Universidad del Bio Bio
Facultad de Educación y Humanidades
Pedagogía en Educación Matemática

“Sucesiones y Series de Funciones en una Variable”

Seminario para optar al título de

Profesor de Educación Media en Educación Matemática.

Integrantes

Patricia Bravo Sandoval

Dania Jofré Retamal

M^a Fernanda Riquelme San Martín

Profesor

Luis Friz Roa

Chillán, Diciembre de 2014

"Sucesiones y Series de Funciones Reales en una Variable"

Autores: Patricia Bravo, Dania Jofré y M Fernanda Riquelme
Profesor Guía: Dr. Luis Friz Roa

2014

Agradecimientos

A Nuestro Profesor Guía

Primero nos gustaría agradecer sinceramente a nuestro profesor Luis Friz Roa, su esfuerzo y dedicación.

Sus conocimientos, sus orientaciones, su manera de trabajar, su paciencia y su motivación han sido fundamentales para nuestra formación como docentes. Y por último por habernos aceptado como grupo y confiar en que podíamos realizar este proyecto.

Quiero agradecer a mi familia por el apoyo y confianza que me dieron durante mis años de estudio, a mis compañeras tesistas por todo el esfuerzo de cada una para llevar a cabo este proyecto; además a aquellas personas que conocí durante este proceso de formación y a quienes ya se encontraban en este desde un principio, a las amigas que se fueron formando de a poco Ana, Anita, Dania y Fernanda, gracias por la amistad que me brindaron y los gratos momentos que compartimos. Por último quiero agradecer a quién me ha acompañado y a sido un pilar fundamental durante estos dos últimos años, Ricardo Saavedra, por su amor y apoyo incondicional principalmente en este proceso importante en mi vida.

Patricia Bravo.

Agradecer primero que todo a Dios por permitirme terminar mi carrera, por darme salud para poder lograrlo, como también por darme una familia maravillosa, a la cual debo agradecerle mucho por ser una fuente de apoyo constante e incondicional en toda mi vida y sobre todo en mis años de carrera profesional. En especial expresar mis agradecimientos a mis padres por su confianza que depositaron en mí, por apoyarme incluso a pesar mis errores y darme fuerza para salir adelante cuando sentía que no podía continuar. Agradecer a Marcelo por consolarme y apoyarme cada vez que me sentía decaída, y sobre todo agradecer a Dios por mi hija hermosa que tengo presente en mi vida, ya que gracias a ella cada día tengo las fuerzas para salir adelante. Por último agradecer a todas las personas que confiaron en mí, que cada vez me daban palabras de aliento, como también darle las gracias enorme a mis compañeras tesistas por su compañerismo y paciencia hacia mi persona.

Dania Jofré

Agradezco a mi madre, mi hermanita y mi compañero de vida, su compañía, el apoyo que me han demostrado y el amor incondicional que me brindan en cada momento de mi vida; además de su ayuda en impulsarme a terminar este proyecto. A mi padre, su ayuda económica y su confianza en mis capacidades. A mis compañeras de grupo, su dedicación, sus esfuerzos y el trabajo realizado que nos han permitido desarrollar exitosamente esta etapa. A mis familiares, su constante preocupación en mis avances tanto académicos como personales. Por último, decirle que todos ustedes han sembrado en mi una semilla, me han ayudado a cuidarla y guiarla por el camino del éxito y hoy cosechamos, juntos, frutos de felicidad que nos enorgullecen... Los quiero inmensamente.

Mª Fernanda Riquelme

Índice general

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Introducción

La matemática es una disciplina creada por el ser humano, cuya construcción y desarrollo surge de la necesidad y el deseo de solucionar situaciones en diversos ámbitos (matemática, ciencias naturales, ciencias sociales, del arte y la tecnología, etc.), es por esto que el conocimiento matemático forma parte de la cultura de la sociedad[1]. Una de las evoluciones más importantes que ha sufrido esta disciplina es en el área del Cálculo Infinitesimal (o simplemente Cálculo), lo que ha modificado la perspectiva teórica de algunos temas en los diversos ejes temáticos[2], pues éste precisa conceptos y métodos que se han estudiado durante siglos por distintos autores tales como Newton y Leibniz (quienes son considerados los precursores).

El Cálculo estudia principalmente las funciones y los conceptos asociados como límites, derivadas, integrales, series infinitas, etc. En particular, a veces las funciones suelen ser obtenidas como límites de sucesiones de funciones o sumas de series de éstas que convergen (a la función) y son la solución de un problema específico, por lo tanto una función sujeta a ciertas condiciones puede ser aproximada mediante un elemento de una sucesión o por la suma parcial de una serie. Es aquí donde indagaremos, en las sucesiones y series de funciones reales en una variable, su convergencia y los criterios asociados.

Tener en cuenta qué es una sucesión y una serie de funciones resulta fundamental. A grandes rasgos una sucesión de funciones, tal como su nombre indica, es una secuencia cuyos elementos son funciones. Formalmente, se define como una aplicación que a cada número natural n hace corresponder una función f_n. Suele recurrirse al

[1] Objetivos fundamentales y contenidos mínimos obligatorios de la educación básica y media actualización 2009
[2] Un poco de historia y el nacimiento del cálculo. Disponible en: http://www.fca.unl.edu.ar/Intdef/Historia1.htm

símbolo $\{f_n\}$ para denotar la sucesión de funciones dada por $n \to f_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Supondremos en lo que sigue que las funciones f_n son funciones reales definidas en un intervalo I[3].

Ahora bien, a partir de una sucesión de funciones $\{f_n\}$ podemos formar otra, cuyos términos se obtienen sumando consecutivamente los de $\{f_n\}$, la que denotamos por $\{s_n\}$, donde:

$$s_1 = f_1,\ s_2 = f_1 + f_2,\ s_3 = f_1 + f_2 + f_3,\ \ldots \text{ y } s_n = f_1 + f_2 + \ldots + f_n$$

En general, $s_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$. La sucesión $\{s_n\}$ así definida se llama serie de término general f_n y la representamos por el símbolo $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$.[4]

A lo largo de la historia han existido algunos personajes que han contribuido a la construcción de éste tópico, dentro de los más relevantes encontramos a:

Isaac Newton (1642-1727). Matemático inglés. Considerado, al igual que Leibniz, fundador del Cálculo. Abordó el desarrollo de esta área a partir de la geometría analítica. En 1666 introdujo el concepto de "fluxiones", correspondiente a lo que hoy conocemos como derivadas, métodos de derivación e integración (regla de la cadena y método de sustitución). También desarrolló la propiedad de linealidad y construyó tablas de derivadas e integrales. Además estudió la resolución de ecuaciones diferenciales empleando sólo algunas funciones de casos particulares.

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716). Matemático alemán. Comparte con Newton la creación del Cálculo. Algunos aportes al Cálculo son: la notación que utilizamos hasta nuestros días, la regla del producto y el llamado Criterio de Leibniz para la convergencia de series numéricas alternadas.

Augustín Louis Cauchy (1789- 1857). Matemático francés. Desarrolla la teoría de funciones continuas luego de los trabajos realizados por el matemático checo Bernhard Bolzano el cual define explícitamente el concepto de continuidad de una función. Dentro de las obras de Cauchy encontramos "Cursos de análisis" (1821), "Resumen de lecciones sobre el cálculo infinitesimal" (1822) y "Lecciones sobre el Cálculo Diferencial" (1829).

[3] Cálculo diferencial e integral. Javier Pérez. Universidad de Granada. Pp. 583
[4] Cálculo diferencial e integral. Javier Pérez. Universidad de Granada. Pp. 590.

Niels Henrik Abel (1802-1829). Matemático noruego. Dentro de sus mayores aportes se encuentra la prueba de la imposibilidad de la ecuación quíntica[5] mediante radicales, además, desarrolló la teoría de las integrales elípticas estudiando sus funciones inversas y dio precisión al contexto de las series infinitas, siendo ésta su contribución más decisiva en el análisis.

Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859). Matemático alemán. Aportó a la matemática principalmente en el área del cálculo, hizo referencia al campo de la teoría de los números, estudiando las series y desarrollando la teoría de las Series de Fourier. También aplicó las funciones analíticas al cálculo de problemas aritméticos y estableció criterios de convergencia para las series y para el área del cálculo mejoró la definición y el concepto de función.

Karl Weierstrass (1815-1897). Matemático alemán. Bajo la influencia de Christof Guderman, se introdujo en la teoría de las Series de Potencias. En 1841 publicó un ensayo sobre funciones elípticas. Dió las definiciones de continuidad, límite y derivada de una función (que conocemos hasta hoy), con lo cual logró demostrar el teorema del valor medio, entre otros y además realizó aportes en cuanto a la convergencia de series.

Frederick Winslow Taylor (1856-1915). Ingeniero estadounidense. Se dedicó a trabajar como obrero, luego de dejar la carrera de derecho, donde optimizó las labores de los obreros en función del tiempo de producción; descomponiendo el trabajo en tareas simples, y cronometradas exigentemente. Se convirtió en ingeniero realizando cursos nocturnos. Su principal aporte al Cálculo es la llamada Serie de Taylor.

[5] En matemática, se denomina ecuación de quinto grado o ecuación quíntica a una ecuación polinómica en que el exponente de la variable independiente de mayor grado es cinco.

1.2 Marco Teórico

Para comenzar con el tema de sucesiones y series de funciones reales en una variable, revisaremos su génesis y construcción a lo largo de la historia. Ya en el siglo XII se trabajaban problemas que indicaban las primeras menciones acerca de las sucesiones, es el caso de la "Sucesión de Fibonacci" [6]que trataba de la reproducción de los conejos, planteando que una pareja de conejos criaba una nueva pareja cada mes y que transcurrido dos meses cada pareja se comportaba del mismo modo. Más tarde, en el siglo XIV, Richard Suiseth (Inglaterra, 1350) resolvió el siguiente problema "si durante la primera mitad de un intervalo de tiempo una variación tiene cierta intensidad, durante el siguiente cuarto la intensidad es el doble, en el octavo la intensidad en triple, y así de forma infinita, entonces, la intensidad media durante todo el intervalo será la intensidad de la variación durante el segundo subintervalo. Esto es lo mismo a decir que [7]:

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+...+\frac{n}{2^n}.$$

En el lenguaje habitual, los términos sucesiones y series, son considerados como sinónimos y se utilizan indistintamente para designar un conjunto de sucesos dispuestos en un orden. Sin embargo, en matemáticas estos conceptos tienen un significado un poco diferente. La palabra sucesión tiene un sentido similar al del lenguaje habitual, pues quiere indicar un conjunto de objetos situados en un orden, mientras que una serie también se refiere a un conjunto de elementos ordenados, con la diferencia que estos términos corresponden a sumas de otra sucesión.

Por lo anterior, es esencial definir, formalmente estos dos conceptos[8]: si a cada entero positivo n se le asocia un número real a_n, entonces se dice que el conjunto ordenado $a_1, a_2, ..., a_n, ...,$ define una sucesión infinita denotada por $\{a_n\}$.

[6]Introducción a las sucesiones y series numéricas. Ramón Bruzual y Marisela Domínguez. Universidad Central de Venezuela. Pp. 2.

[7]Cálculo con geometría analítica 8° edición. Ron Larson, Robert Hostetler y Bruce Edwards. Editorial McGraw-Hill Interamericana. Pp. 606.

[8]Calculus: Cálculo con funciones de una variable, con una introducción al álgebra lineal. Tom Apostol. Editorial Reberté. Pp.462.

Un ejemplo común de una sucesión es $\left\{\frac{1}{n}\right\}$, donde los primeros cinco términos son:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}.$$

A partir de ésta, una serie numérica se define como la sucesión de las sumas parciales de los términos de la sucesión $\{a_n\}$, es decir:

$$s_1 = a_1, s_2 = a_1 + a_2, s_3 = a_1 + a_2 + a_3, ..., s_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k,$$

donde s_n denota la suma parcial de los n primeros términos, entonces $\{s_n\}$ es la serie y se denota como $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Retomando el ejemplo anterior, la serie asociada a la sucesión $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ es:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + ... + \frac{1}{n} + ... = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

Ahora bien, si existe un número real s tal que:

$$\lim_{n \to \infty} s_n = s,$$

Entonces se dice que la serie es convergente y su suma es s. De lo contrario si $\{s_n\}$ no converge se dice que la serie diverge y no tiene suma [9].

Hasta aquí se han considerado sólo sucesiones y series cuyos términos son números reales. Sin embargo, también pueden ser funciones. Entonces ahora se procederá a revisar las sucesiones y series de funciones reales en una variable, cuyo dominio común se encuentra en la recta real.

Una sucesión de funciones se define como: si a cada entero positivo n se le asocia una función real f_n, entonces se dice que el conjunto ordenado $f_1, f_2, ..., f_n, ...$, define una sucesión infinita, denotada por $\{f_n\}$[10].

[9] Calculus: Cálculo con funciones de una variable, con una introducción al álgebra lineal. Tom Apostol. Editorial Rebertè. Pp.469.

[10] Calculus: Cálculo con funciones de una variable, con una introducción al álgebra lineal. Tom Apostol. Editorial Rebertè. Pp.517.

Un ejemplo de sucesión de funciones es:

$$\left\{2\frac{n^2-x^2}{n^3}+x\right\}$$

Los tres primeros términos de esta sucesión son:

$$2-2x^2+x,\ \frac{4-x^2}{4}+x,\ \frac{18-2x^2}{27}+x.$$

A partir de $\{f_n\}$ se puede obtener otra sucesión, mediante las sumas parciales de los términos de la primera:

$$s_1=f_1,\ s_2=f_1+f_2,\ s_3=f_1+f_2+f_3,...,\ s_n=f_1+f_2+f_3+f_4+...+f_n$$

Donde $s_n=\sum_{k=1}^{n} f_k$ se denomina suma parcial de los n términos y $\{s_n\}$ es la llamada serie de funciones[11], que se denota por $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$.

Algunos ejemplos de series de funciones son: la serie de Potencias, serie de Taylor, serie de Fourier, entre otras.

Llamamos serie de potencias centrada en $x_0=a$ a la serie de funciones:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n=a_0+a_1(x-a)+a_2(x-a)^2+...+a_n(x-a)^n+...$$

El ejemplo más simple de series de potencias se centra en $x=0$ y tiene coeficientes $a_n=1$ para todo n, Entonces se obtiene la serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} 1(x-0)^n=\sum_{n=0}^{\infty} x^n=1+x+x^2+...+x^n+...$$[12].

Así como en las sucesiones y series numéricas puede existir el límite y la suma, en las sucesiones y series de funciones también se puede estudiar la convergencia, y por tanto la existencia de la función límite y la función suma.

La convergencia de las sucesiones y series de funciones puede ser uniforme además de puntual.

[11] Perez, J. (). Cálculo diferencial e integral. Disponible en http://www.ugr.es/~fjperez/textos/calculo_diferencial_integral_func_una_var.pdf. Pp. 590.

[12] Cálculo infinitesimal 2°. Disponible en http://ma1.eii.us.es/miembros/ajimenez/CI/TEO/CI_tema2.pdf. Pp 21.

En cuanto a la convergencia puntual, se define como: sea S el conjunto de puntos x para los cuales la sucesión converge. La función f definida en S por la igualdad:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \quad \forall\, x \in S.$$

Se le llama función límite de la sucesión $\{f_n\}$ y decimos que esta sucesión converge puntualmente a f en el conjunto S, lo que se denotará por $f_n \to f$.

En este punto interesa analizar si la función límite conserva las mismas propiedades de continuidad, acotación, límites, integrabilidad, y derivabilidad que las funciones de la sucesión, lo que será estudiado durante el desarrollo de esta tesis.

Consideremos la sucesión $\{f_n\}$ que converge puntualmente en el conjunto S hacia su función límite f. Según la definición de límite, esto significa que para cada x de S y para cada $\varepsilon > 0$ existe un entero v, que depende de x y ε, tal que $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ con tal que $n \geq v$. Si el mismo v sirve para todos los puntos x de S, entonces la convergencia se llama uniforme en S.

Luego la convergencia uniforme se define como: una sucesión de funciones $\{f_n\}$ se llama uniformemente convergente hacia f en un conjunto S si para todo $\varepsilon > 0$ existe v (dependiente tan solo de ε) tal que $n \geq v$ lo que implica

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \qquad \forall\, x \in S.$$

Lo que denotamos como $f_n \overset{c.u.}{\to} f$ en S.

Cuando las funciones f_n son de valores reales, existe una interpretación geométrica sencilla de convergencia uniforme. La desigualdad $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ es equivalente al par de desigualdades:

$$-\varepsilon < f_n(x) - f(x) < \varepsilon \ / + f(x)$$
$$f(x) - \varepsilon < f_n(x) < f(x) + \varepsilon$$

Si éstas son ciertas para todo $n \geq v$ y todo $x \in S$, entonces toda la gráfica de f_n correspondiente a S está en una banda de altura 2ε simétricamente situada respecto de la gŕafica de f , como se muestra a continuación.[13]

[13] Apostol. T. (1999). *Calculus: Cálculo con funciones de una variable, con una introducción al álgebra lineal.* Editorial Reberté. Pp.519.

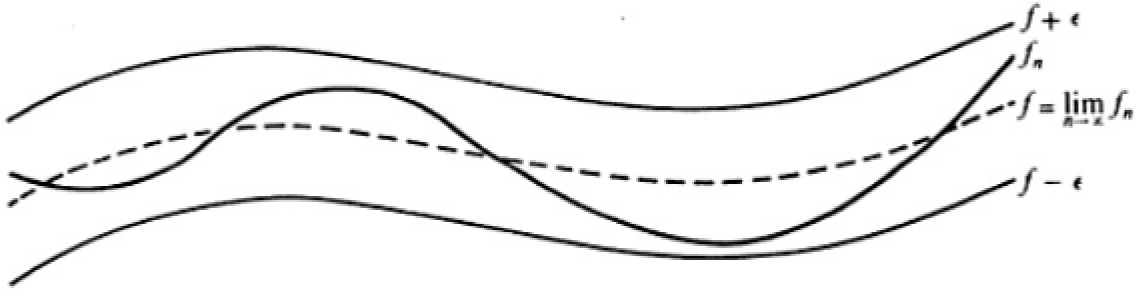

Figura 1.1: Interpretación Geométrica de la Convergencia Uniforme

En el caso de la series existen algunos criterios, que serán demostrados rigurosamente, para la convergencia uniforme como el criterio de Weierstrass, Dirichlet y Abel.

Criterio de Weierstrass: *Dada una serie de funciones* $\sum f_n$ *que converge puntualmente hacia una función* f *en un conjunto* S*. Si existe una serie numérica convergente de términos positivos* $\sum k_n$ *tal que:* $0 \leq |f_n(x)| \leq k_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y todo x *de* S *entonces la serie* $\sum f_n$ *converge uniformemente en* S[14].

Criterio de Dirichlet: *Dada una serie de funciones* $\sum f_n$ *y una sucesión de funciones* $\{\varphi_n\}$ *donde* f_n *y* φ_n *son funciones de* $S \subset \mathbb{R}$ *en* $\mathbb{R}$*. Se verifica que si la sucesión* $\{\varphi_n\}$ *converge uniformemente en* S *hacia la función nula, si la sucesión* $\{\varphi_n(x)\}$ *es monótona para cada* $x \in S$ *y si la sucesión* $\{s_n\}$ *de las sumas parciales de la serie* $\sum f_n$ *está uniformemente acotada*[15] *en* S*, entonces la serie* $\sum f_n\varphi_n$ *converge uniformemente en* S[16].

Criterio de Abel: *Dada una serie de funciones* $\sum f_n$ *y una sucesión de funciones* $\{\varphi_n\}$ *donde* f_n *y* φ_n *son funciones de* $S \subset \mathbb{R}$ *en* $\mathbb{R}$*. Se verifica que si la sucesión* $\{\varphi_n\}$ *esta uniformemente acotada en* S*, si la sucesión* $\{\varphi_n(x)\}$ *es monótona para cada* $x \in S$ *y si la serie* $\sum f_n$ *es uniformemente convergente en* S*, entonces la serie* $\sum f_n\varphi_n$ *converge uniformemente en* S[17].

