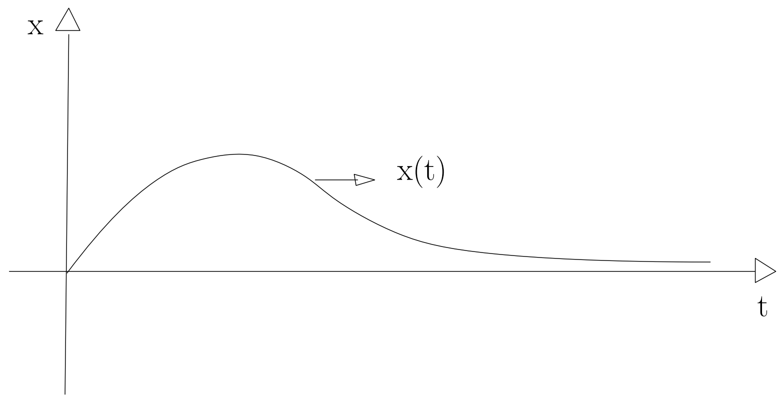


Figura 2.11: **Gráfica del movimiento Sobre-Amortiguado del ejemplo 3**

Ejemplo 4

Si aplicamos una fuerza de 2 lib estira un resorte 1 pie. Un cuerpo que pesa 3.2lib se sujeta al resorte y luego el sistema se sumerge en un medio que comunica una fuerza de amortiguación numericamente igual a 0.4 veces la velocidad instantánea.

a) Determinar la ecuación de movimiento si el cuerpo se suelta, a partir del reposo, desde un punto que está a 1 pie sobre la posición de equilibrio.

Es decir cuando $x(0) = -1pie$ y $x(0) = 0$

La constante del resorte vale:$K = \dfrac{2lib}{1pie} = \dfrac{2lib}{pie}$

Como el cuerpo está sujetado a un cuerpo que pesa 3.2lb entonces:

$$m = \left(\frac{3{,}2lib}{32\frac{pies}{S^2}} \right) = \frac{1}{10} Slug$$

Por otro lado:

$$C = 0{,}4\frac{lib}{seg} = \frac{2}{5}\frac{lib}{seg}$$

Ahora:

$$w_0 = \frac{k}{m} = 20seg^{-1},\ \Gamma = \frac{c}{2m} = 2seg^{-1}$$

Entonces como $\Gamma^2 - w_0^2 = 4 - 20 = -16$, la ecuación de movimiento se obtiene del caso III, que junto con las condiciones iniciales nos dá por solución:

$$x(t)e^{-2t}\left(-Cos4t - \frac{1}{2}Sen4t \right)$$

Observe y reemplase x(0)=-1 y $\ddot{x}(0) = 0$

b) La amplitud del movimiento es :

$$A = \sqrt{(-1)^2 + (-\frac{1}{2})^2} = \sqrt{\frac{5}{2}},$$

En tanto que $tg\phi = \frac{-1}{\frac{-1}{2}} = 2 \Rightarrow \phi = 4{,}249 rad.$

Lo que implica en la forma alternativa:

$$x(t) = \sqrt{\frac{5}{2}} Sen(4t + 4{,}249)$$

c) ¿En qué instante pasa por primera vez, el cuerpo, por la posición de equilibrio, dirigido hacia arriba ?

$$x(0) = 0 \Rightarrow 4t + 4{,}249 = n\Pi, n\epsilon\mathbb{Z}+$$

$n = 1 \Rightarrow t = -0{,}297$ (absurdo)
$n = 2 \Rightarrow t = -0{,}509$ (pasa hacia abajo parte de arriba)
$n = 3 \Rightarrow t = -1{,}294$ (pasa hacia arriba por primera vez)

Por lo tanto sucede para t=1.294 seg.

Capítulo 3

Vibraciones Forzadas

3.1. Introducción

Conocido también como movimieno vibratorio excitado, debido a que actúa una fuerza extraña, originada por el sistema mismo o por efecto de agentes exteriores.

Son de especial interés aquellas fuerzas cuya acción es periódica, pues hacen que la frecuencia natural del sistema tienda a ser numericamente igual a la frecuencia circular

Un fénomeno que se presenta es la resonancia; la amplitud en el M.A.S. es constante, la amplitud amortiguada tiende a cero, pero la amplitud en sistema forzado puede crecer incontrolablemente a medida que el tiempo aumenta. Causando muchas veces daños al sistema, por lo tanto aquí se detallará aspectos generales de tal fénomeno y las técnicas que nos permiten hacernos de su efecto destructivo.

