UNIVERSIDAD DEL BÍO BÍO
FACULTAD DE EDUCACIÓN Y HUMANIDADES
PEDAGOGIA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
CAMPUS LA CASTILLA
CHILLÁN

"Una secuencia didáctica para la proporcionalidad"

Seminario para optar al título Profesor de Educación Media en Educación Matemática

TESISTAS:
JIMENEZ ESTEBANNY
QUEVEDO SILVIA
YAÑEZ LORENA

PROFESORA GUÍA: SARA PASCUAL P.

CHILLÁN
DICIEMBRE-2014

AGRADECIMIENTOS.

En nuestra última etapa de nuestro proyecto de investigación, queremos agradecer la importancia de diversas personas que estuvieron en todo momento, apoyando, guiando y alentando en nuestra construcción diaria, para lograr concluir una etapa importante de la vida que es la carrera profesional, es por ello que no queremos dejar a un lado la valiosa ayuda y paciencia que tuvieron todos aquellos seres que día a día hicieron posible con su ayuda lograr la meta propuesta que hace cuatro años decidimos partir y ahora vemos concluida.

En primera instancia queremos agradecer a nuestra profesora guía, la señora Sara Pascual Pizarro, quien nos otorgó tiempo, tolerancia, y permitió ir construyendo poco a poco cada uno de nuestros saberes, guiándonos y mejorando nuestras falencias, quien nos permitió crecer como persona y formarnos como futuros docentes, gracias por su dedicación y profesionalismo, que nos facilitó para darnos cuenta que la carrera fue escogida por vocación y dedicación.

En segunda instancia, queremos agradecer a nuestras familias, quienes participaron, apoyaron y nos alentaron día y noche, se desvelaron y participaron en nuestros procesos de crecimientos y formación, quienes nos soportaron y entendieron todos los cambios de humor, aquellas personas que son importantes en nuestras vida y lograron con su perseverancia ser mejores profesionales para un futuro ideal.

En tercera instancia, queremos agradecer de forma general a todos los tíos auxiliares de nuestra casa de estudio, quienes nos apoyaron y entendieron nuestra labor, su paciencia y aliento que día a día nos permitió darnos cuenta de sus pequeñas muestras de cariño hacia nosotras.

TABLA DE CONTENIDOS.

INTRODUCCION.

La enseñanza de la proporcionalidad en Chile es abordada en gran parte de la enseñanza de los estudiantes, presentada formalmente en el currículum en séptimo año iniciando con las nociones de razón y proporción para luego enseñar el concepto de proporcionalidad, siendo este concepto tratado en los distintos ejes temáticos (números, geometría y álgebra, para luego formalizar la proporcionalidad a través de la función. Teniendo en cuenta la importancia que el currículum le entrega a este concepto, siendo tratado desde séptimo año hasta tercer año medio, como futuras docentes nos interesa que el alumno se cuestione lo que aprende, que indague nuevas estrategias y sea autónomo en la búsqueda del nuevo conocimiento.

Conscientes de la relevancia del concepto de proporcionalidad y la complejidad de su enseñanza se decide investigar una propuesta pedagógica, de manera que los alumnos puedan buscar la estructura de la proporcionalidad para la construcción de un conocimiento Para efecto de lo anterior se realizó una adaptación para estudiantes de segundo año medio del *Estudio del formato A4* de Catherine Houdement Y Marie-Lise Peltier (1992), el cual corresponde a una situación de homología para los profesores de primer año de formación. La actividad original tiene por objetivo poner en red el coeficiente de proporcionalidad, pendiente de la recta y teorema de Thales. La nueva actividad propuesta tiene por objetivo la unicidad del concepto de proporcionalidad en los distintos cuadros para intentar dar respuesta a nuestra pregunta de investigación (Sección 1.2) sobre la factibilidad de la movilización espontánea de las propiedades de la proporcionalidad por la exposición a una situación didáctica conformada por cuatro actividades, basada en la *Teoría Situaciones Didácticas* (G. Brousseau), complementada además con *Cambios de Cuadros y la Dialéctica Herramienta- Objeto* (R. Douady) (Sección 2.2).

La metodología (Sección 3) utilizada en nuestra investigación se presenta el diseño didáctico, con sus respectivos análisis *a priori*, los cuales nos llevaron a la elaboración de una matriz por competencias, cuyo objetivo es confrontar los análisis *a priori* con los análisis *a posteriori*, nos permitiendo analizar cómo la explicitación del aprendizaje de la proporcionalidad era puesta en red con los conocimientos antes vistos.

Siguiendo con el curso de la investigación se analizaron las producciones de los alumnos utilizando la matriz de competencia ya nombrada. Estos resultados se encuentran en el capítulo para los análisis e interpretación de los resultados (Sección 4) para luego formular las conclusiones.

La importancia de plantear esta problemática y consiguientemente con una propuesta, nace de la necesidad de que cualquier docente pueda realizar su trabajo profesional con este tipo de actividades con total libertad , pudiendo así complementar el trabajo planteado desde programas ministeriales, permitiendo así la puesta en marcha de un trabajo profesional docente integral, teniendo en cuenta aspectos tradicionales de enseñanza, propuestas innovadoras del quehacer y la participación más protagonista del alumnado .

1. PROBLEMÁTICA DE LA INVESTIGACIÓN.

La proporcionalidad es un concepto central y, sin embargo, difícil de construir (Géron, C., Stege, P. et Daro, S., 2005), puesto que la construcción de este necesita de la noción de otros conceptos, como por ejemplo la razón y la proporción. Es fundamental que los alumnos manejen y dominen los conocimientos relativos a la proporcionalidad, dada su utilidad en la vida cotidiana, su aplicación en diversas disciplinas, así como el rol que ejerce en diversos contextos de las matemáticas. La proporcionalidad está por todas partes y, no obstante, su aprendizaje no sucede por sí mismo:

> *"No es un misterio para nadie, que la proporcionalidad es para muchos alumnos una noción que plantea problema. Ahora bien su control es indispensable no sólo para las matemáticas sino también para la mayoría de las disciplinas escolares y otras formaciones profesionales"* (Boisnard et al, 1994[1])

El uso de la proporcionalidad no es reciente, dado que la historia nos muestra que ya en tiempos antiguos fue utilizada en distintos contextos. En arquitectura el caso más representativo en el uso de proporciones ha sido el hecho de construir monumentos de forma armónica y para ello se vieron en la necesidad de buscar una relación de proporcionalidad.

Aunque se encontró una aplicación para el concepto de la proporción, el concepto de proporcionalidad aún no se define como tal, pero ayuda a resolver problemas cotidianos de repartición con técnicas que son utilizadas en la actualidad. Este uso se manifiesta en tiempos paralelos al paradigma griego y en un contexto diferente al arquitectónico.

> *"Se ha mencionado con anterioridad la gran importancia práctica cotidiana del razonamiento proporcional. Esta importancia se hace patente, por ejemplo, en el hecho de que podemos encontrar vestigios de su uso en los más antiguos textos matemáticos conservados. Por ejemplo en el Papiro de Rhind[2] encontramos, entre otros muchos problemas, el siguiente: Si 10 hekat[3] de grasa deben durar un año, ¿cuánta grasa puede usarse en un día?"* (Robins y Shute, 1987, p. 514)

[1] Citado en Géron, C., Stege, P. et Daro, S., 2005.
[2] Documento egipcio de carácter didáctico que contiene diversos problemas matemáticos.
[3] Unidad de medida egipcia, equivalente a 4,54 litros.
[4] Citado por Oller, A., 2012 p. 24

Asimismo, aparecen problemas referentes a intercambios de mercancías o a repartos proporcionales. También aparecen estos tipos de problemas, en textos chinos desde el siglo II A.C. (Cullen, 2007[5]) y en textos hindúes que, aunque cronológicamente mucho más tardíos, recogen tradiciones anteriores; como el Lilavati[6] (Patwardan et al., 2001[7]). Algunos ejemplos de problemas presentes en estos libros son para resolver situaciones mercantiles.

> *"- Ahora, se quieren cambiar 5 dou 2/3 sheng 30 de mijo por semillas de sésamo. Di: ¿Cuánto se obtiene?"* (Kangshen et al, 1999, p. 146[8])

> *"-Cerca de Bugia o Ceuta, alguien transporta en un barco 31 quintales y 64 rollos, 31 de piel de cabra que quiere intercambiar por cuero. Se sabe que 2 quintales de piel de cabra equivalen a 3 de cuero".* (Sigler, 2002, p.177[9]).

A través de estos ejemplos podemos observar que a pesar de la diversidad cultural, poseen un problema relacionado con el intercambio. El problema que tenían era común, sin embrago sus estrategias para solucionarlo eran diferentes.

> *"Es remarcable el hecho de que las técnicas de resolución y los algoritmos utilizados son ya similares a los actuales pese a que surgen en contextos alejados del paradigma griego".* (Crespo et al., 2009[10]).

El uso de la proporcionalidad hasta antes del siglo XIII era una técnica que resolvía problemas *fue básica en todas las ciencias cuantitativas hasta la época de Newton* (Boyer, 1946[11]), pero que aún no se traducía a un modelo; los intentos de modelizar la proporcionalidad se acerca con trabajos variados como, por ejemplo, encontrar una "fórmula" que explique un fenómeno científico o graficar un fenómeno económico. Aun así la historia demuestra con Leibniz la necesidad de construir un modelo que generalice la relación entre magnitudes y a la vez posea un lenguaje riguroso para ya en el siglo XIX hablar del concepto formal de función, utilizado en la actualidad.

---

5 Loc.Cit.
6 Libro matemático indio, escrito en 1150 autor Bhaskara
7 Oller, Loc.Cit.
8 Citado por Oller, A., 2012 p. 24
9 Loc.Cit.
10 Oller**,** Loc.Cit.
11 Citado por Díaz, J. 2013, p. 15

> "En el Período Latino a partir del siglo XIII hasta entrado el periodo moderno aparecieron con notable regularidad los comienzos del período moderno fueron surgiendo regularmente tratados sobre proporciones. Estos trabajos equivalen a un álgebra de relaciones del tipo $\boldsymbol{n}$ y $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{k}\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{n}}$, donde $\boldsymbol{n}$ tiene un valor racional..." (Díaz, J. 2013.)

Algunos matemáticos de la época se daban cuenta de la relación que existía entre el contexto de la función y su representación gráfica, aquellas funciones en las cuales existía una relación constante entre las magnitudes su representación gráfica era una recta, mientras que cuando no existía relación entre las magnitudes su representación gráfica mostraba una línea no recta.

> *"Por otro lado, Oresme trabajó intentando dibujar ciertas funciones para las cuales la tasa de cambio no era constante, las gráficas en estos casos eran líneas quebradas o curvilíneas. La latitud de formas representó una teoría primitiva de funciones en la que esta tenía que ver con la dependencia de una cantidad variable sobre otra". (Díaz, J.2013)*

La palabra "función" fue vista por primera vez en los manuscritos de Leibniz (Agosto de 1673), quien la introdujo dando características y agregando elementos a la representación gráfica tales como la pendiente de una curva, coordenadas de un punto de la curva.(Díaz,J.2013)

En el año 1718 la función se define formalmente por primera vez por Johan Bernoulli.

> *"Por función de una cantidad variable, denotamos aquí una cantidad construida de un modo u otro con esta cantidad variable y constantes". (*Rüthing, 1984[12])

Dirichlet en 1829 entregó la definición actual de función $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ de una variable independiente en un intervalo determinado, definiendo la función de la siguiente forma:

> *"$\boldsymbol{y}$ es una función de una variable $\boldsymbol{x}$, definida en el intervalo $\boldsymbol{a} < \boldsymbol{x} < \boldsymbol{b}$, si a todo valor de la variable $\boldsymbol{x}$ en este intervalo le corresponde un valor definido de la variable $\boldsymbol{y}$. Además, es irrelevante en qué forma se establezca esta correspondencia"* (Kleiner, 1989[13])

La historia nos ha mostrado que la proporcionalidad es un concepto de alta complejidad, que a través de las diferentes necesidades que fueron surgiendo en la humanidad se ha logrado entregar una solución que llevó a la estructura del concepto.

---

12 Citado por Díaz, J. 2013, p. 15
13 Citado por Díaz, J. 2013 p.17.

En nuestro sistema educativo actual, la proporcionalidad se enseña respetando las necesidades que surgieron en el desarrollo del concepto durante la historia, aunque se sigue el mismo modelo de la creación del concepto, cabe preguntar si el estudiante comprende la proporcionalidad. Así como nos informan los autores *como Vergnaud (1988, 1994), Lesh, Post, y Behr (1988), Adjiage y Pluvinage (2007), Martin et al. (2008), García y Serrano (1999) informan que los alumnos no alcanzan niveles apropiados de aprendizaje en estas temáticas durante su ciclo escolar. Además, estudios comparativos de diferentes periodos de tiempo muestran que los resultados no mejoran significativamente de un año a otro.* (Hodgen, Kuchemann, Brown, & Coe, 2010; Martin et al., 2008[14])

Si nos enfocamos en el desarrollo del pensamiento de la proporcionalidad, este tiene sus orígenes en los trabajos de Piaget (Piaget & Inhelder, 1958) sobre el desarrollo del pensamiento lógico, resaltando la importancia del razonamiento proporcional en la constitución de las operaciones formales del pensamiento. Esta forma de razonamiento marca el cambio desde las etapas de las operaciones concretas hacia las operaciones formales, por lo tanto, para Piaget, la comprensión de la proporcionalidad comporta dos aspectos: uno lógico y otro matemático. Bajo el aspecto lógico, la proporcionalidad es un esquema que establece relaciones entre relaciones bajo el aspecto matemático, las compensaciones cuantitativas asumen la forma de esquemas proposicionales de equivalencia que permiten garantizar que en el proceso de variación se conserve invariante un cociente o un producto. Así pues, sobre la base de las etapas propuestas por Piaget e Inhelder para el desarrollo del razonamiento proporcional, se analizan posibles secuencias de enseñanza y, reconociendo la complejidad del campo, se edifican nuevas líneas de investigación en busca de la comprensión de los factores asociados. (Obando, G., Vasco, C. y Arboleda, L., 2012).

Podemos inferir que para la comprensión de la noción de la proporcionalidad es necesario desarrollar el pensamiento lógico/matemático para que exista una vinculación en los conceptos anteriormente vistos y así llegar a hacer propio el concepto de proporcionalidad, no solo enfrentarlos a ejercicios de aplicación.

> *"Actualmente, pedimos al profesor enseñar proponiendo primero a los alumnos problemas cuya solución necesita inventar soluciones originales que el profesor procura*

[14] Citado por Obando, G., Vasco, C. y Arboleda, L., 2014.

luego hacer evolucionar para acabar en elementos de saber nuevo y en soluciones más elaboradas". (Charnay, 2003[15])

Se propone, por consiguiente, que la enseñanza de la proporcionalidad no se reduzca a una simple técnica de cálculo, que se pase a otra concepción de la enseñanza de la proporcionalidad, menos centrada sobre el algoritmo de resolución (como por ejemplo la regla de tres), sino más orientada sobre la percepción de una relación particular entre dos magnitudes, sobre la estructura de los problemas y sobre la descripción que permite hacer de ello el modelo de las proporciones.

"El simple aprendizaje mecánico de la regla de tres y de todas las reglas que resultan de ello no es suficiente para dar un conocimiento verdadero de la proporcionalidad, es decir una buena representación del concepto subyacente a todos los problemas, todos métodos de resolución y todas las propiedades matemáticas que componen este aprendizaje particular que se designará en lo sucesivo bajo el término de proporcionalidad." (Boisnard, 1994[16])

Sin embargo, el procedimiento clásico de resolución de los problemas de proporcionalidad es la regla de tres con o sin pasaje por la unidad estudiada podemos observar esto en la figura 1. Esta regla es utilizada en las clases como la herramienta que cubre las necesidades de la vida corriente y como método de aprendizaje matemático de la proporcionalidad.

1 **Usa productos cruzados para resolver cada proporción.**

1. $\frac{6}{10} = \frac{36}{x}$ **2.** $\frac{4}{7} = \frac{5}{p}$ **3.** $\frac{12{,}3}{m} = \frac{75}{100}$ **4.** $\frac{t}{42} = \frac{1{,}5}{3}$

Figura 1.Mecanización de la regla simple de tres.
Coll D, 2014, *Texto del estudiante 7º básico matemáticas, editorial Galileo*

"…los que frecuentan la escuela (antes de 1945 en particular) necesitarán rápidamente saber resolver tales problemas. Les proporcionamos las estrategias correspondientes: a cada colección de problemas corresponde un método de resolución particular para la cual se entrena a los alumnos". (Boisnard, 1994[17])

---

15 Citado por Géron, C., Stegen, P. et Daro, S., 2005.
16 Loc.Cit.
17 Citado por Géron, C., Stegen, P. et Daro, S., 2005.

En este trabajo pretendemos poner el acento sobre la percepción de una relación particular entre dos magnitudes más que sobre la aplicación de las técnicas de resolución como lo es la regla simple de tres, queremos que los alumnos desarrollen el pensamiento lógico/matemático para así tener las herramientas necesarias con el objetivo de crear por si mismos el concepto de proporcionalidad.

