UNIVERSIDAD DEL BÍO BÍO

FACULTAD DE EDUCACIÓN Y HUMANIDADES

ESCUELA DE PEDAGOGÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ACTIVIDADES Y JUEGOS MATEMÁTICOS QUE MOTIVEN EL APRENDIZAJE.

PROFESOR: BASSO BASSO, IVO ROBERTO

TESISTAS: BRAVO CORTES, FRANCISCA ALEJANDRA

PARADA VENEGAS, RAÚL ESTEBAN

SEMINARIO PARA OPTAR AL TÍTULO DE PROFESOR EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

CHILLAN, 2014

"Hay situaciones en la vida las que nos hacen estar en un lugar preciso, con las personas necesarias y vivir momentos de aprendizajes. Sin lugar a duda si me toca describir el último año de la universidad *fue exactamente preciso".*

Quiero agradecer en primer lugar a mi familia mamá, papá, hermana y hermano. Ustedes hicieron posible este logro en mi vida, cada momento en el que quise flaquear estaban ustedes para darme el ánimo, quizá habían veces en que ni se daban cuenta, pero siempre estuvieron presentes en cada momento, gracias infinitas familia ☺

En segundo lugar quiero agradecer de forma especial a mis queridos amigos y amigas, creo que fueron la mejor familia que pude elegir, cada uno de ustedes aportaron un detalle en mi vida. Magdis fuiste una mamá en esos 5 años juntas, reímos, lloramos, nos enojamos pero siempre estabas para mí y yo para ti y nos dimos cuenta que nuestra amistad supera distancias, gracias por permitir conocer a tu hermosa familia y sentirme parte de ella. Fran fuiste mi compañera de locura en estos años… nunca olvidare ese auto rojo invisible que manejamos en pleno centro de Chillán, solo contigo se podía hacer eso… gracias infinitas por siempre tenerme fe, confiar en que si podía y darme el ánimo para continuar. Álvaro Cartes (mi osito) y Marcelino (kapito) gracias por todo, siempre me hicieron reír y me escucharon cuando estaba mal. Raúl a pesar que estuvimos un tiempo separados creo que hacer la tesis contigo fue lo mejor que me pudo ocurrir, gracias por soportar la histeria que me daba en los momentos menos precisos.

En tercer lugar y no menos importante quiero agradecer al mejor de los mejores, al que siempre nos enseñó de manera motivadora y que siempre fue preciso, profesor Ivo Basso fue el mejor… gracias por cada momento vivido y gracias por permitirme ser una de sus estudiantes regalonas… jajaja jamás me lo dijo pero sé que es así. También quiero agradecer a cada profesor que estuvo presente en mi formación académica y gracias por permitirme ser tutora fue lo mejor que pudo pasar, gracias mis pollos y mis pequeños que en estos 2 años me entregaron lo mejor de ustedes.

Gracias infinitas a todos… ahora puedo decir que "SOY PROFESORA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA". Ojo se viene el auto rojo XD

Francisca Bravo Cortes ☺

"*Lo esencial es invisible a los ojos. Solo se ve con el corazón"* (El principito), estas son mis primeras palabra de agradecimiento, pues son las que representan mi pensamiento y mi ser.

Conocer a las personas que están detrás de esta obra, que a mi parecer es un texto con mucha utilidad para cualquier docente e incluso para los amantes de la matemática. Menciono esto último como un agradecimiento personal, pues gracias a esta carrera (en la cual ya pase la primera mitad) pude enamorarme de las matemáticas, y en esencia *"Si la gente no piensa que las matemáticas son simples, es solo porque no se dan cuenta de lo complicada que es la vida" (John Von Neumann),* para mí la matemática es la vida misma, o en su defecto, la vida es la matemática misma.

Mis agradecimientos van dirigidos principalmente a mi familia, mis padres, quienes estuvieron apoyándome en cada instancia de mi carrera universitaria, bendecir la paciencia que tuvieron conmigo durante estos años, los cuales pasaron cual bolsa de plástico a la deriva en un día de otoño. A su vez agradecer a mi nueva familia, mi señora esposa, cual fue fundamental para sobreponerme ante la adversidad, agradecer a mis dos hijos, Florencia, quien a pesar de las discusiones siempre logras sacarme una sonrisa, Maximiliano, quien me enseña día a día que no importa el cansancio, es inevitable no sonreír contigo.

En un segundo plano agradezco desde el alma a todos mis amigos que corrieron conmigo durante estos, saltos con uno y con otros, quienes estuvieron en las buenas y en las malas. Esas tardes mañanas en el "aeropuerto", los pastos de la universidad, las noches de cervezas y cuadernos. Los almuerzos improvisados, los tallarines pegados, los días de Póker.

Por ultimo mis más sinceros abrazos para los profesores con los cuales se hicieron vínculos de amistad y simpatía. Y en especial a nuestro profesor guía, Ivo Basso Basso, quien tuvo una paciencia y una dedicación especial con nosotros.

"*Solo* le pido a dios que me conceda: serenidad para aceptar las cosa que no puedo cambiar, Valor para cambiar aquellas que puedo, y Sabiduría para saber diferenciar entre ambas" (San Francisco de Asís).

Profesor de Educación Matemática: Raúl Parada Venegas…

ÍNDICE:

Introducción

Sin lugar a duda la motivación es un factor importante para que un estudiante quiera adquirir los aprendizajes que un profesor entrega y enseña en el aula, cuando el aprendizaje es divertido y excitante, se interesan y deseado aprender.

Existen variados sistemas de medición de aprendizajes que dejan a Chile por bajo del promedio, eso nos deja en claro que hay una deuda pendiente en lo que respecta a la educación y lo que respecta a cómo se enseña en el aula, o si existe un real interés en los estudiante de querer aprender.

Por esto nos lleva a realizar una recopilación de actividades, para el uso del docente, en la cual serán desglosadas por los ejes temáticos propuestos por el MINEDUC: eje de algebra, eje números y eje de geometría. Además fue agregado un nuevo capítulo en donde se desarrollaran las curiosidades matemáticas, en donde propondremos diversas actividades a modo de desafío y paradojas interesantes que relacionan la cotidianidad de la vida con la perspectiva analítica de la matemática.

Las actividades que se presentaran tendrán diversos niveles de complejidad, los cuales irán desde el uso básico de la matemática y el razonamiento (destinado para alumnos de básica, o personajes que se vienen a integrar a la comunidad matemática), hasta comprender verdaderos desafíos de ingenio y un amplio uso de las herramientas que se disponen en el área de las matemáticas.

Actividades tales como las adivinanzas del pensamiento, curiosidades al momento de realizar diversas sumas y multiplicaciones (dependiendo del módulo), formas de aproximación a las raíces, curiosidades históricas que se desenvuelven alrededor de conmemorados matemáticos. Son parte de las actividades que se espera tener una utilidad significativa al momento de abordar diferentes temáticas para los docentes en el aula.

Marco teórico

Para comprender el sentido que se persigue detrás de este proyecto, es necesario introducirnos en tres temáticas, o más bien tres preguntas: 1.- ¿Que se entiende por actividades lúdicas o juegos matemáticos? 2.- ¿Por qué es importante el rendimiento académico? 3.- ¿Cuál es la inclusión de la motivación entre los juegos y el rendimiento académico?

Mediante estos tres puntos nos queremos acercar al hecho de que sin motivación se dificulta la enseñanza, más aun, cuando nos damos cuenta que estamos inmersos en un sistema que por una parte se exigen buenos resultados académicos (para el prestigio del establecimiento al que se pertenece) mediante una cobertura curricular que en si es abrumadora, y por otro lado la realidad del aula, en la que un gran porcentaje de alumnos no desean aprender matemáticas, o simplemente no son del interés de este, es por ello la suma importancia de la motivación.

1.- Juegos matemáticos:

Para introducirnos en este punto nos centraremos en lo expuesto en la IV jornada sobre aprendizaje y enseñanza de las matemáticas (Guzmán, 1984), en donde se señala la importancia de los juegos para las matemáticas, señalando que mientras más interiorizado se tenga la matemática, esta nunca deja totalmente de ser un juego, a pesar que para aquellos que no presentan mucha afinidad con ella la ven como “mortalmente aburrida, nada tiene que ver con el juego”.

“Así bien se concibe la matemática como un juego, en donde se presentan el mismo tipo de estímulos y actividades que se dan en el resto de jugos intelectuales, pues: uno aprende las reglas, estudia las jugadas fundamentales, experimenta en partidas sencillas, observa a fondo las partidas de los grandes jugadores, sus mejores teoremas, tratando de asimilar sus procedimientos para usarlos en procedimientos, trata finalmente de participar más activamente en problemas emergentes o en problemas viejos que esperan ensamblados de modo original y con útiles herramientas ya existentes o crear alguna herramienta nueva que conduzca a la solución del problema" (Guzmán, 1984, pag 3).

De esta manera comprendemos que los juegos no son ajenos a las matemáticas y que de cierto modo son herramientas fundamentales de esta mismas, añadiendo cada vez más características lúdicas, que las hacen atrayente al público general, pues es esté último punto el fundamental, es decir, cuando nos queremos referir a las actividades lúdicas, deseamos acercarnos a las matemáticas, y que las matemáticas se acerquen al lado lúdico que se contemplan en los juegos.

2.- Rendimiento académico:

En ciertas ocasiones se cataloga a las personas o sujetos de estudio mediante una media aritmética (promedio) de sus acciones, debido a las propiedades estadísticos de esta. A donde queremos llegar con este punto, de forma simple, es denotar a los sujetos numéricamente de tal forma que sea un dato representativo del mismo para cada circunstancia a abordar. Es en este caso que el rendimiento académico es un dato representativo de los sujetos, en donde intervienen múltiples factores, tanto cuantitativos como cualitativos.

Es entonces mediante una de las teorías de Piaget, principalmente la que hace referencia al equilibrio del aprendizaje en donde mediante la inclusión de los juegos da inicio a los procedimientos que se describen en la teoría, teniendo cuidado con los cuatro problemas que se deben resolver:

1) ¿La situación propuesta para el aprendizaje es confusa?

2) ¿El alumno posee los conocimientos necesarios para volver al equilibrio?

3) ¿El alumno presenta un grado de motivación por el contenido o actividad a enseñar?

4) ¿Las concepciones intuitivas sobre el nuevo contenido no le permitirán volver al equilibrio? (Font V., 1994).

Con esto resaltamos la importancia de la motivación, tanto al momento de confeccionar una actividad y al momento de realizarla.

3.- Motivación:

"Ensayo mental preparatorio de una acción para animar o animarse a ejecutarla con interés y diligencia" (DIAZ BARRIGA, 1998). Dicho "ensayo mental" debe ser inculcado, guiado, interiorizado, y finalmente auto inyector.

Nos referimos pues al uso de actividades lúdicas que produzcan una motivación en los alumnos, mediante la presentación de la actividad, es decir, con solo nombrarla debe captar el interés del alumno, y de esta forma mediante la práctica de las actividades, el alumno realice una automotivación por esta área del conocimiento (inculcar).

Como toda actividad debe ser guiada por un personal competente en el área que se desea abarcar, en este caso el docente debe presentar un dominio completo tanto del contenido a tratar en la actividad como la actividad misma (guia).

Como se mencionó con antelación, mediante a practica la interiorización de la motivación y el interés ante al matemática proporcionara en el alumno una atención especial ante esta asignatura (interiorización).

Por último, la finalidad de toda actividad es que el mismo alumno realice el proceso de motivación ante un contenido dado, en otras palabras, queremos inculcar en los alumnos un amor especial hacia las matemáticas, eliminar ese miedo presente ante ella (auto inyección de motivación)

Formulación del problema

Mediante una revisión simple de los instrumentos y herramientas que poseen los docentes, se puede observar que las actividades y los problemas propuestos para los estudiantes no siempre captan el interés de estos. Puede deberse a que la gran mayoría de los problemas están diseñados principalmente para alumnos de ciertas características (Los problemas propuestos en los planes y programas y en los textos del estudiante que ofrece el mineduc), como por ejemplo: características que se designan por región o zona geográficas, entre otros. Por ello es necesaria una búsqueda más exhaustiva respecto a las unidades a tratar.

Alguna vez nos hemos preguntado ¿Cómo se encuentra chile en el uso del razonamiento matemático? No hablamos sólo desde el punto de vista de las notas obtenidas en el periodo de escolaridad, sino que la alfabetización matemática, un término expuesto como objetivo fundamental en las pruebas PISA, ahora bien cuando analizamos los resultados de las pruebas PISA (años 2000, 2006, 2009, 2012, el 2003 chile no se presentó para rendirla) donde el desempeños en matemáticas se ha estancado, cabe mencionar, que chile se ubica en el tercio inferior de los 65 países que rindieron la prueba. Dichos parámetros son alarmantes por ellos tanto el gobierno como los docentes en práctica se han esforzado para remediar esta situación, mediante la revisión del currículum, la innovación en las clases, uso de tics, entre otras estrategias lúdicas para mejorar el rendimiento en matemática.

Es por esto que las actividades que se planifican para los alumnos no producen la motivación necesaria para que estos tengan un aprendizaje significativo y perdurable en el tiempo. De la misma forma la baja existencia de base de datos (actividades y problemas que motiven a los estudiantes a aprender un contenido matemático) dificulta la búsqueda de herramientas para el uso del docente.

Es decir para que un docente posea un “compendium” de actividades los alumnos debe poseer una gran cantidad de años de servicio y práctica, en donde realice innumerables actividades, y que ellas les hayan dado resultado, y ese resultado rinda frutos.

Ante todo esto nos preguntamos ¿Cómo realizar un texto que contenga actividades que motiven a los estudiantes a comprender mejor las matemáticas?

Para dar respuesta a esta pregunta se indagara en esta área, la motivación y se recopilaran actividades, juegos lúdicos e incluso adivinanzas, curiosidades que incentiven la motivación del estudiante.