A medida que se desarrolle esta tesis se profundizará sobre los criterios men-

[14]Burgos. J. (2007). Cálculo Infinitesimal de una Variable. Editor: Carmelo Sánchez González. Pp 532
[15]Se dice que una sucesión de funciones está uniformemente acotada en S si todas sus funciones están acotadas en S y admiten una misma cota K.
[16]Burgos. J. (2007). Cálculo Infinitesimal de una Variable. Editor: Carmelo Sánchez González. Pp 533
[17]Burgos. J. (2007). Cálculo Infinitesimal de una Variable. Editor: Carmelo Sánchez González. Pp 534

cionados, con una mayor rigurosidad, además de estudiar otros teoremas o criterios asociados al tema de sucesiones y series de funciones, que hasta ahora no han sido nombrados.

1.3 Formulación del Problema

Esta investigación tendrá un enfoque demostrativo, pues se realizará un estudio riguroso de los diferentes teoremas que intervienen en el tema de investigación, sucesiones y series de funciones como también algunas demostraciones de convergencia.

Durante la educación superior, tanto las sucesiones y series de funciones como los conceptos asociados a éstas (límite, convergencia, continuidad, etc.) son trabajadas en el área de las matemáticas. Su estudio resulta complejo para el alumno: por una parte, por el alto nivel de abstracción de los análisis que se involucran, y por otra, porque el tratamiento de estos temas se centra principalmente en las aplicaciones, como lo son las series de potencias. Además la profundidad y extensión con que se tratan los temas en cuestión es superficial y acotado, dificultando la comprensión del alumno. Por lo tanto, en esta tesis se estudiarán detalladamente las sucesiones y series de funciones, junto a los teoremas y criterios de convergencia de éstas, además de la continuidad, integrabilidad y derivabilidad de las funciones límite (de una sucesión) y suma (de una serie). Y algunas aplicaciones como las series de Potencias y en Probabilidades.

1.4 Objetivos

1.4.1 Objetivo general

- Estudiar las sucesiones y series de funciones reales en una variable.

1.4.2 Objetivos específicos

- Identificar los diferentes teoremas y criterios de convergencia de sucesiones y series de funciones.
- Estudiar las definiciones de acotación, límite en un punto, continuidad, integrabilidad y derivabilidad de las funciones límite y suma (de una sucesión y de una serie), y las demostraciones de los respectivos teoremas de sucesiones y series de funciones.
- Estudiar la demostración de los teoremas asociados a las series de potencias.
- Aplicar la regularidad de la suma de series de potencias.

Capítulo 2

Convergencia de Sucesiones y Series de Funciones

Definición: *si a cada entero positivo n se le asocia una función real f_n, entonces se dice que el conjunto ordenado $f_1, f_2, ..., f_n, ...$, define una sucesión infinita, denotada por $\{f_n\}$*[1].

2.1 Convergencia de una Sucesión de Funciones

2.1.1 Convergencia Puntual

Definición: *Sea S el conjunto de puntos x para los cuales la sucesión $\{f_n\}$ converge. Se dice que $\{f_n\}$ converge puntualmente en S si se cumple la igualdad:*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \quad ,\forall x \in S,$$

donde $f(x)$ es la función límite de la sucesión de funciones. Entonces, la sucesión converge puntualmente.

Denotamos que $\{f_n\}$ converge puntualmente a $f(x)$ como $f_n \to f$ en el conjunto S[2].

[1] www.uam.es/personal_pdi/ciencias/fchamizo/asignaturas/calc1inf1011/apjperez/calculo_cap10.pdf. Recuperado en septiembre 09, 2014.

[2] Apostol. T. (1999). Calculus: Cálculo con funciones de una variable, con una introducción al álgebra lineal. Editorial Reberté. Pp 517

2.1.1.1 Ejemplo

Sea $f_n : [0,\infty[\to \mathbb{R}$, definida por $f_n(x) = \dfrac{x}{1+nx}$.

En la Figura 2.1.1.1 se han representado algunos términos de la sucesión.

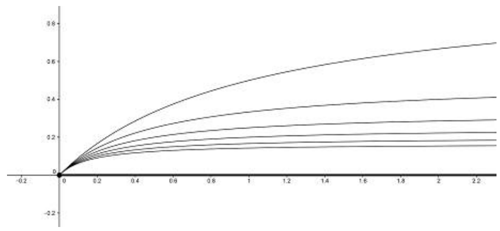

Figura 2.1.1.1

Aplicando límite, tenemos:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{x}{1+nx} \cdot \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} &= \lim_{n\to\infty} \frac{x \cdot \frac{1}{n}}{(1+nx)\cdot \frac{1}{n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{x}{n}}{\frac{1}{n} + \frac{nx}{n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{x}{n}}{\frac{1}{n} + x} \\
&= \frac{0}{x} \\
&= 0,\ \forall x \in [0,\infty[.
\end{aligned}$$

Entonces la sucesión $\left\{\dfrac{x}{1+nx}\right\}$ converge puntualmente en el intervalo $[0,\infty[$, y su función límite $f(x)$ es la función nula. Lo que se denota como $\left\{\dfrac{x}{1+nx}\right\} \to 0$.

2.1.1.2 Ejemplo

Sea $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, definida por $f_n(x) = x^n$.
En la figura 2.1.1.2 se han representado algunos términos de la sucesión.

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & si\, 0 \leq x < 1 \\ 1 & si\, x = 1 \end{cases}.$$

La sucesión $\{x^n\}$ converge puntualmente en el intervalo cerrado $[0,1]$ y su función límite f viene dada por la fórmula:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si\, 0 \leq x < 1 \\ 1 & si\, x = 1 \end{cases}.$$

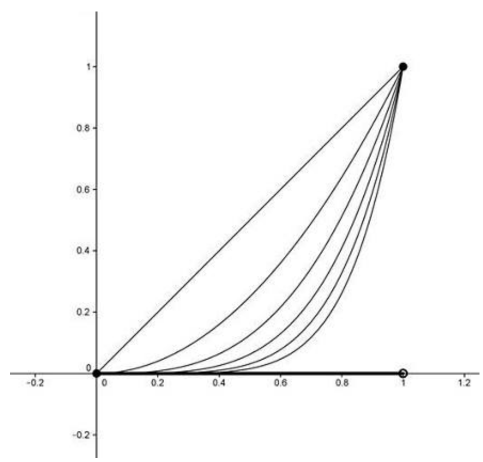

Figura 2.1.1.2

Observación: podemos ver que $\{f_n\}$ es continua en $[0,1]$, sin embargo la función límite puntual no lo es, lo cual será visto más adelante.

2.1.2 Convergencia Uniforme

Sea la sucesión $\{f_n\}$ que converge puntualmente en el conjunto S hacia una función límite f. La sucesión de funciones $\{f_n\}$ converge uniformemente hacia $f(x)$ en el conjunto S si para todo $\varepsilon > 0$ existe un v (dependiente tan solo de ε) tal que $n \geq v$ implica que

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall\, x \in S^3 \;.$$

[3]Apostol. T. (1999). Calculus: Cálculo con funciones de una variable, con una introducción al álgebra lineal. Editorial Reberté. Pp 519

Lo que denotamos como $f_n \overset{c.u.}{\to} f$.

Además se establece que una sucesión de funciones no converge uniformemente si cumple la "condición de no convergencia uniforme":

Condición de No Convergencia Uniforme

La sucesión $\{f_n\}$ no converge uniformemente en el conjunto S hacia la función límite f si, y sólo sí, existe un $\varepsilon_0 > 0$, existe una sucesión $\{x_n\}$ de puntos de S y existe una subsucesión[4] de $\{f_n\}$ tales que:

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| \geq \varepsilon_0 \ \forall\, n \epsilon \mathbb{N}\ ^5.$$

2.1.2.1 Ejemplo

Retomando el **Ejemplo 2.1.1.1** :

Sea $f_n : [0, \infty[\to \mathbb{R}$, definida por $f_n(x) = \dfrac{x}{1+nx}$ que converge puntualmente a $f(x) = 0$ (función nula). Demostraremos que converge uniformemente.

Demostración:

De acuerdo a la definición de convergencia uniforme, debemos probar que:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists v \in \mathbb{N} \text{ tal que } n \geq v \Longrightarrow \left| \frac{x}{1+nx} - 0 \right| < \varepsilon$$

Para ésto, recurrimos a la definición, es decir, debemos mostrar que:

$$\left| \frac{x}{1+nx} \right| < \varepsilon \ \forall x \in [0, \infty[$$

[4] Sea $\{s_n\}$ una sucesión. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función estrictamente creciente. Se llama subsucesión de $\{s_n\}$ generada por f, a la sucesión $\{u_n\}$ definida por:
$u_n = s_{f(n)}, \qquad \{u_n\} \subseteq \{s_n\}$

[5] Burgos. J. (2007). Cálculo Infinitesimal de una Variable. Editor: Carmelo Sánchez González. Pp 525

Si $x = 0$ esta última desigualdad es verdad.

Ahora sea $x > 0 \Longrightarrow nx > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$

$\Longrightarrow 0 < nx$

$\Longrightarrow 0 < nx < nx + 1 \ /()^{-1} \forall \in \mathbb{N}$

$\Longrightarrow \dfrac{1}{nx} > \dfrac{1}{nx+1} \ / \cdot x$, pues $x > 0$

$\Longrightarrow \dfrac{x}{nx} > \dfrac{x}{nx+1}$

$\Longrightarrow \dfrac{1}{n} > \dfrac{x}{nx+1}$

Recurriendo a la propiedad Arquimediana[6], tenemos:

$\Longrightarrow \varepsilon > \dfrac{1}{n} > \dfrac{x}{nx+1}$

$\Longrightarrow \varepsilon > \dfrac{x}{nx+1}$

Por lo tanto, $\left\{ \dfrac{x}{nx+1} \right\} \overset{c.u.}{\to} 0.$

[6]Propiedad Arquimediana:

Teorema: los números naturales no están acotados superiormente.

Demostración:

Supongamos que $\mathbb{N}$ está acotado superiormente, entonces existe el supremo de $\mathbb{N}$ que denotaremos por $\sigma = sup\,\mathbb{N}$.

Sea n cualquier número natural, es evidente que $n+1 \in \mathbb{N}$ y por tanto $n + 1 \leq \sigma$. Sin embargo, $n \leq \sigma - 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, lo que quiere decir que $\sigma - 1$ es una cota superior de $\mathbb{N}$ y $\sigma - 1 \leq \sigma$, lo que es una contradicción, pues σ es la menor cota superior de $\mathbb{N}$.

Ahora bien, tomemos el número real positivo $\dfrac{1}{\varepsilon}$, $(\varepsilon > 0)$.

Como $\mathbb{N}$ no está acotado superiormente, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que:

$\dfrac{1}{\varepsilon} < n_0$. Al multiplicar por $\varepsilon > 0$, resulta

$1 < n_o\varepsilon$. Al despejar ε, se obtiene:

$\dfrac{1}{n_0} < \varepsilon$.

Y así para todo $n \geq n_0$ se cumple que:

$\dfrac{1}{n} < \varepsilon$

2.1.2.2 Ejemplo

Retomando el **Ejemplo (2.1.1.2):**

Sea $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, definida por $f_n(x) = x^n$.

En la figura **2.1.1.2** se han representado algunos términos de la sucesión.

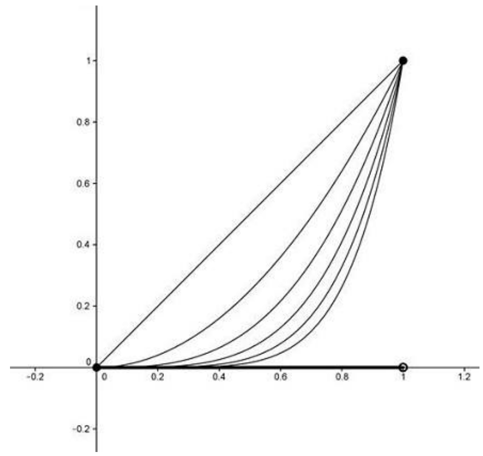

Figura 2.1.1.2

Demostración:

En base a la figura **2.1.1.2** sospechamos que la sucesión de funciones no es uniformemente convergente en $[0,1]$, por lo que recurrimos a la "condición de no convergencia uniforme".

Debemos probar $\exists \varepsilon_0 > 0$, una sucesión $\{x_n\}$ de puntos de S y una subsucesión tales que:

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| \geq \varepsilon_o$$

Dado $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{2}$ y la sucesión $x_n = \dfrac{1}{\sqrt[n]{2}}$ son tales que $0 < x_n < 1$

En efecto

$$\left| f_n\left(\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\right) - f\left(\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\right) \right| = \left| \left(\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\right)^n - 0 \right|$$

$$= \left| \frac{1}{2} - 0 \right|$$

$$= \left| \frac{1}{2} \right|$$

$$= \frac{1}{2}$$

Por lo tanto, $\{x^n\}$ no converge uniformemente en $[0,1]$.

Observación: si $\{f_n\}$ converge uniformemente en S hacia f, entonces $\{f_n\}$ también converge puntualmente en S, pero no siempre se cumple el recíproco, como se ha visto en el ejemplo **2.1.1.2.**

2.1.2.3 Caracterizaciones de la Convergencia Uniforme

Caracterización de Cauchy

La sucesión $\{f_n\}$ converge uniformemente en S hacia $f : S \to \mathbb{R}$ (función límite) si, y sólo si, para cada $\varepsilon > 0$ existe un $v \in \mathbb{N}$ tal que:

$$p, q \geq v \Rightarrow |f_p(x) - f_q(x)| < \varepsilon,\ \forall x \in S$$ [7].

Observación: Una sucesión de Cauchy, es una sucesión tal que para cualquier distancia dada, por muy pequeña que sea, siempre se puede encontrar un término de la sucesión tal que la distancia entre dos términos cualesquiera posteriores es menor que la dada.

Demostración

Primero, probaremos que la sucesión $\{f_n\}$ converge uniformemente, entonces la sucesión es de Cauchy.

Sabemos que dado $\varepsilon_0 > 0$, en este caso $\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon}{2}$ existe $v \in \mathbb{N} \,/\, |f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ para todo $x \in S$ y todo $n \geq v$. Por lo tanto, para todo $x \in S$, se verifica que:

$p, q \geq v \Rightarrow |f_p(x) - f_q(x)| = |f_p(x) - f(x) + f(x) - f_q(x)|$

$\leq |f_p(x) - f(x)| + |f(x) - f_q(x)|$

$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

Por lo tanto $\{f_n\}$ es una sucesión de Cauchy.

Ahora, mostraremos que $\{f_n\}$ es una sucesión de Cauchy, entonces la sucesión $\{f_n\}$ converge uniformemente.

Sabemos que

$p, q \geq v \Rightarrow |f_p(x) - f_q(x)| < \varepsilon, \forall x \in S$ y $\forall\, p, q \geq v$, así la sucesión $\{f_n(x)\}$ es de Cauchy en $\mathbb{R}$.

Lo que se interpreta como que los términos están cada vez más juntos unos de los otros, por tanto tiene límite, cuando $n \to \infty$ al que llamaremos $f(x)$. Si bien la sucesión converge, aún falta demostrar que la convergencia es uniforme, para esto:

Dado $\varepsilon > 0$, existe $v \in \mathbb{N}$ tal que $|f_n(x) - f_{n+h}(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ para cualquier $x \in S$, $n \geq v$

[7] Burgos. J. (2007). Cálculo Infinitesimal de una Variable. Editor: Carmelo Sánchez González. Pp 528

y $h > 0$
Haciendo que $h \to \infty$, nos encontramos con que, para $x \in S$ y $n \geq v$, es:
$\varepsilon > \frac{\varepsilon}{2} \geq \lim\limits_{h\to\infty} |f_n(x) - f_{n+h}(x)| = |f_n(x) - f(x)|$.
Lo que demuestra que $\{f_n\} \stackrel{c.u}{\to} f\, en\, S$.

Caracterización Del Supremo

La sucesión $\{f_n\}$ converge uniformemente en S hacia una función $f : S \to \mathbb{R}$ si y sólo si:

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = 0, \text{ siendo } \sigma_n = sup\{|f(x) - f_n(x)|\,/x \in S\}$$ [8].

Demostración:
Probaremos primero que: la sucesión $\{f_n\}$ converge uniformemente en S hacia f, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = 0$.
Como $\{f_n\}$ converge uniformemente, considerando $\frac{\varepsilon}{2}$ entonces se cumple que:
$\forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}/\, |f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2}\ \forall n \geq N$ y $x \in S$.
Sea $\sigma_n = sup\,|f(x) - f_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$, luego $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = 0$.
Ahora, mostraremos que:
$\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = 0$, entonces la sucesión $\{f_n\}$ converge uniformemente en S:
Como $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = 0$ entonces $\sigma_n = sup\{|f(x) - f_n(x)|\,/x \in S\} \leq 0$, además, σ_n es la menor de las cotas superiores entonces:
$|f(x) - f_n(x)| \leq \sigma_n \leq 0 < \varepsilon$
Así, $\{f_n\}$ converge uniformemente en S.

[8] Burgos. J. (2007). Cálculo Infinitesimal de una Variable. Editor: Carmelo Sánchez González. Pp 528

2.1.2.4 Ejemplo

Sea $f_n(x) = \dfrac{nx^3}{1+nx}$, con $x \in [1,2]$ y su función límite puntual $f(x) = x^2$. Demostraremos que $\{f_n\}$ converge uniformemente en $[1,2]$.

Solución:

Para verificar que la sucesión $f_n(x) = \dfrac{nx^3}{1+nx}$ converge uniformemente, utilizaremos la caracterización del Supremo para sucesiones.

En primer lugar, $\sigma_n = sup\{|f_n(x) - f(x)| / x \in [1,2]\}$, reemplazando obtenemos,

$$\begin{aligned}
\sigma_n &= sup\left\{\left|\frac{nx^3}{1+nx} - x^2\right| / x \in [1,2]\right\}\\
&= sup\left\{\left|-\frac{x^2}{1+nx}\right| / x \in [1,2]\right\}\\
&= sup\left\{\frac{x^2}{1+nx} / x \in [1,2]\right\}
\end{aligned}$$

como $x \in [1,2] \Longrightarrow 1 \leq x \leq 2$:

$\Longrightarrow 1 \leq x \leq 2 \ / \cdot n \in \mathbb{N}$

$\Longrightarrow n \leq nx \leq 2n \ / + (1)$

$\Longrightarrow 1+n \leq 1+nx \leq 1+2n \ /()^{-1}$

$\Longrightarrow \dfrac{1}{1+2n} \leq \dfrac{1}{1+nx} \leq \dfrac{1}{1+n} \ / \cdot x^2$

$\Longrightarrow \dfrac{x^2}{1+2n} \leq \dfrac{x^2}{1+nx} \leq \dfrac{x^2}{1+n}$

Si $1 \leq x \leq 2$ entonces $1 \leq x^2 \leq 4$, luego :

$$\frac{1}{1+2n} \leq \frac{x^2}{1+2n} \leq \frac{x^2}{1+nx} \leq \frac{x^2}{1+n} \leq \frac{4}{1+n}$$

Como σ_n es la menor de las cotas superiores, tenemos que $\sigma_n = \dfrac{4}{1+n}$. Ahora aplicando limite, obtenemos:

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} \frac{4}{1+n} = 0$$

Por lo tanto, como $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = 0$, la sucesión $\left\{\dfrac{nx^3}{1+nx}\right\} \overset{c.u.}{\to} x^2$ en $[1,2]$ tal como se muestra en la figura **2.1.2.4**.

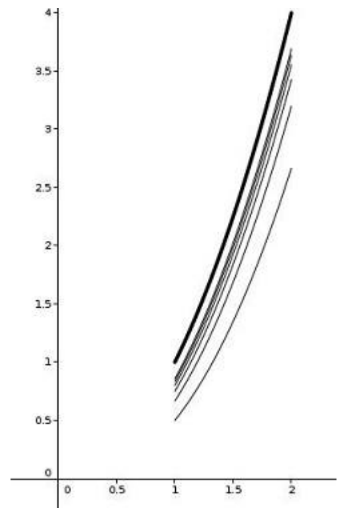

Figura 2.1.2.4

2.2 Convergencia de una Serie de Funciones

Se define una serie de funciones de la forma

Definición: *A partir de la sucesión* $\{f_n\}$ *se pueden obtener las sumas parciales de sus términos, vale decir:*

$$s_1 = f_1 \;, s_2 = f_1 + f_2 \;, s_3 = f_1 + f_2 + f_3, ..., s_n = f_1 + f_2 + f_3 + ... + f_n,$$

donde $s_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f_k$, *se denomina suma parcial de los n primeros términos y* $\{s_n\}$ *es la llamada serie de funciones, que se denota por* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$[9].