> *"los progresos (en la enseñanza de la proporcionalidad) pueden medirse sólo en relación al aumento de nuestras ambiciones: queremos que los alumnos sepan resolver una gran cantidad de problemas y de forma más inteligente, queremos que sean más los que puedan lograr una comprensión y un control del concepto, queremos dar a este concepto un estatuto matemático más riguroso con el fin que los alumnos tengan un modelo más poderoso para resolver los problemas."* (Boisnard et al., 1994[18])

A nivel de las investigaciones didácticas, parece haber consenso sobre un tipo de principio general de la manera en la que las competencias matemáticas se construyen. Pero, entre las intenciones generales y las prácticas de enseñanza habitual, a menudo hay cosa difícil de franquear, porque la puesta en ejecución de este principio de acción pedagógica necesariamente debe acompañarse de una reflexión didáctica sólida y previa.

> "*Los profesores y los formadores están, en su gran mayoría, de acuerdo con la idea que hay que partir de las situaciones y de los problemas (…). Desgraciadamente la puesta en ejecución práctica de esta idea no es solamente un asunto de elección pedagógica. Los trabajos llevados en didáctica muestran la necesidad de los conocimientos precisos (…). Sobre todo, hace falta un enfoque para el desarrollo de situaciones y secuencias particulares correspondientes al aprendizaje aludido".* (Boisnard et al., 1994[19])

Una evolución del concepto de proporcionalidad se inscribe en el cuadro más general del aprendizaje por resolución de problemas, estos deberían ocupar un lugar central en la concepción de formas de enseñanza. No obstante, este concepto no se trata más como en el pasado, de llevar a los alumnos a resolver clases de problemas, identificadas por una técnica de resolución precisa, sino más bien desarrollar situaciones que plantean problemas a los alumnos, que los obliguen a reflexionar, a poner en duda sus conocimientos, a atravesar un

[18] Loc.Cit.
[19] Citado por Géron, C., Stegen P. et Daro S., 2005.

paso suplementario en la comprensión del concepto, de modo que ellos logren construir nuevas herramientas.

Este principio general toma todo su sentido en el campo de la construcción de la noción de proporcionalidad.

> *"La idea de situación de proporcionalidad es muy central. Vamos a interesarnos por la manera cómo el alumno trata este tipo de situaciones y la forma en que las representa y las diferencia de las situaciones que están fuera de la proporcionalidad. También vamos a interrogarnos sobre los lenguajes y los modelos matemáticos más adecuados a cada nivel de resolución".* (Boisnard et al., 1994[20]).

En esta tesis se presenta una nueva concepción de la enseñanza de la proporcionalidad, menos centrada sobre el algoritmo de resolución, dado que el concepto de proporcionalidad se irá construyendo bajo una situación didáctica, basada en la Teoría de Situaciones de Brousseau (1998), planteándola en diferentes contextos numérico, geométrico y algebraico. Además se encontrará orientada sobre la percepción de una relación particular entre dos magnitudes, sobre la estructura de las actividades y sobre la explicitación de las respuestas permitiéndole al alumno buscar el modelo de la estructura multiplicativa de la proporcionalidad a través de una situación didáctica.

1.1 Objetivo de investigación

Nuestro objetivo de investigación es estudiar una nueva manera de enseñar la proporcionalidad para que la construcción del conocimiento de la estructura de la proporcionalidad a través de procesos y no de repetición de algoritmos memorísticos.

Para conseguir esto proponemos la adaptación de un diseño didáctico el cual permite desarrollar el aprendizaje por resolución de problemas sobre la base de la *Teoría de Situaciones Didácticas* (Brousseau, 1998).

1.2 Pregunta de investigación

¿Podemos hacer entender mejor por los estudiantes el significado de la proporcionalidad mediante la movilización espontánea de sus propiedades a través de la exposición de una serie de actividades que conforman una situación didáctica la cual recurre a diferentes cuadros matemáticos?

[20] Loc.Cit.

2. MARCO TEÓRICO.

En la búsqueda de una propuesta de la representación en los distintos cambios de cuadros de las propiedades de un concepto aparentemente conocido, debemos ser cautos ya que la creación de un concepto matemático en la historia no fue de manera inmediata, y que necesitó de años para validar su proceso, *un nuevo concepto enseñado debe integrarse en un dominio de validez de concepciones anteriores que el mismo concepto debe poder extender: es un objeto que se trenza entre el pasado y el futuro* (Chevallard, 1991[21]). La enseñanza de la proporcionalidad trae de manera implícita conceptos ligados a su construcción es por ello que nuestra situación didáctica requiere de la epistemología del concepto para crear una necesidad al alumno de nuevas herramientas para la formación del nuevo concepto, l*a epistemología se utiliza como reflexión sobre la esencia de los conceptos matemáticos, los procesos y condiciones que han provocado su desarrollo (Artigue, 1995).*

2.1 El objeto Matemático

La magnitud forma parte para definir nuestro objeto matemático la que permite comparar un objeto con otro, como por ejemplo la longitud o perímetro, el área, el volumen, la masa, la duración, el precio, pero también puede ser una magnitud discreta: como el número de personas, de lápices, de días. Este concepto no solo se limita entonces a las unidades de medida tradicionales encontradas en el currículum chileno.

> *"En el pensamiento común, primero hay objetos, y la magnitud es considerada como una propiedad de estos objetos"… "cuando se matematiza la idea de magnitud, no podemos hacerlo en atributo absoluto de los objetos. Al contrario, para comenzar definimos sólo relaciones entre objetos, a saber una relación de igualdad (llamada más precisamente 'equivalencia') y una relación de orden (es más pequeño que). Consideramos primero un conjunto de objetos de la misma naturaleza (por ejemplo el conjunto de los objetos largos, o el conjunto de los objetos pesados, etc.), luego los subconjuntos entre los que cada uno está formado por todos los objetos equivalentes a uno de ellos. Se dice entonces que cada uno de estos subconjuntos es una magnitud."* (Rouche N., 1992[22])

[21] Citado por Pascual, S., 2012
[22] Citado por Géron C., Stegen P. y Daro S., 2005

En el marco de la enseñanza primaria-secundaria define la proporcionalidad[23] como *una relación particular entre dos magnitudes (o más bien sus medidas) o entre dos sucesiones de números*. Estas dos sucesiones de números (asociadas o no a magnitudes) deben ser múltiplos una de la otra y ser tales que toda combinación lineal de números de una de ellas se corresponde a la misma combinación lineal de los números correspondientes de la otra.

Ilustremos esta definición por un ejemplo:

Peso de jamón en gramos (g.)	1000	500	250	750
Precio del jamón en pesos ($)	1500	750	375	1125

Tabla I. Relación entre el peso del jamón y su precio.

El precio de medio kilo de jamón corresponde a la mitad del precio de un kilo de jamón

: 2

Peso de jamón en (g)	1000	500	250	750
Precio del jamón en pesos ($)	1500	750	375	11,25

: 2

TABLA II. Estrategia para obtener medio kilo.

[23] Limitamos los desarrollos a los aspectos de la proporcionalidad abordados en el marco del enlace primaria-secundaria.

Además, se determina el precio de 750g de jamón, o bien multiplicando el precio de un kilo de jamón por ¾ (ya que 750g = ¾ 1000g), (Figura 5)

$\times \frac{3}{4}$

Masa de jamón en g.	1000	500	250	750
Precio del jamón en $	1500	750	375	1125

$\times \frac{3}{4}$

TABLA III. Estrategia multiplicativa para obtener el valor correspondiente a ¾ de kilogramos

O bien sumando los precios de 500g y 250g de jamón (ya que 750g=500g + 250g).

$750 = 500 + 250$

Masa de jamón en g.	1000	500	250	750
Precio del jamón en $	1500	750	375	?

$750 + 375 = 1125$

TABLA IV. Estrategia aditiva para obtener ¾ de kilogramo

La información ordenada en una tabla permite también visualizar y utilizar más fácilmente las propiedades de linealidad, propiciando la resolución del problema que muestra el siguiente ejemplo: utilizando un paso aditivo o multiplicativo.

Luis andando en bicicleta, cuenta el número de giros de la rueda y mide las distancias recorridas. Él obtiene los siguientes datos:

Número de giros de la rueda	5	10	23	30
Distancia recorrida en m	11	22	50,6	66

TABLA V. Relación entre número de giros y la distancia recorrida

Responde: ¿Cuál es la distancia recorrida después de 43 giros de la rueda?

Los alumnos son susceptibles de elegir la regla de tres como método de resolución, por ejemplo al establecer la proporción entre las razones 11/5 y x/43 (con x la distancia recorrida por 43 giros), o la proporción entre 43/5 y x/11. En cualquier caso este método los lleva a resolver una ecuación de primer grado.

Por otro lado siendo proporcionales los datos de la tabla V, las propiedades lineales son conservadas. En efecto ya que los 43 giros se expresan como la combinación lineal 43 = 10 + 10 + 23, entonces la distancia recorrida por los 43 giros se corresponde con la combinación lineal 22 + 22 + 50,6 = 94,6. El resultado es inmediato con los datos de la tabla V y sin tener que resolver una ecuación (tabla VI). Este método (modelo lineal) resulta ser más simple y eficaz para la resolución de este problema.

$$43 = 10 + 10 + 23$$

Número de giros de la rueda	5	10	23	30	43
Distancia recorrida en m	11	22	50,6	66	?

$$22 + 22 + 50,6 = 94,6$$

TABLA VI. Representación de los 43 giros como combinación lineal

Actualmente el currículum nos presenta como estrategia clásica de resolución de problemas de proporcionalidad el uso de la regla simple de tres, siendo esta utilizada en las clases como la herramienta que cubre las necesidades donde exista una relación directa entre dos variables y no como método de aprendizaje matemático de la proporcionalidad.

También conviene recordar que este método de resolución (la regla simple de tres) es solo el caso de la proporcionalidad directa.

La utilización sistemática de la regla de tres pone demasiado énfasis en la resolución del problema y no lo suficiente sobre la relación matemática existente entre dos magnitudes. Es indispensable que los alumnos perciban estas relaciones para explorar otros métodos de resolución, más eficaces, simples y generalizadores. Se debería entonces tener en cuenta cada vez menos la regla de tres como el método de resolución sino más bien como otra herramienta, entre varias, que proponer a los alumnos para que elijan un método de resolución más adecuado al problema que se plantee y a sus variables didácticas.

2.2 Algunas Teorías didácticas

Las bases teóricas utilizadas en nuestro trabajo son las *Teorías de Situaciones Didácticas* (Brousseau), la *Dialéctica Herramienta-Objeto* (Douady R., 1990) y los *Cambios de Cuadros* (Douady R., 1984). Estas bases apuntan hacia el uso de los conocimientos *a priori* del alumno como recurso que disponen para alcanzar un nuevo conocimiento, luego construir por si mismos un conocimiento nuevo otorgando una orientación con el objetivo del desarrollo de una secuencia didáctica para ver el concepto de proporcionalidad en diferentes cuadros.

2.2.1 Teoría de Situaciones Didácticas

El trabajo con el formato A4 está diseñado en base a la *Teoría de Situaciones Didácticas* (Brousseau, G., 1998), que respeta la epistemología del concepto de estructura multiplicativa que trae la proporcionalidad. La situación didáctica se divide en cuatro actividades, en las cuales se desarrollan las fases de acción, formulación, validación e institucionalización.

La situación de Houdement C. – Peltier M., 1992 propone analizar los apilados geométricos apoyándose en material concreto, en este caso, en los rectángulos semejantes vinculando la relación numérica largo y ancho incitando a formular una hipótesis sobre las relaciones matemáticas.

Los objetos en concreto permiten validar visualmente una propiedad y a la vez justificar matemáticamente la propiedad a través de la relación numérica que existe en las medidas (largo, ancho).

De esta manera permite a los alumnos a acceder, a un cierto convencimiento a través del razonamiento inductivo, que es validado a través de lo numérico, dando a entender que no es necesario comenzar con la definición de un concepto ya que el alumno a través de sus propias herramientas puede llegar a este, que por falta de un lenguaje formal, es necesaria la institucionalización.

2.2.2 Dialéctica herramienta-objeto y cambio de cuadro

Se trabaja con la dialéctica herramienta-objeto, que es un proceso cíclico que organiza los roles del profesor y los alumnos, a través de fases (R. Douady, 1990). Aquí existe una interacción entre lo algorítmico y la estructura que se quiere lograr mediante esta dialéctica, se forma un esquema en la situación didáctica en el cual los conceptos matemáticos desempeñan alternativamente el rol de herramienta para resolver un problema y de objeto que toma un lugar en la construcción de un saber organizado socialmente reconocido.

Cuando nos referimos a *cuadro* es en el sentido de R. Duady (1984) "*un cuadro está constituido por objetos de una rama de las matemáticas, de las relaciones entre esos objetos, de sus formulaciones eventualmente diversas y de las imágenes mentales que el sujeto asocia en un momento dado para estos objetos y para sus relaciones. Un concepto matemático puede ser movilizado en varios cuadros (físico, algebraico, numérico, geométrico, gráfico, informático) entre los cuales se establecen relaciones que contribuyen al conocimiento de este concepto*"

Los cambios de cuadros (por iniciativa del actor de la situación y bajo su control: alumno, grupo de alumnos o docente) son puestas en relación interesadas o interesantes de dos traducciones de un mismo problema (para resolver) en dos (o más) dominios de trabajo (los cuadros) para hacer avanzar las fases de investigación y evolucionar las concepciones de los alumnos (Douady R., 1984).

Fases que se trabajan en la situación didáctica:

Fase a) Antiguo

El estudiante trabajará con algo práctico y fácil, que no le presenta dificultad y que animará a seguir con la actividad, no hay ningún obstáculo.

> *"la puesta en obra de un objeto conocido como herramienta explícita para emprender un procedimiento de resolución del problema"* (Douady R., 1990)

Fase b) Investigación

En esta etapa el estudiante encuentra dificultades para resolver la situación, ya sea por convicciones contradictorias, obstáculos o errores; es así reconocida esta etapa como:

> "*el inicio de una fase de acción. Él puede entonces poner en acción implícitamente herramientas, nuevas ya sea por la extensión del campo de validez, ya sea por la naturaleza misma"* (Douady R., 1990)

Esta fase en la situación didáctica se vuelve contradictoria con su forma de aprendizaje, "*los errores o contradicciones pueden convertirse en los juegos de procesos dialécticos de formulación y validación propias para resolver los conflictos y asegurar las integraciones necesarias".* (Douady R., 1990).

Fase c) Explicitación

Una vez ya comprendida la situación didáctica, a través de las distintas estrategias de acción y validación, este aprendizaje se comienza a volver el objeto de acuerdo a la *"condición de empleo del momento. Se trata del "nuevo explícito" susceptible de reutilización y familiarización. (R. Douady, 1990)"*

Intervención del profesor

Esta etapa es donde el profesor interviene, *"elige el momento y la forma de la intervención, respetando la maniobra de los alumnos (R. Douady, 1990)"*, interviene pero no corrige.

Fase d) Institucionalización

El profesor pasa, desde este momento, a una etapa de institucionalización de lo que es nuevo y a retener con las convicciones en curso, si se da el caso de definiciones, teoremas y demostraciones. Esto nuevo que hay que retener está destinado para funcionar posteriormente como antiguo (R. Douady, 1990).

Se espera que con el apoyo de la Herramienta- Objeto, que el objeto y las herramientas cambian de acuerdo a los distintos contextos, la proporcionalidad, vista como un sistema que se retroalimenta a través de los cambios de cuadro.

En el presente trabajo estos cuadros podrían ser:

- Cuadro de las magnitudes: Al trabajar con objetos concretos (cantidades y medidas) es necesario que el alumno le dé sentido a lo que va obteniendo a través de la actividad, poniendo en relación dos magnitudes. Esta relación se presenta en la mayoría de las veces en las situaciones de proporcionalidad. Cabe mencionar que este es un caso particular de la reducción de figuras dentro de la situación didáctica.

  > *"El número de dominios de magnitudes puesto en juego en los problemas es un parámetro importante que va a jugar sobre la dificultad o no de un problema. Se deja muy a menudo de lado la enseñanza de las magnitudes en la resolución de problemas y la comprensión de las escrituras matemáticas. Ahora bien, insertar las magnitudes en una escritura matemática, eso permite al alumno saber exactamente lo que calcula. Se percibe que los alumnos, en la inmensa mayoría de los casos, no saben a qué magnitud corresponde el resultado que encontraron" (Géron, C., Stegen, P. et Daro, S., 2005)*

- Cuadro numérico: manipulación de algoritmos que pretenden encontrar la relación numérica entre las variables.
- Cuadro gráfico: representación de la relación entre las variables o entre los números en un sistema de coordenadas.
- Cuadro algebraico: representación de la proporcionalidad a través de una función que modela la relación entre las variables.

Al trabajar con las situaciones didácticas, es necesario utilizar distintos medios[24] para llegar a la construcción de la estructura como objeto

[24] El concepto de medio según Brousseau.