Objetivos

- Recopilar y adaptar ejercicios que motiven el aprendizaje en matemática de los estudiantes
- Clasificar las actividades según los ejercicios en ejes temáticos (algebra, geometría y números), para una mejor búsqueda de ellos.
- Clasificar las actividades según los contenidos matemáticos a tratar.

Metodología

- Estudio personal de textos que aborden la temática de actividades lúdicas para la motivación.

Este consistirá en estudios de la revisión bibliográfica tanto de textos manuales y guías digitales, seleccionando los contenidos que tratan cada uno de ellos.

- Exposiciones y discusión de los temas estudiados anteriormente.

Esta etapa tendrá como objetivo tener una selección más exhaustiva de los ejercicios ya seleccionados, dando conocer el eje temático al cual pertenece.

- Redacción de los temas estudiados

Es esta etapa se confeccionarán los capítulos del texto ya clasificados anteriormente. Dando sugerencias o comentarios de cómo y cuándo aplicarse.

- Revisión de los temas señalados anteriormente.

En esta etapa se harán las correcciones a los capítulos y temas trabajados.

Capítulo I:

Eje de Números y Operaciones.

En este eje se abarcara tanto el desarrollo del concepto de número como la destreza en el cálculo mental y uso de algoritmos.

Una vez que los estudiantes son capaces de realizar operatorias en los distintos conjuntos numéricos ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$), con la ayuda de metáforas y representaciones, aprenden los algoritmos de adición, la sustracción, la multiplicación y la división, incluyendo el sistema posicional de escritura de los números (y los distintos sistemas de enumeración).

Se espera que desarrollen las estrategias de cálculo mental, comenzando con ámbitos numéricos pequeños y ampliando estos en los cursos superiores, usando las mismas operatorias en fracciones, porcentajes.

En todos los ejes, y en especial en el de Números, el aprendizaje debe iniciarse haciendo a los alumnos manipular material concreto o didáctico y pasando luego a una representación pictórica que, finalmente, se reemplaza por símbolos (introducción al eje de algebra).

CONTENIDO	**ACTIVIDAD**
1. Aproximación de números Irracionales	**1.1** Aproximando $\sqrt{3}$
2. Aproximación	**2.1** una extraña manera de dividir
3. Aritmética modular	**3.1** El código de EAN-13
	3.2 El cifrado de cesar
4. Potencias	**4.1** Los número del señor Smith
5 Sumatoria	**5.1** La anécdota de Gauss, ¡Maldito niño!

1. CONTENIDO: Aproximación de números irracionales.

1.1. ACTIVIDAD: *Aproximando* $\sqrt{3}$

Para muchos estudiantes de educación media la $\sqrt{4}$ es fácilmente calculable, ya que es encontrar un número multiplicado por sí mismo nos dé el radicando de esta raíz que es 4 y ese número es el 2.

Pero, **¿Cuál es el valor de $\sqrt{3}$?**

Supongamos que queremos calcular $\sqrt{3}$, pero no tenemos calculadora. ¿Cómo podríamos hacerlo de tal forma que no perdamos decimales?

Para poder responder esta pregunta necesitamos un modelo matemático que consiste en la siguiente ecuación

$$a^2 = 3$$

Escribamos en primer lugar una serie de igualdades equivalentes.

$$a^2 = 3$$

$$a^2 - 1 = 2$$

$$(a+1)(a-1) = 2$$

$$a - 1 = \frac{2}{a+1}$$

$$a = \frac{2}{a+1} + 1$$

Sabemos que $a = \sqrt{3}$ está comprendido entre 1 y 2, puesto que $a^2 = 3$ y 1^2 es menor que 3 y 2^2 es mayor que 3, entonces:

$$1 < a < 2$$

$$2 < a + 1 < 3$$

$$\frac{1}{3} < \frac{1}{a+1} < \frac{1}{2}$$

$$\frac{2}{3} < \frac{2}{a+1} < \frac{2}{2}$$

$$\frac{5}{3} < \frac{2}{a+1} + 1 < 2$$

$$\frac{5}{3} < a < 2$$

Con esto podemos concluir que $\sqrt{3}$ se encuentra ubicado entre $\frac{5}{3}$ y 2, pero si queremos obtener más decimales aplicaremos los mismos pasos a esta igualdad.

$$\frac{5}{3} < a < 2$$

$$\frac{8}{3} < a + 1 < 3$$

$$\frac{1}{3} < \frac{1}{a+1} < \frac{3}{8}$$

$$\frac{2}{3} < \frac{2}{a+1} < \frac{3}{4}$$

$$\frac{5}{3} < \frac{2}{a+1} + 1 < \frac{7}{4}$$

$$\frac{5}{3} < a < \frac{7}{4}$$

$$1{,}666\ldots < \sqrt{3} < 1{,}75$$

Y cada vez que apliquemos este modelo matemático encontraremos más decimales y la exactitud de estos.

Actividad complementaria para los estudiantes.

Después de conocer y analizar el modelo de la raíz de tres, aproxima $\sqrt{5}$.

2. CONTENIDO: Aproximación.

2.1. ACTIVIDAD: *Una extraña manera de dividir*

Queremos dividir un número entre otro: Por ejemplo 97 entre 18, resulta además que:

- No tenemos papel ni lápiz a mano.
- Tenemos cierta prisa para conocer el cociente, pero nos importa nada el resto.
- El número divisor es el producto de dos o más números "pequeños" (como en nuestro caso $18 = 2 \cdot 9 = 6 \cdot 3 = 2 \cdot 3 \cdot 3$).

En estas condiciones existe una manera rápida y eficaz de efectuar la división.

Para dividir 97 entre 18, dado que, $18 = 2 \cdot 9$ empezamos dividiendo 97 entre 2.

Lo podemos hacer mentalmente y encontraremos 48 como cociente.

Seguidamente dividimos 48 por el otro factor 9 y hallamos 5.

Luego 5 es el cociente de dividir 97 entre 18.

En general supongamos que queremos dividir un entero positivo a por otro entero positivo b y que b nos aparece como el producto de dos enteros: $b = b' \cdot b''$. El procedimiento indicado consiste en lo siguiente. Dividimos a entre b'y hallamos un cociente q'. Dividimos luego q' entre b'' y hallamos q'' como cociente. Entonces q''es el cociente de dividir a entre b.

Curiosamente, el hecho de ignorar el resto de la división en cada uno de los pasos efectuados no afecta el resultado final.

3. CONTENIDO: Aritmética modular.

3.1. ACTIVIDAD: *El código de EAN- 13*

Los códigos EAN constan, habitualmente, de 13 dígitos representados mediante barras negras y espacios blancos que, de manera conjunta, determinan un código binario de fácil lectura. El EAN -13 se distribuye de la siguiente manera

Ejemplo: ABCDEFGHIJKLM:

- Los dos primeros (AB) forman el código del país de origen del producto
- Los cinco siguientes (CDEFG) identifican a la empresa productora
- Los otros cinco (HIJKL) indican el código del producto que ha sido asignado por la empresa
- El último (M) es el digito de control.

Para Verificar si el código es correcto se realizan las siguientes operaciones:

- Para calcularlo se tiene que sumar los dígitos situados en posición impar, empezando por la izquierda y sin contar el de control.
- Al valor resultante se le añade tres veces la suma de los dígitos situados en las posiciones pares.
- El digito de control es el valor que hace de la suma hallada anteriormente un múltiplo de 10.

Ejemplo:

0 012345 678905

Verifiquemos si el código es correcto:

$$0 + 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 3(0 + 2 + 4 + 6 + 8 + 0) = 25 + 3(20) = 85$$

El digito de control correcto debería ser $90 - 85 = 5$ (90 es el múltiplo de 10 más cercano)

Otra forma:

El modelo matemático del algoritmo se fundamenta en aritmética modular módulo 10, de la siguiente forma.

ABCDEFGHIJKLM, se llama N al valor de a expresión:

A+C+E+G+I+K+3(B+D+F+H+J+L)=N

Y *n* al valor N en módulo 10. El digito de control M viene determinado como M=10-*n*.

En el ejemplo anterior tenemos que 85≡5 (mód 10), luego el digito de control será, $10 - 5 = 5$

El algoritmo anterior puede enunciarse de manera equivalente utilizando el digito de control en los cálculos.

A + C + E + G + I + K + 3(B + D + F + H + J + L) + M ≡ 0 (mód 10)

Ejemplo:

Para el código: 5701263900544

$$5 + 0 + 2 + 3 + 0 + 5 + 3(7 + 1 + 6 + 9 + 0 + 4) + 4 = 100$$

100≡0 (mód 10) entonces el código es correcto

Nota: El término EAN de las siglas European article Number (número europeo de artículo) y su creación se remonta al año 1976. En la actualidad constituye uno de los estándares de mayor implantación en todo el mundo.

3.2. ACTIVIDAD: *El cifrado de Cesar:*

Es un método criptográfico el cual consiste en reasignar a cada letra del abecedario otra nueva, resultante de desplazar un determinado número de lugares dicha letra.

Nota: Se entiende por criptografía al arte de escribir mensajes cifrados.

Ejemplo:

00	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	Ñ	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	Ñ	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C

En este caso se desplazó tres lugares. Por ello un carácter que ocupa una posición x (**alfabeto llano, es decir sin cambios**) es el carácter que ocupa la posición $x+3$ (también del mismo alfabeto). Con esto, es necesario hallar una transformación para determinar la composición del cifrado **(la transformación que el emisor debe realizar)** y a su vez, la forma de descifrar el sistema **(transformación que el receptor relocalizara).**

Para un alfabeto de 27 caracteres, se trabaja una aritmética en módulo 27, es decir para el ejemplo planteado anteriormente trabajamos:

$$C_{(x)} = x + 3 \ \ (mod\ 27)$$

Donde x es el valor sin codificar y $C_{(x)}$ el valor codificado. Para el codificar el mensaje “AZUL” tenemos:

letra	valor	transformación	Valor codificado	Letra codificada
A	0	$C(0) = 0 + 3 \ \ (mod\ 27)$	3	D
Z	26	$C(26) = 26 + 3 = 29 \equiv 2 \ \ (mod\ 27)$	2	C
U	21	$C(21) = 21 + 3 = 24 \ \ (mod\ 27)$	24	X
L	11	$C(11) = 11 + 3 = 14\ (mod\ 27)$	14	Ñ

Así el nuevo mensaje codificado será “DCXÑ”.

Comentario en relación a la criptografía.

Concluyendo este primer acercamiento a la criptografía, se puede establecer una transformación, de nombre *cifrado afín*, que generaliza el cifrado César. Dicha transformación se define como:

$$C_{(a,b)}(x) = (a \cdot x + b)(mod.n)$$

Siendo a y b dos números enteros menores que el numero n de letras del alfabeto.

El máximo común divisor entre $a\ y\ n$ tiene que ser 1 [$mcd(a,n) = 1$], porque de lo contrario cabría la posibilidad de cifrar de diferente un mismo carácter (en palabras simples se daría dos vueltas al módulo al momento de llegar a un resultado). Tomemos por ejemplo el cifrado afín de expresión $C(x) = 2x + 1\ (mod.6)$, se verifica $mcd(2,6) = 2$.

letra	valor	Transformación	Valor codificado	Letra codificada
A	0	$C(0) = 2 \cdot 0 + 1 \equiv 1\ \ (mod\ 6)$	1	B
B	1	$C(1) = 2 \cdot 1 + 1 \equiv 3\ \ (mod\ 6)$	3	D
C	2	$C(2) = 2 \cdot 2 + 1 \equiv 5\ \ (mod\ 6)$	5	F
D	3	$C(3) = 2 \cdot 3 + 1 = 7 \equiv 1\ (mod\ 6)$	1	B

Teniendo presente las restricciones para dichas transformaciones es necesario determinar un proceso para determinar el inverso de una expresión de cifrado afin, veamos un ejemplo:

Supongamos que se ha interceptado el mensaje “YSFMG”, que se sabe que ha sido encriptado con un cifrado afin de la forma $C(x) = 2x + 3$ y escrito sobre un alfabeto tradicional de 27 caracteres. Es donde nos preguntamos ¿cuál será el mensaje original?, para ello se debe encontrar la función inversa de $C(x) = 2x + 3$ en modulo 27:

$$y = 2x + 3$$

$$2x = y - 3$$

Para poder aislar la x es preciso multiplicar ambos lados de la expresión por el inverso de 2. El inverso de 2 en módulo 27 es un entero n tal que:
$2 \cdot n \equiv 1\ (mod. 27)$ es decir 14, se comprueba: $14 \cdot 2 = 8 \equiv 1\ (mod\ 27)$

En consecuencia: $x = 14(y - 3)$

Ahora ya podemos descifrar el mensaje:

letra	valor	Transformación	Valor codificado	Letra codificada
Y	25	$14(25 - 3) = 308 \equiv 11\ \ (mod\ 27)$	11	L
S	19	$14(19 - 3) = 224 \equiv 8\ \ (mod\ 27)$	8	I
F	5	$14(5 - 3) = 28 \equiv 1\ \ (mod\ 27)$	1	B
M	12	$14(12 - 3) = 126 \equiv 18\ \ (mod\ 27)$	18	R
G	6	$14(6 - 3) = 42 \equiv 15\ \ (mod\ 27)$	15	O

El mensaje descifrado es la palabra “LIBRO”.