2.2.1 Convergencia Puntual

Definición: *Se dice que una serie* $\sum f_n$ *converge puntualmente en* S *hacia la función* $s : S \to \mathbb{R}$, *que se denomina función suma y se denota* $s(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$; *esto es, si para cada* $x \in S$ *y cada* $\varepsilon > 0$ *existe un* $v \in \mathbb{N}$ *(que depende de* x *y* ε*) tal que* $|s(x) - s_n(x)| < \varepsilon$ *para todo* $n \geq v$[10].

2.2.2 Convergencia Uniforme

Definición: *Se dice que una serie de funciones* $\sum f_n$ *converge uniformemente en* S *hacia una función* $s : S \to \mathbb{R}$ *(función suma) si su sucesión de sumas parciales* $\{s_n\}$ *converge uniformemente en* S *hacia* s, *es decir, si para cada* $\varepsilon > 0$ *existe un* $v \in \mathbb{N}$ *(que depende solo de* ε*) tal que:*

$$|s_n(x) - s(x)| = |r_n(x)| < \varepsilon, \forall x \in S\, y\, \forall n \geq \mathbb{N}.$$

Aquí, $r_n(x)$ *es el resto n-ésimo de la serie* $\sum f_n(x)$, *para cada* $x \in S$[11].

Además, si $\sum f_n$ converge uniformemente, también converge puntualmente en S, sin embargo no siempre se cumple el recíproco.

[9] www.uam.es/personal_pdi/ciencias/fchamizo/asignaturas/calc1inf1011/apjperez/calculo_cap10.pdf. Recuperado en septiembre 28, 2014.

[10] Burgos. J. (2007). Cálculo Infinitesimal de una Variable. Editor: Carmelo Sánchez González. Pp 522

[11] Burgos. J. (2007). Cálculo Infinitesimal de una Variable. Editor: Carmelo Sánchez González. Pp 525

Condición de No Convergencia Uniforme

También se establece que una serie de funciones no converge uniformemente si cumple la "condición de no convergencia uniforme".

La serie $\sum f_n$ no converge uniformemente en S hacia la función $s : S \to \mathbb{R}$ si, y sólo si, existe un $\varepsilon_0 > 0$, existe una sucesión $\{x_n\}$ de puntos de S y existe una subsucesión de $\{s_n\}$ tales que:

$$|s_n(x_n) - s(x_n)| \geq \varepsilon_0 \ , \ \forall n \in \mathbb{N}^{12}.$$

2.2.2.1 Caracterizaciones de la Convergencia Uniforme

Caracterización de Cauchy

La serie $\sum f_n$ converge uniformemente en S (hacia su suma) sí y solo sí, para cada $\varepsilon > 0$ existe un $v \in \mathbb{N}$ tal que:

$$|f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + ... + f_{n+h}(x)| < \varepsilon, \ \forall x \in S, \forall n \geq v, \forall h > 0^{13}.$$

Demostración:

Primero, mostraremos que la $\sum f_n$ converge uniformemente, entonces la $\sum f_n$ es de Cauchy.

Como $\sum f_n$ converge uniformemente, entonces $\forall x \in S$, $n \geq v$ se cumple que:

$|s_n(x) - s(x)| < \varepsilon$

Ahora fijaremos n de tal forma que $m > n$ y $m = n + h$.

$|s_m(x) - s_n(x)| = \left| \sum_{k=1}^{n+h} f_k(x) - \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \right|$

$= |f_1(x) + f_2(x) + ... + f_n(x) + f_{n+1}(x) + ... + f_{n+h}(x) - f_1(x) - f_2(x) - ... - f_n(x)|$

$= |f_{n+1}(x) + ... + f_{n+h}(x)| < \varepsilon$

De esta forma concluimos que $\sum f_n$ es de Cauchy.

Ahora, probaremos que la $\sum f_n$ es de Cauchy, entonces $\sum f_n$ converge uniformemente.

Como ya demostramos que $\sum f_n$ es de Cauchy, entonces $\sum f_n$ tiene un límite al que llamamos s, por lo tanto converge, pero debemos probar que su convergencia es uniforme:

Dado $\varepsilon > 0, \exists v \in \mathbb{N} / |s_n(x) - s_{n+h}(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2} \ \ \forall x \in S, \ n \geq v, \ h > 0$

[12] Burgos. J. (2007). Cálculo Infinitesimal de una Variable. Editor: Carmelo Sánchez González. Pp 525

[13] Burgos. J. (2007). Cálculo Infinitesimal de una Variable. Editor: Carmelo Sánchez González. Pp 528

Ahora bien, haciendo que $h \to \infty$, tenemos que:
$\varepsilon > \frac{\varepsilon}{2} \geq \lim\limits_{h\to\infty} |s_n(x) - s_{n+h}(x)| = |s_n(x) - s(x)|$
Por lo tanto probamos que la serie $\sum f_n$ converge uniformemente.

Caracterización del Supremo

La serie $\sum f_n$ converge uniformemente en S hacia su suma sí y sólo sí, (llamando s_n y r_n a la suma parcial y resto n-ésimos, respectivamente).

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = 0, \textit{ siendo } \sigma_n = sup\{|s(x) - s_n(x)| = |r_n(x)| / x \in S\}$$[14].

Demostración:
Mostraremos primero que la $\sum f_n$ converge uniformemente en S hacia su suma $s : S \to \mathbb{R}$,
entonces $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = 0$, siendo $\sigma_n = sup\{|s(x) - s_n(x)| = |r_n(x)| / x \in S\}$.
Como $\sum f_n$ converge uniformemente, entonces:
$\forall \varepsilon > 0, \exists\, v \in \mathbb{N} / |s(x) - s_n(x)| = |r_n(x)| < \varepsilon$.
Sabemos que $\sigma_n = sup\{|s(x) - s_n(x)| = |r_n(x)| / x \in S\}$, entonces, por definición de supremo, se cumple que:
$|s(x) - s_n(x)| = |r_n(x)| \leq \sigma_n$
Ahora bien, como $r_n(x)$ es la diferencia (y la más pequeña) y además es menor que ε entonces se cumple que:
$|r_n(x)| \leq \sigma_n < \varepsilon$
lo que significa que:
$\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = 0$
Ahora, probaremos que $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = 0$, entonces la serie $\sum f_n$converge uniformemente en S.
Como $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = 0$, sabemos que $\sigma_n = sup\{|s(x) - s_n(x)| = |r_n(x)| / x \in S\}$ y como σ_n es la menor de las cotas superiores tenemos que:
$|s(x) - s_n(x)| = |r_n(x)| \leq \sigma_n \leq 0 < \varepsilon$
Por lo tanto, la serie $\sum f_n$ converge uniformemente en S

[14] Burgos. J. (2007). Cálculo Infinitesimal de una Variable. Editor: Carmelo Sánchez González. Pp 528

2.2.2.2 Criterios de Convergencia

Criterio de Weierstrass

Sea $\sum f_n$ una serie de funciones $f_n : S \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y sea $\sum k_n$ una serie de términos reales positivos. Si $|f_n(x)| \leq k_n$ para todo $x \in S$ y cada $n \in \mathbb{N}$ (en cuyo caso se dice que $\sum k_n$ es mayorante de $\sum f_n$ en S) y si $\sum k_n$ es convergente, entonces la serie $\sum f_n$ es uniformemente convergente en S[15].

Demostración:

Sea $\sum k_n$una serie numérica convergente de términos positivos. De acuerdo al criterio general de convergencia de Cauchy para series numéricas, tenemos que:

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists v \in \mathbb{N} / \forall q, p > v \text{ se cumple que } |k_{p+1} + k_{p+2} + ... + k_q| < \varepsilon$$

O más bien

$$\sum_{n=p+1}^{q} k_n < \varepsilon$$

Ahora a partir de la caracterización de Cauchy (véase 2.2.2.1) tenemos que:

$$|f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + ... + f_{n+h}(x)| \leq |f_{n+1}(x)| + |f_{n+2}(x)| + ... + |f_{n+h}(x)| \leq k_{p+1} + k_{p+2} + ... + k_q < \varepsilon \; \forall x \in S.$$

Es decir,

$|f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + ... + f_{n+h}(x)| < \varepsilon$, la serie es de Cauchy y por lo tanto converge uniformemente en S.

$$|f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + ... + f_{n+h}(x)| \leq |f_{n+1}(x)| + |f_{n+2}(x)| + ... + |f_{n+h}(x)| \leq \sum_{n=p+1}^{q} k_n < \varepsilon.$$

De esta manera concluimos que la serie $\sum f_n$ converge uniformemente en S.

[15]Burgos. J. (2007). Cálculo Infinitesimal de una Variable. Editor: Carmelo Sánchez González. Pp 531

Generalización del Criterio de Weierstrass

Sean $\sum f_n$ y $\sum \varphi_n$ dos series de funciones, reales y definidas en $S \subset \mathbb{R}$. Si $|f_n(x)| \leq \varphi_n(x)$ para todo $x \in C$ y cada $n \in \mathbb{N}$ (en cuyo caso se dice que $\sum \varphi_n$ es serie mayorante de $\sum f_n$ en S) y si $\sum \varphi_n$ es uniformemente convergente en S, entonces $\sum f_n$ también es uniformemente convergente en S[16].

Demostración:

Como $\sum \varphi_n$ converge uniformemente en S, de acuerdo a la caracterización de Cauchy para la convergencia uniforme (véase 2.2.2.1).

$$\forall \varepsilon > 0, \exists v \in \mathbb{N} / \varphi_{n+1}(x) + \varphi_{n+2}(x) + ... + \varphi_{n+h}(x) < \varepsilon, \quad h > 0,\ \varphi_n(x) \geq 0,\ \forall x \in S \text{ y } \forall n \geq v$$

Ahora para verificar que $|f_n(x)| \leq \varphi_n(x)$

$$|f_{n+1}(x) + ... + f_{n+h}(x)| \leq |f_{n+1}(x)| + ... + |f_{n+h}(x)| \leq \varphi_{n+1}(x) + ... + \varphi_{n+h}(x) < \varepsilon$$

Es decir, de acuerdo a la caracterización de Cauchy tenemos que $\sum f_n$ converge uniformemente en S.

Ejemplo:

Sea $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n}$ con $x \in [-1, 1]$. Demostraremos que la serie converge uniformemente en $[-1, 1]$.

Solución:

Para mostrar la convergencia uniforme de esta serie de funciones utilizaremos el criterio de Weierstrass:

Sea la serie numérica $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$, analizaremos su convergencia de acuerdo al criterio de series geométricas. De acuerdo a esto, la serie numérica es convergente y su suma es 1.[17]

Por el criterio de Weierstrass, se cumple que:

$$0 \leq \left|\left(\frac{x}{2}\right)^n\right| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \text{ pues } x \in [-1, 1]$$

[16] Burgos. J. (2007). Cálculo Infinitesimal de una Variable. Editor: Carmelo Sánchez González. Pp 532

[17] Dada la siguiente serie :$\sum ar^n$
i) si $r > 1$, entonces la serie diverge
ii) si $|r| < 1$, entonces la serie converge y su suma está dada por $\frac{a}{1-r}$

Y como $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ converge, entonces se prueba que la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^n}$ converge uniformemente en $[-1,1]$. Como se puede apreciar en la gráfica.

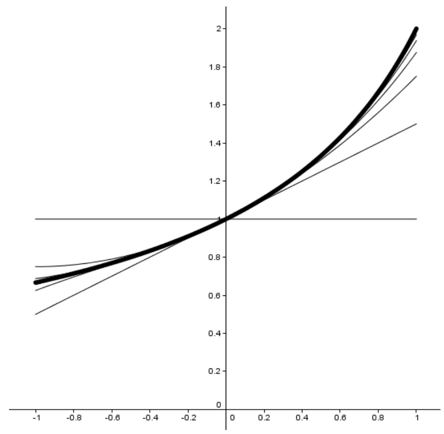

Figura 2.2.2.2.1

Además dado que converge uniformemente también se prueba que converge puntualmente.

Criterio de Dirichlet

Se considera una serie de funciones $\sum f_n$ y una sucesión de funciones $\{\varphi_n\}$ donde f_n y φ_n son funciones de $S \subset \mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Se verifica que: si la sucesión $\{\varphi_n\}$, converge uniformemente en S hacia la función nula, si la sucesión $\{\varphi_n(x)\}$ es monótona para cada $x \in S$ y si la sucesión $\{s_n\}$ de las sumas parciales de la serie $\sum f_n$ está uniformemente acotada[18] *en S, entonces la serie $\sum f_n\varphi_n$ converge uniformemente en S*[19]*.*

Demostración:

Se recurre a la caracterización de Cauchy de convergencia uniforme (véase 2.2.2.1): sea $K > 0$ una cota de todas las sumas parciales s_n en S, de forma que $|s_n(x)| \leq K$, $\forall x \in S$ y $n \in \mathbb{N}$, y como la sucesión $\{\varphi_n(x)\}$ es monótona, se puede deducir que:

$$|f_{n+1}(x) + ... + f_{n+p}(x)| = |s_{n+p}(x) - s_n(x)| \leq |s_{n+p}(x)| + |s_n(x)| \leq 2K$$

[18]Se dice que una sucesión de funciones está uniformemente acotada en S si todas sus funciones están acotadas en S y admiten una misma cota K.

[19]Burgos. J. (2007). Cálculo Infinitesimal de una Variable. Editor: Carmelo Sánchez González. Pp 533

Luego, se recurre a la desigualdad de Abel[20] , resultando:

$$|f_{n+1}(x)\varphi_{n+1}(x)+...+f_{n+p}(x)\varphi_{n+p}(x)| \leq 2K\left(|\varphi_{n+1}(x)|+2\,|\varphi_{n+p}(x)|\right) \tag{1}$$

Además si se considera un ε_0 cualquiera, y como $\{\varphi_n\}$ converge uniformemente en S hacia la función nula, existe un $v \in \mathbb{N}$ tal que se cumpla:

$$|\varphi_n(x)| < \frac{\varepsilon}{6K}\ \forall n \geq v,\ \forall x \in S.$$

Entonces:$\forall x \in S$

$$2K\left(|\varphi_{n+1}(x)|+2\,|\varphi_{n+p}(x)|\right) < 2K\left(\frac{\varepsilon}{6K}+2\frac{\varepsilon}{6K}\right)=\varepsilon \tag{2}$$

Finalmente, de (1) y de (2) se deduce que:

$$|f_{n+1}(x)\varphi_{n+1}(x)+...+f_{n+p}(x)\varphi_{n+p}(x)| < \varepsilon,\ \forall n \geq v,\ \forall p > 0,\ \forall x \in S.$$

[20]**Desigualdad de Abel:**
Dadas dos sucesiones de números reales $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$. Si la sucesión $\{a_n\}$ es monótona (creciente o decreciente) y la serie $\sum b_n$ tiene sus sumas parciales acotadas por $k>0$ (esto es, $|b_1+...+b_n| \leq k$, para todo $n \in \mathbb{N}$ es:

$$|a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n| \leq k\left(|a_1|+2\,|a_n|\right)$$

Demostración:
En primer lugar llamaremos σ_n a la suma n-ésima de la serie $\sum b_n$, esto es :

$$\sigma_n = b_1+b_2+...+b_n$$

A partir de esto obtenemos lo siguiente:

$$\sigma_1 = b_1$$

$$\sigma_2 = b_1+b_2 \Longrightarrow \sigma_2-\sigma_1 = b_2$$

$$\vdots$$

$$\sigma_n = b_1+b_2+...+b_n \Longrightarrow \sigma_n-\sigma_{n-1} = b_n$$

Luego tenemos que:

$$a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+...+a_nb_n = a_1\sigma_1+a_2(\sigma_2-\sigma_1)+a_3(\sigma_3-\sigma_2)+...+a_n(\sigma_n-\sigma_{n-1})$$
$$= a_1\sigma_1+a_2\sigma_2-a_2\sigma_1+a_3\sigma_3-a_3\sigma_2+...+a_n\sigma_n-a_n\sigma_{n-1}$$
$$= \sigma_1(a_1-a_2)+\sigma_2(a_2-a_3)+...+\sigma_{n-1}(a_{n-1}-a_n)+\sigma_na_n$$

Recurriendo a la desigualdad triángular, tenemos:
$|a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n| \leq |a_1-a_2|\,|\sigma_1|+|a_2-a_3|\,|\sigma_2| + ... + |a_{n-1}-a_n|\,|\sigma_{n-1}| + |a_n|\,|\sigma_n| \leq [|a_1-a_2|+|a_2-a_3|+...+|a_{n-1}-a_n|]\,k+|a_n|\,k$ (Pues las sumas parciales de $\sum b_n$estan acotadas).
Luego como la sucesión $\{a_n\}$ es monótona, ocurre que todas las diferencias $a_i - a_{i+1}$ tienen el mismo signo, es decir:

$$|a_i-a_{i+1}| = \begin{cases} a_i-a_{1+1} & ;\ si\ \{a_n\}\ es\, decreciente \\ a_{i+1}-a_i & ;\ si\ \{a_n\}\ es\, creciente \end{cases}$$

Eliminandose de esta manera términos de la desigualdad, quedando solo el primer y último término, es decir: $|a_1-a_n|$.

$$|a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n| \leq |a_1-a_n|\,k+|a_n|\,k \leq (|a_1|+|-a_n|)\,k+|a_n|\,k \leq k\left(|a_1|+2\,|a_n|\right)$$

Demostrando que $\sum f_n\varphi_n$ converge uniformemente en S.

Consecuencia del Criterio de Dirichlet

Un caso particular de este criterio ocurre cuando se considera la sucesión $\{a_n\}$ *monótona de números reales con* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ *y si* $\sum f_n$ *es una serie de funciones, de* $S \subset \mathbb{R}$ *en* $\mathbb{R}$*, que tiene su sucesión* $\{s_n\}$ *de sumas parciales uniformemente acotadas (cota común) en* S*, entonces la serie de funciones* $\sum a_n f_n$ *converge uniformemente en* S*.*

Siguiendo la demostración anterior, basta considerar φ_n *una función constante* $x \to \varphi_n(x) = a_n$*, entonces* $\sum f_n\varphi_n = \sum a_n f_n$*, que es uniformemente convergente en* S[21]*.*

Criterio de Abel

Se considera una serie de funciones $\sum f_n$ *y una sucesión de funciones* $\{\varphi_n\}$ *donde* f_n *y* φ_n *son funciones de* $S \subset \mathbb{R}$ *en* $\mathbb{R}$*. Se verifica que: si la sucesión* $\{\varphi_n\}$ *está uniformemente acotada en* S*, si la sucesión* $\{\varphi_n(x)\}$ *es monótona para cada* $x \in S$ *y si la serie* $\sum f_n$ *es uniformemente convergente en* S*, entonces la serie* $\sum f_n\varphi_n$ *converge uniformemente en* S[22]*.*

Demostración:

Como φ_n esta uniformemente acotada llamaremos $K > 0$ a una cota de todas las funciones, tal que $|\varphi_n(x)| \leq K$ para $x \in S$. Además como la serie $\sum f_n$ converge uniformemente en S a través de la caracterización de Cauchy (véase **2.2.2.1**), tenemos que:

$$|f_{n+1}(x) + ... + f_{n+p}(x)| < \frac{\varepsilon}{3K}\ , \forall n \geq v,\ p > 0,\ \forall x \in S^{23}.$$

Anteriormente la monotonía de $\{\varphi_n(x)\}$, para todo $x \in S$, nos permite recurrir a la desigualdad de Abel, de donde se deduce que:

$$|f_{n+1}(x)\varphi_{n+1}(x) + ... + f_{n+p}(x)\varphi_{n+p}(x)| < \frac{\varepsilon}{3K}\left(|\varphi_{n+1}(x)| + 2\,|\varphi_{n+p}(x)|\right)$$

Dado que $|\varphi_{n+p}(x)| < K$, por lo tanto podemos plantear lo siguiente:

[21] Burgos. J. (2007). Cálculo Infinitesimal de una Variable. Editor: Carmelo Sánchez González. Pp 534
[22] Burgos. J. (2007). Cálculo Infinitesimal de una Variable. Editor: Carmelo Sánchez González. Pp 533
[23] Burgos. J. (2007). Cálculo Infinitesimal de una Variable. Editor: Carmelo Sánchez González. Pp 534

$$|f_{n+1}(x)\varphi_{n+1}(x) + ... + f_{n+p}(x)\varphi_{n+p}(x)| < \frac{\varepsilon}{3K} \cdot 3K = \varepsilon,\ \forall n \geq \upsilon,\ \forall p > 0,\ \forall x \epsilon S$$

Afirmando de esta manera que la serie $\sum f_n\varphi_n$ converge uniformemente en S.