"… sobre el hecho que un mismo concepto es llamado a funcionar en diferentes ambientes conceptuales y técnicos y que el funcionamiento en cada uno de estos ambientes presente características específicas" (Popper)

En el desarrollo de la situación nos fue indispensable utilizar las tres teorías mencionadas anteriormente, *Teoría de Situaciones Didácticas* de G.Brousseau, Dialéctica Herramienta-Objeto y Cambios de Cuadro de R. Douady, puesto que nuestra actividad el objetivo es poner en vínculo coeficiente de proporcionalidad, pendiente de la recta, Teorema de Thales, homotecia y función lineal, donde cada actividad utiliza el conocimiento *a priori* como herramienta para descubrir el nuevo objeto en los diferentes contextos que engloba la situación didáctica.

En el siguiente ejemplo podemos observar los siguientes cambios de cuadros (cuadro numérico y cuadro gráfico), para observar la existencia de la proporcionalidad.

Los datos puestos en la tabla VII es un método esquemático, visual y accesible para los alumnos.

El recurso al gráfico como herramienta de resolución es más específico, ya que es también vinculado al aprendizaje de las funciones.

Una compañía de transporte propone dos fórmulas:

Formula A: el pasaje común por un viaje, vale 50 mil pesos

Formula B: una tarjeta semi-tarifa que cuesta 400 mil pesos para un máximo de 16 viajes. Completar la tabla siguiente:

Número de viajes	6	10	16	20	24
Precio pagado con la formula A					
Precio pagado con la formula B					

TABLA VII. Estrategia para la búsqueda de la relación numérica.

¿Podemos decir que hay proporcionalidad entre el precio y el número de viajes con la formula A? Justifique.

¿Qué hay de esto mismo para la formula B?

Representar los datos de esta tabla en un diagrama cartesiano y explicar cómo se puede controlar si hay o no proporcionalidad.

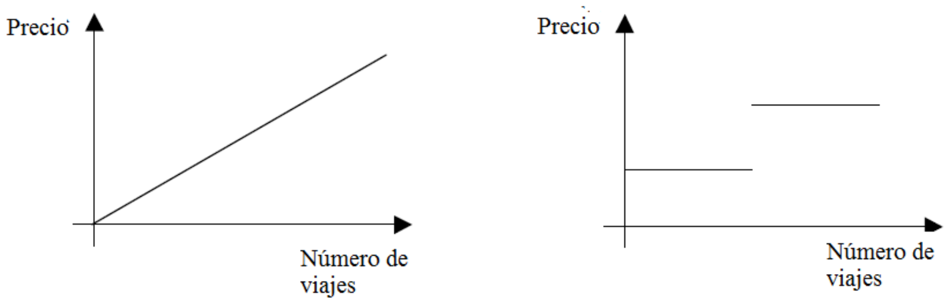
La utilización de la tabla VII permite una traducción rápida del enunciado:

Número de viajes	6	10	16	20	24
Precio pagado con la formula A	300.000	500.000	800.000	1.000.000	1.200.000
Precio pagado con la formula B	666666,7	40000	25.000	800.000	800.000

TABLA VIII. Relación numérica entre cantidad de pasajes y el valor de estos.

Una vez obtenido los valores pagando con ambas fórmulas podemos llevar estas variables a organizarlas en una gráfica, teniendo en cuenta la variable independiente y la dependiente, para luego ubicar los puntos en el plano cartesiano y observas si estos forman una linealidad, siendo esta una de las características de la proporcionalidad.

Fórmula A   Fórmula B



(Figura 2)

Los puntos entregados por la fórmula A observados en la figura 2 están sobre una recta que pasa por el origen, por consecuencia existe la proporcionalidad en esta fórmula, en cuanto la fórmula B se observan dos líneas horizontales, las cuales no presentan relación estando seccionadas, esto nos indica que no existe proporcionalidad.

A través de este ejemplo se observa en la fórmula A que la relación número de viajes y precio numéricamente son de 50 mil pesos que estos corresponderían a la pendiente de la recta que está ligada al modelo lineal $\boldsymbol{y = 50.000x}$.

Podemos deducir que es necesario la complementación de la representación de un mismo concepto en distintos contextos, ya que se logra dar sentido a sus propiedades.

2.3 Hipótesis de investigación

La metodología llevada al aula será en una eminentemente práctica, activa, participativa, cíclica, abierta, flexible, continua y motivadora, en la que priman intereses de nuestros alumnas y alumnos. Partiremos de un modelo constructivista donde trataremos de que los estudiantes sean capaces de aprender a través de las situaciones didácticas.

Para acercarnos a nuestro objetivo de investigación, formulamos la hipótesis que apunta a que es posible mejorar el aprendizaje y comprensión de la proporcionalidad, mediante situaciones didácticas que permiten a los estudiantes organizar conocimientos anteriores para utilizar como proceso operatorio del mismo objeto de estudio y, a la vez, permita la búsqueda de una estructura matemática común a varios objetos matemáticos.

3. METODOLOGÍA.

En la búsqueda de la comprensión del concepto de proporcionalidad ligada a la estructura multiplicativa que trae y a su forma de enseñanza, nos inspiramos en el trabajo de Houdement C. y Peltier M. (*"Estudio del formato A4", 1992*) y en la metodología de la ingeniería didáctica (Artigue, M., 1995; Douady R., 1990) que nos permite asegurar la gestión de la *secuencia didáctica en situación de clase* (Pascual S., 2012). Trabajaremos con una situación didáctica (Brousseau G., 1998) que lleva al estudiante a la movilización por diferentes cuadros (numérico, geométrico y gráfico) (Douady R., 1990) para la estructuración del concepto de proporcionalidad, así en este proceso la estructura del concepto emerge cuando este es desarrollado con conocimientos a priori, la necesidad que exige la situación al estudiante lo lleva a buscar conocimientos nuevos, para llevar este proceso se recurre a herramienta- Objeto (Douady R., 1990).

*E*l alumno podrá evidenciar que la proporcionalidad es representada en diferentes contextos. *Nos interesamos por evaluar las competencias matemáticas desarrolladas y el nivel de explicitación* (S. Pascual, 2012) de la proporcionalidad.

3.1 Sujetos de estudio y contexto institucional

Para este estudio de la representación de la proporcionalidad en distintos cuadros, recurrimos al Colegio Creación de Chillan, establecimiento particular subvencionado, perteneciente a la Caja de Compensación La Araucana. Se trabaja con alumnos de segundo año de Enseñanza Media, según conocimientos curriculares, el estudiante de este nivel ya ha visto la proporcionalidad numérica, Teorema de Thales y función lineal.

El curso seleccionado está formado por treinta y seis (36) estudiantes; veinte niños y dieciséis niñas, que ingresaron al establecimiento el año 2013 y provenientes de distintas realidades académicas.

La experimentación la llevamos a cabo a fines de septiembre del 2014. El horario de la asignatura de matemáticas correspondiente al curso comprendía 2 horas pedagógicas[25] distribuidas en dos días (jueves y viernes).

3.2 La Ingeniería Didáctica

La ingeniería didáctica se caracteriza, en comparación con otros tipos de investigación basados en la experimentación en clase, por el registro en el cual se ubica y por las formas de validación a las que está asociada, cuya validación es en esencia interna, basada en la confrontación entre el análisis *a priori* y *a posteriori.*

Como metodología de investigación, la ingeniería didáctica se caracteriza en primer lugar por un esquema experimental basado en las "realizaciones didácticas" en clase, es decir, sobre la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza (Artigue, M., 1995), que necesita de un análisis *a priori*, hay que asegurarse constantemente de la capacidad de la concepción general para permitir la invención, la organización y el devenir de las situaciones locales (Brousseau G., 1981, correspondientes a los cuadros teóricos generales en los que se basa la ingeniería.

Es por ello que con la ayuda de un análisis epistemológico del concepto de proporcionalidad, la ingeniería se diseña para provocar, de manera controlada, la evolución de las concepciones (Artigue, M., 1995)

3.3 Diseño Didáctico

Para alcanzar nuestros objetivos hemos tratado de reproducir una situación didáctica (Catherine Houdement- Marie Lise Peltier, 1992). Esta situación problema permite evidenciar aspectos de la proporcionalidad en los cuadros numérico, geométrico y gráfico. En particular organizar la razón de proporcionalidad, pendiente de la recta y Teorema de Thales. De este modo, se pretende llegar a la conclusión de que el concepto de proporcionalidad es un concepto unificador.

Para abordar la pregunta sobre la comprensión de la proporcionalidad, hemos combinado herramienta-objeto (R. Douady, 1984, 1987, 1991), utilizando cambios de cuadro para poner en acción la herramienta lineal en diferentes contextos. Queremos respetar la epistemología del

[25] Hora pedagógica: 45 minutos

concepto, haciendo a una enseñanza que nos aproxime a la historia, de manera de hacer resolver el problema al estudiante en calidad de actor e investigador. Convocar al debate científico en este nuevo rol, para crear la necesidad de una cierta organización en los conocimientos que trae, utilizados en las situaciones *a*-didácticas (Brousseau, 1998).

3.3.1 Elecciones matemáticas

1. Vincular ciertos conceptos matemáticos, que además de relacionarse entre sí, se asocian a ciertos teoremas y propiedades, utilizando conocimientos anteriores.

2. Enfrentar situaciones poco complejas, vinculando el concepto en diferentes contextos, para así poder extraer la abstracción del concepto de proporcionalidad.

3. Aumentar la variedad de los procedimientos utilizables e incitar a los alumnos a operar la elección que sea más apropiada a la situación particular que hay que tratar.

4. Estudiar las propiedades numéricas, gráficas y geométricas vinculadas a las funciones lineales.

3.3.2 Elecciones didácticas

1. Recurrir a los diferentes cuadros matemáticos, que permitan la comprensión de la proporcionalidad.

2. Crear diferentes situaciones, que permitan utilizar la estructura multiplicativa de la proporcionalidad como herramienta para estructurar la función lineal.

3. Establecer situaciones, las que serán presentadas por el profesor, en donde el alumno explora y formula, entregando sus propias respuestas, que le permitirán estructurar el concepto de proporcionalidad.

4. Crear situaciones en donde los alumnos expliciten sus formulaciones, las confronten, para luego así validarlas al resolver la situación.

5. Establecer el tiempo prudente para la resolución de la situación.

3.4 Situación Didáctica

A través de estas teorías pretendemos que los estudiantes construyan y vean la estructura del concepto de proporcionalidad, con ayuda de los conocimientos *a priori*, y no solo con resoluciones algorítmicas.

Se presenta el instrumento para el desarrollo del concepto de proporcionalidad.

Estudio de un apilado regular

Materiales:

- *Hojas formato A4*
- *Tijeras*
- *Calculadora*
- *Regla*

Actividad 1

Consigna: *Tomar una de estas hojas, que llamaremos rectángulo F_0. A partir de este rectángulo F_0 queremos obtener otros rectángulos por plegado y corte:*

a) *Doblar y recortar F_0 en su mayor lado, en dos partes superpuestas y de manera exacta, recortar para así obtener el rectángulo F_1*
b) *Repite el procedimiento, obteniendo F_2 a partir de F_1, y así sucesivamente F_3, F_4 y F_5*
c) *Encuentra la familia de rectángulos. Llamaremos por F esta familia. ¿Qué características puedes observar de la familia de rectángulos? Explícalas.*

Actividad 2

Consigna: *De la familia de rectángulos F obtenida en la situación problema 1 encuentra un "apilado regular"*

a) *¿Qué visualizas de la forma del "apilado regular" según los lados? y ¿según los vértices?*
b) *¿Existirá otra forma de apilar los rectángulos de manera regular?*
c) *Para una familia de rectángulos decida entonces la característica del orden y forma que deben tener las figuras para ser un "apilado regular".*

Actividad 3

Consigna: *Tomar una nueva hoja de tamaño A4, para construir una nueva familia llamada R, donde las dimensiones de* R_0 *son* (y_0, x_0) *que cumple la siguiente condición*

$$y_0 > x_0 > \frac{y_0}{2}$$

a) *Plegar el rectángulo* R_0 *en* x_0, *en dos partes superpuestas de manera exacta, recortar para obtener el rectángulo* R_1

b) *Tomar* R_1 *de dimensiones* (y_1, x_1), *con* $y_1 > x_1$, *plegar este rectángulo en* y_1 *de manera exacta, recortar para obtener* R_2

c) *Por un procedimiento sucesivo alternando a) y b), obtener los rectángulos* R_3, R_4, R_5 *y* R_6

d) *Obtenga un "apilado regular" con la familia R utilizando la propiedad vista en la actividad 2 c). Dentro de la familia R ¿Con que rectángulos puede formar "apilados regulares"?, ¿Qué conclusiones obtiene de la familia R? ¿Es R un "apilado regular"?*

Actividad 4

Consigna: *De las familias anteriores tome un apilado regular cualquiera.*

a) *Represente en la siguiente tabla de coordenadas, los puntos* $\boldsymbol{F_i}$ *y obtenga la relación en centímetros de las dimensiones de los rectángulos.*

	F_0	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5
Largo						
Ancho						

b) *¿Qué tipo de relación definen estos puntos en el plano cartesiano?*

c) *Decida si existe un modelo que describa el comportamiento del "apilado regular".*

3.4.1 Análisis *a priori*

3.4.1.1 Posibles métodos de resolución de los estudiantes

Actividad 1: Traducir la información, *"plegar" el rectángulo en su mayor lado, en dos partes superpuestas de manera exacta"*, experimentan a través de la simetría axial la trasformación de la hoja por medio de un procedimiento *recursivo*. Al finalizar este proceso obtendrán figuras semejantes. Otra posible estrategia es que doblen en un lado cualquiera sin analizar el enunciado.

Actividad 2: En la búsqueda de un "apilado regular" de los rectángulos, se consigue en una posición en el orden decreciente, alineando los vértices que se intersectan en un punto, y dejando los lados de los rectángulos paralelos, llevándolos a validar las características que en la situación anterior han encontrado. De esta forma ellos debieran encontrar dos tipos de apilados "regulares", donde el punto de encuentro de la alineación de los vértices pasa por el centro de la última figura ($\boldsymbol{F_6}$) y el otro apilado tiene por punto de encuentro un vértice del rectángulo.

La dificultad que podrían presentar los alumnos consiste en la confusión del significado del concepto "regular" en el contexto coloquial con el significado matemático, presentando un obstáculo de tipo ontogénico.

Al cuestionar otro "apilado regular", se genera la crítica de la existencia de una disposición única que regula el apilado. Detrás de esta idea se esconde la formación del concepto de homotecia y teorema de Thales, ligados a la proporcionalidad.

Actividad 3: Las modificaciones y restricciones de doblar en el ancho y luego en el largo de la figura obtenida hacen que se provoque una dificultad de comprender la condición impuesta en esta situación, ya que no se habla de "largo y ancho", sino que estas medidas se presentan como coordenadas; estos cambios permiten solicitar un poco más de razonamiento. Algunos estudiantes asociarán $\boldsymbol{y_0}$ como la medida del largo y $\boldsymbol{x_0}$ como la medida del ancho, en cambio se presume que otros alumnos presenten un obstáculo epistemológico, los que los llevará a repetir la forma de obtener los rectángulos como en la actividad anterior.

El plegado y corte que realizan los alumnos a los rectángulos, de forma intercaladas los lleva a obtener una familia de rectángulos que todos no son semejantes, a diferencia de la actividad anterior, el error se presenta cuando el alumno apila los rectángulos de la misma forma que en la Actividad 2, buscan comprender por qué esta variación no les permite formar la propiedad $\boldsymbol{P}$: del apilado regular, fragmentando la familia de rectángulos en dos apilados regulares que juntos no cumplen la regularidad.

Actividad 4: La familiaridad que tienen los estudiantes con ordenar datos en una tabla no supone mayor complicación, pero la dificultad se presenta cuando ellos deben encontrar la relación existente entre largo y ancho de los rectángulos de un apilado regular, la que pueden confundir con una regularidad de tipo proporcional aditiva, un primer paso será buscar la diferencia entre los largo de las figuras consecutivas y verificar si esta diferencia es la misma, siendo que esta es de tipo multiplicativa, donde deben dividir largo por ancho para encontrar la razón de proporcionalidad. Al momento de graficar las medidas de los rectángulos del apilado regular, se pueden presentar la dificultad de no recordar la ubicación de las coordenadas del plano cartesiano.

Cuando se les pide a los estudiantes construir un modelo que describa el comportamiento de largo y ancho del apilado regular, una posible dificultad es que no infieran que la constante de proporción encontrada en a) corresponda a la pendiente de la recta, que modela la reducción del apilado regular.

3.4.1.2 Análisis matemático y didáctico de las actividades

Actividad 1

Análisis Matemático

El plegado de los rectángulos por la mediana de los lados de mayor longitud hace intervenir la simetría axial, respecto de la mediana como eje de simetría. Las propiedades de esta transformación geométrica permiten asegurar que las dos figuras que se obtienen son de la misma forma que la original, rectángulos, congruentes entre si y semejantes al rectángulo original. Este proceso recursivo en particular genera una progresión geométrica de razón ½ del área de cada uno de los rectángulos de la familia *F*:

Al doblar los rectángulos a lo largo del lado mayor el área de cada uno de estos rectángulos de la familia *F* quedan ordenados según la sucesión:

$$\boldsymbol{A};\ \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{A};\ \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{A}\right);\ \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{A}\right)\right);\ \ldots$$

donde $\boldsymbol{A}$ es el área del rectángulo inicial $\boldsymbol{F_0}$

Al dividir en dos partes superpuestas se debe tomar el lado de mayor magnitud y dividirlo en dos partes iguales, de tal manera que coincida el doblez con el eje de simetría.