4. CONTENIDO: potencias

4.1. ACTIVIDAD: *Lo números del señor Smith.*

Todo comienza con Albert Wilansky, un numerólogo que invento una categoría de números a partir de su cuñado, un tal Harold Smith, el cual tenía un teléfono de número 4937775. Si se suman las cifras, se obtiene el 42:

$$\mathbf{4 + 9 + 3 + 7 + 7 + 7 + 5 = 42}$$

- Wilansky factorizo el número de teléfono:

$$\mathbf{4.937.775 = 3 \cdot 5^2 \cdot 65.837}$$

- Y lo escribió sin exponentes, repitiendo escolarmente los factores primos:

$$\mathbf{4.937.775 = 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 65.837}$$

- Y, ¡oh sorpresa!, obtuvo también 42 al sumar todas sus cifras:

$$\mathbf{3 + 5 + 5 + 6 + 5 + 8 + 3 + 7 = 42.}$$

A simple vista parece una definición algo rebuscada, pero en realidad ya se sabe que los números de Smith son infinitos, y que entre ellos se conocen algunos curiosos, como:

$$9 \cdot R_{1031} \ (10^{4594} + 3 \cdot 10^{2297} + 1)^{1476} \cdot 10^{3913210}$$

Donde R_{1031} (R viene de *repunit*, abreviatura inglesa de “unidad repetida”) representa el entero formado por 1.031 numero 1 repetidos o, si I prefiere

$$R_{1031} = \frac{10^{1031} - 1}{9}$$

Y que era en 2010 el mayor número de Smith conocido. Otro número más conocido es el “número de la bestia” el 666:

$$6 + 6 + 6 = 18$$

Y, por otra parte,

$$666 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 37$$

$$2 + 3 + 3 + 3 + 7 = 18$$

Este concepto es de utilidad ante los alumnos más aventajados, los cuales después de una evaluación, se quedan sin hacer nada. O bien es útil a manera de potenciar a dichos alumnos, para que ellos no se estanques en el conocimiento matemático.

5. CONTENIDO: Sumatoria.

5.1. ACTIVIDAD*: La anécdota de Gauss, ¡Maldito niño!*

Es conocido por los docentes la anécdota de Carl Friedrich Gauss (1777-1855), con uno de sus profesores de matemática, quien en busca de descanso y silencio en la sala, les encomendó a la clase que realicen la suma de todos los números del 1 al 100:

$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 98 + 99 + 100.$$

Al cabo de pocos minutos el jovencito Gauss se levantó y le entrego al maestro el resultado: 5.050.

¿Cómo se las arreglo el pequeño niño?...

Ya es sabido el procedimiento para ello, solo bastaba con invertir la suma y observar las curiosidades que se presentaban.

$$\begin{array}{c} 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 98 + 99 + 100 \\ \underline{100 + 99 + 98 + \cdots + 3 + 2 + 1} \end{array}$$

Se obtenían parejas en donde todas daban el mismo resultado:

$$1 + 100 = 2 + 99 = 3 + 98 = \cdots = 98 + 3 = 99 + 2 = 100 + 1 = 101.$$

Entonces **¿cuantas sumas había?** 100.

Y como eso era el doble del resultado que pedía el maestro, el resultado debería ser:

$$\frac{100 \cdot 101}{2} = 50 \cdot 101 = 5.050$$

Esta anécdota es simplificada para el entendimiento de todos, y para aplicarlos a nuestros alumnos, pero en realidad el problema original es más abrumador, pues lo que el maestro propuso es la suma de los 100 primeros términos de la serie:

$$81.297 + 81.495 + 81.693 + \cdots$$

En donde cada término difiere del anterior en 198. El resultado no es tan simple como antes; Gauss era aún más listo de lo que dice la leyenda, pues analicemos el procedimiento para ello:

Primero tuvo que determinar cuál es el último término:

Como son 100 los sumados, y 198 la diferencia entre uno y el otro se obtiene que el último valor es la suma del primer término 81.297 con la diferencia entre ellos hasta el final 198· 99 (pues se suma 99 veces el 198)

$$81.297\ +\ 99\cdot\ 198 =\ 100.899$$

Y luego se realiza el mismo razonamiento para cuando sumamos lo **100 primero términos.**

$$81.297 + 81.495 + 81.693 + \cdots\ + 100.503 + 100.701 + 100.899$$

$$\underline{100.899 + 100.701 + 100.503 + \cdots + 81.693 + 81.495 + 81.297}$$

De lo cual va obteniendo las sumas parciales de:

$$81.297 + 100.899 = 81.495 + 100.701 = \cdots = 182.196$$

$$\frac{100\cdot\ \ 182.196}{2} = 50 \cdot 182.196 = 9109800$$

Capítulo II:

Eje de Álgebra.

En la enseñanza básica y media uno de los ejes más visto es álgebra, donde sin lugar a duda la motivación para el estudiante debe ser una pieza clave, puesto que ellos deben intentar abstraerse para lograr entender algunos procesos. Es por esto que aquí entregaremos algunas actividades y ejercicios que servirán para lograr un aprendizaje más significativo.

De esta forma se pretende que los alumnos expliquen y describan las distintas relaciones entre números, formas, objetos y conceptos, que los facultará para investigar las formas, las cantidades y el cambio de una cantidad en relación con otra. Los patrones (observables en secuencias de objetos, imágenes o números que presentan regularidades) pueden ser representados en forma concreta, pictórica y simbólica, y los estudiantes deben ser capaces de transportarlos de una forma de representación a otra, extenderlos, usarlos y crearlos.

CONTENIDO	**ACTIVIDAD**
1. Proporcionalidad directa	**1.1** El prestamista
2. Proporcionalidad inversa	**2.1** Construyendo una pared
3. Propiedad distributiva	**3.1** El número de Sherezade
	3.2 El número 10101
4. Sistema de ecuaciones	**4.1** Adivinanza aritmética
5. Descomposición de números primos	**5.1** Los tres nueves
6. Ecuaciones de primer grado	**6.1** Adivinando números
	6.2 La adivinanza de los tres dados
	6.3 Dividamos por 9
	6.4 El resultado es 10
7. Series geométricas	**7.1**La leyenda del tablero de ajedrez
8. Inversa de Matrices	**8.1**El Cifrado de Hill
9. Composición de números Binarios	**9.1**Sistema binario y cambio de base

1. CONTENIDO: Proporcionalidad directa.

Para comprender bien el concepto de proporcionalidad directa e inversa el profesor debe tener en cuenta que primero que el alumno debe conocer y comprender el concepto de razón.

Razón: *es la comparación entre dos cantidades*

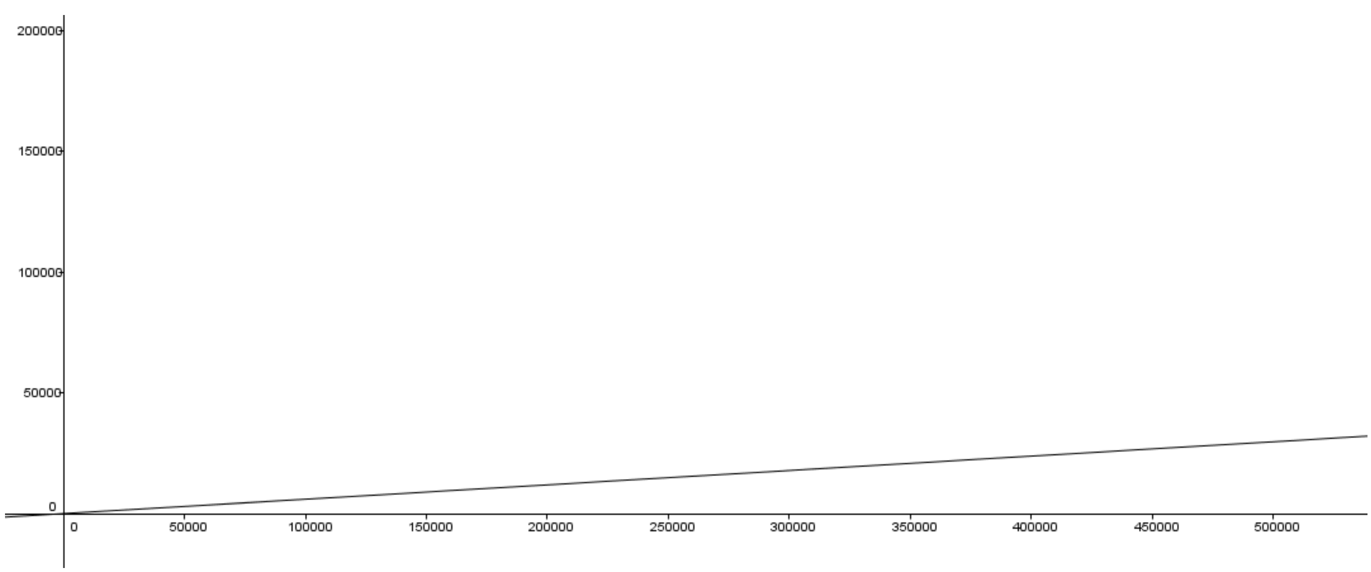
$$a\!:\!b \ \text{ o } \ \frac{a}{b}$$

"El prestamista" y "construyendo una pared" son ejercicio que modela una situación de la vida cotidiana, el cual se puede utilizar para la introducción de proporcionalidad directa y proporcionalidad inversa, pera esto preferimos que los estudiantes a través del método gráfico estimen un resultado que después comprobarán a través del algebra, cabe mencionar que este tipo de ejercicios son variados y hasta fáciles de crear, pero tenemos que tener en cuenta que deben pertenecer a la realidad de cada estudiante

1.1. ACTIVIDAD: *El prestamista.*

Un Prestamista gana 30.000 pesos en un préstamo de 500.000 pesos, ¿cuánto ganará en un préstamo de 1.200.000 pesos?

¿Estime cuánto ganará el prestamista a través del siguiente gráfico?



Solución:

.

$$\frac{500.000}{1.200.000}=\frac{30.000}{x}$$

$$500.000x=1.200.000\cdot 30.000$$

$$x=\frac{1.200.000\cdot 30.000}{500.000}$$

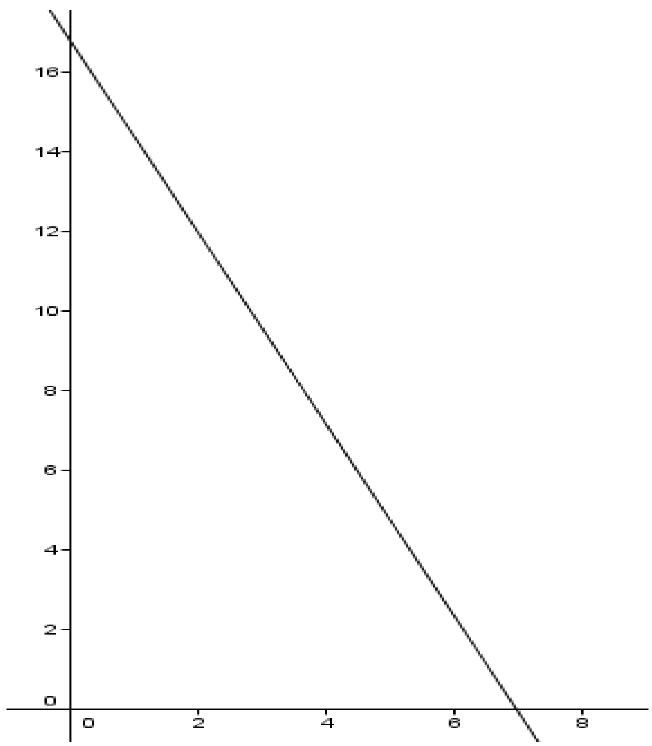
$$x=72.000$$

2. CONTENIDO: Proporcionalidad inversa.

2.1. ACTIVIDAD: *Construyendo una pared.*

Dos albañiles construyen una pared en 12 días, ¿cuántos días la construirán 5 obreros?

Estime cuantos días demoraran 5 obreros en realizar la pared.



Solución:

$$\frac{2}{5} = \frac{x}{12}$$

$$2 \cdot 12 = 5 \cdot x$$

$$x = \frac{2 \cdot 12}{5}$$

$$x = 4{,}8$$

3. CONTENIDO: Propiedad distributiva.

La propiedad distributiva establece que multiplicar una suma por un real, se obtiene el mismo resultado que la suma de cada uno de los componentes de los sumados multiplicado por el escalar, es decir, en términos algebraicos tenemos:

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c} \qquad ;\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\in\mathbb{R}$$

3.1. ACTIVIDAD: *El número de Sherezade.*

El **1001** es el número que nos concierne, debido a sus propiedades:

Al multiplicar dicho número por uno de tres cifras se obtiene el mismo número escrito dos veces, pues es evidente el truco detrás, basta con factorizar la multiplicación para obtener

Ejemplo: $\mathbf{456\cdot 1001=465.465}$

En general:

$$\begin{aligned} x\cdot 1001 &= x(1000+1)\\ &\ \ 1000x+x \end{aligned}$$

Según el ejemplo tenemos:

$$\begin{aligned} 456\cdot 1001 &= 456(1000+1)\\ &= 456000+456\\ &= 456456 \end{aligned}$$

Lo que da origen a la expresión del número escrito dos veces.

En el ejemplo anterior se ilustra la ***PROPIEDAD DISTRIBUTIVA.***

Curiosidad:

$$1001=7\cdot 11\cdot 13$$

Lo cual sorprende pues son tres números primos consecutivos.

Su uso puede usarse para realizar juegos de adivinanza. Siguiendo el mismo ejemplo anterior:

Se les pide a los alumnos que piensen en un número de cómo el 456, al multiplicarlo por 1001 tenemos:

$$456 \cdot 1001 = 456\ 456$$

Ahí se presenta la primera magia para los alumnos, ahora para sorprenderlos más se les pide que dividan por 77

$$456\ 456\ /\ 77 = 5\ 928$$

Luego se les propone multiplicar por 3 (para despistarlos un momento) e inmediatamente después dividir por 39 obteniendo

$$3(5\ 928)\ /\ 39 = 456$$

Lo cual provocara más de una sorpresa por parte de los alumnos. Luego el docente puede proceder paso por paso para la explicación de la propiedad distributiva

Se parte de la premisa que

$$1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$$

Con ello podemos realizar el truco:

$$\begin{aligned}
456 \cdot 1001 &= 456\ 456 \\
456 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 &= 456\ 456 \qquad | \cdot \frac{1}{77} \\
456 \cdot 77 \cdot 13 \cdot \frac{1}{77} &= 456\ 456 \cdot \frac{1}{77} \\
456 \cdot 13 &= 5928 \qquad | \cdot 3; \cdot \frac{1}{39} \\
456 \cdot 13 \cdot 3 \cdot \frac{1}{39} &= 5928 \cdot \frac{3}{39} \\
456 \cdot \frac{39}{39} &= 5928 \cdot \frac{3}{13} \\
456 &= 456
\end{aligned}$$

Nota: Sherezade tiene sus orígenes en un cuento árabe, 1001 noches.