Consecuencia del Criterio de Abel

Si $\sum k_n$ es una serie convergente de números reales, si $\{\varphi_n\}$ es una sucesión de funciones, de $S \subset \mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, que está uniformemente acotada (es decir, si las funciones φ_n tienen una cota común) en S y si la sucesión $\{\varphi_n(x)\}$ es monótona para cada $x \in S$, entonces la serie de funciones $\sum k_n\varphi_n$ converge uniformemente en S[24].

Demostración:

Debemos tener en consideración que el criterio de Abel trata a f_n como una función cualquiera, en el caso particular de Abel se considera a f_n como una función constante.

Por lo tanto tenemos:

Sea f_n una función constante, donde $x \to f_n(x) = k_n\ \forall n \in \mathbb{N}$. En este caso se trabaja con la serie convergente de números reales $\sum k_n$.

Es evidente que para $\{\varphi_n\}$ y $\sum f_n$ se cumplen condiciones ya vistas del criterio de Abel, luego tenemos que:

$$\sum f_n\varphi_n = \sum k_n\varphi_n,$$

por lo tanto podemos afirmar que $\sum k_n\varphi_n$ converge uniformemente en S.

[24]Burgos. J. (2007). Cálculo Infinitesimal de una Variable. Editor: Carmelo Sánchez González. Pp 535

Ejemplo

Analice la convergencia puntual y uniforme de la serie de funciones:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x}{(x+1)^n} \ , \ x \in [1,2]$$

Desarrollo

Analizaremos en primer lugar la convergencia puntual de la serie, para lo cual usaremos el criterio de convergencia para series geométricas, esto es si $|r| < 1$, entonces $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r}$.

Puesto que la serie depende sólo de n, la variable x se considera como una constante, resultando:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x}{(x+1)^n} = x\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(x+1)^n} \tag{1}$$

Donde $a = 1$ y $r = \dfrac{1}{(x+1)}$, entonces mostraremos que $\left|\dfrac{1}{(x+1)}\right| < 1, \forall x \in [1,2]$:
Como $x \in [1,2] \Longrightarrow 1 \leq x \leq 2$
$\Longrightarrow 1 \leq x \leq 2 \ / + (1)$
$\Longrightarrow 2 \leq x+1 \leq 3 \ /()^{-1}$
$\Longrightarrow \dfrac{1}{2} \geq \dfrac{1}{x+1} \geq \dfrac{1}{3}$
$\Longrightarrow -1 < \dfrac{1}{3} \leq \dfrac{1}{x+1} \leq \dfrac{1}{2} < 1$
$\Longrightarrow -1 < \dfrac{1}{x+1} < 1$, por definición de valor absoluto
$\left|\dfrac{1}{(x+1)}\right| < 1$, como debíamos probar.

Luego la serie es convergente y su suma es:

$$s(x) = \frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-\dfrac{1}{x+1}} = \frac{1}{\dfrac{x+1-1}{x+1}} = \frac{1}{\dfrac{x}{x+1}} = \frac{x+1}{x}$$

De (1) se deduce que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x}{(x+1)^n} = x \cdot \frac{x+1}{x} = x+1$$

Por lo tanto la serie converge puntualmente a $s(x) = x+1$, $\forall x \in [1,2]$.

Ahora probaremos la convergencia uniforme de la serie, para esto debemos encontrar la suma parcial, sabemos que:

$$s_0 = x$$

$$s_1 = x + \frac{x}{x+1}$$
$$s_2 = x + \frac{x}{x+1} + \frac{x}{(x+1)^2}$$
$$\vdots$$
$$s_n = x + \frac{x}{(x+1)} + \frac{x}{(x+1)^2} + ... + \frac{x}{(x+1)^n} \ /\frac{1}{(x+1)} \tag{1}$$
$$\frac{1}{(x+1)}s_n = \frac{x}{x+1} + \frac{x}{(x+1)^2} + \frac{x}{(x+1)^3} + \frac{x}{(x+1)^4} + ... + \frac{x}{(x+1)^{n+1}} \tag{2}$$

Hacemos la sustracción entre (1) y (2), resultando:

$$s_n - \frac{1}{(x+1)}s_n = x + \frac{x}{(x+1)} + ... + \frac{x}{(x+1)^n} - \frac{x}{x+1} - ... - \frac{x}{(x+1)^n} - \frac{x}{(x+1)^{n+1}}$$

Factorizamos en el primer miembro de la ecuación, mientras que en el segundo se observa que algunos términos se cancelan:

$$s_n\left(1 - \frac{1}{(x+1)}\right) = x - \frac{x}{(x+1)^{n+1}}$$
$$s_n\left(1 - \frac{1}{x+1}\right) = x\left(1 - \frac{1}{(x+1)^{n+1}}\right)$$

$$s_n = \frac{x\left(1 - \frac{1}{(x+1)^{n+1}}\right)}{\left(1 - \frac{1}{x+1}\right)}$$

$$s_n = \frac{x\left(\frac{(x+1)^{n+1} - 1}{(x+1)^{n+1}}\right)}{\left(\frac{x+1-1}{x+1}\right)}$$

$$s_n = \frac{x\left(\dfrac{(x+1)^{n+1}-1}{(x+1)^{n+1}}\right)}{\left(\dfrac{x}{x+1}\right)}$$

$$s_n = x \cdot \frac{(x+1)^{n+1}-1}{(x+1)^{n+1}} \cdot \frac{x+1}{x}$$

$$s_n = \frac{(x+1)^{n+1}-1}{(x+1)^n}$$

$$s_n = \frac{(x+1)^{n+1}}{(x+1)^n} - \frac{1}{(x+1)^n}$$

$$s_n = x+1-(x+1)^{-n}$$

Recurriendo a la caracterización del supremo, tenemos:

$$\sigma_n = sup\left\{|s(x)-s_n(x)|\,/x \in [1,2]\right\}$$
$$= sup\left\{|(x+1)-(x+1)+(x+1)^{-n}|\,/x \in [1,2]\right\}$$
$$= sup\left\{|(x+1)^{-n}|\,/x \in [1,2]\right\}$$

Como $x \in [1,2] \Longrightarrow 1 \leq x \leq 2$

$\Longrightarrow 1 \leq x \leq 2 \;/+1$

$\Longrightarrow 2 \leq x+1 \leq 3 \;/()^{-n}$

$\Longrightarrow \dfrac{1}{2^n} \geq \dfrac{1}{(x+1)^n} \geq \dfrac{1}{3^n}$

$\Longrightarrow \dfrac{1}{3^n} \leq \dfrac{1}{(x+1)^n} \leq \dfrac{1}{2^n}$

Entonces $\sigma_n = \dfrac{1}{2^n}$ aplicando límite para $n \to \infty$:

Como la función $y = \dfrac{1}{2^n}$ es decreciente $\forall n \in \mathbb{N}$, y tiene asíntota en $y=0$, se tiene que:

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$$

Por lo tanto $\sum f_n \overset{c.u.}{\to} s$, como se evidencia en la Figura **2.2.2.2.2**.

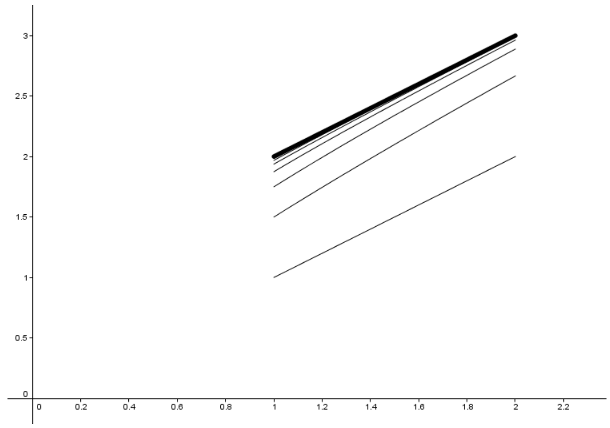

Figura 2.2.2.2.2

Capítulo 3

Acotación, Límite en un Punto, Continuidad, Integrabilidad y Derivabilidad

3.1 Función Límite de una Sucesión de Funciones

Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones, de $S \subset \mathbb{R}$. Se verifica que:

3.1.1 Acotación

Si cada una de las funciones f_n está acotada en S, siendo la misma cota para todas (que no depende de n) y si la sucesión $\{f_n\}$ converge uniformemente en S hacia su función límite $f : S \to \mathbb{R}$, entonces f está acotada en S[1].

Demostración:

Como $\{f_n\}$ converge uniformemente a f en S se cumple que:

$$\text{Para cada } \varepsilon > 0, \text{ existe un } v \in \mathbb{N} / |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

Tomando $\varepsilon = 1$ y un $n \geq v$, $x \in S$, tenemos:

$$|f(x) - f_v(x)| < 1 \qquad (*)$$

[1] Burgos. J. (2007). Cálculo Infinitesimal de una Variable. Editor: Carmelo Sánchez González. Pp 536

Por otro lado como f_v esta acotada (por hipótesis) al igual que los otros términos de la sucesión $\{f_n\}$, entonces, existe un $k > 0$ de tal forma que:

$$|f_v(x)| < k \ ,\forall x \in S \tag{$**$}$$

Verificando así que para todo $x \in S$, al sumar $(*)$ y $(**)$ tenemos que:

$$|f(x) - f_v(x)| + |f_v(x)| < k + 1[2].$$

Por desigualdad triangular se tiene que:

$$|f(x)| \leq |f(x) - f_v(x)| + |f_v(x)| < k + 1$$

De esta forma:

$$|f(x)| < k + 1$$

Entonces la función límite se encuentra acotada por un $(k + 1)$ en S.

3.1.2 Límite en un Punto

Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones reales $f_n : S \to \mathbb{R}$, que están definidas todas en, al menos, un conjunto $S \subset \mathbb{R}$, que es un entorno reducido de un punto $a \in \mathbb{R}$. Se verifica que:

Si la sucesión de funciones $\{f_n\}$ converge uniformemente en S hacia su función límite $f : S \to \mathbb{R}$ y si, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe el límite $l_n = \lim\limits_{x\to a} f_n(x)$, entonces existe el límite $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, que es igual al límite de la sucesión $\{l_n\}$, la cual es convergente, de modo que:

$$\lim_{x\to a}\left[\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\lim_{x\to a} f_n(x)\right][3].$$

[2]Burgos. J. (2007). Cálculo Infinitesimal de una Variable. Editor: Carmelo Sánchez González. Pp 536
[3]Burgos. J. (2007). Cálculo Infinitesimal de una Variable. Editor: Carmelo Sánchez González. Pp 537

Demostración:

Como $\{f_n\}$ converge uniformemente hacia f , $\forall\varepsilon > 0, \exists v \in \mathbb{N}/\ |f_p(x) - f_q(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ $\forall p \geq v, \forall q \geq v, \forall x \in S$

Aplicando límite con $x \to a$ tenemos que:

$$|l_p - l_q| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

Ésto se cumple, pues $\{f_n\}$ es convergente y tiene límite. A partir de lo anterior concluimos que la sucesión $\{l_n\}$ es convergente (pues es de Cauchy). Por lo tanto como la sucesión $\{l_n\}$ es convergente tiene un límite $l \in \mathbb{R}$.

Como ya probamos que $\{l_n\}$ tiene un límite (l) entonces debemos probar que $f(x)$ tiene límite y que es igual al límite de $\{l_n\}$.

Haciendo $x \to a$ y por desigualdad triángular se tiene:

$$\begin{gathered} |f(x) - l| = |f(x) - l + f_n(x) - f_n(x) + l_n - l_n| \leq \\ |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - l_n| + |l_n - l|\ \forall n \in \mathbb{N} \text{ y } x \in S. \end{gathered} \tag{$*$}$$

Ahora como $l = \lim\limits_{n\to\infty} l_n$ y como $\{f_n\}$ converge uniformemente, sea $\varepsilon > 0$ y $\exists \mu \in \mathbb{N}$ tal que:

$$|l_\mu - l| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ y } |f(x) - f_\mu(x)| < \frac{\varepsilon}{3}\ \forall x \in \mathbb{R}^4.$$

Además, l_μ es el límite de $f_\mu(x)$, entonces para $x \to a$, por definición de límite de funciones, tenemos:

$$\lim_{x\to a} f(x) = l \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0/0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

Tomando un $\dfrac{\varepsilon}{3}$ tenemos que:

$$|f_\mu(x) - l_\mu| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ siempre que } 0 < |x - a| < \delta$$

Finalmente tomando $n = \mu$ en la desigualdad $(*)$ tenemos que:

$$|f(x) - l| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - l_n| + |l_n - l|$$

[4] Burgos. J. (2007). Cálculo Infinitesimal de una Variable. Editor: Carmelo Sánchez González. Pp 538

$$|f(x)-l| \leq |f(x)-f_\mu(x)| + |f_\mu(x)-l_\mu| + |l_\mu - l|$$

$$|f(x)-l| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \text{ siempre que } 0 < |x-a| < \delta$$

De esta manera concluimos que l es el límite de $f(x)$ para $x \to a$.

3.1.2.1 Ejemplo:

Sea la sucesión de funciones $\{f_n\}$ definida en $]0,1]$ mediante:

$$f_n = \sqrt[n]{x}$$

¿Existe el límite en un punto de la función límite de la sucesión?

Desarrollo

Para este ejercicio estudiaremos la permutación de los límites para $0 < x \leq 1$ y $n \in \mathbb{N}$. En primer lugar:

$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x} = \lim\limits_{n\to\infty} x^{\frac{1}{n}} = x^0 = 1$, es decir, la función límite de $\{f_n\}$ es $f(x) = 1$

Luego,

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) = \lim_{x\to 0} 1 = 1 \text{ (por propiedad de límite de una constante)}$$

Entonces,

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) = 1$$

En segundo lugar:

$$\lim_{x\to 0} f_n(x) = \lim_{x\to 0} \sqrt[n]{x} = 0$$

Luego,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{x\to 0} f_n(x)\right) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$$

Entonces,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{x\to 0} f_n(x)\right)=0$$

Por lo tanto, $\lim_{x\to 0}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)\neq \lim_{n\to\infty}\left(\lim_{x\to 0} f_n(x)\right)$.

En conclusión, tenemos que los límites no son permutables, entonces la convergencia de la sucesión no puede ser uniforme cuando $x\in\,]0,1]$.

También podemos recurrir a la caracterización del supremo para mostrar la no convergencia uniforme de la sucesión $\{f_n\}$.

Para esto, si $\lim_{n\to\infty}\sigma_n=0$ entonces la sucesión converge uniformemente, donde

$$sup\,|f(x)-f_n(x)|\,/0<x\leq 1, \text{ en que } f(x)=1$$

$$\begin{gathered}
0<x\leq 1\ /\ \sqrt[n]{}\\
\sqrt[n]{0}<\sqrt[n]{x}\leq\sqrt[n]{1}\\
0<\sqrt[n]{x}\leq 1\ /\cdot(-1)\\
0>-\sqrt[n]{x}\geq -1\ /(+1)\\
1>1-\sqrt[n]{x}\geq 0
\end{gathered}$$

Entonces $sup\{|1-\sqrt[n]{x}|\,/0<x\leq 1\}=1$

Por lo tanto, $\lim_{n\to\infty}\sigma_n=1\neq 0$

Probando de esta manera la no convergencia uniforme de la sucesión $\{f_n\}$, como se puede apreciar en la siguiente figura.

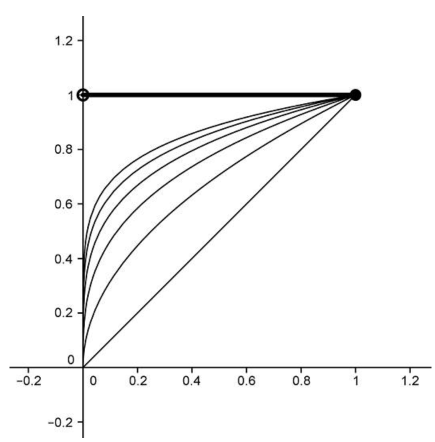

Figura 3.1.2.1

3.1.3 Continuidad

Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones reales $f_n :\to \mathbb{R}$, que están definidas en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Se verifica que:

Si la sucesión de funciones $\{f_n\}$ converge uniformemente en I hacia su función límite $f : I \to \mathbb{R}$ y si las funciones f_n son continuas en I, para $n \in \mathbb{N}$, entonces f también es contínua en I[5].

Demostración:

Como debemos probar que f es continua en cualquier punto $a \in I$, para lo cual debemos tener en cuenta la propiedad de límite en un punto de la función límite y además como todas las f_n son continuas en $a \in I$ se verifica que:

$$\lim_{x\to a} f_n(x) = f_n(a) \qquad (*)$$

Entonces por propiedad de límite en un punto de la función límite probamos que existe el límite de $f(x)$ para $x \to a$, es decir:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a}\left[\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\lim_{x\to a} f_n(x)\right]$$

Usando $(*)$, tenemos:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a}\left[\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\lim_{x\to a} f_n(x)\right] = \lim_{n\to\infty} f_n(a) = f(a)$$

A partir de lo anterior concluimos que:

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

Entonces $f(x)$ es continua en $a \in I$.

[5] Burgos. J. (2007). Cálculo Infinitesimal de una Variable. Editor: Carmelo Sánchez González. Pp 539

3.1.3.1 Ejemplo

Sea $f_n(x) = \dfrac{(1+nx)^2}{1+n^2x^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$ y $\forall n \in \mathbb{N}$, verifique si la función límite es continua.

Desarrollo:

En primer lugar se observa que las funciones f_n son continuas en $\mathbb{R}$, por lo tanto analizaremos la convergencia uniforme de la sucesión. Por definición de convergencia puntual, tenemos:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \lim_{n\to\infty} \frac{(1+nx)^2}{1+n^2x^2} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1+2nx+n^2x^2}{1+n^2x^2} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} \cdot \frac{1+2nx+n^2x^2}{1+n^2x^2} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2nx}{n^2}+\dfrac{n^2x^2}{n^2}}{\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{n^2x^2}{n^2}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2x}{n}+x^2}{\dfrac{1}{n^2}+x^2} \\
&= \frac{x^2}{x^2} \\
&= 1
\end{aligned}$$

Por lo tanto $f_n(x)$ converge puntualmente a $f(x) = 1$. Por último veremos si f_n converge uniformemente, por definición de no convergencia uniforme, tenemos:

$$\exists \varepsilon_0 > 0, \forall n \in \mathbb{N} \ / \ |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon_0$$

Dado $\varepsilon_0 = 1$ y $x_n = \dfrac{1}{n}$, $x_n \in \mathbb{R}$

$$\left| f_n\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n}\right) \right| = \left| \frac{[1+n(\frac{1}{n})]^2}{1+n^2(\frac{1}{n})^2} - 1 \right| = \left| \frac{2^2}{2} - 1 \right| = |2-1| = |1| = 1$$

Por lo tanto $\{f_n\}$ no converge uniformemente. Sin embargo, a pesar de que no ocurre la convergencia uniforme de la sucesión, las funciones f_n y f son continuas (como muestra la figura 3.1.3.1) para todo $x \in \mathbb{R}$, esto prueba que la condición de convergencia uniforme del teorema es suficiente pero no necesaria.