Análisis Didáctico

En esta situación didáctica se explora el concepto de la proporción, a través de la partición recursiva de las hojas A4. El medio didáctico es el cuadro geométrico y validan comparando los recortes obtenidos entre los miembros del grupo.

Actividad 2
Análisis Matemático

En la actividad 2 el objetivo matemático es observar los rectángulos en un apilado regular, donde se visualiza una reducción del rectángulo original $\boldsymbol{F_0}$ en otros rectángulos semejantes, al apilar estas figuras se logra apreciar la transformación geométrica llamada *homotecia que es la transformación de una figura en otra semejante a ella, con respecto a un punto en el plano, llamado centro de homotecia. Si la razón de homotecia es positiva y menor que uno, la figura semejante será más pequeña y estará en el mismo sentido de la original. Se produce una reducción de la figura original* (Saiz, O., 2014, Matematica 3° Medio, Ed. Cal y Canto)

A su vez, la homotecia se vincula con el teorema de Thales, puesto que este afirma:

> "*Si varias rectas paralelas cortan a dos transversales, éstas determinan en ellas segmentos correspondientes proporcionales"* (Geometría plana y geometría del espacio, Baldor, 1967).

Análisis Didáctico

El estudiante explora el *"apilado regular"* de forma concreta, viendo con los ojos ya un posible modelo de apilado. El estudiante debe formular en b) que de un apilado de mayor a menor rectángulo se extrae la regularidad de los lados paralelos y vértices alineados, aun así, esta respuesta se cuestiona en c) el alumno vuelve a explorar otro posible apilado, validando que no existe otra forma de *"apilado regular"* más que la forma justificada en b), a lados paralelos y vértices alineados.

Actividad 3

Análisis Matemático

Al realizar el cambio de las dimensiones a $(\boldsymbol{y_0},\boldsymbol{x_0})$, dividiendo en dos partes iguales y tomando de forma intercalada las dimensiones *(actividad 3, c))* de manera recursiva, se obtiene:

$$\boldsymbol{R} = \frac{\boldsymbol{x_0}}{\boldsymbol{2}},\frac{\boldsymbol{y_0}}{\boldsymbol{2}},\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}}\left(\frac{\boldsymbol{x_0}}{\boldsymbol{2}}\right),\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}}\left(\frac{\boldsymbol{y_0}}{\boldsymbol{2}}\right),\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}}\left(\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}}\left(\frac{\boldsymbol{x_0}}{\boldsymbol{2}}\right)\right),\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}}\left(\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}}\left(\frac{\boldsymbol{y_0}}{\boldsymbol{2}}\right)\right),\ldots$$

Esta sucesión recursiva está definida para la familia $\boldsymbol{R}$ por una separación por clases.

Análisis Didáctico

Un nuevo experimento pone en cuestión el "apilado regular" de la nueva familia de rectángulos $\boldsymbol{R}$, la prima acción es comprender el enunciado, ya que se modifican las variables didácticas, creando una estrategia que le permite dividir el rectángulo recursivamente, intercalando la división de las dimensiones. Al momento de validar la estrategia utilizada, recurre a la acción de apilar que utilizó en la *actividad 2;* al no resultar un apilado regular para toda la familia $\boldsymbol{R}$, crea una nueva estrategia, apilando los rectángulos que cumplen la regularidad por separado.

Se constata que las pruebas más rigurosas no son las más convincentes.

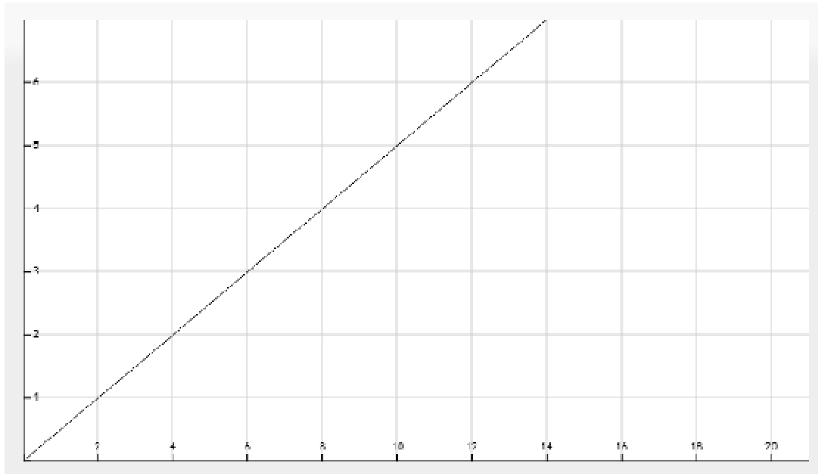
Actividad 4

Análisis Matemático

En esta situación se espera que el estudiante descubra las constantes de proporcionalidad (relación largo sobre ancho) implícita en las homotecias que generan los respectivos rectángulos

$$\frac{\boldsymbol{y_i}}{\boldsymbol{x_i}} = \boldsymbol{k_i}, \quad \boldsymbol{k_i} \approx \sqrt{\boldsymbol{2}}$$

Los puntos $(\boldsymbol{x_i},\boldsymbol{y_i})$, cuyas coordenadas son las dimensiones de los rectángulos, son graficados en el plano cartesiano constando que se encuentran sobre una recta que pasa por el origen (Figura 14)



(Figura 14)

Se encuentra una función lineal que tiene como pendiente la constante de proporcionalidad k, que representa la vinculación de todas las situaciones didácticas vistas anteriormente.

$$y_i = k\ x_i$$

Análisis Didáctico

La situación permite definir la noción de cambios de cuadro. Inicia en un contexto numérico, analizando la relación entre las medidas de los lados de los rectángulos del apilado regular; en vista de una disposición numérica, esta conduce a utilizar una representación gráfica, al pedir que se describa esta última, caracteriza la función lineal nombrarla directamente. Al momento de modelizar utilizan las características anteriormente encontradas, pasando a un cuadro funcional.

3.5 Matriz de competencia

A partir de los análisis *a priori*, construimos una matriz de competencias necesaria para analizar el de nivel de competencia alcanzado en las 4 actividades relacionadas con la proporcionalidad, esta nos permite identificar los esfuerzos a través de los niveles de aprendizajes en la proporcionalidad.

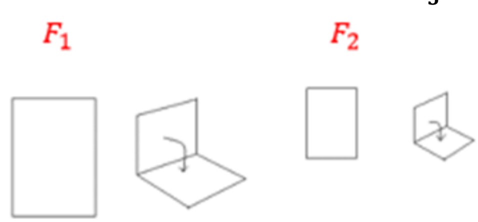
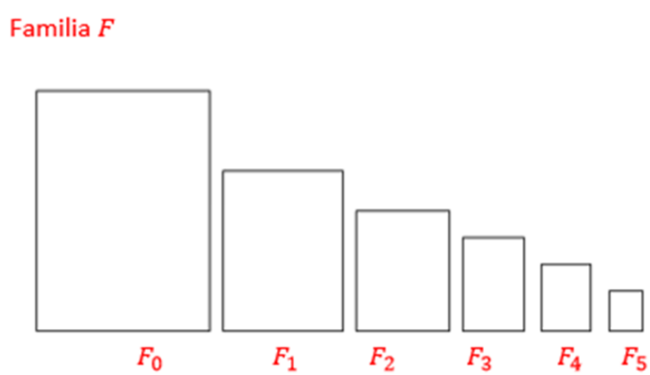
<u>Actividad 1</u>

Consigna: *Tomar una de estas hojas, que llamaremos rectángulo* F_0*. A partir de este rectángulo* F_0 *queremos obtener otros rectángulos por plegado y corte:*

a) *Doblar y recortar* F_0 *en su mayor lado, en dos partes superpuestas y de manera exacta, recortar para así obtener el rectángulo* F_1

b) *Repite el procedimiento, obteniendo* F_2 *a partir de* F_1*, y así sucesivamente* F_3, F_4 *y* F_5

c) *Encuentra la familia de rectángulos. Llamaremos por F esta familia. ¿Qué características puedes observar de la familia de rectángulos? Explícalas.*

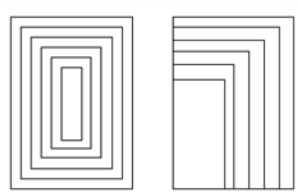
NIVELES DE APRENDIZAJE	COMPETENCIAS
COMPRENSIÓN ¿Qué sucede? ¿Qué se trata en el fondo?	***Traducir/describir la situación*** a) Utilizan la simetría axial para obtener figuras congruentes con el dobles de la hoja encontrada.  b) Aplican recursivamente la acción anterior a) sobre F_1, luego sobre F_2 y así sucesivamente hasta obtener F_5.  

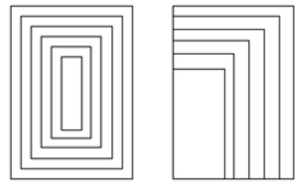
	Explicar el funcionamiento de un método c) El estudiante observa las características de la familia $\boldsymbol{F}$, estas son: • Conserva la forma. • Mantiene los ángulos. • Varía el tamaño, conservando la proporción de sus lados homólogos.

Actividad 2

Consigna: *De la familia de rectángulos F obtenida en la situación problema 1 encuentra un "apilado regular"*

a) ¿Qué visualizas de la forma del "apilado regular" según los lados? y ¿Según los vértices?
b) ¿Existirá otra forma de apilar los rectángulos de manera regular?
c) Para una familia de rectángulos decida entonces la característica del orden y forma que deben tener las figuras para ser un "apilado regular".

NIVELES DE APRENDIZAJE	COMPETENCIAS
Comprensión ¿De qué se trata en el fondo?	***Desencadenar una propiedad*** a) Describen los apilados regulares que los diferentes rectángulos mantienen: los lados paralelos, se fijan en los vértices de los diferentes rectángulos alineados en una recta. Intentan con distintos apilados. Constatan la alineación de los vértices en una recta. 
Estructuración ¿Siempre es verdad? ¿Por qué es así?	***Establecer generar el conjunto de casos posibles*** b) Constatan la existencia de disposiciones regulares para una familia de rectángulos.

	 ***Establecer y justificar las condiciones de aplicación de un método*** c) Constatan la alineación de los vértices en una recta que pasa por el centro del rectángulo o que pasen por un punto particular interior de cada rectángulo.

<u>Actividad 3</u>

Consigna: Tomar una nueva hoja de tamaño A4, para construir una nueva familia llamada R, donde las dimensiones de R_0 son (y_0, x_0) que cumple la siguiente condición

$$y_0 > x_0 > \frac{y_0}{2}$$

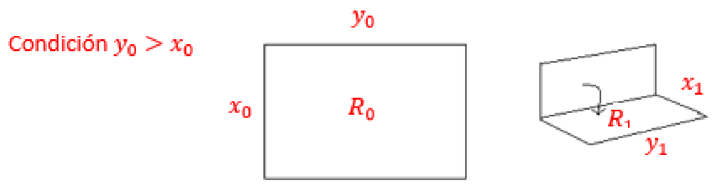
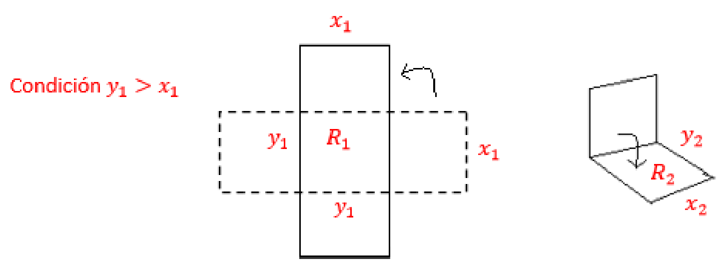
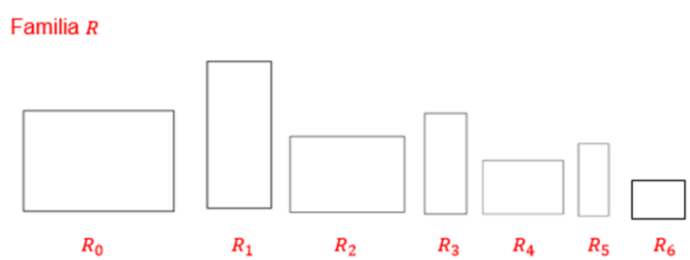
a) *Plegar el rectángulo R_0 en x_0, en dos partes superpuestas de manera exacta, recortar para obtener el rectángulo R_1*

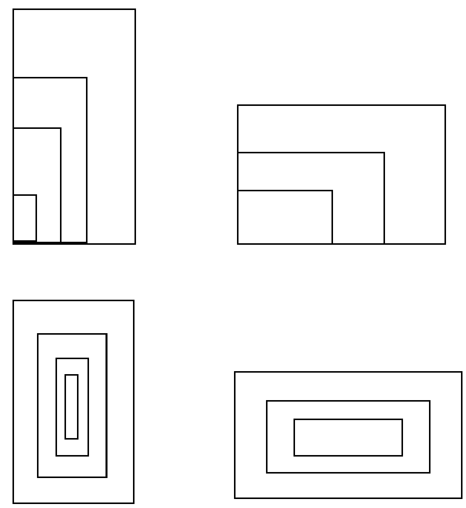
b) *Tomar R_1 de dimensiones (y_1, x_1), con $y_1 > x_1$, plegar este rectángulo en y_1 de manera exacta, recortar para obtener R_2*

c) *Por un procedimiento sucesivo alternando a) y b), obtener los rectángulos R_3, R_4, R_5 y R_6*

d) *Obtenga un "apilado regular" con la familia R utilizando la propiedad vista en la actividad 2 c). Dentro de la familia R ¿Con que rectángulos puede formar "apilados regulares"?,¿Qué conclusiones obtiene dela familia R? ¿Es R un "apilado regular"?*

NIVELES DE APRENDIZAJES	COMPETENCIAS
Comprensión ¿De qué trata en el fondo?	***Traducir/describir la situación del "apilado regular"*** a)Identifica los ejes coordenados a los cuales corresponde cada lado del rectángulo para plegar Identifican los lados del nuevo rectángulo con la condición $y_0 > x_0 > \frac{y_0}{2}$, traducen esta condición en las medidas del rectángulo, plegándolo en $\boldsymbol{x_0}$.

	 b)La condición pide plegar la hoja en $\boldsymbol{x_0}$ o sea en el ancho (altura) del rectángulo $\boldsymbol{R_0}$ para formar el rectángulo $\boldsymbol{R_1}$ de dimensiones $\boldsymbol{x_1, y_1}$  c) Aplicando de forma alternada el procedimiento de a) y b) , se va obteniendo hasta la figura $\boldsymbol{R_6}$ 
Reformulación ¿Qué es lo que podría hacer?	***Poner en relación los objetos matemáticos subyacentes en un nuevo modelo*** d) Seleccionan los que fueron cortados en la dimensión $\boldsymbol{x}$ y los que fueron cortados en la dimensión $\boldsymbol{y}$ porque son semejantes entre ellos, formando 2 apilados regulares. De la familia $\mathbf{R}$ se obtiene dos subfamilias que tienen la propiedad $\mathbf{P}$: “apilado regular” a saber; $\mathbf{R_0}$, $\mathbf{R_2}$ y $\mathbf{R_4}$ y por otro lado el apilado $\mathbf{R_1}, \mathbf{R_3}$ y $\mathbf{R_5}$

	 Cortada en dimensión $\boldsymbol{x}$ Cortada en dimensión $\boldsymbol{y}$ En general entonces con la familia R no se pueden alinear los vértices en una recta que pase por el centro de los rectángulos y a su vez se encuentren en un punto.

Actividad 4

Consigna: *De las familias anteriores tome un apilado regular cualquiera.*

a) *Represente en la siguiente tabla de coordenadas, los puntos $\boldsymbol{F_i}$ y obtenga la relación en centímetros de las dimensiones de los rectángulos.*

	F_0	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5
Largo						
Ancho						

b) *¿Qué tipo de relación definen estos puntos en el plano cartesiano?*
c) *Decida si existe un modelo que describa el comportamiento del "apilado regular".*

NIVELES DE COMPETENCIAS	COMPETENCIAS
Reformulación ¿Qué es lo que podría hacer?	***Poner en relación los objetos matemáticos subyacentes en un modelo original.*** a) Los puntos de coordenadas $(\boldsymbol{y_i}, \boldsymbol{x_i})$ se ordenan en la tabla de proporcionalidad de coeficiente $\boldsymbol{k}$.