3.2. ACTIVIDAD: *El numero 10101*

De forma similar al número de Sherezade, el 10101 presenta propiedades peculiares, cuando se multiplica por un número de dos cifras, se repite dicha cifra tres veces:

$$73 \cdot 10101 = 737\,373$$

Por lo cual se presta para los mismos juegos matemáticos, pues:

$$\begin{aligned} x \cdot 10101 &= x(10000 + 100 + 1) \\ x \cdot 10101 &= 10000x + 100x + x \\ 73 \cdot 10101 &= 10000 \cdot 73 + 100 \cdot 73 + 73 \\ 73 \cdot 10101 &= 730\,000 + 7\,300 + 73 \\ 73 \cdot 10101 &= 737\,373 \end{aligned}$$

Para el otro truco con los números primos sucede algo similar pues:

$$10101 = 3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 37.$$

4. CONTENIDO: Sistema de ecuaciones.

4.1. ACTIVIDAD: *Adivinanza aritmética:*

Es recomendado esta actividad para **alumnos ventajosos** debido a la complejidad de esta. Es decir para alumnos que cursan 4° medio, o alumnos pertenecientes a electivos de matemática.

La adivinanza aritmética, o como se conoce normalmente "**charadas aritméticas",** consiste en adivinar una palabra a partir de ciertas pistas, como por ejemplo la división de números, es decir:

$$\begin{array}{l} 468 : 36 = 13 \\ \underline{-36} \\ 10´8 \\ \underline{-108} \\ 000 \end{array}$$

Con esto se intercambian los números por las letras asignadas mediante una **palabra de diez letras**, tales como **terminados, acostumbre, impersonal,** entre otros, la única condición es que ninguna letra se debe repetir.

Entonces el cambio de los números por las palabras quedaría así:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
T	E	R	M	I	N	A	D	O	S
A	C	O	S	T	U	M	B	R	E
I	M	P	E	R	S	O	N	A	L
M	U	R	C	I	E	L	A	G	O

Ahora es cuestión de reemplazar cada uno de los valores numéricos de la división por los valores en letras que se plantea según la palabra a utilizar, **según el ejemplo** tomando la palabra "ACOSTUMBRE" tenemos:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
A	C	O	S	T	U	M	B	R	E

Al reemplazar tenemos:

468 : 36 = 13	SUB : OU = AO
- 36	- OU
10´8	AE´B
- 108	- AEB
000	EEE

Cabe destacar que para que el desafío sea posible resolverlo es necesaria una división extensa en donde todos los dígitos sean incluidos, por ello se realiza el siguiente planteamiento.

Entonces lo que se propone como desafío, es la sección a la derecha, donde solo se presentan las letras.

IMPORTANTE:

- En la elección de la división debe constar con más de tres pasos, y en lo posible que no sea una división cerrada (resto 0)

- Lo ideal es que las es que las letras queden perfectamente alineadas para facilitar el análisis.

¿Cómo resolver?

Tomemos como ejemplo la siguiente división:

MITADES : DADOS= IT
-MROMIS
STERRE´S
-DADOS
RIMRS

- Queda en evidencia que D > M, pues al dividir se debe realizar por 6 cifras	D > M
- Lo primero que se observa es que "M-M=S", por lo tanto S=0	S = 0
- T· DADOS= DADOS, lo que significa que T = 1	T=1
- como S= 0, I · O = I, pero O≠ 1, por ello, I = 5, pues 5, es el único número que al multiplicarlo por un número impar la última cifra termina en 5.	I = 5 O es impar
- D-5 = R, además por lo que ya sabemos, solo queda una combinación posible: D≠9, pues no existe una palabra que termine en "DS", entonces R= 3, D=9	R=3 D=8
- Como se comentó con anterioridad "O" es impar, y los posibles valores que quedan son de 7 ó 9, para ello los comparamos, y vemos cual coincide con lo que ya se a realizado	

T		R		*I*			*D*		*S*
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*0*

PARA EL VALOR DE 7 TENEMOS:	
MITADES : DADOS= IT	M51A8E0 : 8A870 = 51
-MROMIS_	-M37M50
STERRE´S	01E33E´0
-DADOS	-8A870
RIMRS	35M30

- Cuando multiplicamos 5 · 8A 870, podemos descomponer de la siguiente forma: 5 · $(80870 + \mathrm{A}000) = 404\,350 + (5 \cdot \mathrm{A}) \cdot 1000$ queda en evidencia que 3 = M, pero según esta operatoria el valor posicional de 3 = R, por lo tanto en realidad 9 = O	9 = O

T		R		*I*			*D*	*O*	*S*
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*0*

PARA EL VALOR DE 9 = O:	
MITADES : DADOS= IT	M51A8E0 : 8A890 = 51
-MROMIS_	-M39M50
STERRE´S	01E33E´0
-DADOS	-8A890
RIMRS	35M30

Realizamos el mismo procedimiento para verificar los valores posicionales y tenemos: 5 · 8A 890 = 5 · (80 890 + A 000), de lo que obtenemos: M39M50 = 404 450 + (5·A) · 1000, como el valor posicional de M no cambia pues solo queda sumar por (5·A) · 1000, tenemos que M = 4	M = 4
Del paso anterior se deduce que: 439 450 = 404 450 + (5·A) · 1000, en donde despejamos para obtener: 439 450 – 404 450 = 35 000, como tenemos 5· A = 35, simplificamos y obtenemos: A = 7	A = 7

T		R	*M*	*I*		*A*	*D*	*O*	*S*
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*0*

Es evidente la palabra mágica que se deseaba adivinar, pues son pocas las combinaciones posibles que concuerdan con las letras encontradas:

La palabra a buscar es

T	*E*	*R*	*M*	*I*	*N*	*A*	*D*	*O*	*S*
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*0*

MITADES : DADOS= IT	4517820 : 87890 = 51
-MROMIS_	-439450
STERRE´S	012332´0
-DADOS	-87890
RIMRS	35430

5. CONTENIDO: Descomposición de números primos.

Es sabido por muchos docentes que enseñar las tablas de multiplicar es una tarea ardua y tarda mucho tiempo, más aun cuando se les plantea la tabla del 9, el cual si no se poseen los trucos apropiados es un trabajo laborioso. Ahora bien cuando se plantea multiplicar por 99 o 999 ya es un problema para los alumnos.

He aquí un truco para la multiplicación de dichos valores, ambas basadas en la conmutatividad

5.1. ACTIVIDAD: *Los tres nueves.*

Ejemplo:

Multipliquemos por 573, lo cual es: $573 \cdot 999 = 572\,427$

$$573573 \cdot 999 = 572(1000 - 1)$$
$$573 \cdot 999 = 572\,000 - 573$$

En este punto es donde realizamos el truco, pues cuando restamos un número en 100 ó 1000 buscamos los complementos correspondiente a 9 para la centena y decena, y para la unidad el complemento para llegar a 10 (debido a que cuando restamos, la unidad necesita de una decena lo que origina el 10, la decena pide una centena, y la centena pide una unidad de mil), decir:

$$5 + 4 = 9\,;\ 7 + 2 = 9;\ 7 + 3 = 10$$

En general:	$1000 - 573 = (900 - 500) + (90 - 70) + (10 - 3)$	
Para la centena	$(900 - 500) = 400$	**Complemento para obtener 9**
Para la decena	$(90 - 70) = 20$	**Complemento para obtener 9**
Para la unidad	$(10 - 3) = 7$	**Complemento para obtener 10**

De esta forma la multiplicación por 999 ó 99, es más simple de lo que se puede suponer.

NOTA: Este contenido es utilidad cuando trabajamos la ***conmutatividad y las propiedad distributiva de en los números reales.***

6. CONTENIDO: Ecuaciones de primer grado.

¿Por qué enseñar las ecuaciones de una forma aburrida? si lo podemos enseñar haciendo magia y despertando la curiosidad de los estudiantes para que así ellos se motiven a querer aprender y de forma entretenida. ***¡LA MAGIA ES LA CLAVE DE ESTA ACTIVIDAD!*** ☺

6.1. ACTIVIDAD: *Adivinando números.*

Como realizar la actividad:

- Escoge un número
- Multiplícalo por 5
- Al resultado súmale 6
- Luego multiplícalo por 4
- Súmale 9
- Vuelve a multiplicarlo por 5
- Diga el número resultante.

MATEMATICAMENTE: Diremos que el número que escogió es x

- Escoge un número x
- Multiplícalo por 5 $5x$
- Súmale 6 $5x + 6$
- Luego multiplícalo por 4 $20x + 24$
- Súmale 9 $20x + 33$
- Multiplica por 5 $100x + 165$

Comentario: Cuando el alumno comunique el número que le dio después de haber realizado todas estas operaciones, es evidente que el docente tendrá solo que restar a ese número 165 y dividir por 100, es decir, se prescinde de las dos últimas cifras que siempre son ceros.

La idea de esta actividad es que los estudiantes puedan descubrir de manera autónoma lo que hace el docente para descubrir su número secreto.

Ejemplo:

Supongamos que el número escogido es el 123

- Multiplícalo por 5 $123 \cdot 5 = 615$

- Al resultado súmale 6 $615 + 6 = 621$
- Luego multiplícalo por 4 $621 \cdot 4 = 2484$
- Súmale 9 $2484 + 9 = 2493$
- Vuelve a multiplicarlo por 5 $2493 \cdot 5 = 12465$

  Diga el número resultante 12465

Ahora viene la magia:

- $12465 - 165 = 12300$ Restamos 165 al número
- $12300 : 100 = 123$ Dividimos por 100

<u>Y así queda entonces el número que el estudiante escogió.</u>

6.2. ACTIVIDAD: *La adivinanza de los tres dados*

Una adivinanza simple para comenzar con una clase introductora de ecuaciones.

<u>Como realizar la actividad:</u>

- Se les pide a los alumnos tirar un dado y anotar los números que al azar salieron.
- Considere estos números como dígitos de un número.
- Realice las siguientes operaciones:
  - Multiplique el primer dado por dos y súmele 5
  - Multiplique por 5
  - Sume el segundo dado
  - Multiplique por diez
  - Sume el número del tercer dado
- El docente resta mentalmente 250

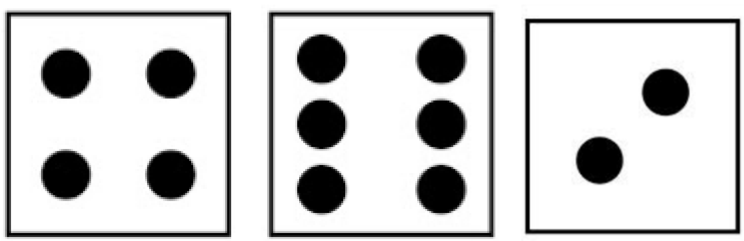
- Luego nombra los dígitos obtenidos
- ***<u>Wowwww coinciden con los dados. ☺!!!!! MAGIA.</u>***

<u>Explicación matemática</u>**:** Dados los términos a, b, c, entonces tenemos las siguientes operaciones:

- Multiplique el primer dado por 2 y súmele 5 $2a + 5$
- Multiplique por 5 el resultado anterior $(2a + 5) \cdot 5 = 10a + 25$
- Sume el segundo dado y multiplique por 10 $\big((10a + 25) + b\big) \cdot 10 = 100a + 10b + 250$
- Por último sume el tercer dado y reste 250 $(100a + 10b + c + 250) - 250 = 100a + 10b + c$

El resultado que se obtiene corresponde a los dígitos de los dados que tenía al principio.

Ejemplos: Supongamos que los números de los dados que se obtuvieron son: 4,6,2



Entonces: $a = 4; b = 6;\ c =\ 2$

- Multiplique el primer dado por 2 y súmele 5 $2 \cdot 4 + 5 = 13$
- Multiplique por 5 el resultado anterior $13 \cdot 5 = 65$
- Sume el segundo dado y multiplique por 10 $(65 + 6) \cdot 10 = 710$
- Por último sume el tercer dado y reste 250 $(710 + 2) - 250 = 462 = 4 \cdot 100 + 6 \cdot 10 + 2$

6.3. ACTIVIDAD: *Dividamos por 9.*

Como realizar el actividad:

- Piense en un número de 3 cifras (la primera y última cifra deben ser distintas)
- Invierte el orden de las cifras.
- Reste el mayor del menor
- Mencione la primera cifra del resultado.

Si el número mencionado es:	***El resultado es:***
0	099
1	198
2	297
3	396
4	495
5	594
6	693
7	792
8	891

Ejemplo:

- 763 (primera y última distintas)
- 367 (la del medio se mantiene)
- $763 - 367 = \mathbf{3}96$
- El alumno evidentemente solo nos dirá la centena pero se podrá adivinar el resto del número.

Explicación matemática: Dado los términos a, b, c entonces consideramos como número $100a + 10b + c$ como notación posicional, y a su vez $a \neq c$

- Invierta el orden de las cifras $\quad 100c + 10b + a$
- Supongamos que $100a + 10b + c > 100c + 10b + a$

$$\begin{array}{r} 100a + 10b + c \\ -\,(100c + 10b + a) \\ \hline 99(a - c) \end{array}$$

Dato extra:

Con esto se tiene presente que $a - c$ debe ser un número entre 1 y 9, entonces, los únicos números finales que pueden resultar son el mismo multiplicado por 99, es decir, 099 , 198 , 297 , 396 , 495 , 594, 693 , 792 y 891, por ello solo es cuestión que el sujeto nos diga la primera cifra y nosotros le diremos los restantes.