3.2. Movimiento Vibratorio Forzado con Amortiguamiento

El diagrama masa-muelle tiene mostrado en la Fig.3.1 donde semuestra el sistema está exitado por una fuerza extraña f(t) y además k,c son la constante de rígidez y de amortiguación respectivamente.

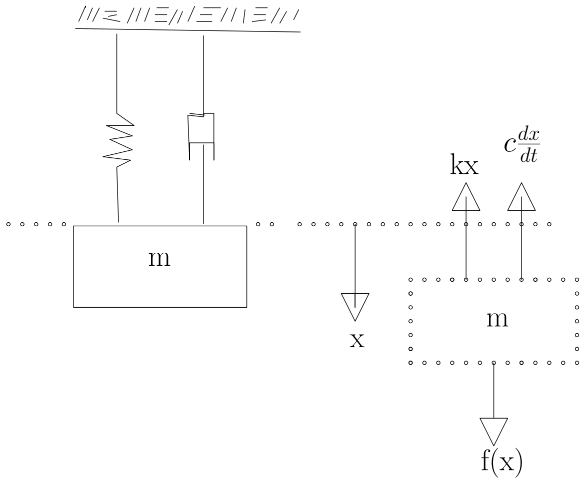


Figura 3.1: **Diagrama de Cuerpo Libre M.V.F. con Amortiguación**

Su ecuación diferencial de movimiento es:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+c\frac{dx}{dt}+kx=f(t)$$

Dividiendo por m:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\Gamma\frac{dx}{dt}+w_0^2x=F \tag{3.1}$$

Donde:

$$\tfrac{d^2x}{dt^2}+2\Gamma\tfrac{dx}{dt}+w_0^2x=F$$

Que es una E.D.O. lineal de segundo orden, no homógenea cuya solución lo obtenemos tal como se muestra en el Cap. 1.1.

La solución particular de la ecuación dependerá de la forma F(t), por lo tanto se origina un análisis muy extenso , es así que interesados en fuerzas periódicas hagamos un estudio de la solución cuando $F(t)=F_1Sen\mu t$, con F_0 y μ constantes.

La solución de la ecuación homógenea puede ser de tres maneras tal como se muestra en el Cap. 1

Para la solución particular por el método de los coeficientes indeterminados supongamosque:

$$x_p(t) = ASen\mu t + BCos\mu t \quad \text{derivando dos veces}$$

$$x_p'(t) = \mu(ACos\mu t - BSen\mu t)$$

$$x_p''(t) = \mu^2(-ASen\mu t - BCos\mu t)$$

Como debe satifacer (3.1)

$$x_p'' + 2\Gamma x_p' + w_0^2 x_p = F_0 Sen\mu t$$

Esto es:

$$-\mu^2(-ASen\mu t - BCos\mu t) + 2\Gamma\mu(ACos\mu t - BSen\mu t) + w_0^2(ASen\mu t + BCos\mu t) = F_0 Sen\mu t$$

Igualando coeficientes:

$$-\mu^2 A - 2\Gamma\mu B + w_0^2 A = F_0; -\mu^2 B - 2\Gamma\mu A + w_0^2 B = 0$$

Resolviendo este sistema para A y B obtenemos:

$$A = \frac{F_0(w_0^2 - \mu^2)}{(w_0^2 - \mu^2) + 4\mu^2\Gamma^2}$$

$$B = \frac{-2\Gamma F_0}{(w_0^2 - \mu^2)^2 + 4\mu^2\Gamma^2}$$

Luego:

$$x_n(t) = \frac{F_0(w_0^2 - \mu^2)}{(w_0^2 - \mu^2) + 4\mu^2\Gamma^2} Sen\mu t + \frac{-2\mu\Gamma F_0}{(w_0^2 - \mu^2)^2 + 4\mu^2\Gamma^2} Cos\mu t$$

Que puede quedar expresado como:

$$x_p = \frac{F_0}{\sqrt{\left(w_0^2 - \mu^2\right)^2 + 4\mu^2\Gamma^2}} Sen(\mu t + \Theta)$$

Donde:

$$Sen\Theta = \frac{-2\mu\Gamma}{\sqrt{\left(w_0^2-\mu^2\right)^2+4\mu^2\Gamma^2}}; Cos\Theta = \frac{w_0^2-\mu^2}{\sqrt{\left(w_0^2-\mu^2\right)^2+4\mu^2\Gamma^2}}$$

Finalmante la solución (3.1) es:

$$x_n(t) = x_n(t) + \frac{F_0}{\sqrt{\left(w_0^2-\mu^2\right)^2+4\mu^2\Gamma^2}} Sen(\mu t+\Theta) \tag{3.2}$$