	F_0	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5
Largo	*29,7*	*21*	*14,9*	*10,5*	*7,4*	*5,3*
Ancho	*21*	*14,9*	*10,5*	*7,4*	*5,3*	*3,7*

La serie de los largos es proporcional a la series de los anchos, todos los rectángulos tienen el mismo coeficiente de forma (relación largo por ancho)

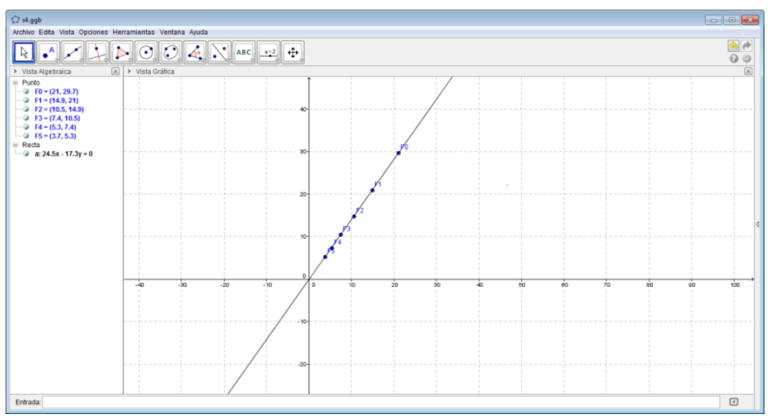
$$\frac{y_i}{x_i} = \frac{29,7}{21} = \frac{21}{14,9} = \frac{14,9}{10,5} = \frac{10,5}{7,4} = \frac{7,4}{5,3} = \frac{5,3}{3,8} \approx \sqrt{2} \approx 1,4$$

Estructuración
¿Por qué es así?

Utilizar una propiedad para orientar la solución

b) Para encontrar el coeficiente de proporcionalidad $\boldsymbol{k}$ de la familia $\boldsymbol{F}$ varios métodos son posibles, utilizando cambios de cuadros. En el cuadro numérico cálculo de la relación $\frac{y_i}{x_i}$ en la tabla de proporcionalidad.
En el cuadro gráfico los puntos de coordenadas $(\boldsymbol{y_i}, \boldsymbol{x_i})$ se alinean determinando una gráfica de la pendiente de la recta, con pendiente $\boldsymbol{k}$.

Cuadro geométrico: utilizan el teorema de Thales (en razón de la presencia de triángulos homotéticos) que permite hacer el puente entre el cuadro gráfico y el cuadro numérico.



Reformulación
¿Qué es lo que podrá hacer?

Generalizar un enfoque o un resultado.

c) La recta corresponde al gráfico de una función lineal que pasa por el origen y tiene como pendiente la constante de proporcionalidad $\boldsymbol{k} \approx \sqrt{2}$.

$$y_i = k\, x_i$$

3.6 Experimentación

Esta tesis está enmarcada a experimentar con las producciones de la didáctica Francófona, que no es muy conocida en Chile y que tiene un enfoque rico e innovador, que orienta a una enseñanza basada en la construcción del conocimiento, así como a la importancia de la presencia de la epistemología como herramienta guía. Serán importantes los resultados obtenidos en la experimentación, porque nos servirá para fortalecer la enseñanza de la matemática como futuros docentes y además abrir nuevas puertas para futuras investigaciones.

Una vez puesta en marcha la experimentación del instrumento didáctico, se conversa con el grupo curso, explicando la nueva estrategia de enseñanza de las actividades de aprendizaje que tendría el tratamiento del nuevo concepto. Que se trata de una clase no tradicional y que sus producciones no serían evaluadas; por otro lado, se explica que la actividad contaría con la presencia del Profesor, para vigilar el orden.

Se les habla a los alumnos de la importancia de la actividad, que está basada en la búsqueda del comprender, y que fortalecerá los conceptos antes visto con la puesta en acción. A pesar que este trabajo para ellos no es de carácter obligatorio, se les invita a ser lo más honesto posible para el futuro análisis de sus producciones, puesto que están ayudando a contribuir en la búsqueda de actividades que ayudarán a la formación del estudiante en virtud del conocimiento.

3.6.1 Experimentación de la situación problema

Para el desarrollo de la actividad, el curso se encontraba comenzando la unidad de geometría, la cual entregará algunos conocimientos que les permitirán a los estudiantes resolver la situación problema.

La aplicación de la actividad se efectúa en el horario de la asignatura de matemáticas que le corresponde al Segundo Medio B, los días jueves y viernes de 8.30 a 9.30, en su respectiva sala de clases. Distribuimos la actividad en dos sesiones, en las cuales se desarrollarían dos problemas por día.

1º Sesión: jueves 3 de octubre

Organizamos al curso en grupos de 3 a 4 integrantes. Una vez conformados, se procede a dar ciertas instrucciones (juntar las mesas y que cada grupo trabaje con su material sin compartir ni ayudar a otro grupo) y entrega de material, la cual consta de una carpeta de trabajo para cada grupo, con una cierta cantidad de hojas formato A4, además de la guía de actividades.

Una vez que todos los grupos tienen su material se da comienzo a la actividad como tal, donde cada grupo lee con atención cada consigna y las desarrolla. Cada consigna está diseñada para que los miembros del grupo confronten y discutieran sus resultados para luego presentar una puesta en común, la cual que queda registrada en la hoja de respuestas de su carpeta. Luego de que los estudiantes finalizaran la actividad 2, se recogen, de manera oral, las ideas que cada grupo tenía acerca del término de “apilado regular”. Las características mencionadas son registradas por una de las estudiantes tesistas en el pizarrón, para que todos juntos construyeran el término de “apilado regular”. Este proceso se conoce como institucionalización. Luego de esto, se procede a retirar las producciones de cada grupo que se encuentran en las carpetas de trabajo, con las cuales se seguirá trabajando la próxima sesión.

2º Sesión: viernes 4 de octubre

Para continuar con las actividades 3 y 4, cada grupo recibe su carpeta de trabajo del día anterior (se omitió), dándose la instancia para resolver dudas, entre ellos en la fase de búsqueda, para luego dejar plasmadas sus producciones en la hoja de respuestas.

Al cabo de la sesión se recogen nuevamente las carpetas con todo el material que el grupo usó o no, que contengan sus respuestas y figuras.

Para finalizar la actividad como tal, se efectúa nuevamente una institucionalización, en donde se comenta problema tras problema, indicando en la pizarra la matemática que estos poseían.

Cabe mencionar que, durante el desarrollo de cada sesión, se observó el trabajo realizado por cada grupo, así como sus producciones y comentarios, para ir preparando la selección de los estudiantes que serían entrevistados.

3.6.2 Entrevista

Para la realización de la entrevista se seleccionaron seis grupos, de los cuales se retuvo un representante por grupo al que se le aplicó la entrevista, con el objetivo de recoger mayor información y confrontarlos con sus producciones.

Tratamos de formular preguntas que recurrieran a hechos que pudieran representar elementos relacionados con tendencias de intereses matemáticos: la abstracción de una noción, la reutilización de conocimientos o métodos matemáticos, una apertura al desarrollo del razonamiento, la capacidad de reflexionar estructuralmente, la disposición de procedimientos de resolución, el conocimiento de una fórmula o de un método general aplicable.

Las preguntas son abiertas y son particularmente útiles para validar las producciones realizadas.

4 ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE LOS RESULTADOS.

4.1 Textos de estudio que orientan la enseñanza de la proporcionalidad

Para la contextualización de la proporcionalidad en el nivel de segundo año de Enseñanza Media, el Ministerio de Educación entrega textos para el estudiante[26], con el objetivo de apoyar el trabajo en clase.

Una de las editoriales más utilizada es Santillana, la cual presenta el contexto de la proporcionalidad en la unidad de geometría. Para abordar el concepto de semejanza y homotecia, el texto pide al estudiante realizar una evaluación diagnóstica, de conceptos que son necesarios para el nuevo estudio, a este respecto el texto indica:

- Aplicar los conceptos de razón y proporción en la resolución de problemas.
- Resolver problemas realizando medidas de ángulos en polígonos y medidas de ángulos entre rectas paralelas cortadas por una secante.
- Identificar la congruencia en figuras planas y utilizar los criterios de congruencia de triángulos.

Una vez terminado el diagnóstico, se comienza la construcción del nuevo concepto que es representado en siguiente cuadro sinóptico:

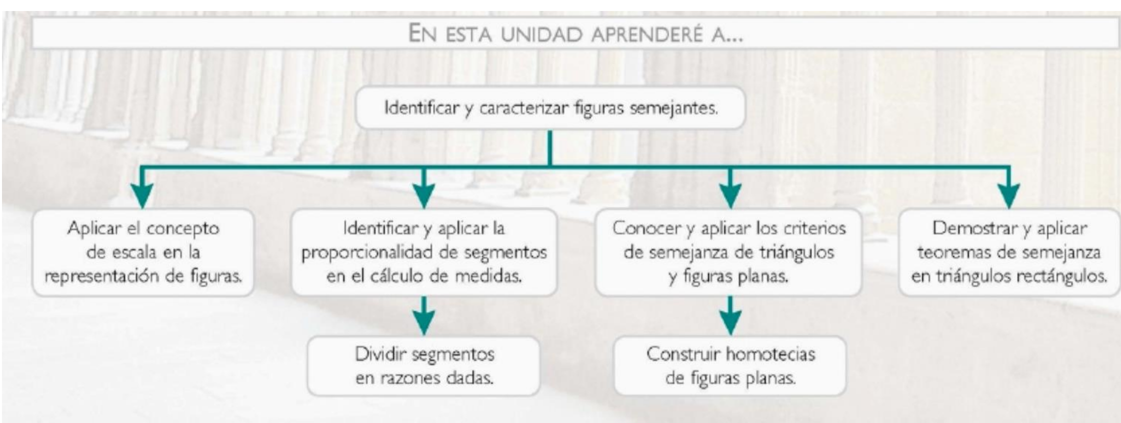


Figura 15. Cuadro sinóptico unidad de Geometría. "Matemática 2° Año Medio (2009), Ed. Santillana Bicentenario"

[26] *Matemática 2° Año Medio (2009), Ed. Santillana Bicentenario.*

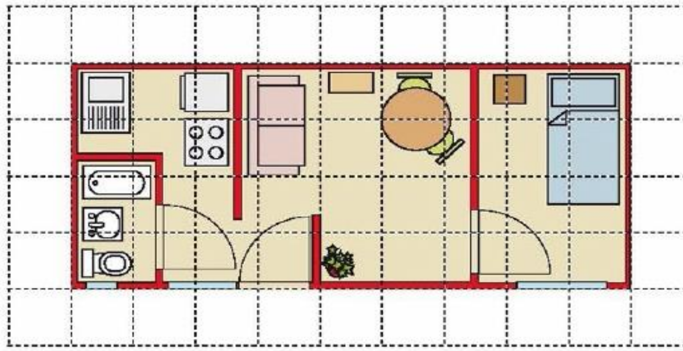
Luego de presentar el resumen de la unidad, el texto de estudio entrega un problema cotidiano, de modo que sea resuelto con los conocimientos previos, para dar paso al nuevo concepto. Ejemplifica dos estrategias para la resolución del problema en cuestión y una vez finalizado entrega la definición del nuevo concepto.

Ejercicios resueltos

1. En la sala de ventas de un edificio se encuentra el siguiente plano rectangular de un departamento; cada cuadrícula del plano mide **2 cm** de lado.

a. Si el ancho del departamento es igual a **6,4 m**, ¿cuál es la razón de semejanza entre el plano y el departamento?

b. ¿Cuál es la longitud real del lado mayor del departamento?



Se utilizan las medidas de los cuadrados para determinar el ancho del departamento en el plano.

a. El ancho del departamento está representado por **8 cm**, ya que:

$$\text{ancho en el plano} = \text{número de cuadros} \cdot \text{medida de los cuadros}$$

$$\text{ancho en el plano} = 4 \cdot 2\text{ cm} = 8\text{ cm}$$

Se calcula la razón de semejanza entre el plano y el departamento calculando el cociente entre el ancho en el plano y el ancho del departamento.

Se establece la razón entre la longitud real del segmento y la correspondiente en la figura a escala.

$$\frac{\text{ancho en el plano}}{\text{ancho del departamento}} = \frac{8\text{ cm}}{640\text{ cm}} = \frac{1}{80} = 0{,}0125$$

Por lo tanto, la razón de semejanza entre el plano y el departamento es **r = 0,0125**.

b. En el plano, el largo del departamento está representado por **18 cm**, ya que:

$$\text{largo en el plano} = \text{número de cuadros} \cdot \text{medida de los cuadros}$$

$$\text{largo en el plano} = 9 \cdot 2\text{ cm} = 18\text{ cm}$$

Se utiliza la razón de semejanza encontrada para obtener la longitud del otro lado de la figura.

Se calcula el largo del departamento **(x)** mediante la razón de semejanza entre el plano y el departamento.

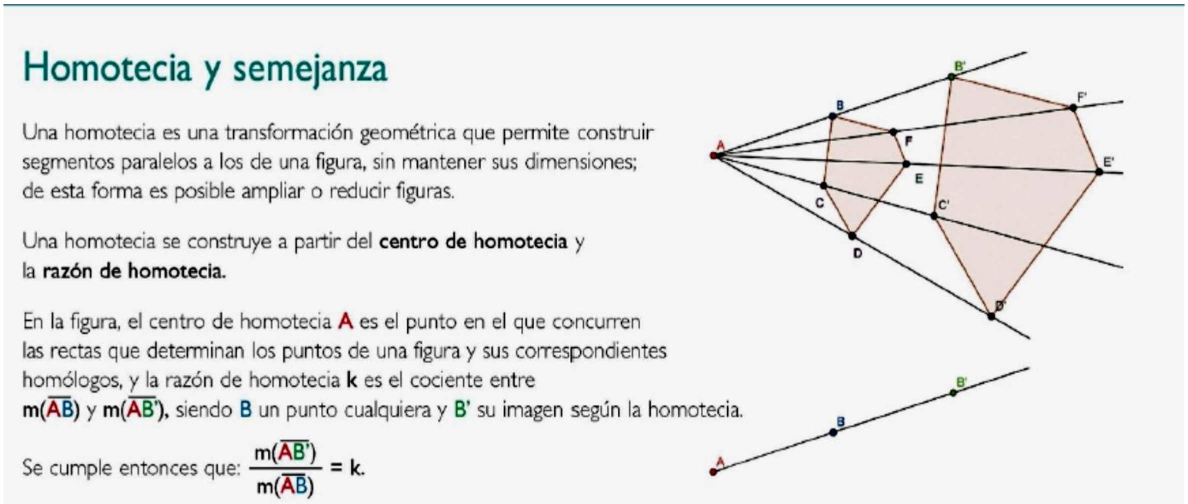
$$\frac{\text{largo en el plano}}{\text{largo del departamento}} = \frac{18\text{ cm}}{x} = 0{,}0125$$

$$\Rightarrow x = \frac{18}{0{,}0125} = 1.440\text{ cm}$$

Es decir, el largo del departamento es igual a **14,4 m**.

Figura 16. Problema de proporcionalidad. “Matemática 2° Año Medio (2009), Ed. Santillana Bicentenario”

Finalmente se realiza la presentación del concepto de semejanza, como la contextualización geométrica de la proporcionalidad en la comparación de figuras a través de las razones (de proporcionalidad) entre lados homólogos. Las razones de proporcionalidad también son utilizadas para construir figuras geométricas semejantes mediante la transformación geométrica homotecia.



Homotecia y semejanza

Una homotecia es una transformación geométrica que permite construir segmentos paralelos a los de una figura, sin mantener sus dimensiones; de esta forma es posible ampliar o reducir figuras.

Una homotecia se construye a partir del **centro de homotecia** y la **razón de homotecia**.

En la figura, el centro de homotecia **A** es el punto en el que concurren las rectas que determinan los puntos de una figura y sus correspondientes homólogos, y la razón de homotecia **k** es el cociente entre **m($\overline{AB}$)** y **m($\overline{AB'}$)**, siendo **B** un punto cualquiera y **B'** su imagen según la homotecia.

Se cumple entonces que: $\frac{m(\overline{AB'})}{m(\overline{AB})} = k.$

Figura 17. Definición de Homotecia y semejanza en "Matemática 2° Año Medio (2009), Ed. Santillana Bicentenario"

4.2 Análisis *a posteriori*

Para el análisis de las producciones se seleccionaron tres equipos a partir de las confrontaciones que surgieron de la entrevista realizada después de la experimentación. Estos grupos se clasificaron bajo ciertas características relacionadas con su nivel de explicitación, que mostraron tanto en sus carpetas de trabajo como en las respuestas de la entrevista.

Los grupos retenidos recibieron los nombres de:

- **Grupo 1:** ***Destacado***, sus integrantes son Pía, Javiera, Natalia y Daniela
- **Grupo 2:** ***Regular***, sus integrantes son Francisco, Matías, Patricio y Sebastián.
- **Grupo 3:** ***Débil***, sus integrantes son Génesis, Javiera, Lisette y Francisca.

Actividad 1

Grupo 1 (Pía, Javiera, Natalia, Daniela)

El grupo 1 logra traducir el enunciado para encontrar los rectángulos que forman la familia $\boldsymbol{F}$ asociando una propiedad para definir el comportamiento de los rectángulos obtenidos (figura 18).