6.4. ACTIVIDAD: *Resultado 10*

<u>Como realizar la actividad:</u>

- Piensa en un número
- Súmele 10
- Multiplique por 2
- Súmele el cambio que lleva en su bolsillo ***<u>(entre $0 y $99)</u>***
- Multiplique por 4
- Súmele 20
- Sume el cuádruplo de su edad expresado en años
- Divida por 2
- Reste el doble del cambio de dinero que lleva en su bolsillo
- Reste 10
- Divida por 2
- Reste su edad en años
- Divida por 2
- Reste el número que pensó usted
- EL RESULTADO ES 10 ***<u>¡¡¡¡¡¡MAGIA!!!!!!!</u>***

Ejemplo:

-
- $69 + 10 = 79$
- $79 \cdot 2 = 158$
- $158 + 75 = 233$ ***<u>El cambio es 75</u>***
- $233 \cdot 4 = 932$

- $932 + 20 = 952$
- $952 + (24 \cdot 4) = 1048$ ***Edad 24 años***
- $1048 \div 2 = 524$
- $524 - 150 = 374$
- $374 - 10 = 364$
- $364 \div 2 = 182$
- $182 - 24 = 158$
- $158 \div 2 = 79$
- $79 - 69 = 10$

Explicación matemática: Diremos que el número es x
La edad es b
El dinero es c

• Piense en un número:	x
• Súmele 10	$x + 10$
• Multiplique por 2	$2x + 20$
• Súmele el cambio que lleva en el bolsillo	$2x + 20 + c$
• Multiplique por 4	$8x + 80 + 4c$
• Sume 20	$8x + 4c + 100$
• Sume el cuádruplo de su edad en años.	$8x + 4c + 4b + 100$
• Divida por 2	$4x + 2c + 2b + 50$
• Reste el doble del cambio que lleva en el bolsillo	$4x + 2b + 50$
• Reste 10	$4x + 2b + 40$
• Divida por 2	$2x + b + 20$
• Reste su edad en años	$2x + 20$
• Divida por 2	$x + 10$
• Reste el número que pensó	10

6.5. ACTIVIDAD: *La propiedad del 9:*

Para realizar la actividad es necesario tener presente una peculiaridad que ocurre con los múltiplos de 9, la cual consiste que si la suma de las cifras de un numero se obtiene un múltiplo de 9, eso quiere decir que el número es un múltiplo de 9.

Como realizar la actividad:

- Piensa en un número
- Añádele al final un cero
- Réstele el número que pensó

- Súmele 54 (o cualquier otro múltiplo de 9)
- Tache una cifra
- Mencione que cifras le quedaron.

El truco: Mentalmente se tiene que sumar las cifras que el estudiante mencionó, luego se obtiene la diferencia con el próximo número múltiplo de 9.

Explicación matemática:

Supongamos que el número escogido es el $100a + 10b$

- Piensa en un número $100a + 10b$
- Añádele al final un cero $1000a + 100b$
- Réstele el número que pensó

$$\begin{array}{l} 1000a + 100b \\ \underline{-100a - 10b \quad\quad} \\ 900a + 90b \end{array}$$

- Súmele 18 (o cualquier otro múltiplo de 9) $900a + 90b + 9k$
- Podemos factorizar por 9 $9(100a + 10b + k)$
- Como se mencionó en un comienzo si la suma de las cifras de un número es un múltiplo de 9 eso significa que el número en cuestión es múltiplo de 9. Esto también se aplica a la inversa.
- Entonces como factorizamos por 9 aseguramos que el número es múltiplo de 9, por lo tanto la suma de sus cifras da como resultado un múltiplo de 9.
- Cuando solicitamos tachar una de sus cifras y que nos den el resto, solo es cuestión de sumar las cifras entregadas y buscar un numero talque al sumarlo se obtenga un múltiplo de 9 (si la suma ya es múltiplo, eso quiere decir que la cifra que tarjo fue un nueve)

Ejemplo:

- Piensa en un número 467
- Añádele al final un cero 4670

- Réstele el número que pensó $4670 - 467 = 4203$
- Súmele 18 (o cualquier otro múltiplo de 9) $4203 + 18 = 4221$
- Tache una cifra $42 \cancel{2} 1$
- Mencione que cifras le quedaron. Quedaron el $4,2,1$

Realizando la magia: $4 + 2 + 1 = 7$ el múltiplo de 9 más cercano es 9
Restando $9 - 7 = 2$

Por lo tanto el número que falta es 2 ☺

7. CONTENIDO: Series Geométricas.

7.1. ACTIVIDAD: La leyenda del tablero de Ajedrez.

Existen diversas versiones de la leyenda del tablero de ajedrez, nosotros nos guiaremos del más simple para trabajar el contenido de series geométricas.

Cuenta la leyenda que un Shah de Persia (**Saha**= emperador en otras culturas) propuso que le inventaran un juego para su entretención, y que al ganador se concedería cualquier petición.

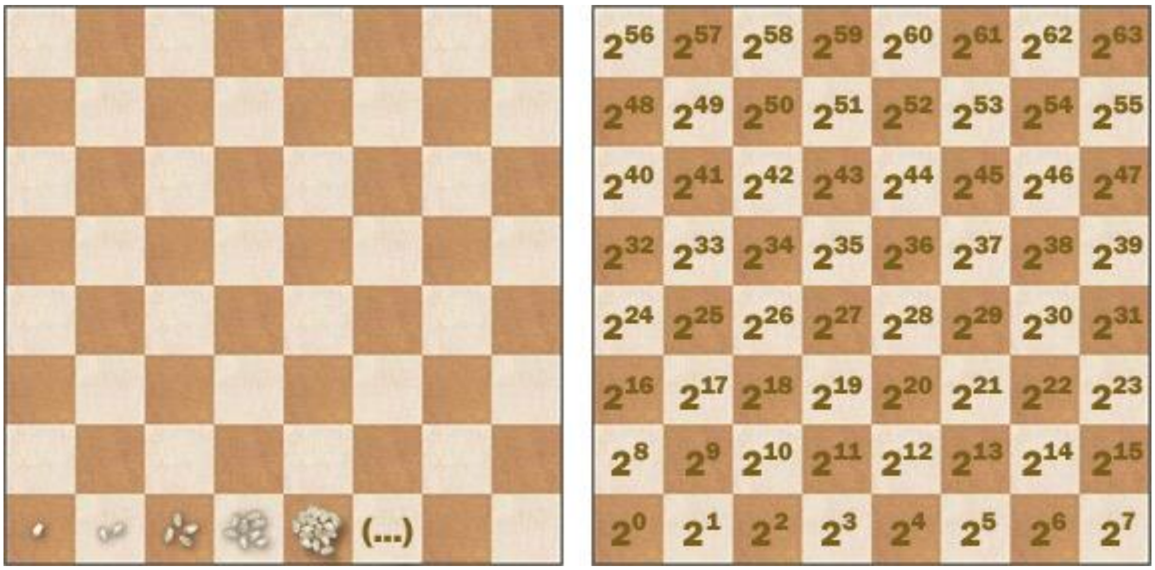
El ganador fue un aficionado de las matemáticas y le propuso el juego del ajedrez:

La petición fue que

- le diera un grano de trigo para el primer casillero del ajedrez
- El doble para el segundo
- El doble de lo obtenido con anterioridad para el tercero y así sucesivamente hasta completar el tablero (como lo muestra la imagen)

La petición del aficionado sonó simple a oídos del Shah, por lo cual aceptó, pero luego que se realizarán los cálculos***, "el número de granos en cuestión era inalcanzable para la producción de trigo".***
La explicación de dicho procedimiento lo podemos realizar mediante la suma sucesiva de términos, y en este caso corresponde una serie de geométrica.

La enormidad del número en cuestión se expresa en la siguiente imagen:



Ahora bien podemos realizar el cálculo de la siguiente forma:

<table>
<tr><td>Se expresa la suma de los términos:
$1+2+4+8+16+32+64...$</td><td>Lo expresamos como potencias:
$2^0+2^1+2^2+2^3+2^4+\ldots+2^{63}$</td></tr>
<tr><td>Mediante la suma tenemos:
$$\sum_{i=0}^{64} 2^i$$</td><td>El resultado de la sumatoria es:
$2^{64}-1=18\,446\,744\,073\,709\,551\,615$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Esto lo demostramos de la siguiente forma:
$S=2^0+2^1+2^2+2^3+2^4+\cdots+2^{63} \quad |\cdot 2$
$2S=\ 2^1+2^2+2^3+2^4+\cdots+\ 2^{64} \quad |-S$
$2S-S=\ 2^{64}-2^0$
$S=\ 2^{64}-1$</td></tr>
</table>

Dicha información es de utilidad como ya se mencionó para tratar los contenidos de serie de geométricas, y así introducir la fórmula de esta, y su definición; a su vez, resulta práctico para trabajar el crecimiento exponencial, es decir, tanto para la función exponencial como el cálculo de estas.

Como dato anexo: dicha cantidad de granos equivale a

$$15\ 372\ 286\ 728\ 091\ Tm$$

La estimación de producción de trigo en 2013- 2014 es de:

$$708\ 891\ 000\ Tm$$

Por lo tanto, tomando esta estimación como cosecha anual, debería poner sobre el tablero las cosechas mundiales de:

$$\frac{15\ 372\ 286\ 728\ 091\ Tm}{708\ 891\ 000\ Tm|año} = 21\ 684,98\ años$$

7.2. Actividad: La torre Hanoi

Consiste en un tablero horizontal con tres clavos verticales, en uno de los clavos hay una serie de discos de diferente tamaños, posicionados de menos a mayor (contados desde arriba hacia abajo). }

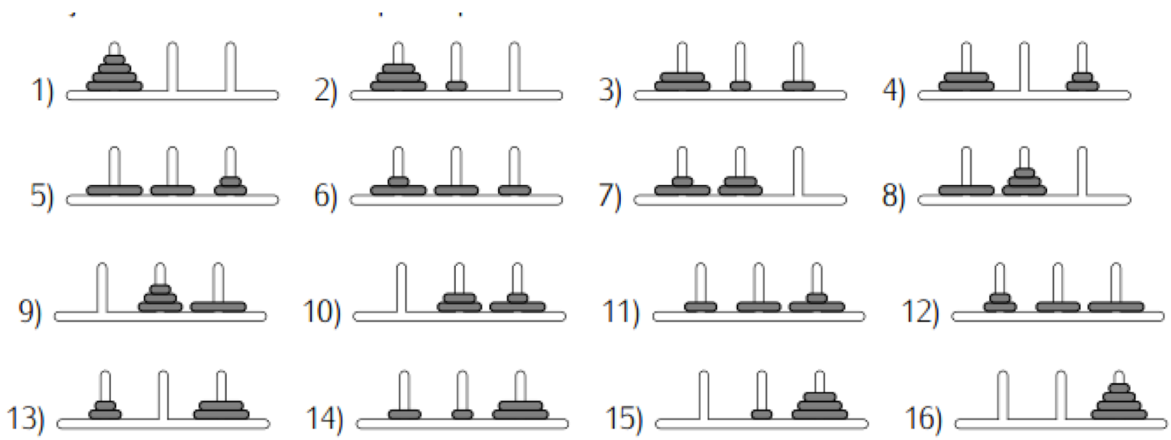
El juego consiste: Pasar todos los discos a uno de los otros clavos de tal manera que la disposición final sea la misma que la primitiva, pero solo se puede mover un disco a la vez. Siempre el disco mayor debe estar por debajo de un disco menor.

Ejemplo: supongamos que los clavos están señalados por I, II y III, y los discos A, B, C.

- Para dos anillos tendríamos (A, B): se empieza por B a II, A a III, y luego B a III, dando terminado el juego con 3 movimientos (para $n = 2$ tenemos 3 movimientos).

- Para tres anillos tendíamos (A, B, C): C a III, B a II, C a II, A a III, C a I, B a III, para finalizar con C a III, dando como resultado 7 movimientos (para $n = 3$ tenemos 7 movimientos).

Ahora bien cuando analizamos para cuatro discos obteneos lo siguiente:



Cabe destacar que la segunda posición representa el primer movimiento, es decir para cuatro discos es necesario al menos 15 movimientos.

La expresión general para determinar el número de movimientos es la conocida sumatoria de las series geométricas:

$$\mathbf{2^n - 1}$$

8. CONTENIDO: Inversa de matrices.

8.1. ACTIVIDAD: *El cifrado de Hill:*

En 1929 el matemático estadounidense Lester S. Hill ideo, patentó y trato de vender (sin éxito), un nuevo sistema de cifrado que se servía de una combinación de aritmética modular y algebra lineal, combinando el uso de matrices con operaciones en módulos.

Para ello creaba una cifra, una matriz cuadrada con un código

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

La matriz inversa a esta:

$$A^{-1} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Con la restricción que el determinante de la matriz A sea 1, con el fin de que esta tenga una matriz inversa.

Ahora bien para un alfabeto de 27 caracteres se añade un carácter "espacio en blanco", con la finalidad de que todas los cifrados puedan ser pares, para el ejemplo se utilizara "@" y para cada carácter se asignara un valor numérico:

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	ñ	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	@
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27

Para realizar las operaciones se trabaja en módulo 28. El proceso de cifrado consiste en primer lugar determinar una matriz de cifrado A de determinante 1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

A continuación para encriptar el mensaje **"HOY".**

- Se agrupan los caracteres del mensaje en pares: “HOY@”.

- Sus correspondencias numéricas según la tabla son los pares: (7,15); (25,27).

Realizamos la multiplicación de una matriz A por cada par de cifras:

Cifra “HO”= $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}\binom{7}{15} = \binom{52}{119} \equiv \binom{24}{7}\ (mod. 28)$ corresponde según la tabla de equivalencia a los caracteres (X,H)

Cifra “Y@”= $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}\binom{25}{27} = \binom{106}{239} \equiv \binom{22}{15}\ (mod. 28)$ correspondiente a los caracteres (V, O).

Por esto el mensaje “HOY” queda cifrado como “XHVO”.

Para descifrar utilizamos la inversa de la matriz A.