Donde toma los valores dados en el Cap. anterior para la solución de la ecación no homogénea, es decir: En el caso sobre-amortiguado:

$$x(t) = e^{-\Gamma t}\left(C_1 e^{\sqrt{\Gamma_0^2-w^2}t} + C_2 e^{-\sqrt{\Gamma_0^2-w^2}t}\right) + x_p(t) \tag{3.3}$$

En el caso criticamente-amortiguado:

$$x(t) = e^{-\Gamma t}(C_1 + C_2 t) + \frac{F_0}{\sqrt{\left(w_0^2-\mu^2\right)^2+4\mu^2\Gamma^2}} Sen(\mu t+\Theta) \tag{3.4}$$

En el caso sub-amortiguado:

$$x(t) = e^{-\Gamma t} Sen(\sqrt{w^2-\Gamma^2}t+\phi) + \frac{F_0}{\sqrt{\left(w_0^2-\mu^2\right)^2+4\mu^2\Gamma^2}} = Sen(\mu t+\Theta) \tag{3.5}$$

La función x_c es llamada solución complementaria o función complementaria y x_p conocida como solución particular es llamada integral particular.

Observemos (3.3), (3.4), (3.5) y vemos que x_c (t) se vuelve insignificante (tiende a cero) cuando t, por eso se dice que es un término transitorio o una solución transitoria. A la solución particular se le denomina estacionaria o solución permanente.

Como conclusión de este análisis podemos decir que cuando **F** es una función periódica como $F(t) = F_0 Sen\mu t$ ó $F(t) = F_0 Cos\mu t$ la solución general de (3.1) consta de dos términos tal como se ve en (3.2):

x(t) = Término transitorio + Término estacionario

Ejemplo:

La solución del problema de valores iniciales:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2\frac{dx}{dt} + 2x = 4Cost + 2Sent$$

$$x(0) = 0 \text{ y } \frac{dx}{dt}/_{t=0} = x(0) = 3$$

Es:

$$x(t) = x_c(t) + x_p(t) = e^{-t}Sent + 2sent$$

Término transitorio $= e^{-t}Sent$

Término estacionario =2Sent

En la Fig.3.2 se muestra la insignificancia del término transitorio para $t > 2\Pi$.

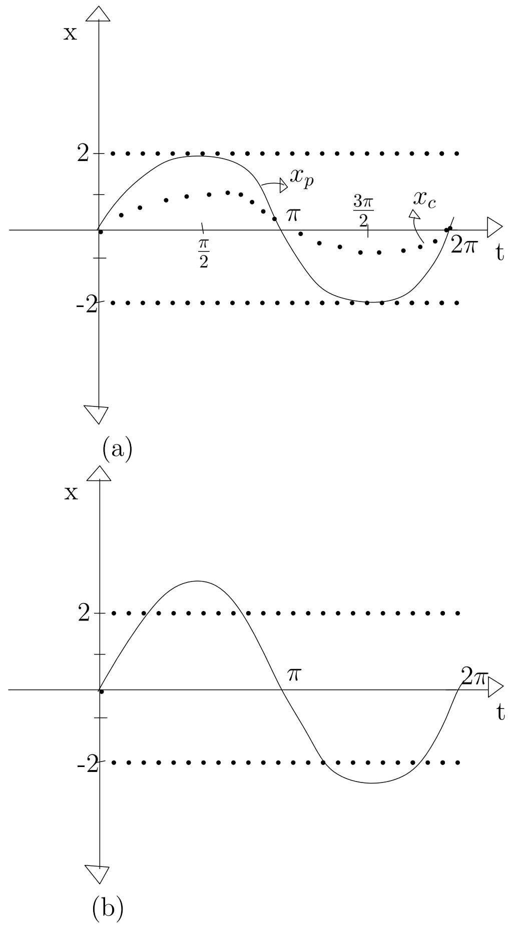


Figura 3.2: **Gráfica de la solución de P.V.I. del ejemplo: (a) Comparación entre el término transitorio y estacionario. (b) Gráfica de la solución general.**

3.3. Movimiento Vibratorio Forzado Sin Amortiguamiento

En la ecuación (3.1) ignoramos el término que contiene el coeficiente de amortiguación y obtenemos

$$\frac{d^2x}{dt^2} + w_0^2 x = F(t) \tag{3.6}$$

Esta es la E.D. del movimiento vibratorio forzado, no amortiguado.