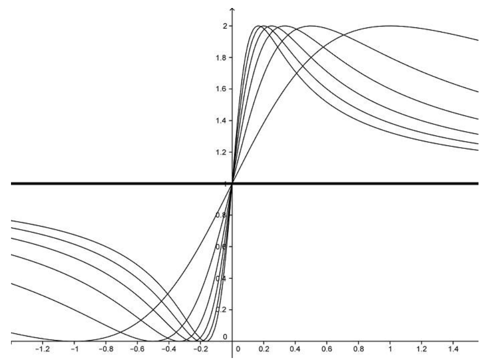

Figura 3.1.3.1

3.1.4 Integrabilidad

Sea $\{f_n\}$ *una sucesión de funciones reales* $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$*, que están definidas en un intervalo compacto* $[a,b] \subset \mathbb{R}$*. Se verifica que:*

Si la sucesión de funciones $\{f_n\}$ *converge uniformemente en* $[a,b]$ *hacia su función límite* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *y si las funciones* f_n *son integrables en* $[a,b]$*, entonces* f *también es integrable en* $[a,b]$ *y su integral* $\displaystyle\int_a^x f$ *es el límite uniforme de la sucesión de integrales* $\left\{\displaystyle\int_a^x f_n\right\}$ *para* $x \in [a,b]$*, de forma que:*

$$\int_a^x \left(\lim_{n\to\infty} f_n(t)\right) dt = \lim_{n\to\infty}\left(\int_a^x f_n(t)dt\right) \text{ este límite es uniforme para } x \in [a,b]^6.$$

[6]Burgos. J. (2007). Cálculo Infinitesimal de una Variable. Editor: Carmelo Sánchez González. Pp 541

Demostración:

Para esta demostración recurrimos a las particiones de un intervalo y sumas superiores e inferiores. Para esto, como debemos probar que la función f es integrable en $[a, b]$ tenemos que:

$\forall \varepsilon > 0$, existe una partición P_0 de $[a, b]$ tal que $S(f, P_0) - s(f, P_0) < \varepsilon$ Criterio de integrabilidad de Riemann[7].

Dado que $\{f_n\}$ converge uniformemente hacia f en $[a, b]$ entonces $\exists v \in \mathbb{N}$ tal que:

$$|f(x) - f_v(x)| < \frac{\varepsilon}{3(b-a)}, \ \forall x \in [a, b]$$

verificándose que;

$$-\frac{\varepsilon}{3(b-a)} < f(x) - f_v(x) < \frac{\varepsilon}{3(b-a)} \ / + f_v(x) \ \forall x \in [a, b]$$

$$f_v(x) - \frac{\varepsilon}{3(b-a)} < f(x) < \frac{\varepsilon}{3(b-a)} + f_v(x) \ , \ \forall x \in [a, b]$$

Ahora para cualquiera que sea la partición P de $[a, b]$, se tiene que:

$$s(f, P) > s(f_v, P) - \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{y} \qquad S(f, P) < S(f_v, P) + \frac{\varepsilon}{3} \tag{1}$$

Por otra parte, como f_v es integrable en $[a, b]$, existe una partición P_0 de $[a, b]$ tal que:

$$S(f_v, P_0) - s(f_v, P_0) < \frac{\varepsilon}{3} \tag{2}$$

Acudiendo a las relaciones (1) y (2) y sea $P = P_0$, se concluye que:

[7]Dados $x_1 < x_2 < ... < x_{r-1}$ números de $]a, b[$, se dice que:
$P = \{a = x_0.x_1, x_2, ..., x_{r-1}, \ b = x_r\}$
Es una partición del intervalo $[a, b]$. La norma de P se define como:
$|P| = \underset{1 \le i \le r}{máx} \{x_i - x_{i-1}\}$.

La colección de todas las particiones de $[a, b]$ se designa por $\mathcal{P}$ a cada $P \in \mathcal{P}$ asociamos las sumas:

$S(f, P) = \sum_{k=1}^{r} (x_k - x_{k-1}) \underset{x \in [x_{k-1}, x_k]}{máx} f(x)$

$s(f, P) = \sum_{k=1}^{r} (x_k - x_{k-1}) \underset{x \in [x_{k-1}, x_k]}{mín} f(x)$

y $\sigma(f, P) = \sum_{k=1}^{r} (x_k - x_{k-1}) f(t_k)$

donde $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$ para todo $1 \le k \le r$.
Proposición:
$\forall \varepsilon > 0$, $\exists P \in \mathcal{P}$ tal que $S(f, P) - s(f, P) < \varepsilon$

$$S(f,P_0)-s(f,P_0)=$$
$$[S(f,P_0)-s(f,P_0)]+[S(f_v,P_0)-S(f_v,P_0)]+[s(f_v,P_0)-s(f_v,P_0)]$$

$$=[S(f,P_0)-S(f_v,P_0)]+[S(f_v,P_0)-s(f_v,P_0)]+[s(f_v,P_0)-s(f,P_0)]<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon$$

Entonces:

$$S(f,P_0)-s(f,P_0)<\varepsilon$$

Lo que prueba que $f(x)$ es integrable en $[a,b]$.

Ahora, probaremos que $\left\{\int_a^x f_n\right\}$ converge uniformemente hacia $\int_a^x f$ para $x\in[a,b]$. Para esto, como $\{f_n\}$ converge uniformemente hacia f en $[a,b]$:

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists v'\in\mathbb{N} \text{ tal que } |f(x)-f_n(x)|<\frac{\varepsilon}{2(b-a)}\ ,\forall n\geq v\text{'} \text{ y } \forall x\in[a,b].$$

Por lo tanto, para $n\geq v'$ y $x\in[a,b]$, se verifica que:

$$\left|\int_a^x f(t)dt-\int_a^x f_n(t)dt\right|\leq\int_a^x|f(t)-f_n(t)|\,dt\leq(x-a)\frac{\varepsilon}{2(b-a)}\leq\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$$

Por lo tanto, hemos probado que $\left\{\int_a^x f_n\right\}\overset{c.u}{\rightarrow}\int_a^x f\ ,\forall x\in[a,b]$.

3.1.4.1 Ejemplo:

Para cada $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$, definamos $f_n:[0,1]\rightarrow\mathbb{R}$ por:

$$f_n(x)=\begin{cases} n^2x & si\ 0\leq x\leq\frac{1}{n}\\ 2n-n^2x & si\ \frac{1}{n}<x\leq\frac{2}{n}\\ 0 & si\ x>\frac{2}{n}\end{cases}$$

Además, considere que $\{f_n(x)\}$ converge uniformemente a $f(x)=0$. Analice si $f(x)$ es integrable en $[0,1]$.

La figura **3.1.4.1** muestra algunos elementos de la sucesión:

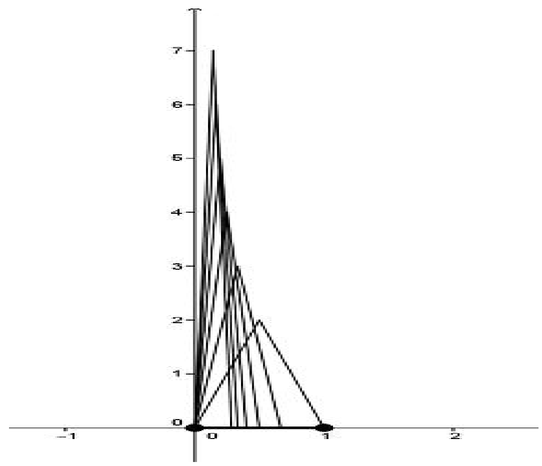

Figure 3.1.4.1

Desarrollo:

Para que la función límite puntual sea integrable se debe cumplir que $\{f_n\}$ debe converger uniformemente y que las f_n sean integrables.

Como ya se sabe que $\{f_n(x)\}$ converge uniformemente, probaremos que las f_n son integrables en $[0,1]$:

$$f_2(x) = \begin{cases} 4x & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ (4-4x) & \frac{1}{2} < x \leq 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases}$$

Al integrar, resulta:

$$\int f_2(x) = \int_0^{\frac{1}{2}} 4x dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} (4-4x) dx$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

$$= 1$$

$$f_3(x) = \begin{cases} 9x & 0 \leq x \leq \frac{1}{3} \\ (6-9x) & \frac{1}{3} < x \leq \frac{2}{3} \\ 0 & x > \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\int f_3(x) = \int_0^{\frac{1}{3}} 9x dx + \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} (6-9x)dx$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

$$= 1$$

$$\vdots$$

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2x & , si\ 0 \leq x \leq \dfrac{1}{n} \\ 2n - n^2x & , si\ \dfrac{1}{n} < x \leq \dfrac{2}{n} \\ 0 & , si\ x > \dfrac{2}{n} \end{cases}$$

$$\int f_n(x) = \int_0^{\frac{1}{n}} n^2 x dx + \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} 2n - n^2 x dx$$

$$= \frac{n^2 x}{2} /_0^{\frac{1}{n}} + \left(2nx - \frac{n^2x^2}{2}\right) /_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}}$$

$$= \frac{n^2 \cdot \frac{1}{n^2}}{2} - 0 + \left(2n \cdot \frac{2}{n} - \frac{n^2 \cdot \frac{4}{n}}{2}\right) - \left(2n \cdot \frac{1}{n} - \frac{n^2 \cdot \frac{1}{n^2}}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2} + (4-2) - \left(2 - \frac{1}{2}\right)$$

$$= 1$$

Por lo tanto, $\int f_n(x) = 1$

De esta manera concluimos que las f_n son integrables en $[0,1]$ y su integral es 1.

Por último, como $\{f_n\}$ es uniformemente convergente en $[0,1]$ y las f_n son integrables en $[0,1]$, se cumple que $f(x) = 0$ es integrable en este intervalo.

Observación:

El ejemplo 3.1.4.1 muestra que en el teorema anterior, no es posible debilitar la hipótesis de convergencia uniforme, por una de convergencia puntual.

3.1.4.2 Ejemplo

Sea $\{f_n\}$ definida en $[0,1]$ mediante:

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 & , si\ \dfrac{1}{n+1} < x \le \dfrac{1}{n} \\ 0 & , si\ 0 \le x \le \dfrac{1}{1+n}\ ó\ \dfrac{1}{n} < x \le 1 \end{cases}$$

Verifica si $f(x)$ es integrable en $[0,1]$y si se cumple que:

$$\int_a^x \left(\lim_{n\to\infty} f_n(t) \right) dt = \lim_{n\to\infty} \left(\int_a^x f_n(t)dt \right).$$

Desarrollo:

Esta sucesión de funciones converge en $[0,1]$ hacia la función nula, pues para cada x del intervalo, el valor de $f_n(x)$ no es nulo para un único $n \in \mathbb{N}$, con lo que $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$, $\forall x \in [0,1]$.

Para que $f(x)$ sea integrable se debe cumplir que: la sucesión de funciones debe converger uniformemente en $[0,1]$ y que las f_n sean integrables en dicho intervalo.

En primer lugar, probaremos que las f_n son integrables en $\{0,1\}$, entonces:

$\displaystyle\int f_n(x) = \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} n^2 dx$

$= n^2x$, evaluando en los respectivos límites de integración, tenemos:

$= n^2 \left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{1+n} \right)$

$= n^2 \left(\dfrac{n+1-n}{n(n+1)} \right)$

$= \dfrac{n^2}{n(n+1)}$

$= \dfrac{n}{(n+1)}$

De esta manera se concluye que las f_n son integrables en $[0,1]$.

Ahora, mostraremos que f_n converge uniformemente, para esto recurrimos a la caracterización del supremo (véase **2.1.2.3**), sabiendo que converge puntualmente a $f(x) = 0$.

$\sigma_n = sup\{|0 - n^2|\, x \in [0,1]\}$

$= n^2$

Aplicando límite cuando $n \to \infty$, se tiene que:

$\lim\limits_{n\to\infty} n^2 = \infty \neq 0$

Por lo tanto, f_n no converge uniformemente en $[0,1]$.

Sabiendo que las f_n son integrables y que f_n no converge uniformemente, de igual manera probaremos si se cumple que:

$$\int_a^x \left(\lim_{n\to\infty} f_n(t)\right) dt = \lim_{n\to\infty}\left(\int_a^x f_n(t)dt\right)$$

$$\int_a^x 0dt = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}$$

$$0 \neq 1$$

Observación: no es de extrañar el hecho que no se cumpla la igualdad anterior, pues la convergencia de f_n hacia f en $[0,1]$ no es uniforme, sin embargo $f(x)=0$ es integrable en $[0,1]$.

3.1.5 Derivabilidad

Sea $\{f_n\}$ una sucesión se funciones reales $f_n : I \to \mathbb{R}$, que están definidas en un intervalo acotado I. Se verifica que:

Si las funciones f_n son derivables en I, si la sucesión de las derivadas $\left\{f_n'\right\}$ es uniformemente convergente en I y si existe algún $a \in I$ tal que la sucesión numérica $\{f_n(a)\}$ es convergente, entonces $\{f_n\}$ converge uniformemente en I hacia una función (límite) que es derivable, en I, y cuya derivada es el límite de $\left\{f_n'\right\}$, de manera que:

$$D\left[\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right] = \lim_{n\to\infty} D\left[f_n(x)\right] \textit{ este límite es uniforme para } x \in I$$[8]

Demostración:

Para esta demostración, vamos a recurrir a una sucesión de funciones auxiliar $\{\varphi_n\}$, donde $\varphi_n : I \to \mathbb{R}$ es la función.

$$\varphi_n(x) = \frac{f_n(x)-f_n(a)}{x-a}, \text{ si } x \neq a;\ \varphi_n(a) = f_n'(a) \tag{1}$$

- En primer lugar, vamos a probar que las funciones φ_n son continuas en I.

[8]Burgos. J. (2007). Cálculo Infinitesimal de una Variable. Editor: Carmelo Sánchez González. Pp 544

En el conjunto $I - \{a\}$ la función φ_n es el cociente entre dos funciones continuas y el denominador es no nulo. Mientras que en el punto a ocurre que:

$$\lim_{x \to a} \varphi_n(x) = f_n'(a) = \varphi_n(a)$$

Con lo que se garantiza la continuidad de $\varphi_n(x)$.

- Ahora se debe probar que $\{\varphi_n\} \overset{c.u}{\to} \varphi$, $\forall x \in I$ y $p, q \in \mathbb{N}$, para esto:

$$\varphi_p(x) - \varphi_q(x) = \frac{f_p(x) - f_p(a)}{x - a} - \frac{f_q(x) - f_q(a)}{x - a}$$

$$= \frac{f_p(x) - f_q(x) - f_p(a) + f_q(a)}{x - a}$$

Recurriendo al Teorema del Valor Medio[9] aplicado a la función $t \to f_p(t) - f_q(t)$ cuyos extremos son $x, a \in I$, resulta que:

$$= \frac{f_p'(\xi)(x - a) - f_q'(\xi)(x - a)}{x - a}, \ \xi \in [a, x]$$

$$= f_p'(\xi) - f_q'(\xi)$$

En conclusión,

$$\varphi_p(x) - \varphi_q(x) = f_p'(\xi) - f_q'(\xi), \ \forall x \in I - \{a\}$$

Luego, para $x = a$ se tiene que:

$$\varphi_p(a) - \varphi_q(a) = f_p'(a) - f_q'(a)$$

Ahora bien, para cualquier $\varepsilon > 0$, como $\left\{f_n'\right\}$ converge uniformemente en I, y según la caracterización de Cauchy se tiene que: $\exists v \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left|f_p'(x) - f_q'(x)\right| < \varepsilon, \ \ \forall x \in I \text{ y } \forall p, q \geq v$$

Por lo tanto se deduce que:

$$|\varphi_p(t) - \varphi_q(t)| < \varepsilon \ \forall t \in I \text{ y } \forall p, q \geq v$$

[9] Se considera una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, definida en el intervalo $[a, b]$,que es cerrado y acotado (o sea que es compacto). Si f es contínua en $[a, b]$ y derivable en $]a, b[$, entonces existe al menos un punto $\xi \in]a, b[$ tal que:

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$$

Lo que asegura que $\{\varphi_n\}$ converge uniformemente. Llamemos $\varphi : I \to \mathbb{R}$ a la función límite de $\{\varphi_n\}$ en I.

- Veamos que $\{f_n\}$ converge uniformemente en I.

Recurrimos a las funciones φ_n para $p, q \in \mathbb{N}$ y $x \in I$.

$$f_p(x) = f_p(x) - f_p(a) + f_p(a)$$

Reorganizando términos:

$$f_p(x) = f_p(a) + [f_p(x) - f_p(a)]$$

Haciendo un arreglo algebraico:

$$f_p(x) = f_p(a) + (x-a)\frac{[f_p(x) - f_p(a)]}{x-a}$$

Recurriendo a (1)

$$f_p(x) = f_p(a) + (x-a)\varphi_p(x)$$

Análogamente para $f_q(x)$, resulta:

$$f_q(x) = f_q(a) + (x-a)\varphi_q(x)$$

Luego $\forall x \in I$ y $\forall p, q \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} |f_p(x) - f_q(x)| &= |f_p(a) + (x-a)\varphi_p(x) - f_q(a) - (x-a)\varphi_q(x)| \\ &= |f_p(a) - f_q(a) + (x-a)(\varphi_p(x) - \varphi_q(x))| \end{aligned}$$

Por desigualdad triangular tenemos que:

$$|f_p(x) - f_q(x)| \le |f_p(a) - f_q(a)| + |x-a|\,|\varphi_p(x) - \varphi_q(x)| \tag{2}$$

Ahora por la Caracterización de Cauchy, como $\{\varphi_n\} \overset{c.u.}{\to} \varphi$, dado $\varepsilon > 0$, $\exists v_1 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$|\varphi_p(x) - \varphi_q(x)| < \frac{\varepsilon}{2\delta}\ \forall p, q \ge v_1,\ \forall x \in I \tag{3}$$

dondeδ es la amplitud del intervalo acotado I.

Además como $\{f_n(a)\}$ es convergente, $\exists v_2 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$|f_p(a) - f_q(a)| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall p, q \geq v_2 \tag{4}$$

Luego, se define $v = máx\{v_1, v_2\}$. Y desde (2), (3) y (4) se deduce que:

$$|f_p(x) - f_q(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + |x-a| \frac{\varepsilon}{2\delta} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \quad \forall p, q \geq v, \ \forall x \in I$$

Por lo tanto $\{f_n\}$ converge uniformemente en I. Llamemos $f : I \to \mathbb{R}$ el límite de la sucesión $\{f_n\}$.

- Ahora se debe probar que f es derivable en I y que su derivada es el límite de $\{f_n'\}$, al que llamaremos $g : I \to \mathbb{R}$.

Entonces debemos probar que $f'(a)$ existe y que $f'(a) = g(a)$, ya que para cualquier otro punto $b \in I$ se verifica lo anterior, pues $\{f_n(b)\}$ converge, porque $\{f_n\} \overset{c.u.}{\to} f$ en I, por lo tanto lo que se cumple para a se cumple para b.

También, como $\{\varphi_n\} \overset{c.u.}{\to} \varphi$ en I y las funciones φ_n son continuas en el intervalo, también lo es φ en este intervalo. Y además existe $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = \varphi(a)$.

Ahora bien:

$$\varphi(a) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(a) = \lim_{n\to\infty} f_n'(a) = g(a), \ \ x = a$$

$$\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f_n(x) - f_n(a)}{x-a}, \ \ x \in I - \{a\}$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) - \lim\limits_{n\to\infty} f_n(a)}{\lim\limits_{n\to\infty}(x-a)}, \ \ x \in I - \{a\}$$

$$= \frac{f(x) - f(a)}{x-a}, \ \ x \in I - \{a\}$$

Luego existe el $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x-a}$ y vale $g(a)$, es decir, existe $f'(a)$ y es igual a $g(a)$ como había que probar.

3.1.5.1 Ejemplo

Sea $f_n(x) = \dfrac{1}{1+nx}$, $x \in [0,1]$. Estudiar si $f(x)$ es derivable en $[0,1]$.