$\begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\binom{24}{7} = \binom{147}{-41} \equiv \binom{7}{15}\ (mod. 28)$ Equivalente a (H, O)

$\begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\binom{22}{15} = \binom{109}{-29} \equiv \binom{25}{27}\ (mod. 28)$ Equivalente a (Y, @)

De esta forma el cifrado de Hill es sumamente fácil de aplicar, aunque el uso para palabras extensas se hace laborioso pero no imposible. Lamentablemente como varios sistemas de encriptación son fáciles de encriptar el mensaje, solo basta con realizar un análisis de frecuencia **(véase capítulo 4: curiosidades, actividad 6 “análisis de frecuencia de Al-Kindi”).**

9. CONTENIDO: Composición de números binarios.

9.1. ACTIVIDAD: *Sistema binario y cambio de base*

Es conocido que el código binario es de suma importancia en el área de las matemáticas, y más aún cuando se analiza la informática, pues el lenguaje mismo de las computadoras, de igual forma se ha contemplado que la base de la criptografía es el código binario como sistema universal de análisis, ahora **¿Cómo podemos pasar de un número decimal a un número binario? Y ¿viceversa?**

En un sistema decimal (uso habitual) un número cualquiera se puede descomponer de la siguiente forma:

Ejemplo:

$$7.392$$

$$7.392 = 7 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0.$$

Por convenio se escriben únicamente los coeficientes. Este es el mismo algoritmo que utiliza el código binario, es decir en el código binario son coeficientes de potencias de 2.

Así, el número 11011_2 puede escribirse también como:

$$11011_2 = 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$$

***Nota*:** Se señala el subíndice de 2, para referirse que es un número binario

Sumando la expresión obtenemos:

$$1 \cdot 2^4 = 16$$

$$1 \cdot 2^3 = 8$$

$$0 \cdot 2^2 = 0$$

$$1 \cdot 2^1 = 2$$

$$1 \cdot 2^0 = 1$$

$$16 + 8 + 0 + 2 + 1 = 27$$

27 es la forma decimal del número binario considerado.

Ahora bien para el proceso inverso se divide sucesivamente el numero decimal entre 2 (la base del binario) y se anotan los restos hasta obtener un cociente 0.

El número binario tendrá el último cociente como primer digito y le seguirán los restos a partir del obtenido.

Realicemos el proceso inverso de 27:

- $27: 2 = 13$ **resto es 1**
- $13: 2 = 6$ **resto es 1**
- $6: 2 = 3$ **resto es 0**
- $3: 2 = 1$ **resto es 1**
- $1: 2 = 0$ **resto es 1**

Correspondiendo entonces a 00011011

Nota: téngase en cuenta que en el ejemplo correspondiente se visualiza sin un 0 al principio como resultado de la adición de ceros a la izquierda para establecer un bit, 8 cifras para el uso computacional.

Ejemplo: Escribamos el 76 como número binario.

- $76: 2 = 38$ resto es $\mathbf{0}$
- $38: 2 = 19$ resto es $\mathbf{0}$
- $19: 2 = 9$ resto es$\mathbf{1}$
- $9: 2 = 4$ resto es $\mathbf{1}$
- $4: 2 = 2$ resto es $\mathbf{0}$
- $2: 2 = 1$ resto es $\mathbf{0}$
- $1: 2 = 0$ resto es $\mathbf{1}$

En consecuencia el número 76 escrito en sistema binario será 01001100

Capítulo III:

Eje de Geometría.

En este eje se espera que los estudiantes aprendan a reconocer, visualizar y dibujar figuras, y a describir las características y propiedades de figuras 3D y figuras 2D en situaciones estáticas y dinámicas. Se entregan conceptos para entender la estructura del espacio y describir con un lenguaje más preciso lo que ya conoce de su entorno.

Se pretende que los alumnos se enamoren de la geometría, su forma, sus curiosidades, las diferencias de trabajar en un plano 2D y uno en 3D. Logren relacionar su entorno con las figuras geométricas con las que vivimos (el hecho de que la tierra es una esfera como por ejemplo).

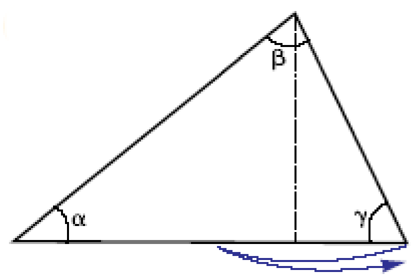
CONTENIDO	**ACTIVIDAD**
1. Suma de ángulos interiores de un triángulo.	**1.1** Comprobando los ángulos interiores de un triángulo.
2. Propiedad de la esfera.	**2.1** Construyendo una casa en el polo Norte
	2.2 El cazador de oso.
3. Ilusiones Ópticas	**3.1** ¿Qué recta es más larga?
	3.2 La ilusión de Ponzon
	3.3 El triángulo imposible, la “tribar”

1. CONTENIDO: Suma de los ángulos interiores de un triángulo

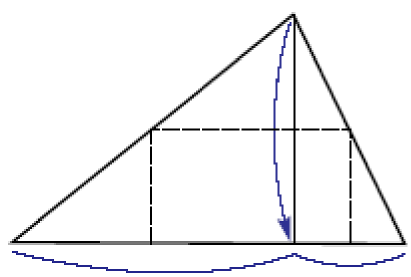
1.1. ACTIVIDAD: *Comprobando los ángulos interiores de un triángulo*

La Actividad consiste en mostrar que los ángulos interiores de un triángulo miden 180, se les recomienda realizar dobleces de un triángulo cualquiera, tomando como punto de referencia a la altura desde uno de sus vértices como muestra la imagen:

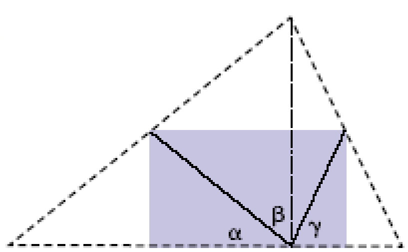
Como realizar la actividad:



Luego de ello, realizar el primer dobles desde el vértice del ángulo β hasta el pie de su altura,



Luego realizar los dobleces desde cada uno de los vértices del triángulo al pie de la altura ya dibujada.



Obteniendo el rectángulo que se muestra en la imagen, se observa que los ángulos interiores del triángulo miden 180 en total, pues conforman un ángulo extendido.

Recomendaciones para el docente:

Con esta actividad los alumnos podrán responder preguntas como:

1.- Como son el área del triángulo con respecto a la del rectángulo formado.

2.- A qué se debe la fórmula del área del triángulo, explíquelo y/o demuéstrelo al curso.

3.- ¿Por qué el triángulo es el polígono fundamental, usado para el cálculo de los ángulos interiores de los demás polígonos?

2. CONTENIDO: Propiedad de la esfera.

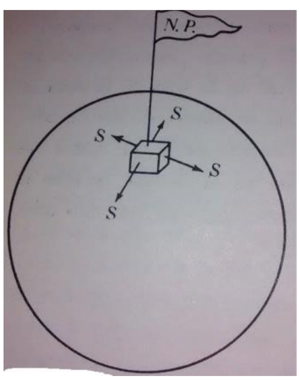
2.1. ACTIVIDAD: *Construyendo una casa.*

Esta actividad va orientada para el pensar particular de los estudiantes, para el razonamiento de los puntos cardinales y esperando que den la respuesta correcta a través de la lógica y la representación de un punto de un punto de referencia de 2D a 3D, relacionando Norte, Sur, Oeste y Este representándolo en 3D.

Problema:

Había una persona un tanto caprichosa, que construyo una casa con planta cuadrada, con una ventana en cada pared, y de modo que las cuatro daban al sur.

¿Esto es posible?



Explicación:

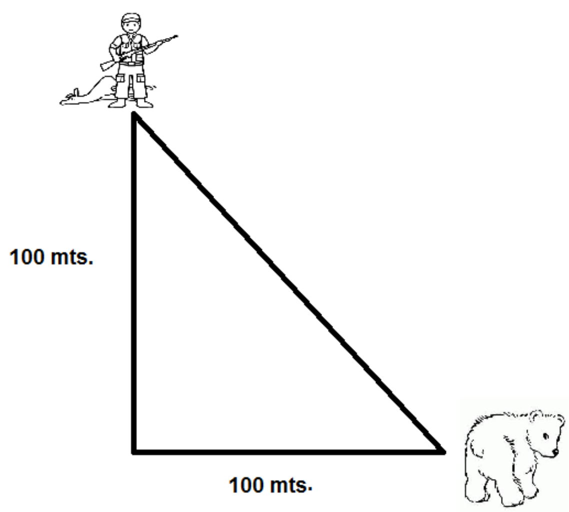
Al estar ubicado en el centro del Polo Norte, podemos asegurar que todos los puntos mirados desde ahí dan hacia el Sur.

2.2. ACTIVIDAD: *El cazador de oso.*

Esta actividad va orientada para los estudiantes que son un poco más perspicaces y terminan sus pruebas o evaluaciones antes, para que puedan utilizar su tiempo de manera provechosa y mantenerlos concentrados.

Problema:

Cierto deportista muy experto en cuestiones de caza, salió a cazar su primer oso. De repente divisó uno, enorme a unos cien metros al este. Asustado se echó a correr, pero tan era su pánico, que no lo hizo en sentido opuesto a donde estaba el oso, sino hacia el norte. Unos cien metros más allá, recobró su valentía, se paró, se volvió, y mató al oso, que no se había movido de donde estaba al principio, apuntando hacia el sur.



<u>¿De qué color era el oso?</u>

Respuesta:

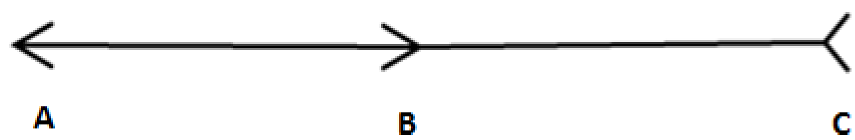
Es evidente que para que el disparo sea efectivo y se cumplan todos los movimientos que el cazador hizo, es necesario encontrarse en el polo Norte, por lo tanto el oso es de color **blanco.**

3. CONTENIDO: Ilusiones ópticas

3.1. ACTIVIDAD: *¿Qué recta es más larga?*

Este tipo de actividades son para que el estudiante no deposite tanta confianza en el aspecto que tiene una figura.

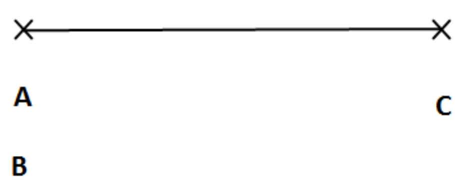
¿Qué recta es más larga?



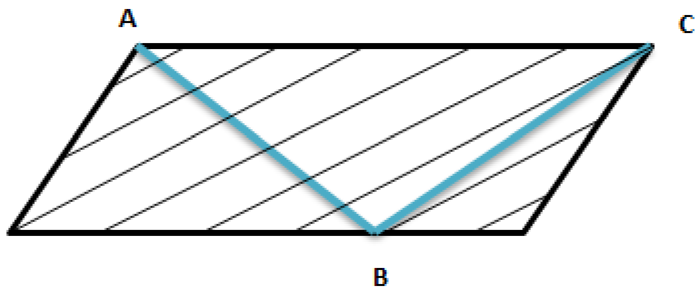
Es casi seguro que los alumnos responderán que BC es más larga que AB, pero esto está erróneo puesto que ambas rectas son del mismo tamaño.

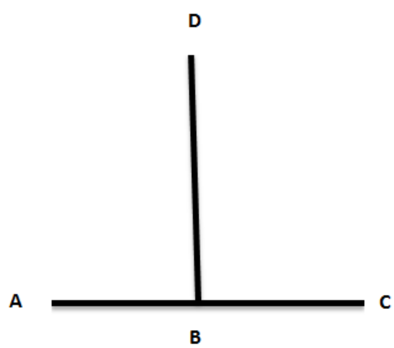
¿Por qué sucede esto?

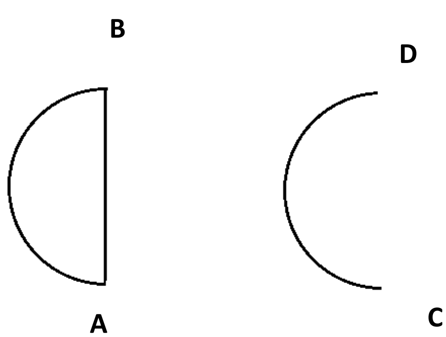
La respuesta es sencilla, el efecto que provocan las flechas hace ver que BC es más larga, pero ambas son del mismo tamaño. Esto se puede verificar cortando ambas recta en el punto B y superponiendo una sobre la otra.



Otras ilusiones: Estas ilusiones son idénticas a la anterior, basta con medir las rectas para darse cuenta que son iguales.







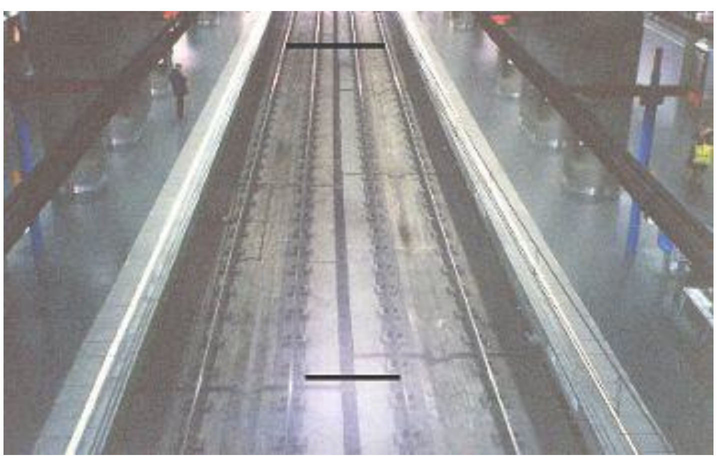
3.2. ACTIVIDAD: *La ilusión de Ponzo*:

La ilusión de Ponzo debe su nombre al psicólogo italiano Mario Ponzo quién la estudió a partir de 1912. Se basa en el efecto que producen dos rectas que convergen en otros elementos.