La solución de la ecuación homógenea en (3.2) es:

$$x_c = C_1 Senw_0 t + C_2 Cosw_0 t$$

Supongamos que $F(t) = F_0 Sen\mu t$, entonces la solución particular de (3.6) por el método de los coeficientes indeterminados es:

$$X_c(t) = \frac{F_0}{w_0^2 - \mu^2} Sen\mu t$$

Lo que dá como solución general de (3.6) a:

$$x(t) = C_1 Senw_0 + C_2 Cosw_0 t + \frac{F_0}{w_0^2 - \mu^2} Sen\mu t \tag{3.7}$$

Suponiendo que el cuerpo parte de la posición de equilibrio y del reposo, entonces: x(0)=0; x(0)=0, que transforma a (3.7) en:

$$x(t) = \frac{F_0}{w_0^2 - \mu^2} Sen\mu t(-\mu Senw_0 t + w_0 Cos\mu t), para \quad \mu \neq w_0 \tag{3.8}$$

Púes

$$C_1 = 0 y C_2 = \frac{-\mu F_0}{w_0 \left(w_0^2 - \mu^2\right)}$$

OBSERVACION: *De (3.7) vemos que en este caso no existe término transitorio lo que da origen al fénomeno que acontinuación se expone*

3.4. Resonancia

Resonancia pura, la ecuación (3.8) no está definida para $\mu = w_0$, pero el límite cuando $\mu \to w_0$ puede ser obtenida por la regla de L' Hospital. Este proceso límite es análogo a “sintonizar”la frecuencia impulsora $\frac{\mu}{2\Pi}$ con la frecuencia de oscilación libres $\frac{w_0}{2\Pi}$

Calculemos tal límites

$$\lim_{\mu\to w_0} x(t) = \lim_{w\to w_0} \frac{F_0\left(-Senw_0t + w_0Cos\mu t\right)}{w_0\left(w_0^2-\mu^2\right)} =$$

$$\lim_{\mu\to w_0} \frac{\frac{d}{dv}\left[-\mu Senw_0t + w_0Cos\mu t\right]}{\frac{d}{du}\left[w_0\left(w_0^2-\mu^2\right)\right]}$$

$$F_0 = \lim_{\mu\to w_0} \frac{-Senw_0t + w_0tCos\mu t}{w_0\left(w_0^2-\mu^2\right)} = F_0\left(\frac{-Senw_0t + w_0t + w_0tCosw_0t}{-2w_0^2}\right)$$

$$= \frac{F_0}{2w_0^2}Senw_0t - \frac{F_0}{2w_0}tCosw_0t$$

Qué es la definición que usaremos para x(t), esto es:

$$x(t) = \frac{F_0}{2w_0^2}Senw_0t - \frac{F_0}{2w_0}tCosw_0t \tag{3.9}$$

Una gráfica de x(t) de (3.8) o (3.9) aproximadamente es la fig. 2.3:

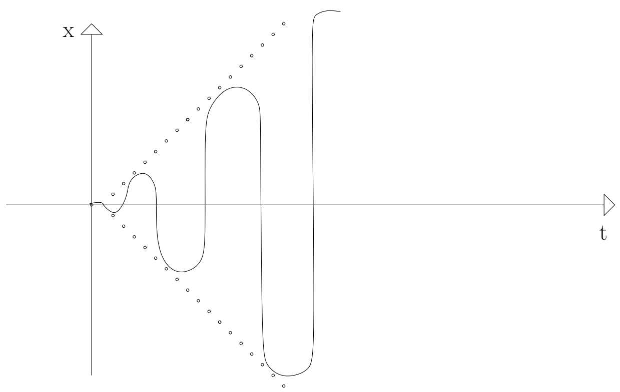


Figura 3.3: **Observe que la amplitud vá aumentando indeterminadamente.**

Tomando la sucesión $t_n = \dfrac{n\Pi}{w_0}, n\epsilon\mathbb{Z}+$ observemos en (3.9) que $|x(t_n)|\infty$ donde t_n^{∞} es decir la amplitud crece incalculablemente, conociéndose este fenómeno como resonancia pura.

La resonancia en (3.2) el término transitorio tiende para la solución estacionaria que es:

$$x_p(t) = g(\mu)Sen\,(\mu t + \Theta)$$

Donde

$$g\,(\mu) = \frac{F_0}{\sqrt{(w_2^0 - \mu^2)^2 + 4\Gamma^2\mu^2}} \tag{3.10}$$

Aunque la amplitud de xp es acotada cuando $t\infty$ se verifica que las oscilaciones máximas se producen para $\mu_1 = \sqrt{w^2 - 2\Gamma^2}$ (derivando $g(\mu)$ con respecto a μ) cuando la frecuencia de la fuerza exterior es $\sqrt{w^2 - \frac{2\Gamma^2}{2\Pi}}$ se dice que el sistema está en resonancia.

$$g(\mu) = \frac{2}{\sqrt{(4-\mu^2) + B^2\mu^2}}$$

Damos valores a μ , B coeficientes de amortiguamiento, y gra-ficamos cada una de las funciones que se obtienen, la familia que se obtiene se llama curva de resonancia del sistema.