Desarrollo

En primer lugar analizaremos si las f_n son derivables en $[0,1]$:

$$f_1(x) = \frac{1}{1+x} \quad \Longrightarrow \quad f_1'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$$

$$f_2(x) = \frac{1}{1+2x} \quad \Longrightarrow \quad f_2'(x) = -\frac{2}{(1+2x)^2}$$

$$f_3(x) = \frac{1}{1+3x} \quad \Longrightarrow \quad f_3'(x) = -\frac{3}{(1+3x)^2}$$

$$\vdots$$

$$f_n(x) = \frac{1}{1+nx} \Longrightarrow f_n'(x) = -\frac{n}{(1+nx)^2}$$

De esta forma, concluimos que las f_n son derivables en $[0,1]$

En segundo lugar, veremos si la sucesión de derivadas, $\{f_n'\}$, converge uniformemente.

$$f_n'(x) = -\frac{n}{(1+nx)^2}$$

Para probar su convergencia uniforme, primero debemos encontrar la función a la que converge puntualmente en $[0,1]$, entonces, aplicando límite cuando $n \to \infty$, tenemos:

$$\lim_{n\to\infty} -\frac{n}{(1+nx)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{-n}{1+2nx+n^2x^2} \cdot \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{-\frac{n}{n^2}}{\frac{1}{n^2} + \frac{2nx}{n^2} + \frac{n^2x^2}{n^2}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{-\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}+\frac{2x}{n}+x^2}$$
$$= \frac{0}{x^2}$$
$$= 0$$

Por lo tanto, la sucesión converge puntualmente a $f(x) = 0$ en $[0,1]$.

Ahora, como $\{f_n'(x)\}$ converge puntualmente a $f(x) = 0$, vamos a mostrar la convergencia uniforme en $[0,1]$ de $\{f_n'(x)\}$, recurriendo a la caracterización del supremo:

$$\sigma_n = sup\left\{\left|0 - -\frac{n}{(1+nx)^2}\right| x \in [0,1]\right\}$$
$$= sup\left\{\left|\frac{n}{(1+nx)^2}\right| x \in [0,1]\right\}$$

como $x \in [0,1] \Longrightarrow 0 \leq x \leq 1/\cdot n$

$\Longrightarrow 0 \leq nx \leq n \ / +1$

$\Longrightarrow 1 \leq 1+nx \leq n+1 \ /()^{-2}$

$\Longrightarrow 1 \geq \frac{1}{(1+nx)^2} \geq \frac{1}{(n+1)^2} \ / \cdot n$

$\Longrightarrow \frac{n}{(n+1)^2} \leq \frac{n}{(1+nx)^2} \leq n$

De lo anterior, resulta que $\sigma_n = n$, aplicando límite cuando $n \to \infty$, tenemos que:

$$\lim_{n\to\infty} n = \infty \neq 0$$

Entonces $\{f_n'(x)\}$ no converge uniformemente en $[0,1]$

Finalmente, sea $a = 1$ con $a \in [0,1]$, probaremos que la sucesión numérica $\{f_n(a)\}$ es convergente en el intervalo.

$f_n(a) = \frac{1}{1+n}$, aplicando límite cuando $n \to \infty$, tenemos:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+n} \cdot \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}+\frac{n}{n}}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}+1}$$

$$= \frac{0}{0+1}$$
$$= \frac{0}{1}$$
$$= 0$$

Por lo tanto, $f_n(a)$ es convergente.

Por último, a pesar de que no se cumple la convergencia uniforme de la sucesión de derivadas, veamos que ocurre al intercambiar los límites y derivadas como indica el teorema.

$$D\left[\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right] = \lim_{n\to\infty} D\left[f_n(x)\right]$$
$$D[0] = \lim_{n\to\infty} -\frac{n}{(1+nx)^2}$$
$$0 = 0$$

En conclusión $f(x)$ es derivable en $[0,1]$, sin embargo se observa que la condición de convergencia uniforme de la sucesión de derivadas es una condición suficiente, pero no necesaria.

3.2 Función Suma De una Serie de Funciones

3.2.1 Acotación

Si cada una de las funciones f_n está acotada en S y si la serie $\sum f_n$ converge uniformemente en S hacia su función suma $s : S \to \mathbb{R}$, entonces s está acotada en S[10].

Demostración:

Como $\sum f_n$ converge uniformemente en S, entonces se tiene que para todo $\varepsilon > 0$ se cumple que:

$$|s(x) - s_n(x)| < \varepsilon$$

Tomando $\varepsilon = 1$ y $v \in \mathbb{N}$ tal que:

$$|s(x) - s_v(x)| < 1 \ \forall x \in S, \forall n \geq v \tag{1}$$

Por otro lado, como s_v está acotada en S, es decir, existe $k > 0$ tal que:

$$|s_v(x)| < k \ \forall x \in S \tag{2}$$

Finalmente, al sumar las desigualdades (1) y (2), tenemos:

$$|s(x) - s_v(x)| + |s_v(x)| < 1 + k$$

Por desigualdad triángular se sabe que:

$$|s(x)| \leq |s(x) - s_v(x)| + |s_v(x)| < 1 + k$$

Entonces:

$$|s(x)| < 1 + k$$

Por lo tanto la función suma de $\sum f_n$está acotada por $1 + k$ en S.

[10] Burgos. J. (2007). Cálculo Infinitesimal de una Variable. Editor: Carmelo Sánchez González. Pp 536

3.2.1.1 Ejemplo

Las funciones f_n estan acotadas en $I =]0,1[$, considere la función suma (s) de la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n$. Verifique si $s(x)$ está acotada en I.

Desarrollo

Por serie de Potencia tenemos que $\sum x^n$ es convergente si $|r| < 1$, lo que se cumple pues $x \in]0,1[$ y por ende su suma esta dada por:

$$s(x) = \frac{a}{1-r}, \quad \text{con } a = 1 \text{ y } r = x$$

Reemplazando, tenemos:

$$s(x) = \frac{1}{1-x}$$

tenemos que las f_n , por hipótesis estan acotadas y además $\sum x^n$ no converge uniformemente, por lo tanto la función $s(x) = \dfrac{1}{1-x}$ no esta acotada en $I =]0,1[$, lo que podemos probar de la siguiente forma:

Sea $x = 1 - 10^{-n}$, reemplazando en la función $s(x) = \dfrac{1}{1-x}$, tenemos:

$$\frac{1}{1-1+10^{-n}} = \frac{1}{10^{-n}} = 10^n \text{ haciendo } n \to \infty$$

$$\lim_{n\to\infty} 10^n = \infty$$

En conclusión, la función $s(x) = \dfrac{1}{1-x}$ no esta acotada en $I =]0,1[$, como se verifica en la figura **3.2.1.1**.

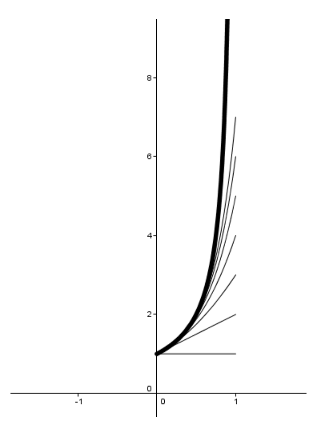

Figura 3.2.1.1

3.2.2 Límite en un Punto

Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones reales $f_n : S \to \mathbb{R}$, que están definidas todas en, al menos, un conjunto $S \subset \mathbb{R}$, que es un entorno reducido de un punto $a \in \mathbb{R}$. Se verifica que:

Si la serie de funciones $\sum f_n$ converge uniformemente en S hacia su función suma $s : S \to \mathbb{R}$ y si, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe el límite $l_n = \lim\limits_{x\to a} f_n(x)$, entonces existe el límite $\lim\limits_{x\to a} s(x)$, que es igual a la suma de la serie $\sum l_n$, la cual es convergente, de modo que:

$$\lim_{x\to a}\left[\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right] = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\lim_{x\to a} f_n(x)\right]^{11}.$$

Demostración:

En primer lugar, como $\sum f_n$ converge uniformemente a su función suma, $s(x)$, se cumple que:

$$s(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x) \tag{1}$$

Ahora bien, como $s_n = f_1 + f_2 + ... + f_n$ reemplazando en (1), resulta:

$$s(x) = \lim_{n\to\infty}\left[f_1(x) + f_2(x) + ... + f_n(x)\right]$$

Aplicando límite cuando $x \to a$, tenemos:

$$\lim_{x\to a} s(x) = \lim_{x\to a}\left(\lim_{n\to\infty}\left[f_1(x) + f_2(x) + ... + f_n(x)\right]\right)$$

Acudiendo a la definición de límite en un punto de la función límite (véase en **3.1.2**)

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\lim_{x\to a}\left[f_1(x) + f_2(x) + ... + f_n(x)\right]\right)$$

Luego, por propiedad de límites:

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\lim_{x\to a} f_1(x) + \lim_{x\to a} f_2(x) + ... + \lim_{x\to a} f_n(x)\right)$$

El límite en un punto de las $f_n(x)$ existe por hipótesis, de esta manera:

$$= \lim_{n\to\infty} [l_1 + l_2 + ... + l_n] \tag{2}$$

Ahora, sea $\sigma_n = l_1 + l_2 + ... + l_n$, reemplazando en (2), tenemos:

$$= \lim_{n\to\infty} \sigma_n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} l_n$$

$$\therefore \lim_{x\to a} s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} l_n$$

Concluyendo entonces que el límite en un punto de $s(x)$ existe y además es igual a la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} l_n$.

3.2.3 Continuidad

Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones reales $f_n :\to \mathbb{R}$, que están definidas en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Se verifica que:

Si la serie de funciones $\sum f_n$ converge uniformemente en I hacia su función suma $s : I \to \mathbb{R}$ y si las funciones f_n son continuas en I, para $n \in \mathbb{N}$, entonces s también es continua en I[12].

[11] Burgos. J. (2007). Cálculo Infinitesimal de una Variable. Editor: Carmelo Sánchez González. Pp 537
[12] Burgos. J. (2007). Cálculo Infinitesimal de una Variable. Editor: Carmelo Sánchez González. Pp 539

Demostración:

Como cada una de las f_n son continuas se cumple que:

$$\lim_{x\to a} f_n(x) = f_n(a) \tag{1}$$

Ahora lo que queremos demostrar es que la función s es continua en I, por lo tanto debemos probar que:

$$\lim_{x\to a} s(x) = s(a)$$

Para ésto, como la serie $\sum f_n$ converge uniformemente tenemos que:

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x) = s(x) \text{ ahora aplicando límite } x \to a$$

$$\lim_{x\to a}\left(\lim_{n\to\infty} s_n(x)\right) = \lim_{x\to a} s(x)$$

Ahora como $s_n = f_1 + f_2 + ... + f_n$, y por teorema **3.1.2**, tenemos:

$$\lim_{x\to a} s(x) = \lim_{x\to a}\left(\lim_{n\to\infty}[f_1 + f_2 + ... + f_n]\right)$$

$$\lim_{x\to a} s(x) = \lim_{n\to\infty}\left(\lim_{x\to a}[f_1 + f_2 + ... + f_n]\right)$$

Recurriendo a (1), tenemos que:

$$\lim_{x\to a} s(x) = \lim_{n\to\infty}(f_1(a) + f_2(a) + ... + f_n(a))$$

Sea $s_n(a) = f_1(a) + f_2(a) + ... + f_n(a)$, reemplazando:

$$\lim_{x\to a} s(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(a)$$

Y como la suma de funciones continuas es continua, tenemos que:

$$\lim_{x\to a} s(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(a) = s(a)$$

$$\lim_{x\to a} s(x) = s(a)$$

De esta manera concluimos que $s(x)$ es continua en I.

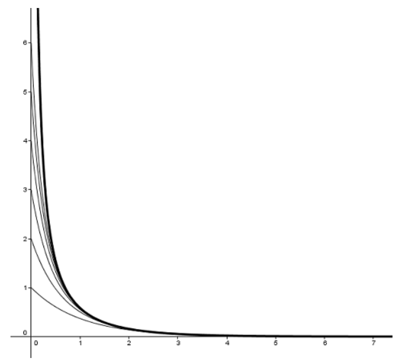

Figura 3.2.3.1

3.2.3.1 Ejemplo

Sea $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$, estudiar la convergencia puntual y la continuidad de $s = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$, $\Omega = \mathbb{R}$.

$$f_n(x) = e^{-nx}$$

Desarrollo:

Tenemos que $\sum e^{-nx}$ es una serie geométrica con $r = e^{-x}$, por lo tanto converge si y solo si $|r| < 1$:

$$|e^{-x}| < 1$$

$$e^{-x} < 1$$

$$\tfrac{1}{e^x} < 1, \;\; x > 0$$

Por lo tanto converge puntualmente en $\mathbb{R}^+$y su suma esta dada por:
$s(x) = \dfrac{r}{1-r}$, entonces

$$s(x) = \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}},\; x > 0$$

La cual es una función contínua en $\mathbb{R}^+$, como se aprecia en la figura **3.2.3.1**.

3.2.4 Integrabilidad

Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones reales $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$, que están definidas en un intervalo compacto $[a,b] \subset \mathbb{R}$. se verifica que:

Si la serie de funciones $\sum f_n$ converge uniformemente en $[a,b]$ hacia su función suma $s : [a,b] \to \mathbb{R}$ y si las funciones f_n son integrables en $[a,b]$, entonces s también es integrable en $[a,b]$ y su integral $\int_a^x s$ es la suma uniforme de la serie de integrales $\sum \int_a^x f_n$ para $x \in [a,b]$, de forma que:

$$\int_a^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)dt \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_a^x f_n(t)dt \right) \text{ esta suma es convergentemente uniforme para } x \in [a,b]$$ [13].

Demostración:

Como $\sum f_n$ converge uniformemente a s, tenemos:

$$s_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + ... + f_n(x) \text{ aplicando limite con } n \to \infty$$

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x) = \lim_{n\to\infty} (f_1(x) + f_2(x) + ... + f_n(x)) = s(x), \text{ pues } \sum f_n \text{ c.u.}$$

$$\lim_{n\to\infty} (f_1(x) + f_2(x) + ... + f_n(x)) = s(x) \ / \int_a^b$$

$$\int_a^b \lim_{n\to\infty} (f_1(x) + f_2(x) + ... + f_n(x)) = \int_a^b s(x)$$

Por la propiedad anterior (3.2.3) podemos intercambiar los limites con las integrales y obtenemos:

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_1(x) + \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_2(x) + ... + \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x) = \int_a^b s(x)$$

Además por hipótesis tenemos que las f_n son integrables, entonces:

$$\int_a^b s(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \int_a^b f_i(x)$$

Por lo tanto $s(x)$ es integrable en $[a,b]$ y su integral es: $\sum_{i=1}^{\infty} \int_a^b f_i(x)$.

[13] Burgos. J. (2007). Cálculo Infinitesimal de una Variable. Editor: Carmelo Sánchez González. Pp 541

3.2.5 Derivabilidad

Sea $\{f_n\}$ una sucesión se funciones reales $f_n : I \to \mathbb{R}$, que están definidas en un intervalo acotado I. Se verifica que:

Si las funciones f_n son derivables en I, si la serie de las derivadas $\sum f_n'$ es uniformemente convergente en I y si existe algún $a \in I$ tal que la serie numérica $\sum f_n(a)$ es convergente, entonces $\sum f_n$ converge uniformemente en I hacia una función (suma) que es derivable, en I, y cuya derivada es la suma de $\sum f_n'$, de manera que:

$$D\left[\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} D\left[f_n(x)\right]^{14}.$$

Demostración:

Vamos a recurrir a una sucesión de funciones auxiliar $\{\varphi_n\}$, donde: $\varphi_n = I \to \mathbb{R}$ es la función

$$\varphi_n(x) = \frac{s_n(x) - s_n(a)}{x - a}, \text{ si } x \neq a \quad \varphi_n(a) = s_n'(a) \tag{1}$$

En primer lugar probaremos que las funciones φ_n son continuas en I. Esto está garantizado, pues en el conjunto $I - \{a\}$, la función φ_n es cociente de funciones continuas con denominadores no nulo, mientras que en el punto a ocurre que:

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = s_n'(a) = \varphi_n(a)$$

Ahora demostraremos que $\{\varphi_n\}$ es una sucesión uniformemente convergente en I. Para ello, pongamos que:

$$\varphi_p(x) - \varphi_q(x) = \frac{s_p(x) - s_p(a)}{x - a} - \frac{s_q(x) - s_q(a)}{x - a}, \qquad \forall x \in I - \{a\} \text{ y } p, q \in \mathbb{N}$$
$$= \frac{s_p(x) - s_p(a) - s_q(x) + s_q(a)}{x - a}$$
$$= \frac{s_p(x) - s_q(x) - (s_p(a) - s_q(a))}{x - a}$$

Por teorema del valor medio, aplicado a la función $t \to [s_p(t) - s_q(t)]$ en el intervalo de extremos x, $a \in I$.

$$\varphi_p(x) - \varphi_q(x) = \frac{[s_p(x) - s_q(x)] - [s_p(a) - s_q(a)]}{x - a}, \quad \forall x \in I - \{a\}$$
$$= \frac{s_p'(\xi)(x-a) - \left[s_q'(\xi)(x-a)\right]}{x - a}$$
$$= \frac{(x-a)s_p'(\xi) - s_q'(\xi)}{x - a}, \quad a \leq \xi \leq x$$
$$= s_p'(\xi) - s_q'(\xi), \quad \forall x \in I - \{a\} \tag{2}$$

[14] Burgos. J. (2007). Cálculo Infinitesimal de una Variable. Editor: Carmelo Sánchez González. Pp 544

Mientras que en el punto $x = a$, tenemos:
$\varphi_p(a) - \varphi_q(a) = s_p'(a) - s_q'(a)$ (3)

Para $\varepsilon > 0$ cualquiera, como la serie de las derivadas $\sum f_n'$ es uniformemente convergente en I y según la caracterización de Cauchy de la convergencia uniforme, existe $v \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\left|s_p'(x) - s_q'(x)\right| < \varepsilon, \quad \forall x \in I \text{ y } \forall p, q \geq v.$$

Por lo que, a partir de (2) y (3), se deduce:

$$|\varphi_p(t) - \varphi_q(t)| < \varepsilon, \quad \forall t \in I \text{ y } \forall p, q \geq v.$$

Sea $\varphi : I \to \mathbb{R}$ la función límite de $\{\varphi_n\}$ en I.

Luego, veamos que la sucesión $\{s_n\}$ converge uniformemente en I. Para $p, q \in \mathbb{N}$, $x \in I$ y recurriendo a las funciones φ_n tenemos que:
$s_p(x) = s_p(x) - s_p(a) + s_p(a)$
$= s_p(a) + s_p(x) - s_p(a)$
$= s_p(a) + (x-a)\dfrac{(s_p(x) - s_p(a))}{x-a}$
$= s_p(a) + (x-a)\varphi_p(x)$

Análogamente para $s_q(x)$, se tiene que:
$s_q(x) = s_q(a) + (x-a)\varphi_q(x)$.

Restando y tomando valor absoluto, se tiene:
$|s_p(x) - s_q(x)| = |s_p(a) + (x-a)\varphi_p(x) - [s_q(a) + (x-a)\varphi_q(x)]|$
$= |s_p(a) + (x-a)\varphi_p(x) - s_q(a) - (x-a)\varphi_q(x)|$
$\leq |s_p(a) - s_q(a)| + |x-a|\,|\varphi_p(x) - \varphi_q(x)|$, $\forall x \in I$ y $\forall p, q \in \mathbb{N}$ (4)

Dado $\varepsilon > 0$ cualquiera y recurriendo a la caracterización de Cauchy de la convergencia uniforme, como $\{\varphi_n\}$ es uniformemente convergente en I, existe $v_1 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$|\varphi_p(x) - \varphi_q(x)| < \frac{\varepsilon}{2\delta}, \quad \forall p, q \geq v_1 \text{ y } \forall x \in I \tag{5}$$

donde δ es la amplitud del intervalo acotado I.
Además, como $\{s_n(a)\}$ es convergente, existe $v_2 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$|s_p(a) - s_q(a)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall p, q \geq v_2 \tag{6}$$

Se define $v = máx\{v_1, v_2\}$ y a partir de (4), (5) y (6):
$|s_p(x) - s_q(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2} + |x-a|\dfrac{\varepsilon}{2\delta} \leq \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, $\forall p, q \geq v$ y $\forall x \in I$.

Con lo que comprobamos que $\{s_n\}$ es uniformemente convergente en I. Llamemos $s : I \to \mathbb{R}$ al límite de la sucesión $\{s_n\}$.

Finalmente debemos demostrar que s es derivable en I y que su derivada es el límite de $\left\{s_n^{'}\right\}$ al que llamaremos $g : I \to \mathbb{R}$, es decir, debemos probar que $s^{'} = g$ en I.