En este tipo de ilusión dos segmentos paralelos de igual longitud parecen diferentes pues el superior parece más largo al estar más cerca de ambas rectas.

La ilustración original que muestra la diferencia de longitud aparente. Una pequeña muestra de las diferencias que puede observarse mediante la modificación del entorno.

Ahora veremos otros ejemplos ilustrados.



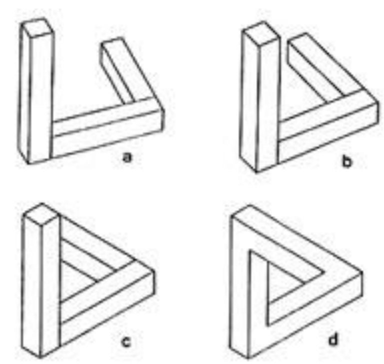
Aunque cueste asimilar, ambas rectas tienen la misma longitud, el efecto de las rectas que representan la profundidad hacen ver las rectas de diferentes tamaños. Estas ilusiones son más comunes de las que se cree y son de utilidad para reflejar la perspectiva ante la geometría, y como cambian las figuras cuando pasamos de un plano de 2D y uno de 3D.

3.3. ACTIVIDAD: *El triángulo imposible "tribar".*

El "tribar" es un triángulo imposible formado por tres barras. Fue introducido por Roger Penrose en 1956.

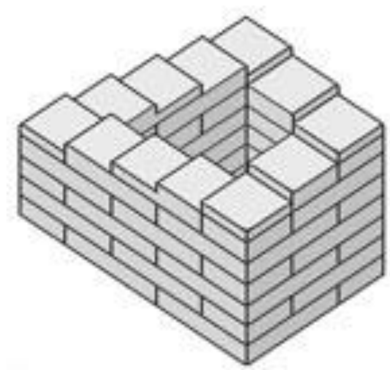
El triángulo imposible, como su nombre indica, no se puede construir pero, si se puede fotografiar otras figuras desde un ángulo adecuado, así se puede conseguir una figura que tenga su apariencia.

El proceso se explica en el esquema de la derecha, obra de Diego Uribe. Giramos una figura normal como la de (a) hasta lograr un punto de vista en el que los dos extremos coincidan, como en (c). Afinando o retocando los extremos se logra la apariencia de triángulo, (d).

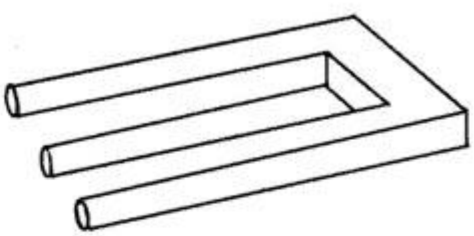


En 1956 **L.S. y Roger Penrose** publicaron el artículo: "Figuras imposibles: una clase especial de Ilusiones Visuales". En él introducían figuras como el "tribar" o la escalera sin fin. Además mostraban la foto de otra escalera que, por el ángulo escogido, tenía el aspecto de imposible.

A continuación presentamos la escalera sin fin, la cual por composición **no tiene fin.**



A su vez una de las figuras imposibles más conocidas esta la conocida como el tridente o el tenedor. En la cual se aprecia una figura compuesta de una base o tapa, y de la cual se desprenden tres pilares.



Capítulo IV:

Curiosidades.

En más de una oportunidad en el aula, el docente queda “libre” de enseñar un contenido para sus alumnos, por una parte, debido a la poca asistencia en el aula, encontrarse en finalidad del año escolar, días de media jornada, o para el simple deleite del profesor o de los alumnos que deseen intentar dar la solución a las siguientes curiosidades que se muestran a continuación.

Por una parte encontrara actividades que harían que cualquier ateo crea en el dios sublime y numérico. Y a su vez, aprenderán descifrar complejos textos encriptados (criptografía: Arte de escribir con clave secreta o de un modo enigmático).

1. El número de Dios

2. Un sencillo camino hacia el 1

3. Descubriendo un número de 3 cifra

4. Análisis de frecuencia de Al-Kindi

5. Desafíos matemáticos.

5.1 ¿Qué reloj escoger?

5.2 Una noche en el hotel

5.3 ¿Dónde está el otro peso?

5.4 La rana loca

1. *El número de dios 153.*

Para comenzar con la reseña de dicho número curioso, es preciso indagar un poco en la biblia, en san Juan, 21, donde se narra la hazaña de Simón Pedro, donde su red capturo 153 peces. Un número del cual a simple vista no presenta características, pero que en realidad está destinado a tener “cola”, así como el 3, 6, 10, 15… entre otros, el docente si gusta puede contar los asteriscos que se presentan a continuación:

```
* * * * * * * * * * * * * * * * *
 * * * * * * * * * * * * * * * *
  * * * * * * * * * * * * * * *
   * * * * * * * * * * * * * *
    * * * * * * * * * * * * *
     * * * * * * * * * * * *
      * * * * * * * * * * *
       * * * * * * * * * *
        * * * * * * * * *
         * * * * * * * *
          * * * * * * *
           * * * * * *
            * * * * *
             * * * *
              * * *
               * *
                *
```

No basta con afirmar que es un numero trino (haciendo referencia a que dios es trino: padre, hijo y espíritu), también se concibe a 153 como:

$$\begin{array}{r} 1! = 1 \\ 2! = 2 \\ 3! = 6 \\ 4! = 24 \\ \underline{+5! = 120} \\ 153 \end{array}$$

Ahora bien como se comentó de qué dios es trino, tomemos cualquier múltiplo de tres, por ejemplo 1.728, y vamos elevando a tres sus cifras y sumándolas una vez tras otra:

$1^3 + 7^3 + 2^3 + 8^3 = 864$
$8^3 + 6^3 + 4^3 = 792$
$7^3 + 9^3 + 2^3 = 1.080$
$1^3 + 0^3 + 8^3 + 0^3 = 513$
$5^3 + 1^3 + 3^3 = 153$

Esta forma de descomponer se puede realizar para cualquier número múltiplo de tres, y siempre terminara en 153, ¿milagro o matemática recreativa?

2. Un sencillo camino hacia el 1

Existen unas sencillas reglas aritméticas que permiten, desde la altura de cualquier número, regresar al 1, a la unidad, a la mónada indivisible. Es el único número que posee esta propiedad. El proceso consiste en tomar cualquier número entero y practicar con él tres sencillos pasos.

Como realizar la actividad:

- Si el número es par, dividirlo por 2
- Si el número es impar, multiplicarlo por 3 y añadirle 1
- Repetir el proceso hasta llegar a 1

Ejemplo:

A partir del 17 llegaremos al 1, a través de los pasos dispuestos más arriba.

$$(17 \cdot 3) + 1 = 52$$

$$52 \div 2 = 26$$

$$26 \div 2 = 13$$

$$(13 \cdot 3) + 1 = 40$$

$$40 \div 2 = 20$$

$$20 \div 2 = 10$$

$$10 \div 2 = 5$$

$$(5 \cdot 3) + 1 = 16$$

$$16 \div 2 = 8$$

$$8 \div 2 = 4$$

$$4 \div 2 = 2$$

$$2 \div 2 = \mathbf{1}$$ **¡LLEGAMOS AL 1!**

ENCONTRAMOS LA UNIDAD BUSCADA ☺

3. *Descubriendo un número de tres cifras.*

Un número desconocido consiste de tres cifras diferentes:
A, B, C

Lo escribiremos condicionalmente como ABC, teniendo presente que C es la unidad, B la decena y A la centena, ante todo $A \neq B \neq C \neq 0$, es necesario hallar este número sabiendo que:

$$\begin{array}{r}
A\,B\,C \cdot B\,A\,C \\
\,\,*\,C \\
\,\,A\,- \\
+\ \underline{*\,*\,*\,B\,-\,-} \\
\,\,*\,*\,*\,*
\end{array}$$

Los asteriscos denotan cifras desconocidas. Procedamos a encontrarlos:

Observamos que:

$$C \cdot A = A$$
$$C \cdot B = B$$

Para ello solo existen dos posibilidades, $C = 1 \cup C = 6$ pues:

$$6 \cdot 2 = 12$$
$$6 \cdot 4 = 24$$
$$6 \cdot 8 = 48$$

Descartamos $C = 1$ pues: $ABC \cdot C = *** C$ lo que nos da un número de 4 cifras. Entonces definimos que $C = 6$. Lo que nos lleva a que A, B pueden ser 2, 4 u 8.

Como el segundo número parcial es de 3 cifras, entonces $A = 2$ pues de lo contrario tendríamos un número de 4 cifras para $A = 4\ y\ A = 8$.

$$\begin{array}{r}
2\,B\,6 \cdot B\,2\,6 \\
\,\,*\,6 \\
\,\,2\,- \\
+\ \underline{*\,*\,*\,B\,-\,-} \\
\,\,*\,*\,*\,*
\end{array}$$

Para B nos queda $B = 4\,, B = 8$, si con $A = 2$, el último producto parcial consistiría de tres cifras y no de cuatro, por ende: $B = 8$.

Así tenemos:$A = 2,\ B = 8\ y\ C = 6$, el numero buscado es 286, y la multiplicación queda como:

$$
\begin{array}{r}
286 \cdot 826 \\
1\,716 \\
572\;- \\
+\;\;2\,288\;-\;- \\
\hline
236\,236
\end{array}
$$

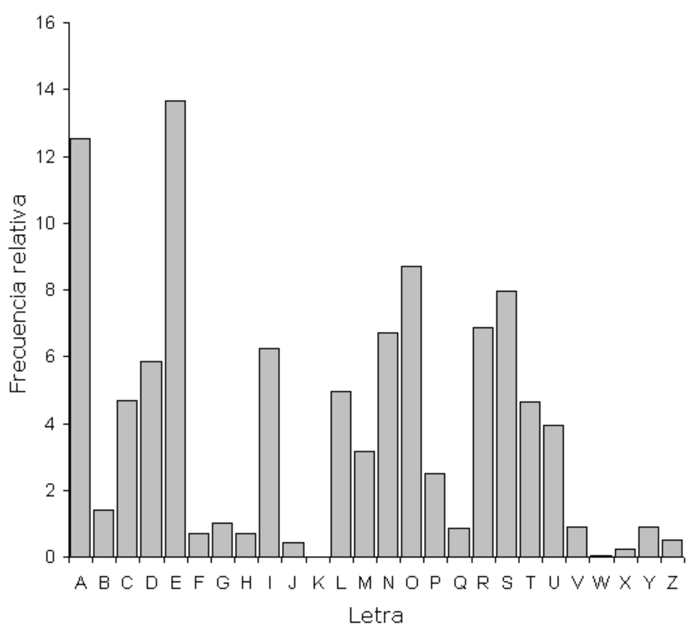
4. *Análisis de frecuencias de Al- Kindi:*

El estudio de la criptografía es complejo tanto para quienes desean crear métodos indescifrables, y su vez el estudio para crear métodos para descifrar los textos cifrados, he aquí un método que es útil para muchos criptoanálisis.

Es aquí donde el análisis de frecuencia entra en juego, pues la gran mayoría de los métodos de criptográficos constan de reemplazar una letra del alfabeto por otra o por un símbolo.

Como realizamos el análisis: consiste en comparar las letras de ocurrencia de un texto similar en cuanto a cantidad de letras y espacios que presenta, si es que el texto presenta espacio (el cifrado de Hill no presenta espacios).

Para el análisis se cuenta la cantidad de veces que se repite cada letra del texto a comparar, y se representa como porcentaje, como en la siguiente imagen.



En la imagen muestra el análisis de un texto en español, normal, en el cual se presenta la frecuencia de las letras, las cuales son iguales para casi cualquier texto en dicho idioma.

Hay algo que tienen en común muchos idiomas y lenguajes, es que estadísticamente, dependiendo cual sea este (español, inglés, portugués entre otros), ciertas letras del abecedario se repiten o tienen una frecuencia mayor que otras.

Es por ello que cuando realizamos el análisis de frecuencia en el texto encriptado, tiende a coincidir las letras con mayor frecuencia de ambos textos.

Como por ejemplo, analicemos la frase: “sghs sg ib awbw asbgoxs”

Vemos que si análisis de frecuencia nos dice:

s	g	b	w	a	x	O	h	I
5	3	3	2	2	1	1	1	1

Ahora analizamos con la tabla de frecuencia, la que nos dice que la letra con mayor frecuencia es la E, por ello deberían coincidir:

EghE Eg ib awbw aEbgoxE

Luego ponemos atención en la siguiente letra, la cual es la “G”, y al comparar con la frecuencia en español debería corresponder a la letra “A”, pero al reemplazar se nos forma la palabra EA, lo cual no tiene coherencia, tratamos con la siguiente que es “O”, pero se presenta el mismo problema (EO), por ello probamos para el siguiente que es “S”, con la cual formamos la palabra “ES”.

EShE ES ib awbw aEbSoxE

Se realiza este mismo procedimiento hasta completar el mensaje. Cabe destacar que el proceso es tedioso, pero efectivo.

En cada análisis hay que tener presente que las letras con mayor frecuencia (en español) serian: EAOLSNDRUITCPMYQBHGFVWJZXK.

5. Algunos desafíos matemáticos.

5.1. ACTIVIDAD: *¿Qué reloj escoger?*

Problema:

Supongamos que nos dan a elegir entre dos relojes, uno de los cuales se retrasa un minuto cada día, y otro que no marcha, ¿cuál escogeremos?

Solución:

El sentido común nos dice que preferiríamos el que se atrasa un minuto diario, pero si nos ponemos a pensar matemáticamente escogemos el que no marcha,

¿Por qué?

Po que una vez puesto en hora el reloj que se atrasa tendrá que atrasarse 12 horas, o sea 720 minutos, para que nos vuelva a dar la hora exacta y si solo pierde un minuto cada día, tardará 720 días en atrasarse los 720 minutos, mo estará en hora más que una vez cada dos años aproximadamente. Mientras que el que no marcha da la hora exacta dos veces diarias.