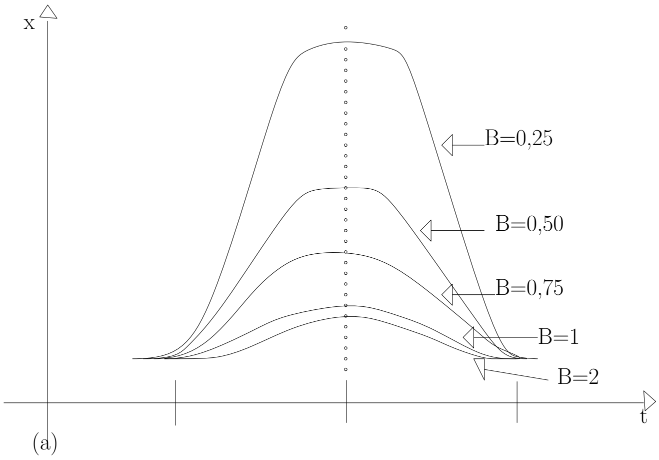


Figura 3.4: **Observe que la amplitud vá aumentando indeterminadamente.**

¿Cómo eliminar la resonancia en un sistema?, una forma de eliminar la resonancia es aumentando el coeficiente de rozamiento.

Antes de finalizar el capitulo veamos que sucede elevando $F(t) = F_0 Cos\mu t$.

Ejemplo2

El problema de valores iniciales.

$$\frac{d^2x}{dt^2} +^2 wx = F_0 Cos\mu t, \quad \text{con } x(0) = 0 \text{ y } x(0) = 0$$

Tiene por solución a:

$$x(t) = \frac{F_0}{w_2^0 - \mu^2}\left(Cos\mu t - Cosw_0 t\right) \quad w_0 \neq \mu \tag{3.11}$$

La resonancia pura en este caso es :

$$x(t) = \lim_{\mu w_0} \frac{F_0}{w_0^2}\left(Cos\mu t - Cosw_0 t\right) = F_0 \lim_{\mu \to w_0} \frac{\frac{d}{d\mu} Cos\mu t - Cosw_0 \mu t}{\frac{d}{dv}(w_0 - \mu^2)}$$

$$= F_0 \lim_{\mu \to w_0} \frac{-tSen\mu t}{-2\mu} = \frac{F_0 tSenw_0 t}{2w_0}$$

La diferencia de cosenos de (3.11) lo pasamos a producto, esto es:

$$x(t) = \frac{F_0}{w_0^2 - \mu^2} Sen\frac{1}{2}\left(\mu - w_0\right) tCos\frac{1}{2}\left(\mu + w_0\right) t$$

Definimos $E = \mu - w_0$ para $E \to 0, \mu + w_0\,(\mu \approx w_0)$ luego una solución aproximada es:

$$x(t) = \frac{F_0}{2E\mu} Sen\frac{1}{2} ECos\mu t \tag{3.12}$$

Como **E** es pequeño la frecuencia es: $\dfrac{\mu}{2\Pi}$ de la fuerza impulsora es cercana a $\dfrac{w}{2\Pi}$ de las oscilaciones libres. Cuando esto sucede, a las oscilaciones de este tipo se llaman pulsos y se deben a que la frecuencia de $SenEt$ es bastante pequeña comparada con la frecuencia de $Sen\mu t$. Las curvas punteadas mostradas en la Fig. 3.5 se obtienen a partir de las gráficas de $\pm\left(\dfrac{F_0}{2E\mu}\right) SenEt$.