Como $\{\varphi_n\}$ converge uniformemente en I y como las funciones φ_n son continuas en I, es seguro que φ es una función continua en I. Además existe $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)$ y vale $\varphi(a)$.

Ahora bien, como:

$$\varphi(a) = \lim_{n\to\infty}\varphi_n(a) = \lim_{n\to\infty}s_n^{'}(a) = g(a)$$

$$\varphi(x) = \lim_{n\to\infty}\varphi_n(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{s_n(x) - s_n(a)}{x - a} = \frac{s(x) - s(a)}{x - a}$$

Luego existe el $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{s(x) - s(a)}{x - a}$ y es igual a $g(a)$, es decir, existe $s^{'}(a) = g(a)$, como habia que demostrar.

Capítulo 4

Series de Potencias

Las series de potencias son un caso particular de las series de funciones y se caracterizan por ser sumas de monomios.

Las series de potencias son una de las herramientas más útiles de la matemática aplicada. Se han utilizado en el estudio de las funciones de una variable real para poder trabajar con representaciones alternativas y buenas aproximaciones de las funciones más habituales y también pueden utilizarse para obtener nuevas funciones, en problemas matemáticos, físicos, económicos, etc. Además éstas fueron las primeras a las que se acudió, por lo que la didáctica aconseja que sean las primeras en ser propuestas[1].

Los sumandos (funciones) de una serie de potencias son las potencias enteras (sucesivas; de exponente $n = 0, 1, 2, ...$) e la variable multiplicadas por ciertos coeficientes, es decir, son del tipo $x \to a_n x^n$, por lo tanto una serie de Potencias se representa como $\sum a_n x^n$ y la suma parcial n-ésima de una serie de potencias es un polinomio de grado n[2].

Ahora bien, fueron estudiadas primero las series de funciones, ahora trabajaremos con un caso particular de estas, con las series de potencias, donde se estudiará lo relativo a la forma de su campo de convergencia (intervalo de convergencia), que es algo específico de estas series.

Antes de entrar al estudio de series de potencias, vamos a considerar tres ejemplos de éstas[3].

[1] Burgos. J. (2007). Cálculo Infinitesimal de una Variable. Editor: Carmelo Sánchez González. Pp 498
[2] Burgos. J. (2007). Cálculo Infinitesimal de una Variable. Editor: Carmelo Sánchez González. Pp 499
[3] Burgos. J. (2007). Cálculo Infinitesimal de una Variable. Editor: Carmelo Sánchez González. Pp 499

1. Para la serie geométrica $\sum x^n$, graficada en la figura **4.1**.
   * Si,$|x| < 1$, entonces $\sum x^n$ es convergente y, obviamente, también es absolutamente convergente.
   * Si,$|x| > 1$, entonces $\sum x^n$ no es convergente.

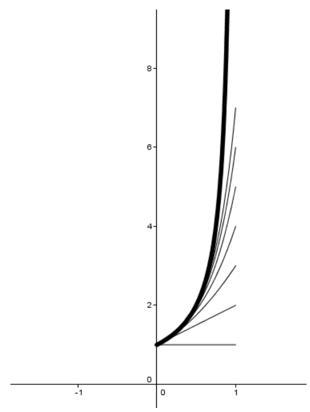

Figura 4.1

2. La serie de potencias $\sum \left(\frac{x}{n}\right)^n$, graficada en la figura **4.2**, es convergente para cualquiera que sea $x \in \mathbb{R}$; es más, se trata de una serie absolutamente convergente para todo $x \in \mathbb{R}$. En efecto, aplicando el criterio de la raíz a la serie $\sum \left|\frac{x}{n}\right|^n$, de valores absolutos, se tiene que:
   $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{x}{n}\right|^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{x}{n}\right| = 0 < 1 \; \forall x \in \mathbb{R}$
   Dicho criterio asegura la convergencia absoluta de $\sum \left(\frac{x}{n}\right)^n$ para cualquier $x \in \mathbb{R}$.

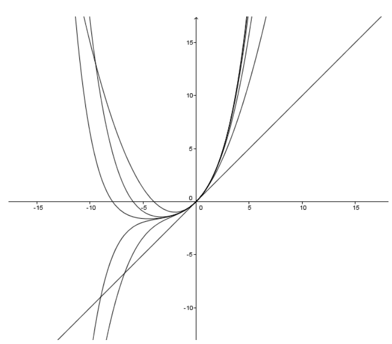

Figura 4.2

3. La serie de potencias $\sum (nx)^n$, graficada en la Figura **4.3,** solamente converge para $x = 0$; donde notamos que el término n-ésimo de la serie tiende a infinito y ello para cualquiera que sea el valor que se le dé a x, salvo si es $x = 0$.

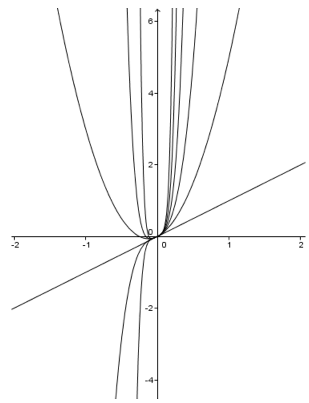

Figura 4.3

Nos interesa notar que, en los tres ejemplos anteriores, para la serie $\sum a_n x^n$ se verifica que:

- $\sum a_n x^n$ converge absolutamente en un intervalo centrado en $x = 0$; los radios de estos intervalos son, respectivamente $r = 1$, $r = +\infty$ y $r = 0$.
- $\sum a_n x^n$ no converge para todo x exterior a dicho intervalo.

Pues bien, esto mismo les acontece a todas las series de potencias (salvo quizá, su posible convergencia en los extremos de dicho intervalo ; para estos puntos no hay regla general).

Definición:

Se llama serie de potencias, a las series del siguiente tipo:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n + ...$$

Donde $a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ... \in \mathbb{R}$ *son coeficientes (fijos) y* $x \in \mathbb{R}$ *es cualquiera (la variable)*[4].

4.1 Radio de Convergencia

Teorema de Cauchy Hadamar[5]

Para cada serie de potencias $\sum a_n x^n$*, existe un* $r \in [0, +\infty[$ *al que se le llama radio de convergencia, tal que:*

- $|x| < r \Longrightarrow \sum a_n x^n$ *converge absolutamente* (1)
- $|x| > r \Longrightarrow \sum a_n x^n$ *no es convergente* (2)

Observación 1:

Para $x = r$ y/o $x = -r$, la serie puede ser convergente o no serlo; depende de los casos.

El radio de convergencia de ésta, esta dado por:

- $r = \dfrac{1}{l}$

Donde:
$l = \lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ o $\lim\limits_{n \to \infty} \left| \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \right|$

observación 2:

- Si $l = 0$, entonces $r = +\infty$
- si $l = +\infty$, entonces $r = 0$

[4] Burgos. J. (2007). Cálculo Infinitesimal de una Variable. Editor: Carmelo Sánchez González. Pp 500
[5] Burgos. J. (2007). Cálculo Infinitesimal de una Variable. Editor: Carmelo Sánchez González. Pp 500

Demostración Teorema de Cauchy-Hadamard.

Para estudiar la demostración de este teorema, es necesario mencionar que como $l = \underset{n\to\infty}{lim} \sqrt[n]{|a_n|}$, es el límite superior de una sucesión queda caracterizado por dos condiciones:

- si $k > l \Rightarrow k > \sqrt[n]{|a_n|}$ desde cierto n en adelante. $(*)$
- si $k < l \Rightarrow k < \sqrt[n]{|a_n|}$ para infinitos valores de n. $(**)$

En primer lugar, demostraremos que, si $|x| < r$, entonces $\sum a_n x^n$ converge absolutamente.

Como $|x| < r \Longrightarrow \dfrac{|x|}{r} < 1$

Luego existe un $h \in \mathbb{R}$, $0 < h < 1$, tal que:

$$\frac{|x|}{r} < h$$

Reemplazando $r = \dfrac{1}{l}$, resulta:

$$\frac{|x|}{\frac{1}{l}} < h$$

$$|x|\, l < h$$

$$l < \frac{h}{|x|}$$

Recurriendo a $(*)$, se tiene que:

$$\sqrt[n]{|a_n|} < \frac{h}{|x|}$$

$$\sqrt[n]{|a_n|} < \frac{h}{|x|}$$

$$|a_n| < \frac{h^n}{|x|^n}$$

$$|a_n x^n| < h^n \text{ (con } h < 1 \text{ y desde un cierto } n)$$

La serie $\sum |a_n x^n|$ está mayorada por la $\sum h^n$ que es una serie convergente (geométrica de razón h, $0 < h < 1$) por lo que la serie $\sum a_n x^n$ es absolutamente convergente.

Ahora probaremos que, si$|x| > r$, entonces $\sum a_n x^n$ no es convergente.

Como $|x| > r \Longrightarrow \dfrac{|x|}{r} > 1$

Luego como $r = \dfrac{1}{l}$, tenemos que:

$$\frac{|x|}{\frac{1}{l}} > 1$$

$$|x|\, l > 1$$

$$l > \frac{1}{|x|}$$

Recurriendo a $(**)$, tenemos:

$$\sqrt[n]{|a_n|} > \frac{1}{|x|} \text{ para infinitos } n$$

Elevando a la potencia n, tenemos:

$$|a_n| > \frac{1}{|x^n|} \ / \cdot |x^n|$$

$$|a_n x^n| > 1$$

La sucesión $\{a_n x^n\}$ no tiene límite cuando $n \to \infty$, luego la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ no puede ser convergente.

Ahora se comprobará que el radio de convergencia está dado por :

$r = \dfrac{1}{l}$, donde $l = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ ó $l = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$

- En primer lugar, suponiendo que existe $l = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ y aplicando el criterio de la raíz a la serie $\sum |a_n x^n|$.

$a)$ si $|x| < \dfrac{1}{l} \Rightarrow |x|\, l < 1$

$$l = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\,|x| = |x| \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = |x|\, l < 1$$

Como $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} < 1 \Rightarrow \sum |a_n x^n|$ converge.

$b)$ Si $|x| > \dfrac{1}{l} \Rightarrow |x|\, l > 1$

$$l = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\,|x| = |x| \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = |x|\, l > 1$$

Como $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} > 1 \Rightarrow \sum |a_n x^n|$ diverge.

Por lo tanto el radio de convergencia de $\sum a_n x^n$ es $r = \dfrac{1}{l}$

- En segundo lugar, suponiendo que existe $l = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ y aplicando el criterio del cociente a la serie $\sum |a_n x^n|$.

$a)$ Si $|x| < \dfrac{1}{l} \Rightarrow |x|\, l < 1$

$$l = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|\,|x^n|\,|x|}{|a_n|\,|x^n|} = |x| \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |x|\, l < 1$$

Como $l = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| < 1 \Rightarrow \sum |a_n x^n|$ converge.

$b)$ Si $|x| > \dfrac{1}{l} \Rightarrow |x|\, l > 1$

$$l = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|\,|x^n|\,|x|}{|a_n|\,|x^n|} = |x| \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |x|\, l > 1$$

Como $l = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| > 1 \Rightarrow \sum |a_n x^n|$ diverge.

Observación 3:

La convergencia de $\sum a_n x^n$ *equivale a la de* $\sum |a_n x^n|$ *(salvo quizá, para* $x = \pm r$*). La convergencia de* $\sum |a_n x^n|$ *se puede estudiar acudiendo a los criterios para series de terminos positivos (por ejemplo, los de la raiz*[6] *o el cociente*[7]*), de los que se puede obtener el radio de convergencia*[8]*.*

Campo de Convergencia e Intervalo de Convergencia

Se llama Campo de convergencia de la serie $\sum a_n x^n$ *al conjunto de los puntos* $x \in \mathbb{R}$ *para los que* $\sum a_n x^n$ *converge; el campo de convergencia es uno de los cuatro intervalos* $]-r, r[$, $[-r, r[$, $]-r, r]$ *o* $[-r, r]$*. Al intervalo abierto* $]-r, r[$ *se le llama intervalo de convergencia de la serie; en el que la serie converge en todos los casos*[9]*.*

Observación 4:

Respecto a los extremos del intervalo de convergencia, nada se puede asegurar de la convergencia de una serie de potencias $\sum a_n x^n$ cuando $x = \pm r$. Ahora si $0 < r < +\infty$, las series $\sum a_n (r)^n$ y $\sum a_n (-r)^n$ pueden ser ambas convergentes, puede serlo sólo una y también puede ocurrir que no lo sea ninguna de ellas.

[6] *Criterio de la Raiz (De Cauchy-Hadamard)*

- $lim \sqrt[n]{x_n} < 1 \Longrightarrow \sum x_n$ *converge.*
- $lim \sqrt[n]{x_n} > 1 \Longrightarrow \sum x_n$ *diverge.*

[7] *Criterio de Cociente (o De D'Alembert)*

- $lim \left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right) < 1 \Longrightarrow \sum x_n$ *converge.*
- $lim \left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right) > 1 \Longrightarrow \sum x_n$ *diverge*

[8] Burgos. J. (2007). Cálculo Infinitesimal de una Variable. Editor: Carmelo Sánchez González. Pp 500

[9] Burgos. J. (2007). Cálculo Infinitesimal de una Variable. Editor: Carmelo Sánchez González. Pp 500

Ejemplos:

Hallar los radios de convergencia, r, de las siguientes series de potencias $\sum a_n x^n$ y estudiar sus comportamientos en los extremos de sus intervalos de convergencia.

1. $\sum^{\infty}(-1)^n(2n+3)^2x^n$
   En lla figura 4.1.1, se han representado algunos terminos de la serie.

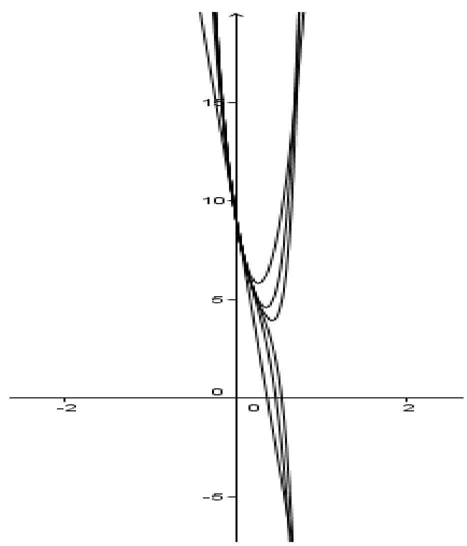

Figura 4.1.1

Desarrollo:
En primer lugar, para encontrar el radio de convergencia vamos a recurrir al criterio de la raiz, entonces:

$$l = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(2n+5)^2}{(2n+3)^2}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+20n+25}{4n^2+12n+9}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+20n+25}{4n^2+12n+9}\cdot\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{4n^2}{n^2}+\frac{20n}{n^2}+\frac{25}{n^2}}{\frac{4n^2}{n^2}+\frac{12n}{n^2}+\frac{9}{n^2}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{4+\frac{20}{n}+\frac{25}{n^2}}{4+\frac{12}{n}+\frac{9}{n^2}}$$

$$= \frac{4}{4}$$

$= 1$
por lo tanto, reemplazando en $r = \dfrac{1}{l}$, tenemos que $r = 1$ y el intervalo de convergencia es $]-1, 1[$.
Ahora analizaremos el comportamiento de la serie en los extremos del intervalo con $x = \pm 1$.

Sea $x = -1$:
Entonces $\sum (-1)^{2n}(2n+3)^2 = \sum (2n+3)^2$, aplicando límite cuando $n \to \infty$, tenemos:
$\lim\limits_{n\to\infty} (2n+3)^2 = \infty$, por lo tanto, la serie diverge.

Sea $x = 1$:
Entonces $\sum (-1)^n(2n+3)^2$,aplicando límite cuando $n \to \infty$, tenemos:
$\lim\limits_{n\to\infty} (2n+3)^2 = \infty$, por lo tanto, la serie diverge.
En conclusión, el intervalo de convergencia es: $]-1, 1[$

2. $\sum\limits^{\infty} \dfrac{n^3}{4^n} x^n$.
La figura 4.1.2 muestra algunos términos de la serie.

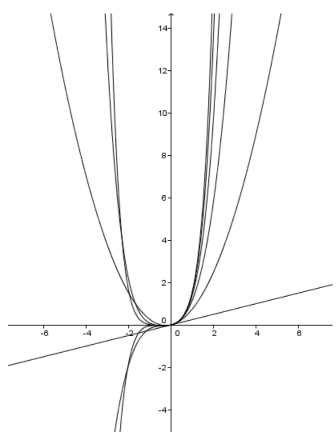

Figura 4.1.2

Desarrollo:

En primer lugar, para encontrar el radio de convergencia vamos a recurrir al criterio de la raiz, pues $r = \dfrac{1}{l}$, entonces:

$$l = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^3}{4^n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n^3}}{\sqrt[n]{4^n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\frac{3}{n}}}{4}$$

$$= \frac{1}{4}$$

Por lo tanto, reemplazando en $r = \dfrac{1}{l}$, tenemos que $r = 4$ y el intervalo de convergencia es $]-4, 4[$.

Ahora analizaremos el comportamiento de la serie en los extremos del intervalo con $x = \pm 4$.

Sea $x = 4$:

Entonces: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{4^n} 4^n = \sum_{n=1}^{\infty} n^3$ aplicando límite cuando $n \to \infty$, tenemos:

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^3 = \infty$, por lo tanto, la serie diverge.

Sea $x = -4$:

Entonces: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{4^n}(-4)^n = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n^3$, analizando la convergencia de la serie alternada, donde si el $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, entonces la serie es convergente. Evidentemente al aplicar el límite al termino a_n resulta que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^3 = \infty$, por lo tanto la serie diverge.

En conclusión, el intervalo de convergencia es: $]-4, 4[$.

3. $\sum^{\infty} \frac{(n+1)x^n}{2^n}$.
La figura 4.1.3 muestra algunos términos de la serie.

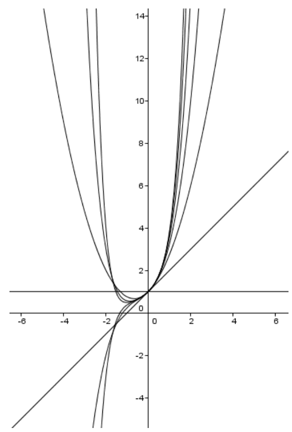

Figura 4.1.3

Desarrollo:

En primer lugar, para encontrar el radio de convergencia vamos a recurrir al criterio del cociente , entonces:

$$l = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{n+2}{2^{n+1}}}{\frac{n+1}{2^n}} \right|$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n+2}{2^n \cdot 2} \cdot \frac{2^n}{n+1} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n+2}{2n+2} \right| = \frac{1}{2}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n+2}{2n+2} \right| \cdot \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{n}{n}+\frac{2}{n}}{\frac{2n}{n}+\frac{2}{n}} \right|$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{1+\frac{2}{n}}{2+\frac{2}{n}} \right|$$
$$= \frac{1}{2}$$

por lo tanto, reemplazando en $r = \frac{1}{l}$, tenemos que $r = 2$ y el intervalo de convergencia es $]-2, 2[$.

Ahora analizaremos el comportamiento de la serie en los extremos del intervalo con $x = \pm 2$.

Sea $x = -2$:
Entonces: $\sum \frac{(n+1)(-2)^n}{2^n} = \sum (-1)^n(n+1)$, aplicando límite cuando $n \to \infty$, tenemos:
$\lim_{n\to\infty} n+1 = \infty$, por lo tanto, la serie diverge.
Sea $x = 2$ entonces $\sum \frac{(n+1)2^n}{2^n} = \sum (n+1)$.
Aplicando límite cuando $n \to \infty$, tenemos:
$\lim_{n\to\infty} n+1 = \infty$, por lo tanoto, la serie diverge.

En conclusión, el intervalo de convergencia es: $]-2, 2[$

4.1.1 Radios de Convergencia de las Series Derivada y Primitivas

Se llaman serie derivada y serie primitiva, de una serie de potencias $\sum a_n x^n$, *a las series* $\sum n a_n x^{n-1}$ *y* $\sum \left[\frac{a_n}{n+1}\right] x^{n+1}$, *respectivamente. Más exactamente:*

Serie dada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n + ...$

Serie derivada $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + ... + n a_n x^{n-1} + ...$

Serie primitiva $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} = a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \frac{a_2}{3} x^3 + ... + \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + ...$

Propiedad: *una serie de potencias (cualquiera) y sus series derivada y primitiva tienen, las tres el mismo radio de convergencia*[10].