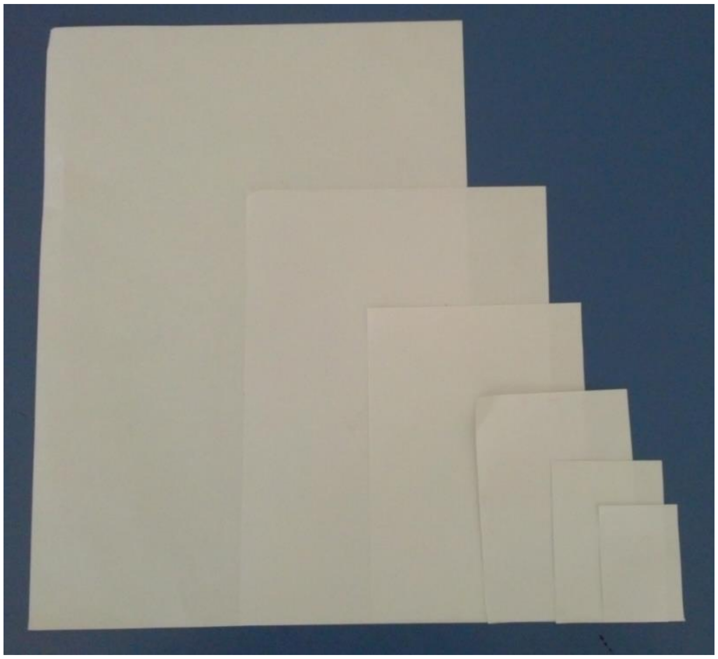


Figura 18. Orden para visualizar la semejanza.

Recurren a conocimientos previos, trayendo el concepto de semejanza de triángulos y los asocian a la característica de la familia $\boldsymbol{F}$.

> *"son rectángulos todos proporcionales…son semejantes…ya había trabajado con proporcionalidad y semejanza" (Pía. Extracto de la entrevista)*

El grupo 1 comprende la situación, ya que logra traducir los conceptos de semejanza para así explicar la característica de la familia $\boldsymbol{F}$.

Grupo 2 (Francisco, Matías, Patricio y Sebastián)

Obtienen la familia de rectángulos $\boldsymbol{F}$ tratando de traducir las acciones que hacen al doblar la hoja. (Figura 19). Se observa que utilizan la simetría para ilustrar el doblez y forman una sucesión de rectángulos, donde $\boldsymbol{F_0}$ corresponde a la hoja inicial, $\boldsymbol{F_1}$ es el resultado de plegar en eje de simetría del mayor lado y así sucesivamente hasta obtener $\boldsymbol{F_5}$, sin embargo, no nos entrega la secuencia de la familia.

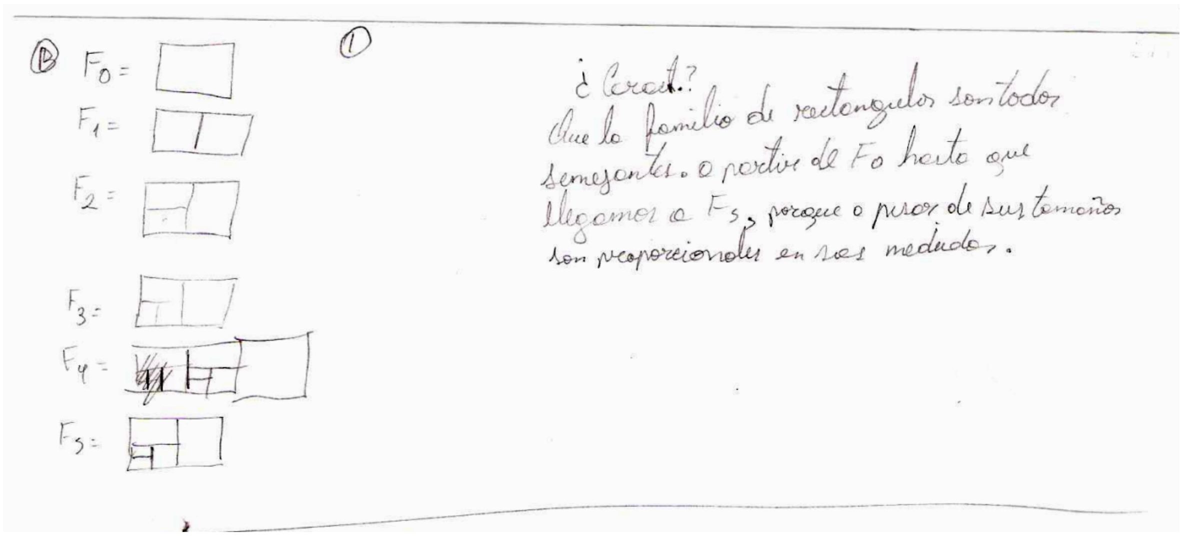


Figura 19. Ilustración de la transformación de la hoja $\boldsymbol{F_0}$

Observan que la familia de rectángulos $\boldsymbol{F_0}$, $\boldsymbol{F_1}$ $\boldsymbol{F_2}$ $\boldsymbol{F_3}$ $\boldsymbol{F_4}$ $\boldsymbol{F_5}$ son semejantes, explicitando que sus tamaños son proporcionales:

> *"Al final que termine de tener todos los rectángulos ahí recién me di cuenta... Me acorde al tiro de la materia que estamos pasando, porque los rectángulos iban siendo todos iguales en figura pero en tamaño diferente... eran semejantes pero tenía diferente tamaño." (Patricio. Extracto de la entrevista)*

Reconocen la semejanza entre los rectángulos y explican la conservación de la estructura de la figura. El grupo comprende de qué se trata en el fondo, que a partir de un rectángulo $\boldsymbol{F_0}$ es posible construir una familia de rectángulos semejantes, conservando ciertas características: conservan la forma y varía el tamaño, conservando la proporción de sus lados.

Grupo 3 (Génesis, Javiera, Lisette y Francisca)

El grupo ejecuto el plegado de la hoja respecto del lado mayor obteniendo la familia:

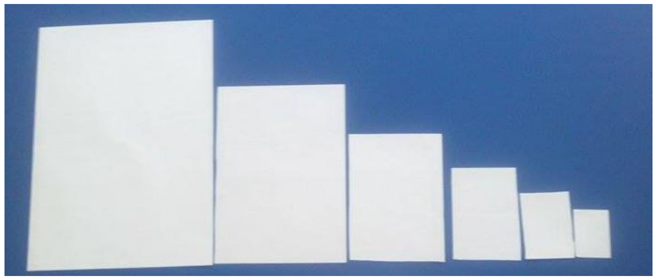


Figura 20. En búsqueda de una característica para la familia $\boldsymbol{F}$.

De la cual precisan algunas regularidades:

> *"Cada uno de los rectángulos obtenidos son semejantes porque tienen la misma forma, pero distinto tamaño, pero poseen la misma razón" (Génesis. Extracto de la entrevista)*

Este grupo comprende lo que sucede en el fondo.

Actividad 2

Grupo 1 (Pía, Javiera, Natalia, Daniela).

En la búsqueda de un "*apilado regular*", exploran la forma de ordenar las figuras en un vértice común, para observar la semejanza entre los rectángulos, recurriendo al concepto conocido de semejanza de triángulos.

> *"desde una esquina, del mayor al menor y juntarlo en un vértice… todos eran semejantes, se notaba la diferencia de tamaño, se veía más ordenado"* (Pía)

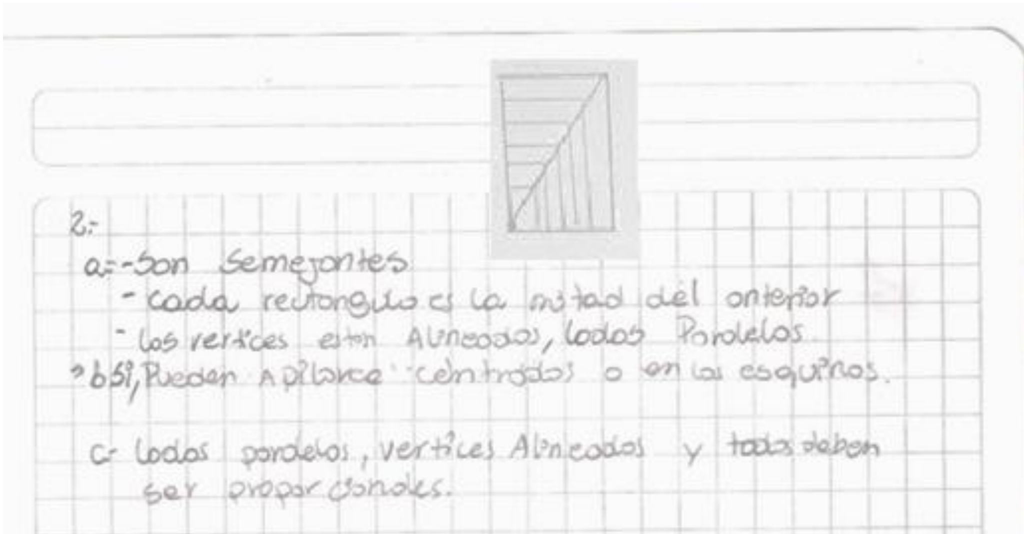


Figura 21. Estructuración de apilado regular.

A través de las respuestas a), b) y c) de la figura 21 podemos observar que el grupo comprende y estructura las características de un apilado regular, siendo capaz de obtener las dos formas de apilado, justificando las condiciones de orden y forma que debe tener un apilado para ser regular.

<u>Grupo 2 (Francisco, Matías, Patricio y Sebastián).</u>

Podemos observar que este grupo recurre a la memoria, trayendo representaciones numéricas antes vistas de los criterios de semejanza, para apoyarse y entregar una explicación a la actividad.

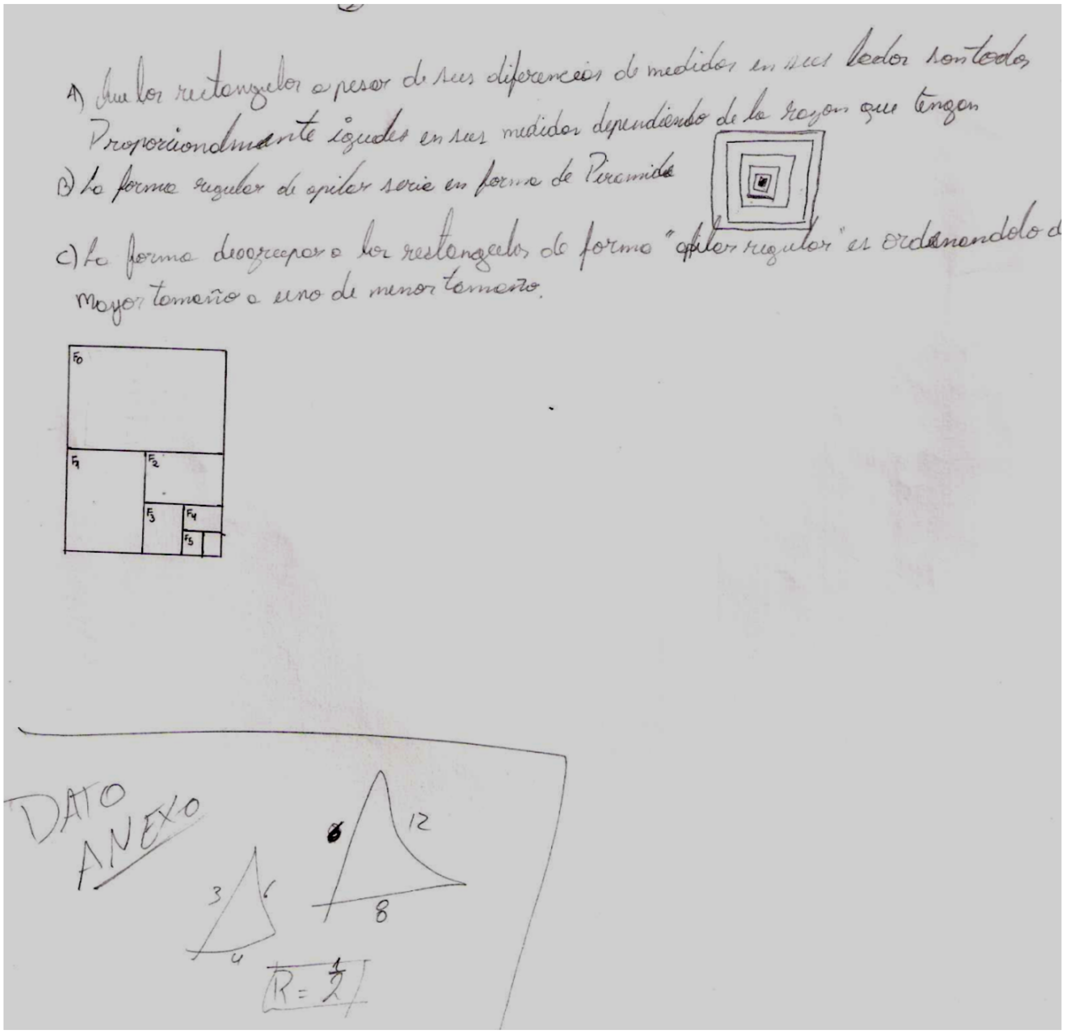


Figura 22. Apoyo de modelo memorístico para la búsqueda de la estructuración.

De la figura 22 podemos observar que en c) conserva la estructura de mayor a menor, lo que quiere decir que constatan que la familia de rectángulos de diferentes tamaños corresponden a un apilado regular.

De la respuesta c) que él hace, conserva la estructura del rectángulo $\boldsymbol{F_0}$ ordenando los rectángulos de mayor a menor, lo que quiere decir que está constatando las propiedades que explicita en a) y en b).

> *"que los rectángulos a pesar de sus diferencias de medidas en sus lados son todos proporcionalmente iguales en sus medidas dependiendo de la razón que tengan… la forma regular de apilar seria en forma de pirámide". (Patricio. Extracto de la entrevista)*

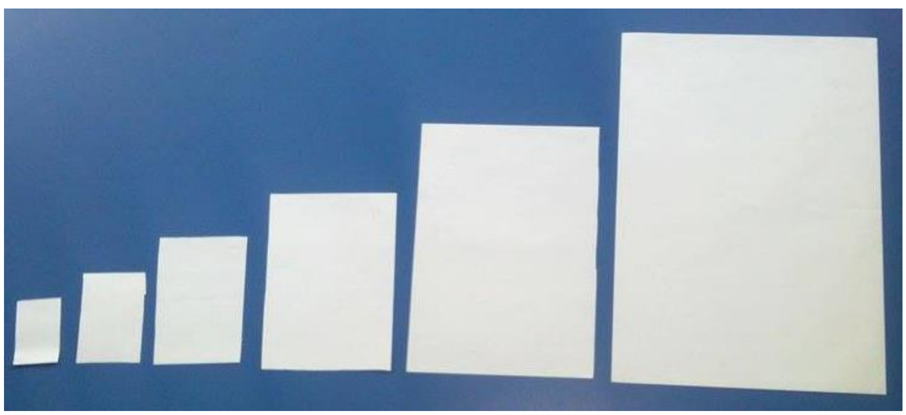
Comprende que los lados son proporcionales, manteniendo el paralelismo, trata de interpretar del teorema implícito que traen de la semejanza de triángulos (dato anexo), pero sin distinguir la pila de rectángulos que no cumple con las propiedades de apilado regular.

De la figura 22 se observa con diferentes características, sin embargo, ellos no se refieren a explicitar otra forma de apilar los rectángulos de manera regular.

Esto puede explicar el obstáculo ontológico que hace el caso específico de semejanza de triángulos (conocimiento previo a la aplicación del instrumento), ya que no visualizan la alineación de los vértices, dado que solo ven la proporcionalidad de los lados, quedando en la comprensión, luchando por la estructuración.

<u>Grupo 3 (Génesis, Javiera, Lisette y Francisca).</u>

Se distingue este grupo por no validar sus producciones, se conforman solo con responder las preguntas de la actividad.



2.- Cada Rectangulo aunque, cambia su tamaño. posee el mismo numero de lados y vertices, conservando la forma natural de fo

b) sí, ordenandolos en fila de menor a mayor tamaño

c) Conservando la forma aunque varie su tamaño

Figura 23. Confusión de términos apilado – fila.

El grupo 3 posiblemente no comprende el término “apilado” y lo confunde con el término de “fila” (respuesta b), Figura 23) e insisten en observar la forma de cada rectángulo y las características que mantienen en la transformación; es por ello que, al pedirle la existencia de otro apilado, invierten el orden, y los disponen siempre en fila. Sin embargo destacan algunas características comunes de las nuevas figuras (rectángulos, posee el mismo número de lados y vértices, cambia de tamaño) pero están distantes a conceptos de semejanza, colinealidad de los vértices superiores homólogos.

Actividad 3

Grupo 1 (Pía, Javiera, Natalia, Daniela).

Al momento de trabajar con coordenadas en lugar de las dimensiones del rectángulo, se les presenta un obstáculo epistemológico: el obstáculo al formalismo. Algunos estudiantes se sienten perdidos al no entender lo que dice la condición $y_0 > x_0 > \frac{y_0}{2}$ que se ha impuesto al contexto. Ellos buscan identificar el largo y el ancho, y se encuentran con coordenadas.