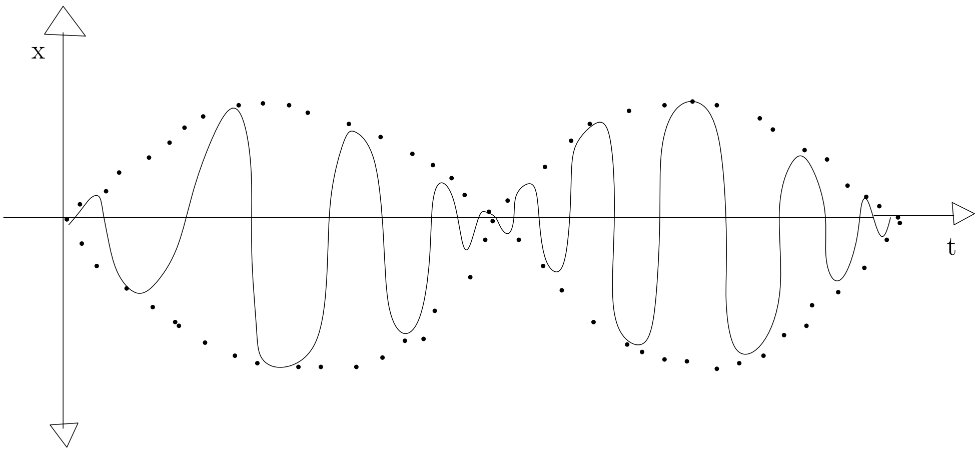


Figura 3.5: **Gráfica de los pulsos [ecuación (9)].**

Capítulo 4

Sistemas Análogos

4.1. Introducción

Hemos estudiado el sistema masa-muelle y se ha visto que su movimiento está modelado por una ecuación diferencial ordinaria líneal de segunda orden con coeficientes constantes, es decir de la forma:

$$a_2\frac{d^2x}{dt^2} + a_1\frac{dx}{dt} + a_0x = F(t) \tag{4.1}$$

Además nos hemos familiarizado con el procedimiento matemático de la solución de la solución de (4.1) y el análisis respectivo :

Muchos de los fénomenos donde existe vibración , donde es posible aplicar la segunda ley de Newton dará origen una ecuación del tipo (4.1). En este caítulo veremos algunos sitemas.

4.2. Péndulo Simple

El sistema consta de una mas **m** de peso **w** colgada del extremo de una varilla de longitud constante **L**. Suponiendo que el movimiento se realiza en un plano vertical, se trata de determinar el ángulo de desplazamiento Θ, medido con respecto a la vertical, en función del tiempo t (se considera $\Theta > 0$ a la derecha de OP y $\Theta < 0$ a la izquierda de OP).

Por trigonometría: $s = L\Theta$

Por lo tanto la aceleración ángular es:

$$\frac{d^2s}{dt^2} = L\frac{d^2\Theta}{dt^2}$$

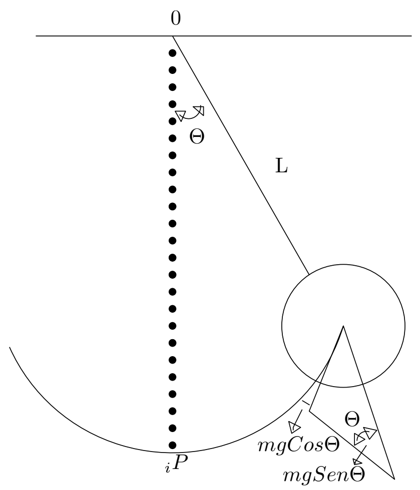


Figura 4.1: **Péndulo Simple**

Por la segunda ley de Newton: $F = m.a = m.L.\frac{d^2\Theta}{dt^2}$

De la Fig. 4.1 vemos que la componente tangencial debido al peso **w** es $mgSen\Theta$. Despreciando la masa de la varilla tenemos:

$$mL\frac{d^2\Theta}{dt^2} = -mgSen\Theta$$

$$\Rightarrow \frac{d^2\Theta}{dt^2} + \left(\frac{g}{L}\right) Sen\Theta = 0 \tag{4.2}$$

Lamentablemente (4.2) no es líneal, es por eso que para linealizarlo consideramos solamente pequeños valores tal que $Sen\Theta \approx \Theta$. Además hacemos $w_0^2 = \frac{g}{L}$ y tenemos que (4.2) se puede expresar como:

$$\frac{d^2\Theta}{dt^2} + w_0^2\Theta = 0$$

Que es similar a la E.D.O. del M.A.S. por lo tanto de aquí deducimos la conocida fórmula del periódo del péndulo:

$$\gamma = \frac{2\Pi}{w_0} = 2\Pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

Se puede hacer lo mismo que se hizo con el sistema resorte-masa, es decir considerarlo amortiguado, exitado, etc.