Demostración:

Para esto, basta con demostrar que el radio de convergencia de una serie $\sum a_n x^n$ y el de su serie derivada $\sum n a_n x^{n-1}$ son iguales, ya que entonces, la serie $\sum a_n x^n$ es la derivada de la serie $\sum \left[\frac{a_n}{n+1}\right] x^{n+1}$, resulta que esta última a de tener el mismo radio que la serie $\sum a_n x^n$, por lo tanto:

Sea $r = \frac{1}{l}$ y $r' = \frac{1}{l'}$, los radios de convergencia de la serie $\sum a_n x^n$ y $\sum n a_n x^{n-1}$ respectivamente y además $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ y $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l$, tenemos:

$$r = \frac{1}{l} \Longrightarrow l = \frac{1}{r} \quad (1)$$

[10]Burgos. J. (2007). Cálculo Infinitesimal de una Variable. Editor: Carmelo Sánchez González. Pp 504

$$r' = \frac{1}{l'} \Longrightarrow l' = \frac{1}{r'} \qquad (2)$$

Reemplazando en (2), tenemos:
$\frac{1}{r'} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|na_n|}$
$= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, finalmente reemplazando con $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ y $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l$, tenemos:
$= 1 \cdot l$
$= l$, recurriendo a (1), se tiene:
$= \frac{1}{r}$
$\Longrightarrow \frac{1}{r} = \frac{1}{r'}$

De lo anterior se concluye que los radios de convergencia de la serie dada y su serie derivada son el mismo.

Observación 5:

Una serie de Potencias $\sum a_n x^n$ y su serie derivada, aunque tienen el mismo radio de convergencia, pueden tener distinto caracter en los extremos del intervalo de convergencia, por ejemplo:
La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ y su derivada $\sum_{n=0}^{\infty} x^{n-1}$, tienen radio de convergencia $r = 1$, pero para $x = -1$ tienen distinto caracter, puesto que la primera converge y su derivada diverge. como se muestra a continuación:

1. Reemplazando con $x = -1$ en la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$, tenemos: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, luego, aplicando límite tenemos:
   $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ por lo tanto la serie converge.

2. Reemplazando con $x = -1$ en la serie derivada $\sum_{n=0}^{\infty} x^{n-1}$, tenemos:

$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1} = -\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}$

Luego, aplicando límite, tenemos:

$\lim_{n\to\infty} 1 = 1 \neq 0$ por lo tanto la serie no converge.

Observación 6:

Como cualquier serie de potencias $\sum a_n x^n$ *tiene el mismo radio de convergnecia que su derivada* $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$*, se puede asegurar que, en particular esta última tiene el mismo radio de convergencia que su serie derivada* $\sum n(n-1)a_n x^{n-2}$*, que es la derivada segunda de la serie* $\sum a_n x^n$ *de partida. A partir de este razonamiento se concluye que una serie de potencias (cualquiera) tiene el mismo radio de convergencia que su serie derivada de todo orden* $k \in \mathbb{N}$[11]*.*

Demostración:

Sea $r = \frac{1}{l}$, $r' = \frac{1}{l'}$ y $r'' = \frac{1}{l"}$ los radios de convergencia de $\sum a_n x^n$, $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ y $\sum n(n-1)a_n x^{n-2}$, respectivamente. Además además $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ y $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l$, tenemos:

Dado

$$r = \frac{1}{l} \Longrightarrow l = \frac{1}{r} \tag{1}$$

$$r' = \frac{1}{l'} \Longrightarrow l' = \frac{1}{r'} \tag{2}$$

$$r'' = \frac{1}{l"} \Longrightarrow l'' = \frac{1}{r''} \tag{3}$$

Reemplazando en (3), tenemos:

$\frac{1}{r''} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|n(n-1)a_n|}$

$= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{n-1} \cdot \sqrt[n]{|a_n|}$

$= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n-1} \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$

Reemplazando con $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ y $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l$, tenemos:

$= 1 \cdot 1 \cdot l$

[11] Burgos. J. (2007). Cálculo Infinitesimal de una Variable. Editor: Carmelo Sánchez González. Pp 504-505

$= l$

Reemplazando con (1), se tiene:

$= \frac{1}{r}$

$\Longrightarrow \frac{1}{r''} = \frac{1}{r}$

y a su vez, como demostramos en 4.1.1 se cumple que:

$\frac{1}{r''} = \frac{1}{r} = \frac{1}{r'}$

De esta manera concluimos que la serie dada $\sum a_n x^n$ y su derivada de orden $k \in \mathbb{N}$ tienen el mismo radio de convergencia.

4.2 Continuidad, Derivada e Integral de una serie de Potencias.

Sea $\sum a_n x^n$ una serie de potencias que tiene radio de convergencia $r > 0$ (no nulo); para x de su campo de convergencia, llamemos $f(x) = \sum^{\infty} a_n x^n$ a la suma de la serie. Se verifica que la suma $x \leftrightarrow f(x)$ es una función contínua, derivable e integrable; más exactamente[12]*:*

4.2.1 Continuidad

La suma $f(x) = \sum^{\infty} a_n x^n$ es contínua en todo punto x del campo de convergencia.

La continuidad en el campo de convergencia se probará como consecuencia de la propiedad de la derivada que veremos a continuación.

4.2.2 Derivada

La suma $f(x) = \sum^{\infty} a_n x^n$ es derivable en todo $x \in]-r, r[$ y su derivada es $f'(x) = \sum^{\infty} n a_n x^{n-1}$(lo que se expresa diciendo que las series de potencias se pueden derivar término a término), o sea:

$$D\left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right] = \sum_{n=1}^{\infty} D\left[a_n x^n\right] = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \text{ para } |x| < r$$

[12]Burgos. J. (2007). Cálculo Infinitesimal de una Variable. Editor: Carmelo Sánchez González. Pp 505

Demostración:

Hemos de comprobar que $\varphi(x) = \sum^{\infty} na_n x^{n-1}$es la derivada de $f(x) = \sum^{\infty} a_n x^n$, para todo $x \in]-r.r[$, esto es, que:

$$\lim_{h\to\infty} \left[\varphi(x) - \frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right] = 0 \quad \text{para } |x| < r \tag{1}$$

Se considerará un $x_0 \in \mathbb{R}$ (cualquiera) tal que $|x| < x_0 < r$, y los incrementos h de tal manera que $|x+h| < x_0$.

Para comenzar, como las series $\sum a_n x^n$ y $\sum a_n (x+h)^n$ son absolutamente convergentes, podemos poner que:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+h)^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}{h}$$

$$= \frac{1}{h}\sum_{n=0}^{\infty} a_n \left[(x+h)^n - x^n\right] \tag{2}$$

El primer sumando de esta serie es nulo, por lo que se puede empezar la suma con $n = 1$. Además, la última serie es absolutamente convergente según el Teorema del Valor Medio de Lagrange aplicado a la función $x \to x^n$ en el intervalo de los extremos $x + h$ y x, se sabe que existe ξ_n (número real que depende de n) comprendido en dicho intervalo, tal que:

$$\begin{aligned}(x+h)^n - x^n &= f'(\xi_n)\left[(x+h) - x\right] \\ &= (\xi_n)'[h] \\ &= hn(\xi_n)^{n-1}\end{aligned}$$

Luego reemplazamos en (2), obteniendo:

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{1}{h}\sum_{n=1}^{\infty} a_n\left[nh\left(\xi_n\right)^{n-1}\right]\\ &= \frac{1}{h}\cdot h\sum_{n=1}^{\infty} a_n\left[n\left(\xi_n\right)^{n-1}\right]\\ &= \sum_{n=1}^{\infty} na_n\left(\xi_n\right)^{n-1} \qquad (3)\end{aligned}$$

Esta última serie es absolutamente convergente, ya que lo era la serie de (2).

Ahora, como la serie $\sum na_n x^{n-1}$, cuya suma es $\varphi(x)$, también es absolutamente convergente. De (3) se deduce que:

$$\begin{aligned}\varphi(x)-\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}-\sum_{n=1}^{\infty} na_n\left(\xi_n\right)^{n-1}\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\left[na_n x^{n-1}-na_n\left(\xi_n\right)^{n-1}\right]\\ &= \sum_{n=1}^{\infty} na_n\left[x^{n-1}-\left(\xi_n\right)^{n-1}\right] \qquad (4)\end{aligned}$$

Donde la última serie es absolutamente convergente. Nuevamente se aplica el Teorema del Valor Medio de Lagrange a la función $x \to x^{n-1}$ en el intervalo de extremos x y ξ_n, entonces se sabe que existe un número real ζ_n (que depende de n) comprendido en este intervalo, tal que:

$$\begin{aligned}x^{n-1}-\left(\xi_n\right)^{n-1} &= f'\left(\xi_n\right)\left(x-\xi_n\right)\\ &= \left(x-\xi_n\right)(n-1)\left(\zeta\right)^{n-2}\end{aligned}$$

Si llevamos esta expresión a(4)se tiene que:

$$\varphi(x)-\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n(x-\xi_n)(\zeta_n)^{n-2} \qquad (5)$$

Donde esta última serie es absolutamente convergente, pues lo era la de (4), con lo que, por ser además $|x-\xi_n|<|h|$ y $|\zeta_n|<x_0$, aplicando valor absoluto y desigualdad triángular a (5), se obtiene:

$$
\begin{aligned}
\left|\varphi(x)-\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right| &\leq \left|\sum_{n=2}^{\infty} na_n\,(n-1)\,(x-\xi_n)\,(\xi_n)^{n-2}\right| \\
&< \sum_{n=2}^{\infty}\left|na_n\,(n-1)\,hx_0^{n-2}\right| \\
&< |h|\sum_{n=2}^{\infty}\left|a_n n\,(n-1)\,x_0^{n-2}\right| \qquad (6)
\end{aligned}
$$

La serie $\sum\limits_{n=2}^{\infty} n\,(n-1)\,a_n x^{n-2}$, que es la derivada segunda de la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, tiene radio de convergencia r y es $|x_0|<r$, resulta que la serie de (6) es convergente. Llamando s a su suma, resulta:

$$0 \leq \left|\varphi(x)-\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right| < |h|\,s$$

Tomando límites para $h\to 0$, tenemos:

$$
\begin{aligned}
\underset{h\to 0}{lim} 0 \leq \underset{h\to 0}{lim}\left|\varphi(x)-\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right| &< \underset{h\to 0}{lim}|h|\,s \\
0 \leq \underset{h\to 0}{lim}\left|\varphi(x)-\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right| &< 0
\end{aligned}
$$

Deduciendo de esta manera que la suma $f(x)=\sum a_n x^n$ es derivable y continua en $x\in\,]-r,r[$.

4.2.3 Integral

La suma $f(x)=\sum^{\infty} a_n x^n$ es integrable en todo intervalo $[0,x]$ incluido en su campo de convergencia y su integral es $\int_0^x f(t)dt=\sum^{\infty}\left[\frac{a_n}{n+1}\right]x^{n+1}$ (lo que se expresa diciendo que las series de potencias se pueden integrar término a término), o sea:

$$\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n\right)dt=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_0^x a_nt^ndt\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}\ \text{Para todo } x \text{ del campo de convergencia}$$

Demostración:

Tenemos que:

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n=s(x)\ /\ \text{integrando respecto a } x\in\,]-r,r[$$

$$\int\left(a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n\right)dx=\int s(x)dx$$

$$\int a_0dx+\int a_1xdx+\int a_2x^2dx+...+\int a_nx^ndx=\int s(x)dx$$

$$a_0x+\frac{a_1x^2}{2}+\frac{a_2x^3}{3}+...+\frac{a_nx^{n+1}}{n+1}=\int s(x)dx$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_nx^{n+1}}{n+1}=\int s(x)dx$$

Concluyendo de esta manera que las series de potencias se pueden integrar término a término.

4.2.4 La suma de una Serie de Potencias es de Clase Infinito

Si $\sum a_n x^n$ *es una serie de potencias de radio de convergencia* $r > 0$*, entonces su suma* $f(x) = \sum^{\infty} a_n x^n$ *admite derivada de todo orden* $k \in \mathbb{N}$ *y su derivada k-ésima (para* $k \in \mathbb{N}$*) es la suma de la serie que resulta de derivar término a término la serie dada:*

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n x^{n-k} \ , \quad \textit{para } |x| < r\text{[13]}.$$

Demostración:

Sea $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n n!}{(n-1)!} x^{n-1}$$

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n n!(n-1)}{(n-1)!} x^{n-2} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n n!(n-1)}{(n-1)(n-2)!} x^{n-2} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n n!}{(n-2)!} x^{n-2}$$

$$f'''(x) = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{a_n n!(n-2)}{(n-2)(n-3)!} x^{n-3} = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{a_n n!}{(n-3)!} x^{n-3}$$

$\vdots$

$$f^k(x) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{a_n n!}{(n-k)!} x^{n-k}$$

Probando de esta manera que la suma de una serie de potencias admite derivada de todo orden.

[13] Burgos. J. (2007). Cálculo Infinitesimal de una Variable. Editor: Carmelo Sánchez González. Pp 509

4.3 Teoremas de Abel (Para series de Potencias)

Sea $\sum a_n x^n$ una serie de potencias cuyo radio de convergencia es $r > 0$. Se verifica:

4.3.1 Teorema de Abel

Si la serie $\sum a_n x^n$ es convergente en el punto $x = r$ o en el punto $x = -r$, entonces dicha serie es uniformemente convergente en $[0, r]$ o en $[-r, 0]$, respectivamente[14].

Demostración:

Debemos probar que $\sum f_n \varphi_n$ converge uniformemente en $[0, r]$. Recurriendo al criterio de Abel (véase **2.2.2.2**) y trabajando con el término n-ésimo de la serie $\sum a_n x^n$, tenemos que:

$$a_n x^n = \varphi_n(x) f_n(x)$$

Donde:

$\varphi_n(x) = \left(\frac{x}{r}\right)^n$, $f_n(x) = a_n r^n \implies \left(\frac{x}{r}\right)^n \cdot a_n r^n = x^n a_n$

Sabemos que la sucesión numérica $\{\varphi_n(x)\}$ es monótona decreciente para $x \in [0, r]$, además está uniformemente acotada en $[0, r]$, pues todos los φ_n admiten una cota en $[0, r]$, al número 1. Luego, sabemos que $\sum f_n$ es uniformemente convergente en $[0, r]$, por lo tanto $\sum a_n x^n$ también lo es en $[0, r]$.

Cabe destacar que para $x = -r$ se analiza de manera análoga.

4.3.2 Segundo Teorema de Abel

Si la serie $\sum a_n x^n$ es convergente en el punto $x = r$ o en el punto $x = -r$, entonces su suma $x \to \sum^{\infty} a_n x^n$ es una función contínua en $x = r$ o $x = -r$ e integrable en $[0, r]$ o $[-r, 0]$, respectivamente; se verifica que:

$$\lim_{x \to \pm r} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (\pm r)^n \ e \int_0^{\pm r} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (\pm r)^{n+1}$$[15].

[14]Burgos. J. (2007). Cálculo Infinitesimal de una Variable. Editor: Carmelo Sánchez González. Pp 549

[15]Burgos. J. (2007). Cálculo Infinitesimal de una Variable. Editor: Carmelo Sánchez González. Pp 549

Demostración:

Sea $\sum a_n x^n$ uniformemente convergente en $[0, r]$ y además sus funciones son continuas e integrables en $[0, r]$. Recurriendo a los teoremas de cotinuidad e integrabilidad (véase **3.2.3** y **3.2.4**, respectivamente), se cumple que la función suma es contínua e integrable en $[0, r]$, en particular contínua para $x = r$.

La demostración es análoga para $[-r, 0]$.

Ejercicios

Recurriendo a los anteriores teoremas de derivación e integración de series de potencias, comprobar que:

1. $\dfrac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + ... + (n+1)x^n + ... \qquad \text{para } |x| < 1$

Desarrollo:
Como es una serie de potencias, podemos integrar, de esta manera resulta:

$$\int \frac{1}{(1-x)^2}dx = x + x^2 + x^3 + ... + x^{n+1} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1}$$

Realizando un cambio de índice, tenemos:

$$\int \frac{1}{(1-x)^2}dx = \sum_{n=1}^{\infty} x^n$$

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ es una serie de potencia de radio $r = 1$ y su suma esta dada por $s(x) = \dfrac{1}{1-x}$, entonces:

$$\frac{1}{1-x} = x + x^2 + x^3 + ... + x^n + ...$$

Finalmente derivando tenemos:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + ... + nx^{n-1} + ... = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$$

Haciendo un cambio de índice, tenemos que:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + ... + nx^{n-1} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$$

Luego:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$$

Como teníamos que probar.

2. $arctg(x) = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - ... + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} + ...$

Desarrollo:
Derivando tenemos:

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - ... + (-1)^n x^{2n} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$$

La serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$ tiene radio de convergencia $r = 1$ y su suma es $s(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, entonces:

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - ... + (-1)^n x^{2n} + ...$$

Finalmente al integrar resulta:

$$\int \frac{1}{1+x^2} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + ...$$

Entonces, se cumple que:

$$arctg(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + ...$$

Como se tenía que demostrar.

Bibliografía

[1] (2004). *Biografías y vidas*. Recuperado Marzo 22, 2014 de www.biografiasyvidas.com

[2] Apostol, T. (1999). *Calculus: Cálculo con funciones con una variable, con una introducción al álgebra lineal*. México: Editorial Reverté.

[3] Aznar, E. (2007). Universidad de Granada. Recuperado marzo 22, 2014 de www.ugr.es/~eaznar/index.html

[4] Bruzual, R. (2005). *Introducción a las sucesiones y series numéricas*. Venezuela.

[5] *Cálculo infinitesimal 2°*. Recuperado mayo 8, 2014, de www.us.es/miembros/ajimenez/C I/TEO/CI_tema2.pdf

[6] C*urriculum, objetivos fundamentales y contenidos mínimos obligatorios de la educación básica y media actualización 2009*. Recuperado marzo 21, 2014 de www.google.cl/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=1&ved=0CCkQFjAA&url=http%3A%2F%2Fcurriculumenlinea.mineduc.cl%2Fdescargar.php%3Fid_doc%3D201210011205280&ei=Y5Z2U_i8EKXmsATnt4LgDQ&usg=AFQjCNEfR5lssmdlckhaU9mNFKaopGCHaQ&bvm=bv.669174 71,d.cWc

[7] De Burgos, J. (2007). *Cálculo infinitesimal de una variable*. España: Editor, Carmelo Sánchez González.

[8] Flores, R. Valencia, N. Dávila, G. García, M. (2008). *Fundamentos del cálculo*. Editorial Garabatos.

[9] Kreyszig. E. (1974). *Introducción a la estadística matemática: Principios y Métodos*. México: editorial Limusa.

[10] Larson, R. (1999). *Cálculo con geometría analítica*. México: Editorial Mc Graw-Hill/Interamericana.

[11] Leyes de los grandes números. Teoremas límite. Recuperado en octubre 30, 2014, de www.uv.es/ceaces/tex1t/2%20conver/gnumeros.htm

[12] López, C. R. (2006). *Cálculo de Probabilidades e Inferencia Estadística con tópicos de Econometría*. Venezuela: Editorial Texto.

[13] Perez, J. (-). *Cálculo diferencial e integral*. Recuperado marzo 21, 2014, de www.ugr.es/~fjperez/textos/calculo_diferencial_integral_func_una_var.pdf

[14] Sánchez. V. (-). *Análisis de Variable Real.* Universidad Complutense de Madrid.

[15] *Sucesiones y Series de Funciones.* Recuperado en septiembre 09, 2014 de www.uam.es/personal_pdi/ciencias/fchamizo/asignaturas/calc1inf1011/apjperez /calculo_cap10.pdf

[16] Tucker. H. (1973). *Introducción a la teoría matemática de las probabilidades y a la estadística*. España: editorial VICENS-VIVES.

[17] *Un poco de historia y el nacimiento del cálculo*. Recuperado marzo 18, 2014, de www.fca.unl.edu.ar/Intdef/Historia1.htm#Indice.