> "*estábamos trabajando con letras, igual me costó un poco, me costó esto, no supe entenderla, porque decía $y_0 > x_0 > x_0/2$…después las instrucciones te dicen cómo hacerlo, y ahí no fue complicado…me costó, pero porque estaba como enredado, porque decía, que R es igual que $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, pero eso después decía como que se daban vuelta, que eso estaba al revés que $\boldsymbol{x}$ estaba en el lugar de $\boldsymbol{y}$, y que $\boldsymbol{y}$ estaba en el lugar de $\boldsymbol{x}$, eso me costo, que me enrede completa, pero después me di cuenta que no , era normal que se doblaba en $\boldsymbol{x}$" (Pía. Extracto de la entrevista)*

Sin embargo, logran formar la familia $\boldsymbol{R}$ y buscan la estructura del apilado regular (Figura 24).

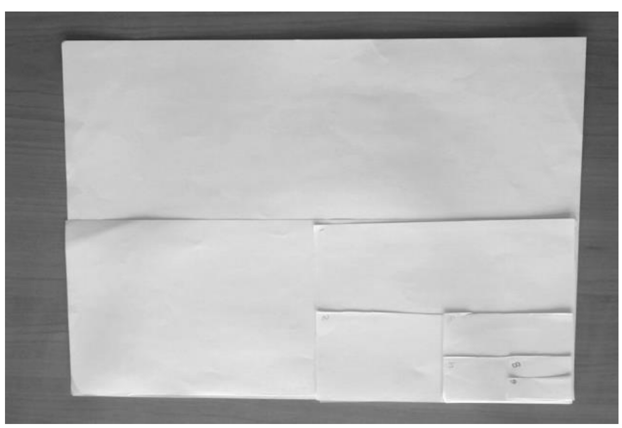


Figura 24. Validación de la propiedad

Utilizan una regla graduada para constatar si los vértices están alineados sobre rectas que pasan por el centro de los rectángulos. El error se presenta cuando intentan apilar la familia de la misma forma que en la actividad 2 y buscan comprender por qué esta variación no les permite formar la propiedad $\boldsymbol{P}$ del apilado regular.

Desarman y recomienzan, es decir particionan la familia buscando por ensayo y error, tratando de visualizar la forma del apilado regular según sus lados y según sus vértices. La actividad 2 impulsa a encontrar la regularidad y observan dos subfamilias que forman apilados regulares (Figura 25):

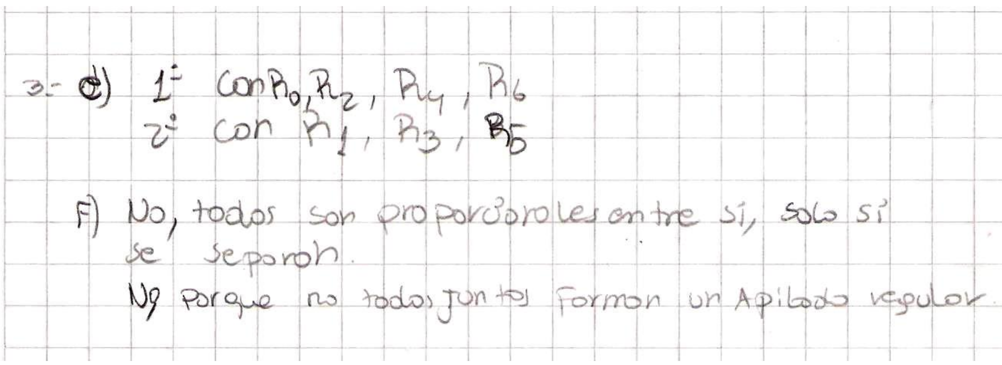


Figura 25. Transfieren el modelo del apilado regular de la actividad anterior.

> *"Me di cuenta de que los pares eran proporcionales y los impares eran proporcionales, era como se saltaban en la familia $\boldsymbol{R}$"* (Pía. Extracto de la entrevista).

Podemos concluir que este grupo logra reformular la propiedad del apilado regular, distinguiendo entonces las características de apilado regular que forman por un lado los rectángulos $\boldsymbol{R_0}, \boldsymbol{R_2}, \boldsymbol{R_4}, \boldsymbol{R_6}$ y por otro los rectángulos $\boldsymbol{R_1}, \boldsymbol{R_3}, \boldsymbol{R_5}$.

<u>Grupo 2 (Francisco, Matías, Patricio y Sebastián).</u>

Nuevamente este grupo insiste en realizar una representación de los cortes realizados para entender el método aplicado en esta actividad.

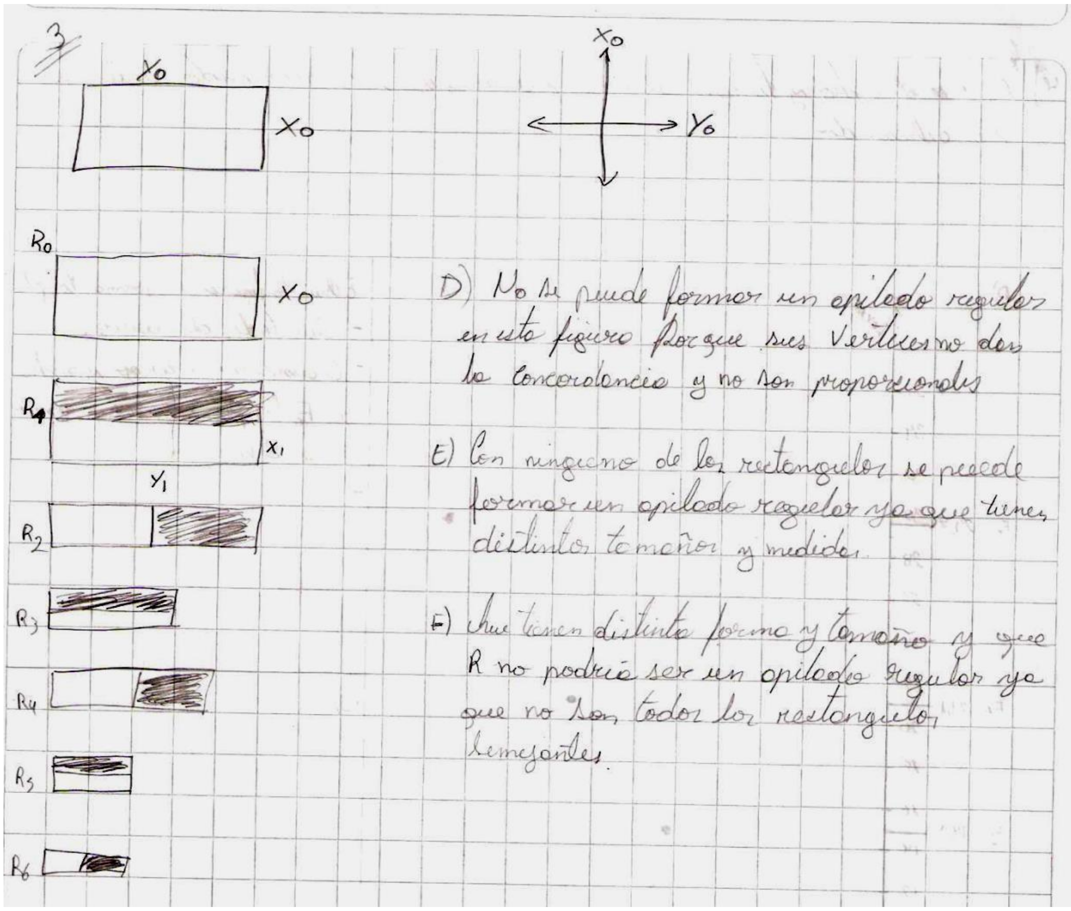


Figura 26. Reformulación de apilado regular.

Esto explicaría por qué no logran ver un apilado regular, si debería tener rectángulos de distintos tamaños y medidas, por las características que presenta el apilado, y no como afirman en e) (Figura 26). La realización de dibujar y achurar la familia de rectángulos sobre una misma hoja les produce dificultades en la visualización de las subfamilias con estructura de apilado regular ya que no logran manipular los rectángulos separadamente.

Logran obtener la familia $\boldsymbol{R}$, pero no los apilados que se pueden formar con los rectángulos que fueron cortados en la misma dimensión (largo o ancho), ya que insisten con la característica de apilado regular como aquella que solo se compone de figuras semejantes. Es posible afirmar, por consiguiente, que este grupo de alumnos se queda solo en la etapa de comprensión, pues observamos que luchan por estructurar el apilado regular.

Grupo 3 (Génesis, Javiera, Lisette y Francisca).

Aplica el método de la actividad 2 para validar si es un apilado regular.

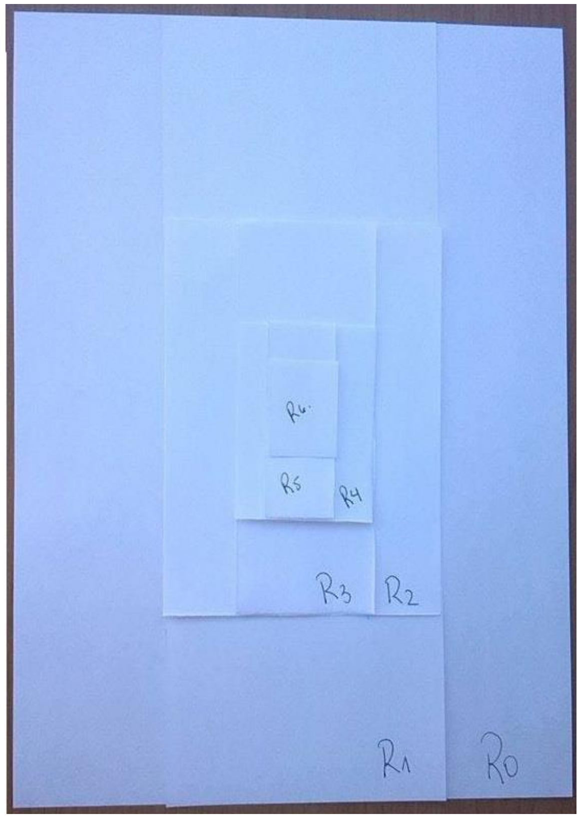


Figura 27. Validando la regularidad de la familia $\boldsymbol{R}$

¿Por qué la familia $\boldsymbol{R}$ no es un apilado regular?

> *"No es un apilado regular, porque los lados y los vértices no están alineados…A partir de $\boldsymbol{R_1}$ se puede formar un apilado regular"* (Génesis. Extracto de la entrevista).

Observan que la familia $\boldsymbol{R}$ no cumple con las condiciones *"los lados y los vértices no están alineados"*, justificando a través de lo visto en la institucionalización de "apilado regular" de la actividad anterior (Figura 27).

Se observa una incoherencia cuando mencionan con que rectángulos pueden formar un apilado regular *"…A partir de $\boldsymbol{R_1}$ se puede formar un apilado regular"*, pues no explican qué rectángulos son y su respuesta es ambigua ya que no fundamentan concluyendo que responden sin hacer relaciones.

Actividad 4

Grupo 1 (Pía, Javiera, Natalia, Daniela).

Busca la relación de las dimensiones de los lados de los rectángulos utilizando un modelo aditivo, lo que les lleva a dudar del resultado porque les da diferentes valores.

> *"…porque me acordé de la materia, porque al principio empecé a sacar la diferencia y no me daba, eran números completamente diferentes, y después me recordé de los criterios de LAL y ahí saque que era la división de cada dato largo y ancho…" (Pía. Extracto de la entrevista)*

Nuevamente nos encontramos con un obstáculo epistemológico del conocimiento aditivo para resolver la constante de proporcionalidad (del modelo multiplicativo). El hecho de que no les da un valor constante los lleva a rectificar y obtienen el mismo coeficiente de la relación largo por ancho utilizando el modelo multiplicativo (Figura 28).

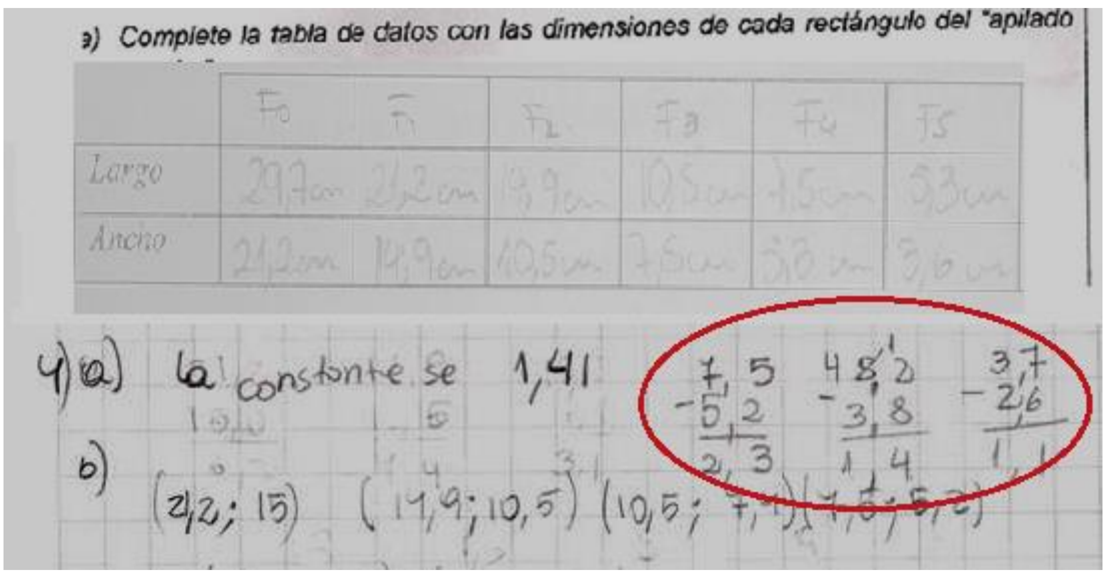


Figura 28. Obstáculo epistemológico: el modelo aditivo.

Movilizan los criterios de semejanza para resolver el problema en el cuadro numérico, pero no alcanzan a obtener el modelo $y = kx$ ni tampoco utilizan el teorema de Thales en razón de los triángulos homotéticos que permite transferir los criterios de semejanza del cuadro numérico al cuadro geométrico; es decir no hacen cambios de cuadro.

Por lo tanto, no validan su resultado que la familia de rectángulos tenga el mismo coeficiente y este sea $\sqrt{2}$.

Nos damos cuenta que buscan la estructuración.

Grupo 2 (Francisco, Matías, Patricio y Sebastián).

Observamos nuevamente que este grupo se apoya en el plano grafico para validar sus teoremas en acto de conocimientos recién entregados.

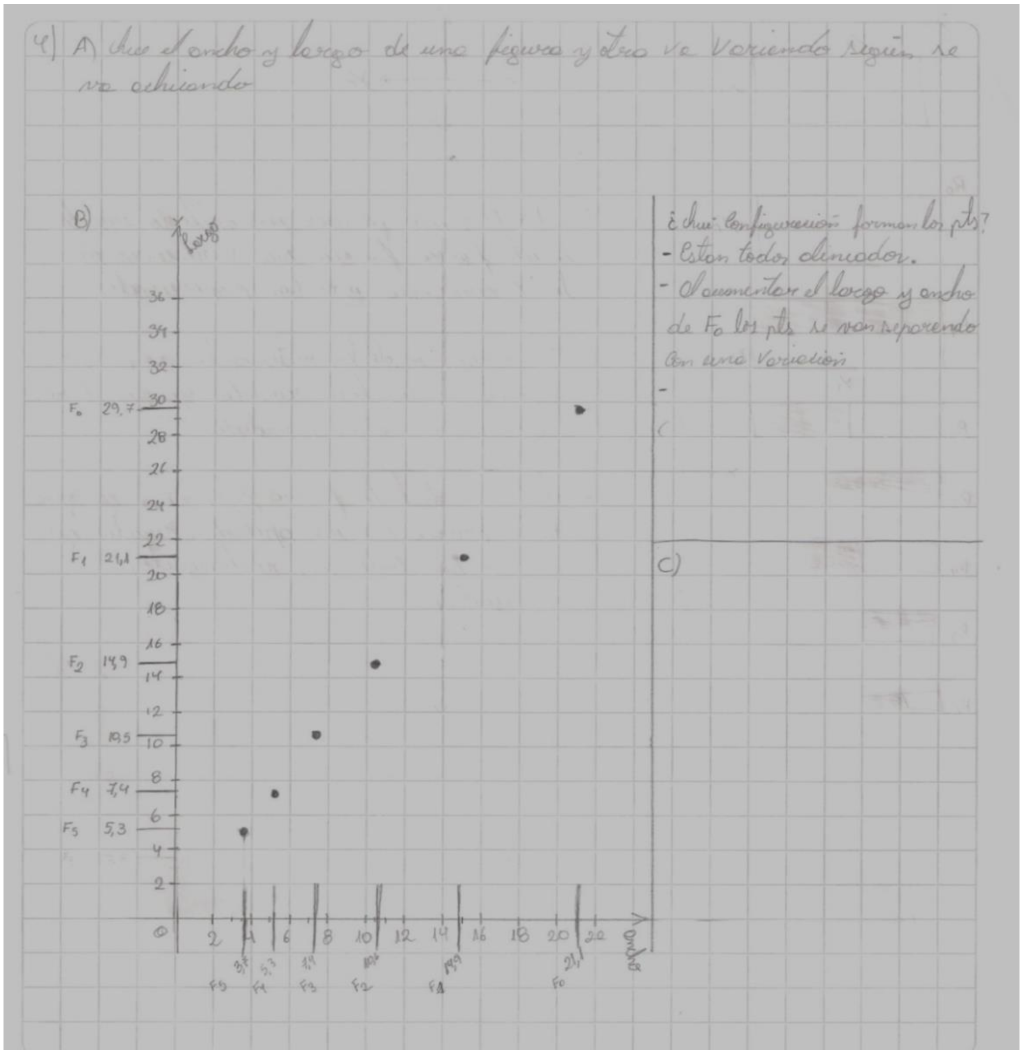


Figura 29. Un soporte gráfico para intuir “el mismo coeficiente de forma”

La gráfica sirve de soporte para el razonamiento lineal que interpreta la disposición de los puntos (Figura 29).