4.3. Circuito en Serie

Consideremos el circuito simple conectado en serie que se muestra en la Fig. 4.2 y consta de un inductor, un resistor y un capacitador. La segunda ley de Kirchoff dice que la suma de las caídas de voltaje a través de cada uno de los componentes del circuito es igual a la tensión E(t) aplicada. Si llamamos q(t) a la carga del capacitor en un instante cualquiera, entonces la corriente i(t) esta dada por $i = \frac{dq}{dt}$. Ahora bien, se sabe que las caídas de voltaje son:

En un inductor=$L\left(\frac{di}{dt}\right) = L\frac{d^2q}{dt^2}$

En un capacitor= $\left(\frac{1}{c}\right)q$

En un resistor=$iR = R\left(\frac{dq}{dt}\right)$

En donde L, C y R son constantes llamadas inductancia, capacitancias y resistencia respectivamente. Para determinar q(t) debemos, por lo tanto, resolver la ecuación diferencial de segundo orden:

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{c}q = E(t) \tag{4.3}$$

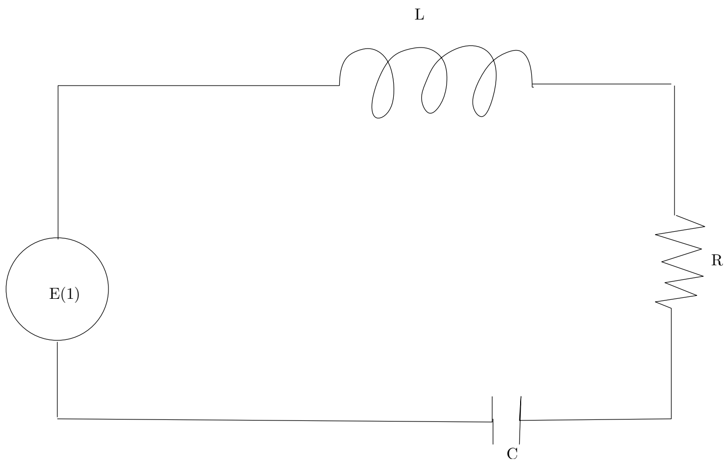


Figura 4.2: **Circuito en serie**

Usando las condiciones iniciales q(0) y $q'(0)$ representan la carga del capacitor y la corriente en el circuito, para t=0, respectivamente. Además la tensión eléctrica aplicada E(t) corresponde a la fuerza electromotriz (f.e.m). La tensión produce la carga del capacitor y hace que la corriente circule en el circuito.

Las unidades básicas que se usan en este sistema son:

CANTIDAD	**UNIDAD**
Tensión Eléctrica (f.e.m.)	Volt. (V)
Inductancia L	Henry. (H)
Capacitancia C	Farad. (F)
Resistencia R	Ohm (Ω)
Carga q	Coulomb. (C)
Corriente i	Ampere (A)

4.4. Barra de Torción

Análogamente, se puede demostrar que la ecuación diferencial que rige el movimiento de torción de un cuerpo suspendido del extremo de una barra elástica es:

$$I\frac{d^2\Theta}{dt^2} + C\frac{d\Theta}{dt} + k\Theta = T(t) \tag{4.4}$$

Como se muestra en la Fig. 4.3 , la función $\Theta(t)$ representa la magnitud de la torción en un instante cualquiera.

Donde: I= *Movimiento de inercia.*

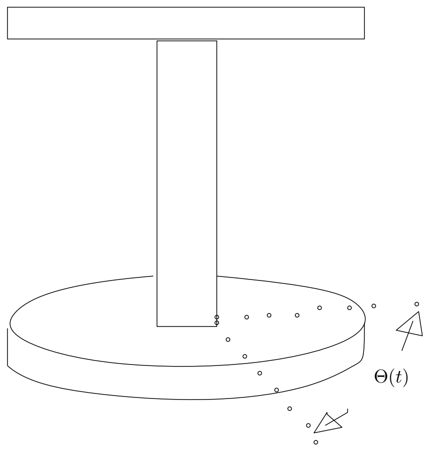


Figura 4.3: **Barra de torción**

En resumen comparando (4.3)(4.4) con la ecuación (4.1) del cap. 3 tenemos que la única variacón es la terminología, cuya comparación se da en la siguiente tabla:

SISTEMA MECÁNICO	**SISTEMA ELÉCTRICO EN SERIE**	**SISTEMA TORCIONAL**
m (Masa)	L (Inductancia)	I (Mov. de inercia)
q (Amortiguación)	R(Resistencia)	c (Amotiguación)
k (Cte. del resorte)	$\frac{i}{c}$ (Elastancia)	k (Cons. de barra)
f(t) (Fuerza aplicada)	E(t) (Tensión aplicada	T(t) (Mov. de torción aplicada)

Capítulo 5

Resumen

El objetivo de este trabajo es dar una ilustración de como se pueden aplicar las ecuaciones diferenciales ordinarias y lineales en la descripción de fénomenos Oscilatorios mécanicos y algunos otros tal como eléctrico.