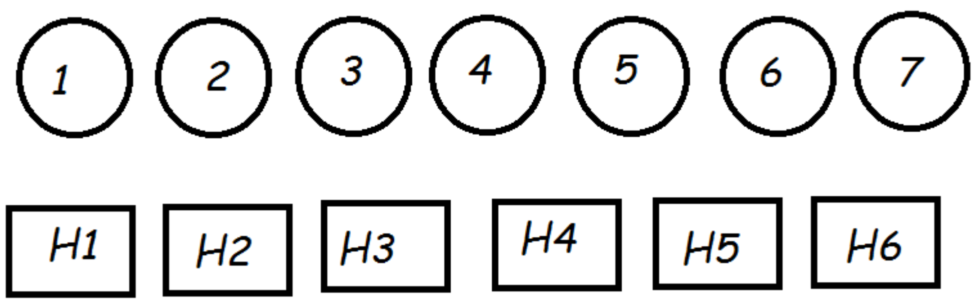
5.2. ACTIVIDAD: *¿Una noche en un hotel?*

Problema:

Llegó una vez a un hotel pequeño un grupo de siete hombres un poco quisquillosos, que pidieron que los acomodara para pasar la noche, **pero cada uno en una habitación**. El hotelero admitió que solo le quedaban seis, pero que creía poder alojarlos como deseaban.

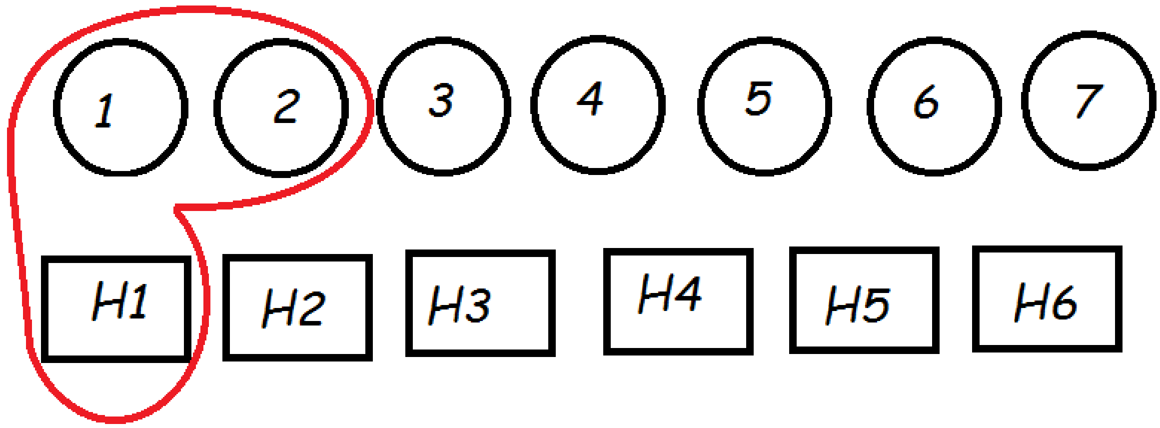
- Se llevó al primer hombre a la primera habitación y le pidió a uno de los otros que le hiciera compañía un momento.
- Llevo entonces al tercer hombre a la segunda habitación.
- Al cuarto hombre a la tercera habitación.
- Al quinto a la cuarta habitación.
- Al sexto a la quinta habitación.
- Volvió entonces a la primera habitación, llamo al séptimo hombre y lo condujo a la sexta habitación. ***¿QUÉ PASO?***

__Solución: __Realicemos un diagrama para ver que hizo el perspicaz hotelero.

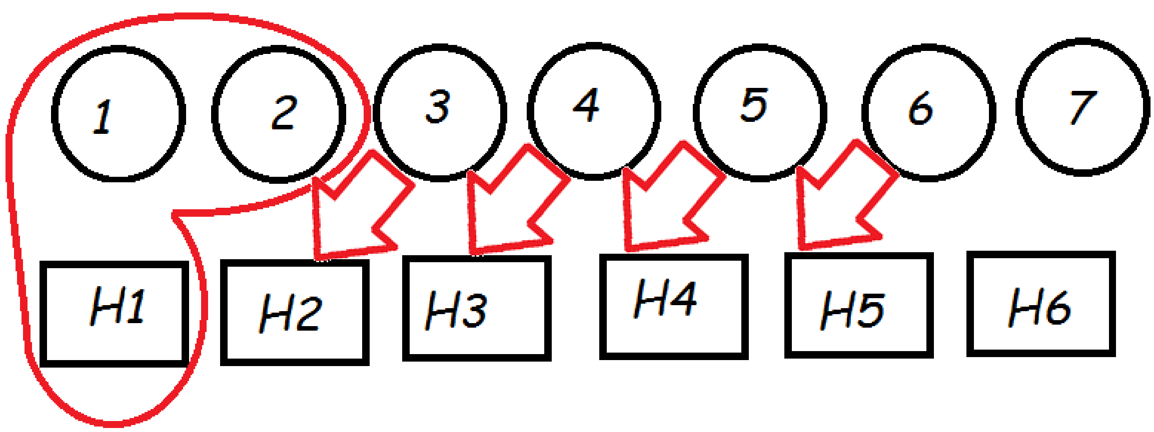


En donde los círculos representan a las personas, y los rectángulos las habitaciones.

Se llevó al primer hombre a la primera habitación y le pidió a uno de los otros que le hiciera compañía un momento.



Llevo entonces al tercer hombre a la segunda habitación. Al cuarto hombre a la tercera habitación. Al quinto a la cuarta habitación. Al sexto a la quinta habitación. Tenemos lo siguiente:



Es aquí donde queda en evidencia el truco, pues se nos dice**: "**Volvió entonces a la primera habitación, llamo al séptimo hombre y lo condujo a la sexta habitación", pues toma al segundo personaje como el séptimo.

5.3. ACTIVIDAD: *¿Dónde está el otro peso?*

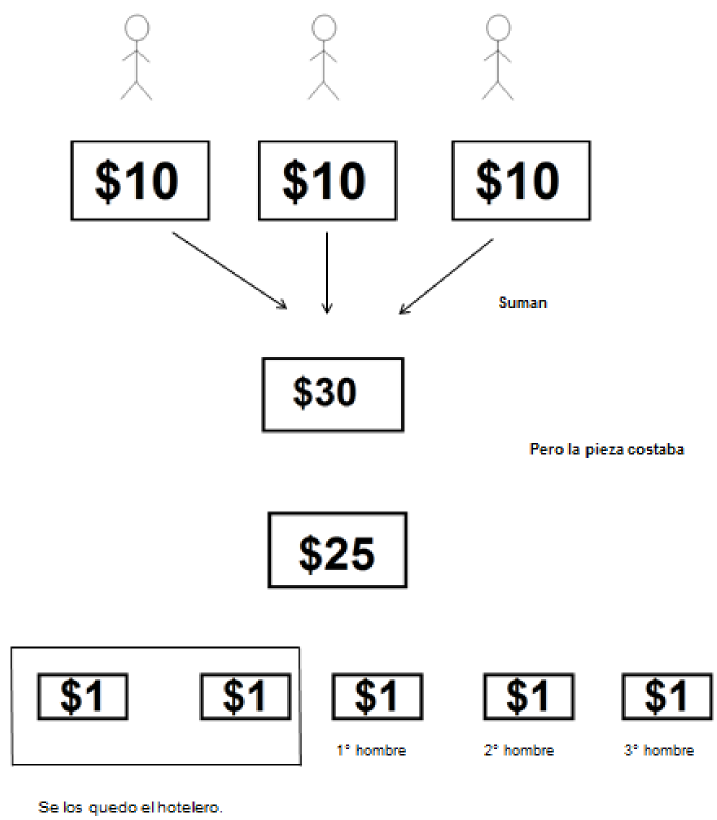
Problema:

Tres hombres firmaron el registro de un hotel y pidieron habitaciones que se comunicaran. Le ofrecieron tres que había disponibles y les dijeron que costaba **$30 pesos**; Subieron a verlas y, encontrándolas de su gusto, accedieron a quedársela y **le dieron cada uno un billete de $10 al muchacho que había subido a acompañarlos**. Bajó este a entregárselos al cajero, y al pasar por la oficina le dijo el gerente que había una equivocación y que las tres piezas **no costaban más que $25**. En consecuencia, le dieron al muchacho cinco billetes de $1 para que fuera a devolverlos.

Por el camino se le ocurrió que iba a ser difícil dividir $5 entre los tres hombres y que como de todos modos no sabían cuánto costaban las habitaciones, se contentarían con lo que les devolviera.

Se guardó para sí **dos billetes de $1** y entrego a cada hombre $1. De esta forma cada uno de ellos pago $9. Ahora $9 por tres son $27 más $2 son $29, pero los hombres habían entregado en un principio $30, ***¿DÓNDE ESTÁ EL OTRO PESO?***

Solución:



Según el problema se le devuelven $1 a cada hombre, por lo tanto, cada hombre pago un total de $9 cada uno, ahora sumando da un total de $27 que fue el total pagado por los hombres al hotelero, pero la pieza costo $25, por lo tanto, el hotelero se quedó con $2.

Comentario:

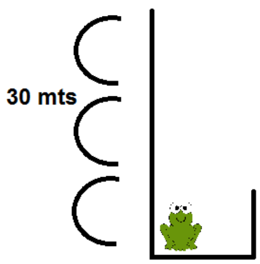
Los alumnos se confundirán dato inicial de $30, no tomando en cuenta que al devolver $1 a cada hombre dará un total de $27, olvidando que pagaron solo $25 por las tres piezas.

5.4. ACTIVIDAD: *La rana loca.*

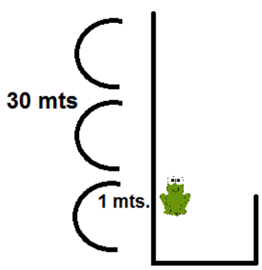
En el fondo de un pozo de 30 metros hay una rana. Cada salto sube 3 metros y se resbala perdiendo 2.

¿Cuánto saltos necesitara para salir?

Solución:



Primer salto: Dado que la rana al primer salto avanza 3 metros y resbala 2, entonces, podemos concluir que esta avanzo solo 1 metro.



Y así sucesivamente con 27 saltos esta avanzará 27 metros…

Con el salto que viene a continuación la rana podrá salir del pozo.

Por lo tanto esta necesitará 28 saltos para salir de él.

5.5. ACTIVIDAD: *Secreto del polo*.

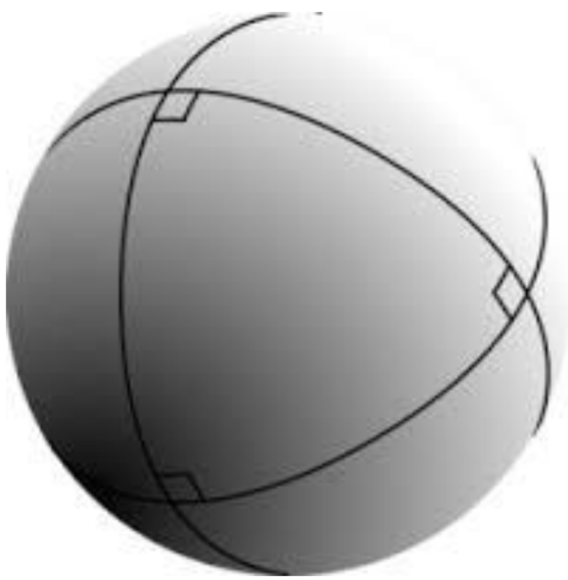
Problema:

¿Dónde puede un hombre salir de su casa:

- Andar 5 kilómetros en dirección al Sur
- 5 hacia al Oeste
- Otros 5 hacia el norte
- Encontrarse de nuevo en su propia puerta?

Solución:

A simple vista la lógica nos dice que es imposible realizar esta acción, pero basta con conocer una particularidad de las figuras planas en la esfera, pues en ella se puede construir un triángulo con todos sus lados rectos.



Ahora bien cuando centramos uno de sus vértices en el “polo norte” la orientación de su altura (su primer lado recto) nos lleva hacia el sur (5 km), al virar (90°) hacia el oeste y avanzar 5 km, recorremos la base del triángulo, y por ultimo al virar (90°) hacia el norte y avanzar 5 km, llegamos al lugar inicial.

Por lo tanto en el lugar donde se puede realizar todo lo anterior es el **polo norte.**

Bibliografía

Blum, R. (2008). Festival del Ingenio. Chile: Ril Mente.

DIAZ BARRIGA, F. (1998). Estrategias docentes para el aprendizaje significativo.

Font, V. (1994). Motivación y dificultades de aprendizaje de las matemáticas. Obtenido de revistasuma.es: http://revistasuma.es/IMG/pdf/17/010-016.pdf

Guzmán, M. d. (1984). Juegos matemáticos en la Enseñanza. A Good Mathematical joke is better mathematics than a dozen mediocre papers. Santa cruz de Tenerife: sociedad canaria de profesores de matemáticas Isaac Newton.

Northrop, E. P. (1968). Paradojas matemáticas. México: Unión Tipográfica Editorial Hispano Americana.

Voldosina, M. (2008). Acertijos de Pensamiento Lateral. Santiago, Chile: Ril de Mente.

Chevallard, Y. (2000). Estudiar Matemáticas el eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje. Barcelona, I.C.E. Universitat Barcelona, Editorial Horsori.

Artal L. & Sales J. (2011). HIPOTECAS Y ECUACIONES las matemáticas de la economía. España: EDITEC, RBA Coleccionables, S.A.

Navarro J. (2011). LA VIDA SECRETA DE LOS NUMEROS temas curiosos de la matemática. España: EDITEC, RBA Coleccionables, S.A.

Gómez J. (2011). MATEMATICAS, ESPIAS Y PIRATAS INFORMATICOS codificación y criptografía. España: EDITEC, RBA Coleccionables, S.A.

Corbalan F. (2011). LA PROPORCION ÁUREA el lenguaje matemático de la belleza. España: EDITEC, RBA Coleccionables, S.A.