Tienen una disposición y una idea intuitiva que se apoya en la representación gráfica. Se observa una variación de medidas no específica, a medida que reconoce los puntos de la gráfica, pero no nos dice cómo calcular esa variación.

Luchan por poner en relación $\frac{y_i}{x_i}$ de las coordenadas que determinan la pendiente de la recta, pero no logran estructurar el modelo $\boldsymbol{y_i = kx_i}$.

Grupo 3 (Génesis, Javiera, Lisette y Francisca).

La familiaridad que tienen con el hecho de ordenar los datos en una tabla, los lleva a ordenarlos en forma vertical, por lo que transfieren los datos de la tabla a la gráfica de manera concreta, sin percatarse de un punto aislado que no mantiene la regularidad (Figura 30); simplemente lo ignoran, sin cuestionarse la razón de esta desviación.

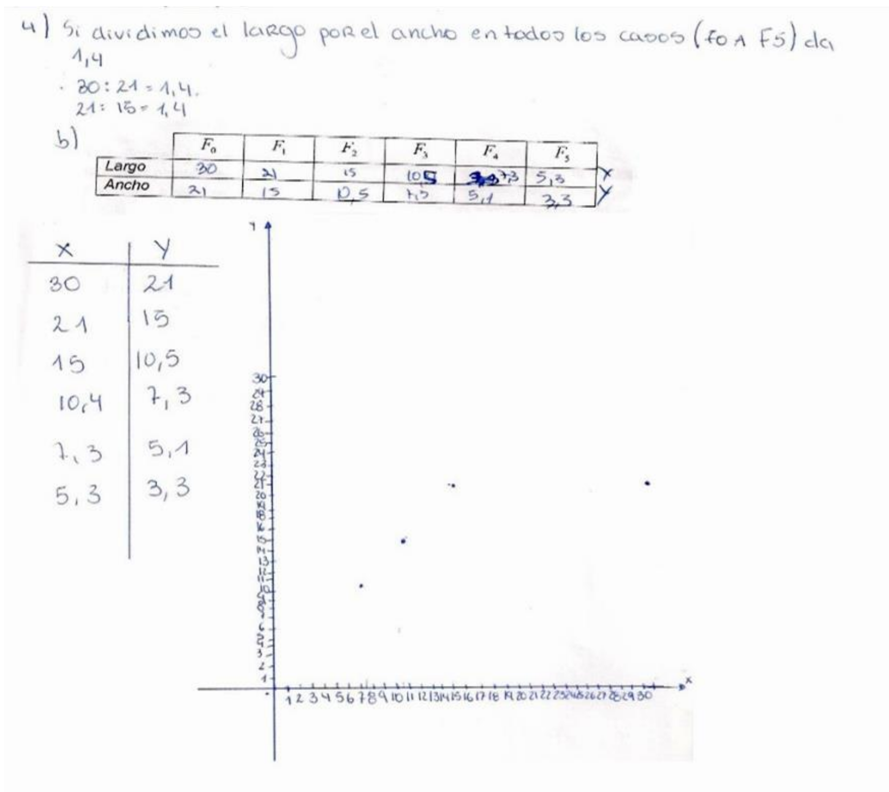


Figura 30. Un punto atípico de la pendiente de la recta

Esto puede explicar porque este grupo se moviliza en el nivel de asociación, sin someterse a la tensión.

Resumen de las producciones de los equipos

Resumimos las principales características de los tres grupos y el análisis global de las producciones de estos estudiantes para cada actividad. Las explicitaciones observadas en el desarrollo de los resultados podemos asociarlas, principalmente, con la formación del concepto de proporcionalidad, representado en los diferentes cuadros.

EQUIPOS	CARACTERISTICAS PRINCIPALES	ANALISIS GLOBAL
Grupo 1 *Destacado*	**Traduce las características observadas de los rectángulos, asociando el concepto de semejanza.**	**Razonan de manera deductiva el carácter de semejanza de la familia F, transfiriendo este concepto a las figuras obtenidas.**
	Describen las características de un apilado regular a través de una disposición en la cual los vértices homólogos están alineados e intersectándose en uno de los vértices de F_5, conservando la estructura de la forma.	**Observan la forma y orden del apilado.** **Integran la característica de apilado regular para la búsqueda de otro apilado que cumpla con la propiedad.**
	Hacen funcionar el concepto a nivel de coordenadas, validan el nuevo apilado utilizando la propiedad de "apilado regular"	**La validación de los apilados regulares obtenidos de la separación de la familia R no solo favorece a la comprensión, sino que también permite la reformulación del concepto institucionalizado.**
	Sostienen propiedades a base del cuadro numérico, sin reformular el apilado regular en el cuadro geométrico. No encuentran el modelo lineal.	**Los resultados de la relación entre las variables descritas en el cuadro numérico no es traducida como la pendiente de la representación gráfica del modelo lineal.**
Grupo 2 *Regular*	**Ilustran el modelo para comprenderlo apoyándose del concepto de semejanza.**	**La utilización que hacen de una ilustración de F_0 para justificar la conservación de la estructura de la figura, los acerca a la característica de la familia F.**
	Construyen un modelo para la búsqueda de la estructuración de un apilado regular.	**Se apoyan en la definición de semejanza, pero constituye más bien un obstáculo para la búsqueda de un apilado regular.**

	No reformulan las características de un apilado regular con otra familia de rectángulos, pero buscan respuestas. **Perciben una idea de la acción gráfica, no logran vincular la forma con una representación numérica (relación largo/ancho).**	**Las formulaciones hechas de apilado regular en el marco geométrico develan un enfoque procedural, dejando entre ver un falso conocimiento integral, sin reformular el concepto de apilado regular, quedando en la búsqueda.** **Utilizan la herramienta gráfica para identificar la relación entre las variables, sin explicitar esta numéricamente, pero de todas maneras intentan acercarse a la situación.**
Grupo 3 ***Débil***	**Comprende el modelo a través de conocimientos vistos anteriormente.** **Confunde el término apilado con fila, no logra contextualizar lo pedido.** **Repiten las características de apilado regular (institucionalizado), pero no comprenden aún el concepto de apilado regular, se conforman con solo apilar.** **Se conforman con responder, sin cuestionarse ni validar los resultados obtenidos.**	**Dan sentido a la característica de la familia F, expresando de manera explícita el concepto de semejanza.** **El concepto de "apilado regular" les resulta complicado al no reconocer la diferencia entre apilado y fila, este grupo lucha por la comprensión de la situación.** **Intentan validar el apilado utilizando las características de apilado regular antes vistas, pero no pero no aplican la reformulación en la búsqueda de nuevas familias, develando una incoherencia en la comprensión del concepto.** **Razonan de manera explícita la relación entre las variables, pero la representación gráfica de un punto atípico no les incomoda, evitando la validación del modelo. Por tanto la búsqueda del modelo lineal les resulta complicado.**

Tabla. Resumen de las producciones de los grupos

Los grupos de acuerdo a los esfuerzos que se visualizaron en sus producciones y en relación con la matriz presentada en la sección 3.5, se puede inferir el nivel de competencia alcanzado por cada uno, de estos se extrae:

Grupo 1: Alcanza el nivel de comprensión por completo, quedando en la lucha por la estructuración, buscan el modelo lineal a través de la razón numérica encontrada.

Grupo 2: Luchan por la estructuración, aunque no encuentran la razón de los lados, intentan buscan el modelo lineal mediante la gráfica.

Grupo 3: Este grupo intenta comprender la actividad, aunque no cuestionan sus resultados, se me mueven a través de las indicaciones y repiten un conocimiento de forma memorística.

5 CONCLUSIONES.

Nuestro objetivo de investigación era estudiar una nueva manera de enseñar la estructura de la proporcionalidad para la construcción de un conocimiento, a través de situaciones problemas (sección 1.1). Sobre la base de ello, surge la interrogante que apunta hacia la viabilidad de la movilización espontánea de sus propiedades por la exposición a una serie de situaciones didácticas que recurren a diferentes cuadros matemáticos (sección 1.2), llevando la experimentación a un establecimiento educacional, específicamente en Segundo Año Medio.

El concepto de la proporcionalidad es visto en los textos de estudio de 2° Año Medio, con la diversidad de cuadros que es necesario que el alumno visualice (numérico, geométrico y gráfico), presentando a su vez la necesidad de diagnosticar conocimientos *a priori* como requisito para aprender lo nuevo.

5.1 Principales resultados de la investigación.

En esta experimentación se observan seis grupos, obteniendo una muestra de tres. Se observan las producciones, obteniendo finalmente resultados que nos hablan por sí solos:

- Estudiantes que estructuraron, razonaban de manera deductiva, siempre en la búsqueda de la comprensión, utilizando conceptos previamente visto como herramienta.
- Los alumnos que quedaron a nivel de comprensión, en búsqueda de la estructuración; se estima que el obstáculo del conocimiento *a priori* no los dejó avanzar, por no ocupar el concepto de semejanza como herramienta, sino como algo memorístico.
- El grupo débil queda a nivel de comprensión, su obstáculo es lo que se denomina como "El efecto del capitán"; es un grupo que responde sin cuestionar resultados, esperando aceptación y recurriendo a la memoria en algunos momentos.

A partir de estos resultados podemos observar que en la educación tradicional, alumnos memorísticos no fueron capaces de desarrollar exitosamente la actividad, siendo estos buenos alumnos en la enseñanza tradicional; al contrario sucede con los alumnos del grupo *"destacado"*, que resultaron ser los que académicamente no lo eran, pero su trabajo fue rico en aportes en sus producciones, ya que realizaban mejores observaciones, fueron alumnos críticos, instancia o característica que no han podido desarrollar en la enseñanza.

Uno de los obstáculos presentes en la investigación fue la falta de material e investigaciones que aludieran al tema de didáctica. La falta de experiencia en investigaciones y entrevistas limita el desarrollo de un buen trabajo en la extracción de información.

5.2 Perspectivas de investigaciones futuras.

Esta actividad también puede dar a lugar a otras proyecciones matemáticas. Es útil considerar con los estudiantes un punto cultural sobre la familia de rectángulos similares y mostrar la utilidad de las nociones matemáticas para organizaciones técnicas particularmente la noción de las ampliaciones.

Comprender la noción de límite de la serie geométrica $\boldsymbol{S_n}$ de razón $\mathbf{1}/_{\mathbf{2}}$ considerando Sn como el área del rectángulo de dimensiones $\boldsymbol{X_n}$ e $\boldsymbol{Y_n}$ con:

$\boldsymbol{X_n}$ Serie geométrica de razón $\mathbf{1}/_{\sqrt{\mathbf{2}}}$

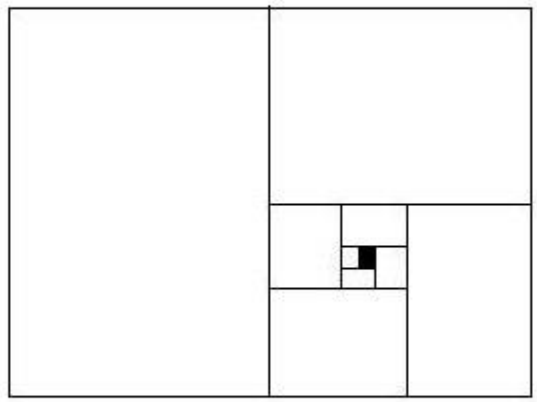
$\boldsymbol{Y_n}$ Serie geométrica de razón $\mathbf{1}/_{\sqrt{\mathbf{2}}}$

Lo que corresponde a los rectángulos $\boldsymbol{F_n}$ obtenidos procedentemente.

En efecto se puede acercar la noción de límite de la serie geométrica $\boldsymbol{S_n}$ yuxtaponiendo hábilmente los diferentes rectángulos y estudiar el área del conjunto.

El área del gran cuadro rectángulo es 2 y la diferencia $\mathbf{2} - (\mathbf{1} + \mathbf{1}/\mathbf{2} + \cdots + \mathbf{1}/\mathbf{2}^{\boldsymbol{n}})$

Vale $\mathbf{1}/\mathbf{2}^{\boldsymbol{n}}$ que tiende a cero cuando $\boldsymbol{n}$ tiende al infinito, como lo muestra el área del rectángulo sombreado $\boldsymbol{F_n}$ cuando n se vuelve grande



BIBLIOGRAFÍA.

ARTIGUE, M. (1995). *Ingeniería didáctica en educación matemática: Un esquema para la investigación y la innovación.* Enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, cap. 4, pp 33 – 61, México: Grupo Editorial Iberoamérica, S.A.

BALDOR, A. (1967), *Geometría plana y del espacio: con una introducción a la trigonometría,* Ed. Cultural Centroamericana, Guatemala

BLANCO M, BOZT J, CALDERON F, JIMENEZ M, GONZALEZ M, LOPEZ G, ROMERO P, DIAZ M, MUÑOZ G, RUPIN P (2009). *Texto Para El Estudiante Segundo Año Medio* Bicentenario Matemática, Ed. Santis M, Ramírez M. Chile.

BROUSSEAU, G. (2007), *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*, Buenos Aires: Libros del zorzal, 2007, Trad. Dilma Fregona.

BOISNARD D., HOUDEBINE J., JULO J., KERBOEUF M-P. et MERRI M. (1994). *La proportionnalité et ses problèmes*. Paris. Hachette.

COLL, D. (2014), *Texto del estudiante 7° básico matemáticas*, Ed. Galileo

DÍAZ, J. (2013). *El Concepto de Función: Ideas pedagógicas a partir de su historia e investigaciones,* Cinvestav, Vol. 4, Universidad de Sonora, México

DOUADY, R. (1993), E*nseñanza de la dialéctica Herramienta-Objeto y de los Juegos de Cuadros en formación matemática de profesores de escuela.* Escuela en Didáctica de las Matemáticas. Colmar. France.

GÉRON, C., STEGEN, P. et DARO, S. (2005), *L'enseignement de la proportionnalité.* Ed. Hypothèse. France.

HOUDEMENT CATHERINE – PELTIER MARIE-LISE (1992) *Estudio del formato A4*

HOUDEMENT CATHERINE – PELTIER MARIE-LISE (1997) *Textos metodológicos.*

JENNIE M., BENNETT, EDWARD B. BURGER, DAVID J. CHARD, EARLENE J. HALL, PAUL A. KENNEDY, FREDDIE L. RENFRO, TOM W. ROBY, JANET K., Scheer & Bert k. Waits. (2009), Edición especial para el Ministerio de Educación, Ed. Alfaro, S., Espinoza, Y., Cano S. y Coll D. (2014), *Texto para el estudiante séptimo básico matemática*, Chile.

MIRÓN, L. (2009)*, Proporcionalidad numérica en la vida cotidiana,* Revista CSI, N°22, Granada.

OBANDO G., VASCO C. y ARBOLEDA, L. (2012). *Enseñanza y aprendizaje de la razón, la proporción y la proporcionalidad: un estado del arte.* Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, N° 17, pp 59-81.

OLLER, A. (2012), *Proporcionalidad Aritmética: Una Propuesta Didáctica para alumnos de secundaria,* Tesis de la Universidad Valladolid, España.

ANEXOS.

Guía de entrevista.

Actividad 1.

¿Qué es lo que viste?

¿Qué es lo que sabías?

¿De qué se trata eso?

¿Qué pensaste haciendo eso?

Bloqueo: ¿Qué es lo que tenías que hacer?

Actividad 2.

¿Por qué lo hizo así?

¿Cómo lo ve?

¿Qué pensaste haciendo eso?

¿De qué trata en el fondo?

¿Recuerdas tener alguna dificultad haciendo eso?

Actividad 3.

¿Encontraste un poco de dificultad? ¿Cómo lo resolviste?

¿Qué hizo?

¿Por qué lo hizo así?

¿Tiene sentido?

¿Cómo se podría hacer eso?

¿Por qué es así?

Actividad 4.

¿Por qué puedo hacer eso?

¿Siempre es así?