En el cap. 2 consideramos una masa **m**, colgada a un soporte rígido por in resorte de constante **k** y cuyo movimiento **x** depende de **t**. Usando la ley de Hooke y la segunda ley de Newton, se que la ecuación diferencial de movimiento es:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

Cuya solución es: $x(t) = C_1 Cosw_0 t + C_2 Senw_0 t$, donde $w_0^2 = \dfrac{k}{m}$ es llamada *Frecuencia Circular*. Deducimos además que el periódo y la frecuencia natural que oscila el sistema son $T = \dfrac{2\pi}{w_0}$ y $f_n = \dfrac{w_n}{2\pi}$ respectivamente. Se conoce como movimiento armónico simple M.A.S.

Una situación más realista es la estudiada en el capitulo 3.3.Cuando tenemos en cuenta la resistencia del medio, en condiciones ideales de fricción es proporcional a la velocidad instantánea y tiene sentido contrario a la velocidad $\dfrac{dx}{dt}$. La ecuación de movimiento pasa ser entonces:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + k\frac{dk}{dt} + cx = 0$$

Como las raices de $m\mu^2 + k\mu + c = 0$ son:

$$\mu_1 = \frac{-k + \sqrt{k^2 - 4mc}}{2m} \text{ y } \mu_1 = \frac{-k + \sqrt{-k^2 - 4mc}}{2m}$$

Tenemos que considerar tres casos:

I) $k^2 - 4mc > 0$, en este caso $\mu_1 < 0$, $\mu_2 < 0$ y la solución general de (2) es:$x(t) = C_1 e^{\mu_1 t} + C_2 e^{\mu_2 t}$ conocido como sistema de amotiguado.

II) $k^2 - 4mc = 0$, en este caso $\mu_1 = \mu_2 = \dfrac{-k}{2m}$ y la solución general es:

$$x(t) = C_1 e^{\frac{-k}{2m}t} + C_2 e^{\frac{-k}{2m}t}$$

Se dice que el sistema está críticamente amortiguado.

III) $k^2 - 4mc < 0$, en este caso como las soluciones son complejas, la solución general es:

$$x(t) = e^{-\frac{k}{2m}t}\left[C_1 Cos\left(\frac{\sqrt{4mc - k^2}}{2m}\right)t + C_2 Sen\left(\frac{\sqrt{4mc - k^2}}{2m}\right)t\right]$$

Conocido como sistema sub-amortiguado y es el que se aproxima a un M.A.S. en este caso se define: El cuasiperiodo por:

$$\Phi = \frac{4\Pi m}{\sqrt{4mc - k_2}}$$

En cualquiera de los tres casos x(t) tiende rapidamente para cero.

En el capítulo 3 se evalúa el mismo sistema aplicando una fuerza externa periódica, ejemplo $F(t) = F_0 Sen\mu t$ tenemos el sistema mécanico forzado y la oscilación que resulta llámase *Oscilación Forzada*. La ecuación de movimiento es:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + k\frac{dk}{dt} + cx = F_0 Sen\mu t$$

Cuya solución general es de la forma:

$$x(t) = x_c(t) + x_p(t)$$

Donde la solución complementaria $x_c(t)$ es solución de la ecuación homogénea y $x_p(t)$ es una solución particular. Para el caso amortiguado a $x_c(t)$ se le llama término transitorio y en tanto que $x_p(t)$ para ambos casos, amortiguado y no amortiguado, se le llama teérmino estacionario.

Una solución para el caso no amortiguado es:

$$x(t) = C_1 Cosw_0 t + C_2 Senw_0 t + \frac{F_0 t Sen\mu t}{w_0^2 - \mu^2}$$

Tenemos que cuando la fuerza externa tiende a la frecuencia del sistema, las oscilaciones son ilimitadas cuando $t \to \infty$. Tal fenómeno es llamado *Resonancia* y es estudiado al final del capítulo 3.

El capítulo 4 es simplemente una extensión por analogía de los capítulos anteriores.

Bibliografía

[1] Denis G. Zill. “ *Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones* ” . Grupo Editorial Iboamérica, México, 1988.

[2] Willian T. Thomson. “ *Teoría de Vibraciones y Aplicaciones* ” Prentice Hall, México, 1993.

[3] A. P. French . “ *Vibraciones y Ondas* ” Editorial Reverté, España, 1993.

[4] K. K. Ostberg . “ *Ecuaciones Diferenciales* ” Editorial Fondo Educativo Iberoamericano S.A., 1983.